Четвертое задание по БМСО

Ярослав Аверьянов

Ноябрь 2015

1 Первая задача

Плотность случайной величины с центрированным распределением Коши при $y \in \mathbf{R}$:

$$p(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{c(1+\frac{y^2}{c^2})}, c > 0$$

Приведем пример преобразования $\phi(x), x \in [0,1] : \phi(X)$ - СВ с распределением Коши при $X \sim \mathbf{U}[0,1]$.

Возьмем

$$\phi(X) = C \cdot tg(\pi(X - \tfrac{1}{2}))$$

$p_\phi(z) = \frac{d}{dz}F_\phi(z) = \frac{d}{dz}\mathbf{P}[C \cdot tg(\pi(X-\frac{1}{2})) \leq z] = \frac{d}{dz}\mathbf{P}[X \leq \frac{1}{\pi}arctg(\frac{z}{c}) + \frac{1}{2}] = \frac{d}{dz}\int_0^{\frac{1}{\pi}arctg\frac{z}{c}+\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dz}(arctg(\frac{z}{c}) + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi c(1+(\frac{z}{c})^2)}$.

Преобразование $\phi(X)$ - не единственное, т.к. $1 - X \sim U[0,1] \to \phi(X) = \phi(1-X)$.

2 Вторая задача

Рассматривается полуэллипсоид в $3D$, заданный параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}sin(\theta)cos(\phi), \\ y = \sqrt{2}sin(\theta)sin(\phi), \\ z = cos(\theta) \end{cases}$$

$\theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi]$.

Используем метод rejection sampling и равномерное на $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ Площадь заданного полуэллипсоида Ω задается как:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi,$$

Коэффиценты:

$E = (x'_{\theta})^2 + (y'_{\theta})^2 + (z'_{\theta})^2$

$F = x'_{\theta}x'_{\phi} + y'_{\theta}y'_{\phi} + z'_{\theta}z'_{\phi}$

$G = (x'_{\phi})^2 + (y'_{\phi})^2 + (z'_{\phi})^2$

Плотность равномерного распределения на поверхности полуэллипсоида:

$$p(\theta, \phi) = \frac{1}{S}\sqrt{EG - F^2},$$

Здесь $EG - F^2 = (2sin^2(\theta)cos^2(\phi) + 3sin^2(\theta)sin^2(\phi))(2cos^2(\theta)sin^2(\phi) + 3cos^2(\theta)cos^2(\phi) + sin^2(\theta)) - sin^2(\theta)sin^2(\phi)cos^2(\theta)cos^2(\phi)$

$$\sqrt{EG - F^2} = Sp(\theta, \phi) \leq \sqrt{3} \text{ на } [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$$

Применим алгоритм rejection sampling:

1.Сэмплируем $\theta \sim \mathbf{U}[0, \pi/2], \phi \sim \mathbf{U}[0, 2\pi]$.

2.Сэмлируем $\gamma \sim \mathbf{U}[0, \sqrt{3}]$.

3.Вычисляем $Sp(\theta, \phi)$:

а)Если $\gamma \leq Sp(\theta, \phi), \rightarrow$ принимаем (θ, ϕ).

б)Если $\gamma > Sp(\theta, \phi), \rightarrow$ отклоняем (θ, ϕ).

Получились следующие графики:

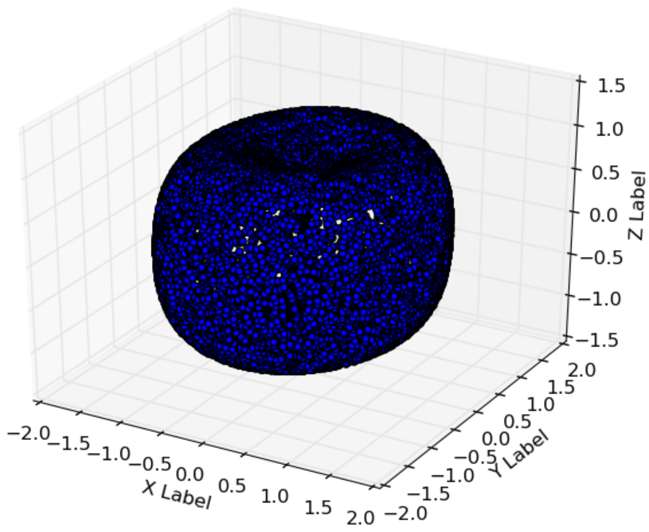

Рис. 1: Our surface

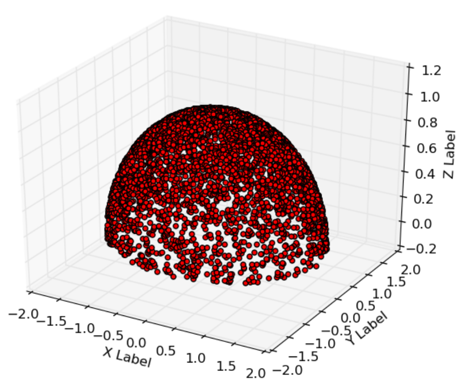

Рис. 2: 5000 точек

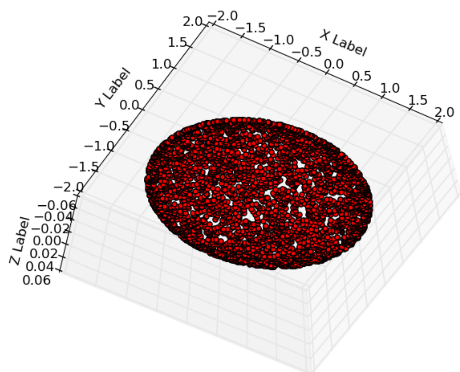

Рис. 3: 5000 точек, вид сверху

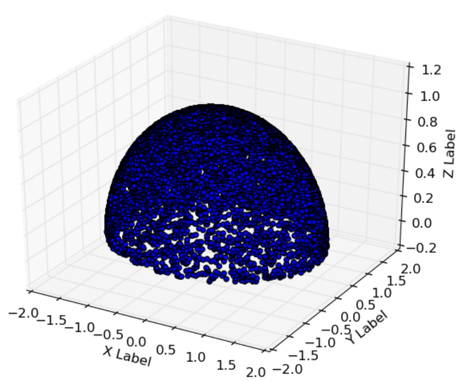

Рис. 4: 10000 точек

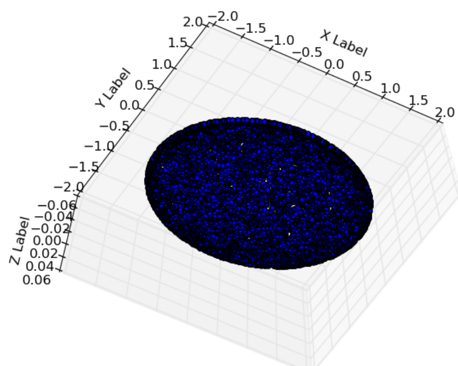

Рис. 5: 10000 точек, вид сверху