Первое задание БМСО

Ярослав Аверьянов

Сентябрь 2015

1 Первая задача

$p(x) \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \qquad q(x) \sim N(\mu_2, \Sigma_2) \qquad x \in \mathbf{R^n}$

$D_{pq}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) ln(\frac{p(x)}{q(x)})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(det\Sigma_1)^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1))ln(\frac{(det\Sigma_2)^{1/2}}{(det\Sigma_1)^{1/2}})dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{exp(-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1))}{(2\pi)^{n/2}(det\Sigma_1)^{1/2}}[\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) - \frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)]dx = ln(\frac{det\Sigma_2}{det\Sigma_1})^{1/2} + \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)[\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T(\Sigma_2^{-1}-\Sigma_1^{-1})(x-\mu_1) + (\mu_1-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_1) + \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(\mu_1-\mu_2)]dx$

Посчитаем эти интегралы:

1)$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)((\mu_1-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_1))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(det\Sigma_1)^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_1))dx =$(Замена $x-\mu_1 = \Sigma_1^{\frac{1}{2}}y$) $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(det\Sigma_1)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty}(\mu_1-\mu_2)^T(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{\frac{1}{2}})|det\Sigma_1^{\frac{1}{2}}|exp(-\frac{1}{2}y^Ty)dy = 0$

2)$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)[\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(\mu_1-\mu_2)] = \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)\Sigma_2^{-1}(\mu_1-\mu_2)$; 3)$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)[\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T(\Sigma_2^{-1}-\Sigma_1-1)(x-\mu_1)]dx =$(Замена $x-\mu_1 = \Sigma_1^{\frac{1}{2}}y$)$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\frac{1}{2}y^Ty)\frac{1}{2}y^T(\Sigma_1^{\frac{1}{2}}(\Sigma_2^{-1}-\Sigma_1-1)\Sigma_1^{\frac{1}{2}})y$

В $y^T(\Sigma_1^{1/2}(\Sigma_2^{-1}-\Sigma_1^{-1})\Sigma_1^{1/2})y$ есть члены $a_{ij}y_iy_j(i \neq j)$ и $a_{jj}y_j^2$.

Интеграл с $a_{ij}y_iy_j = 0$, т.к. подынтегральная функция - нечетная отн-но y_i,

а интеграл с $a_{ii}y_i^2 = \frac{1}{2}a_{ii}$.

$\rightarrow 3) = \frac{1}{2}tr(\Sigma_1^{\frac{1}{2}}(\Sigma_2^{-1}-\Sigma_1^{-1})\Sigma_1^{1/2}) = \frac{1}{2}tr(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1 - E_n)$

$\rightarrow D_{pq}(x) = \frac{1}{2}tr(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1 - E_n) + ln(\frac{det\Sigma_2}{det\Sigma_1})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(\mu_1-\mu_2)$.

2 Вторая задача

Множество распределений Пуассона - экспоненциальный класс
$p(x|\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \frac{exp(-\lambda + xln\lambda)}{x!}$;
$p(x|\lambda)$ имеет вид $exp[C(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^{p} t_i(x)A_i(\lambda)]h(x)$
Где $C(\lambda) = -\lambda$ и $p = 1, t_1(x) = x, A_1(\lambda) = ln\lambda$.

3 Третья задача

Пример неэкспоненциального семейства распределений, нетривиально зависящего от параметра, с одномерной достаточной статистикой.

В качестве примера возьмем равномерное распределение:

$$p(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, x \in [0, \theta] \\ 0, otherwise \end{cases}$$

Достаточная одномерная статистика - $X_{(1)}$ или $X_{(n)}$.

4 Четвертая задача

Задана выбока НОР СВ $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Точки X_i распределены равномерно с параметрами $\theta = (\theta_1, \theta_2), \theta_2 > \theta_1$, т.е.

$$p(x|\theta) = \begin{cases} 0, & x < \theta_1, \\ \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \le x \le \theta_2, \\ 0, & x > \theta_2 \end{cases}$$

Покажем, что СВ $y = \frac{x_{(r)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}, 1 \le r \le n$ не зависит от $(x_{(1)}, x_{(n)})$, где $x_{(i)}$ - iая порядковая статистика.

