Шестое задание БМСО

Ярослав Аверьянов

Декабрь 2015

1 Первая задача

Рассматривается алгоритм сэмплирования Гиббса из распределения $p(x_1, ..., x_n)$.

а) Покажем, что $p^*(x_i)q(x_i|x_j) = p^*(x_j)q(x_i|x_j); i, j = 1, ..., n$

Здесь $q(x^{k+1}, x^k)$ - распределение значений на $k+1$ шаге при заданном значении на k шаге.

Далее будет использоваться обозначение $\theta = x$.(векторно)

Тогда для сэмлирования Гиббса функцию переходных вероятностей нужно взять следующим образом:

$J_{j,t}^{Gibbs}(\theta^t|\theta^{t-1}) = p(\theta_j^t|\theta_{-j}^{t-1})$, если $\theta_{-j}^t = \theta_{-j}^{t-1}$.

Далее рассмотрим следующий коэффицент:

$r = \frac{\frac{p(\theta^t)}{J_{j,t}^{Gibbs}(\theta^t|\theta^{t-1})}}{\frac{p(\theta^{t-1})}{J_{j,t}^{Gibbs}(\theta^{t-1}|\theta^t)}} = \frac{\frac{p(\theta^t)}{p(\theta_j^t|\theta_{-j}^{t-1})}}{\frac{p(\theta^{t-1})}{p(\theta_j^{t-1}|\theta_{-j}^{t-1})}} = \frac{p(\theta_{-j}^{t-1})}{p(\theta_{-j}^{t-1})} = 1.$

б) Построим алгоритм Метрополиса-Хастингса эквивалентный такому сэмплированию Гиббса:

1.Берем $\theta^0 : p(\theta^0) > 0$.

2.Для $t = 1, ..., T$ сэмплируем θ^* из распределения $J_t^{Gibbs}(\theta^*|\theta^{t-1})$, которое было определено в пункте а). Присваиваем $\theta^t = \theta^*$.

2 Вторая задача

Пусть есть $p(x_1, x_2) = Cexp(-x_1^2 x_2^2)$;

Будем исходить из сэмплирования Гиббса:

1.Берем $x^{(0)} : p(x^{(0)}) > 0$;

2.Повторяем $t = 1, 2, ..., T$:

а)$x_1^{(t)} \sim p(x_1|x_2^{(t-1)})$;

б)$x_2^{(t)} \sim p(x_2|x_1^{(t)})$;

В результате $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), ..., (x_1^{(T)}, x_2^{(T)})$ из $p(x_1, x_2)$;

Здесь используется:

$p(x_1|x_2) \sim exp(-x_1^2 x_2^2) : \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-x_1^2 x_2^2) dx_1 = 1 \to p(x_1|x_2) \sim N(0, \sigma^2), \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}x_2}$;

$p(x_2|x_1) \sim exp(-x_1^2 x_2^2) : \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-x_1^2 x_2^2) dx_2 = 1 \to p(x_2|x_1) \sim N(0, \sigma^2), \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}x_1}$;

Численная реализация проведена в python notebook.

$N = 300, x^0 = 0.5, y^0 = 0.5$

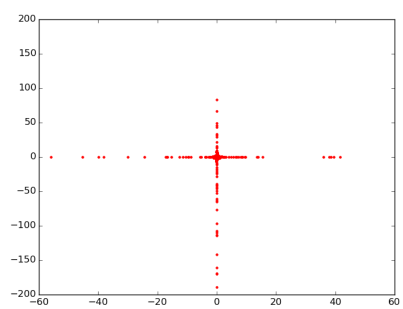

Рис. 1: Gibbs sampling for $p(x_1, x_2) \sim exp(-x_1^2 x_2^2)$

3 Третья задача

$X_1 \sim Gamma(\alpha_1) \quad X_2 \sim Gamma(\alpha_2)$

X_1 и X_2 - независимые СВ.

Необходимо показать, что $X_1 + X_2$ и $\frac{X_1}{X_1+X_2}$ - независимые СВ

Пусть $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2} = g_1(X_1, X_2), \qquad Y_2 = X_1 + X_2 = g_2(X_1, X_2)$

$X_1 = Y_1Y_2$

$X_2 = Y_2(1 - Y_1)$

Якобиан замены: $J = det((X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2)) = Y_2;$

$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} exp(-(x_1 + x_2))$, при $x_1, x_2 > 0$ - совместное распределение (X_1, X_2)

Найдем совместное распределение Y_1 и Y_2:

$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2))|J| = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(y_1y_2)^{\alpha_1-1}(y_2(1-y_1))^{\alpha_2-1}exp(-y_2)|y_2|$, если $0 < y_1 < 1, y_2 > 0$

$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty (y_1y_2)^{\alpha_1-1}(y_2(1-y_1))^{\alpha_2-1}e^{-y_2}|y_2|dy_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty y_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-y_2}y_1^{\alpha_1-1}(1-y_1)^{\alpha_2-1}dy_2 = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}y_1^{\alpha_1-1}(1-y_1)^{\alpha_2-1}, 0 < y_1 < 1$

Также $X_1 + X_2 \sim Gamma(\alpha_1 + \alpha_2) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}x^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-x}, \quad x \geq 0$

Посмотрим выполнение равенства $p(y_1, y_2) = p(y_1)p(y_2)$:

$f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}y_1^{\alpha_1-1}(1-y_1)^{\alpha_2-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}y_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-y_2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}y_1^{\alpha_1-1}y_2\alpha_1 - 1y_2^{\alpha_2}(1-y_1)^{\alpha_2-1}e^{-y_2}$.

Равенство выполняется => верно.

4 Четвертая задача

В урне c различных цветов и $\alpha(i) > 0$ - шаров i цвета.

k шаг - достается цвет x_k, в урну кидается 2 шара цвета x_k => выборка $(X_1, ..., X_n)$.

Показать, что эти СВ - перестановочны.

Рассмотрим следующие вероятности:

$\mathbf{P}[X_1 = j] = \frac{\alpha(j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha(i)}$

$\mathbf{P}[X_2 = j|X_1] = \frac{\alpha(j)+[X_1=j]}{\alpha(\mathbf{X})+1}$

———————————————————————

$\mathbf{P}[X_1, X_2, ..., X_n] = \mathbf{P}[X_1]\mathbf{P}[X_2|X_1]\mathbf{P}[X_3|X_2]...\mathbf{P}[X_n|X_{n-1}] = \frac{\alpha(x_1)}{\alpha(\mathbf{X})}\frac{\alpha(x_2)+[X_1=x_2]}{\alpha(\mathbf{X})+1}....\frac{\alpha(x_n)+\sum\limits_{i=1}^{n-1}[X_i=x_n]}{\alpha(\mathbf{X})+(n-1)}$

Т.к. полная вероятность предствлена в виде, который указан сверху, то при любой перестановке $(i_1, ..., i_n)$ верно $\mathbf{P}[X_1, X_2, ..., X_n] = \mathbf{P}[X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_n}]$.