Первое задание по курсу БМСО

Бурнаев Е., Зайцев А., Янович Ю.

1. (1 балл) Получить расстояние Кульбака-Лейблера между двумя многомерными нормальными распределениями $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$ и $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$.

2. (1 балл) Показать, что множество распределений Пуассона с параметром $\lambda > 0$ относится к экспоненциальному классу.

3. (2 балла) Привести пример неэкспоненциального семейства распределений, нетривиально зависящего от параметра, с одномерной достаточной статистикой.

4. (2 балла) Пусть задана выборка независимых одинаково распределенных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ случайных величин. Точки x_i распределены равномерно с параметрами $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_2 > \theta_1$, то есть

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 0, & x < \theta_1, \\ \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \leq x \leq \theta_2, \\ 0, & x > \theta_2. \end{cases}$$

Показать, что случайная величина $y = \frac{x_{(r)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}, 1 \leq r \leq n$ не зависит от $(x_{(1)}, x_{(n)})$. Здесь $x_{(i)}$ — i-ая порядковая статистика.

5. Плотность распределения Коши имеет вид

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)}.$$

- (1 балл) Подсчитать информацию Фишера $I(\theta)$ для такого распределения. Какая проблема у оценки $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ медианы распределения θ?
- (2 балла) Для этого распределения нельзя явно вычислить оценку максимального правдоподобия. Поэтому нужно использовать численное моделирование. Необходимо построить процедуру для получения оценки максимального правдоподобия для медианы распределения Коши.
- (2 балла) Выписать нижнюю оценку Рао-Крамера. Оценить численно дисперсию получаемой оценки максимального правдоподобия и сравнить с нижней оценкой Рао-Крамера.