$p(x|\theta) = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}\mathbf{I}[x_{(1)} \ge \theta_1]\mathbf{I}[x_{(n)} \le \theta_2]$

При $x_{(1)} \ge \phi_1$ и $x_{(n)} \le \phi_2$ $(x_1, ..., x_n)$ распределен на $[\phi_1, \phi_2]^n$. Тогда $(y_1, ..., y_n)$, где $y_k = \frac{x_{(k)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}, 1 \le k \le n$ равномерно распределен на $[0, 1]^n \to$ не зависит от $(x_{(1)}, x_{(n)})$.

5 Пятая задача

Плотность Коши:

$p(x|\theta) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$

а) Информация Фишера:

$I(\theta) = -\mathbf{E}_\theta[\frac{\partial^2 log f(x;\theta)}{\partial\theta^2}] = \mathbf{E}_\theta[\frac{\partial^2 log(1+(x-\theta)^2)}{\partial\theta^2}] = 2\mathbf{E}_\theta[\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(x-\theta)}{1+(x-\theta)^2}] = 2\mathbf{E}_\theta[\frac{1}{1+(x-\theta)^2} - \frac{2(x-\theta)^2}{[1+(x-\theta)^2]^2}] = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbf{R}}[\frac{1}{[1+(x-\theta)^2]^2} - \frac{2(x-\theta)^2}{[1+(x-\theta)^2]^3}]dx = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbf{R}}[\frac{1}{[1+x^2]^2} - \frac{2x^2}{[1+x^2]^3}]dx = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbf{R}}[\frac{1}{[1+x^2]^2} - \frac{2}{[1+x^2]^2} + \frac{2}{[1+x^2]^3}]dx = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbf{R}}[-\frac{1}{[1+x^2]^2} + \frac{2}{[1+x^2]^3}]dx$

$I_k = \int_{\mathbf{R}}\frac{1}{[1+x^2]^k}dx = \int_{\mathbf{R}}\frac{1+x^2}{[1+x^2]^{k+1}}dx = I_{k+1} + \int_{\mathbf{R}}\frac{2kx}{[1+x^2]^{k+1}}\frac{x}{2k}dx = I_{k+1} + \frac{1}{2k}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{[1+x^2]^k}dx = I_{k+1} + \frac{1}{2k}I_k$

$I_1 = \pi \qquad I_{k+1} = \frac{2k-1}{2k}I_k$

$\rightarrow I(\theta) = \frac{2}{\pi}[-I_2 + 2I_3] = \frac{2}{\pi}[-\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}] = \frac{1}{2}$

Проблема оценки медианы в том, что для нее не существует мат.ожидания и дисперсии.

б) Пусть $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ - оценка медианы.

Найдем правдоподобие и его производные:

$$l(\theta) = -log(\pi) - log(1 + (x-\theta)^2)$$
$$l^{'}(\theta) = \frac{2(x-\theta)}{1+(x-\theta)^2}$$
$$l^{''}(\theta) = -2\frac{1-(x-\theta)^2}{(1+(x-\theta)^2)^2}$$

Возьмем следующую численную реализацию для нахождения:

$\hat{\theta} = \tilde{M}_n - (l_n^{''}(\tilde{M}_n))^{-1} l_n^{'}(\tilde{M}_n)$

Где $\tilde{M}_n$ - $p = \frac{1}{2}$ квантиль распределения Коши.

$$\hat{\theta} = \tilde{M}_n + 4 \cdot (\sum_{i=1}^{n}\frac{1-(x_i-\tilde{M}_n)^2}{(1+(x_i-\tilde{M}_n)^2)^2})^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\tilde{M}_n)}{1+(x_i-\tilde{M}_n)^2};$$

в)Введем обозначение:

$I_n = \int \frac{\partial^2 log(p(\theta|x))}{\partial\theta^2} p(\theta|x)dx$ - информация Фишера.

Уже было подсчитано, что $I_1 = \frac{1}{2}$ и известно, что $I_n = n \cdot I_1$

$\rightarrow$ нижняя оценка Рао-Крамера (для медианы):

$$var(\hat{\theta}) \geq [n \cdot I_1]^{-1} = \frac{2}{n}.$$