Четвертое задание по курсу «Байесовские методы статистического оценивания»

10 октября 2015 г.

1. (1 балл) Плотность случайной величины с центрированным распределением Коши при $y \in \mathbf{R}$ равна

$$p(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{c(1 + y^2/c^2)}, \;\; c > 0.$$

Привести пример преобразования $\varphi(x), \;\; x \in [0, 1]$ такого, что $\varphi(X)$ имеет распределение Коши при случайном $X \sim U[0, 1]$. Единственное ли это преобразование?

2. Рассматривается полуэллипсоид в трехмерном пространстве, заданный параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sqrt{2} \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases},$$

$\theta \in [0, \pi/2], \;\; \varphi \in [0, 2\pi]$.

Используя метод выборки с отклонением (http://en.wikipedia.org/wiki/Rejection_sampling) и равномерное на $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ распределение в качестве вспомогательного распределения

а) (1 балл) написать алгоритм генерации случайных равномерных (по площади) точек с поверхности;

б) (2 балла) провести численный эксперимент: построить рассматриваемую поверхность; построить большую выборку, равномерно по площади распределенную на эллипсоиде; построить трехмерный образ равномерной в пространстве параметров большой выборки. Графики строить с равными масштабами по всем осям. Сделать вывод.

3. Задано дискретное распределение на $x_0, x_1, \ldots, x_S$, такое что $p(x_i) = p_i > 0, i = \overline{0, S}$, и вектор $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_S)$ полностью задает такое распределение. Мы оцениваем математическое ожидание I функции $f(\mathbf{x})$ по распределению, заданному вектором $\mathbf{p}$:

$$I = \sum_{i=0}^{S} f(x_i)p(x_i),$$

причем $f(x_i)$ определена и непостоянна на $x_0, \dots, x_S$. Для оценки мы используем идею Монте-Карло:

$$\hat{I} \approx \frac{1}{n}\sum_{\tau=1}^{n} f(x^{(\tau)}), \tag{1}$$

с $x^{(\tau)}$ из распределения, заданного вектором $\mathbf{p}$.

Рассмотрим семейство алгоритмов семплирования, для которых генерация новой точки $x^{(\tau+1)}$ на шаге $\tau+1$ имеет вид:

- Сгенерировать точку x^* из опорного распределения $q(x|x^{(\tau)})$.
- Вычислить вероятность принятия точки x^*:

  $$A(x^*, x^{(\tau)}) = \frac{s(x^*, x^{(\tau)})}{1 + \frac{p(x^{(\tau)})q(x^*|x^{(\tau)})}{p(x^*)q(x^{(\tau)}|x^*)}}.$$

  Здесь $s(x^*, x^{(\tau)})$ — функция симметричная по x^* и $x^{(\tau)}$, выбранная так, что вероятность принять точку $0 \le A(x^*, x^{(\tau)}) \le 1$.
- Сгенерировать случайную величину u из распределения Бернулли с $p(u=1) = A(x^*, x^{(\tau)})$. Если $u = 1$, то $x^{(\tau+1)} = x^*$, если $u = 0$, то $x^{(\tau+1)} = x^{(\tau)}$.

Таким образом, алгоритм из семейства и матрица переходных вероятностей для Марковской цепи P определяются матрицами Q и A, где $Q = \{q(x_i|x_j)\}_{i,j=0}^{S}$ и $A = \{A(x_i, x_j)\}_{i,j=0}^{S}$.

Задачи:

a. (1 балл) Привести $s(x^*, x^{(\tau)})$ такую, что полученный алгоритм будет алгоритмом Метрополиса-Хастингса.

b. (2 балла) Асимптотическая дисперсия оценки $\hat{I}$ для алгоритмов семплирования из такого семейства имеет вид:

$$V = \lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{\tau=1}^{n} f(x^{(\tau)})\right) = \mathbf{f}(2BZ - B - BC)\mathbf{f}^T, \tag{2}$$

где

$$
\begin{aligned}
&C = \xi^T \mathbf{p}, \xi = (1, 1, \dots, 1), \\
&Z = (I - (P - C))^{-1}, \\
&B = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_S, \end{pmatrix}, \\
&\mathbf{f} = (f(x_0), \dots, f(x_S)).
\end{aligned}
$$

Пусть неприводимые[1] матрицы перехода P_1 и P_2 для двух различных цепей Маркова удовлетворяют условию детального равновесия

$$p^*(x_i)q(x_j|x_i) = p^*(x_j)q(x_i|x_j), i, j = \overline{1, n}$$

для некоторого распределения $p^*(x)$.

Доказать, что если недиагональные элементы матрицы P_2 меньше либо равны недиагональным элементам матрицы P_1, то асимптотическая дисперсия (2) оценки (1) для P_1 не больше, чем дисперсия такой оценки для P_2.

c. (1 балл) Доказать, что для заданной матрицы Q наименьшая асимптотическая дисперсия V в семействе, которое определено выше, достигается для симметричной функции $s(x^*, x^{(\tau)})$ из алгоритма Метрополиса-Хастингса.

[1] Перестановкой строк их нельзя привести к блочно-диагональному виду, http://mathworld.wolfram.com/IrreducibleMatrix.html