Второе задание по БМСО

Ярослав Аверьянов

Октябрь 2015

1 Первая задача

Последовательность НОР СВ $\sim U[0, \theta]$. Априорное распределение θ - распределение Парето.

$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \theta_m, \\ 1 - (\frac{\theta_m}{\theta})^k, & \theta \geq \theta_m, \end{cases}$

Где $\theta_m > 0$ и $k \in \mathbf{N}$ - известные параметры.

Доказать, что апостериорное распределение параметра - Парето-распределение, найти его параметры.

$p(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \theta_m, \\ \frac{k\theta_m^k}{\theta^{k+1}}, & \theta \geq \theta_m, \end{cases}$

Правдоподобие для выборки $\mathbf{X}$ может быть записано так:

$L(x, \theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbf{I}[x_{(n)} \leq \theta] \propto \frac{1}{\theta^n}(n-1)x_{(n)}^{n-1}\mathbf{I}[x_{(n)} \leq \theta] \propto Pareto(n-1, x_{(n)})$.

Теперь рассмотрим априорное распределение параметра θ:

$p(x, \theta) \propto \frac{1}{\theta^n}\mathbf{I}[x_{(n)} \leq \theta]\frac{k\theta_m^k}{\theta^{k+1}} \propto \frac{1}{\theta^{n+k+1}}\mathbf{I}[max(x_{(n)}, \theta_m) \leq \theta] \propto Pareto(n+k, max(x_{(n)}, \theta_m))$.

Ч.т.д.

2 Вторая задача

Наблюдается выборка $\mathbf{D} = [x_i]_{i=1}^N$ НОР СВ. Пусть правдоподобие $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^p$ - из экспоненциального семейства:

$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = h_l(\mathbf{x}) exp(\boldsymbol{\theta}^T t(\mathbf{x}) - a_l(\boldsymbol{\theta}))$

Априорное распределение:

$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda_1}, \lambda_2) = h_p(\boldsymbol{\theta}) exp(\boldsymbol{\lambda_1}^T \boldsymbol{\theta} - \lambda_2 a_l(\boldsymbol{\theta}) - a_p(\boldsymbol{\lambda_1}, \lambda_2))$

Показать, что такое семейство априорных распределений - сопряженное относительно правдоподобия. Найти параметры апостериорного распределения.

Вычислим апостериорное распределение $\boldsymbol{\theta}$:

$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto \pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda_1}, \lambda_2) \prod_{i=1}^{N} p(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\theta}) = h_p(\boldsymbol{\theta}) exp(\boldsymbol{\lambda_1}^T \boldsymbol{\theta} - \lambda_2 a_l(\boldsymbol{\theta}) - a_p(\boldsymbol{\lambda_1}, \lambda_2))(\prod_{i=1}^{N} h_l(\mathbf{x}_i)) exp(\boldsymbol{\theta}^T \sum\limits_{i=1}^{N} t(\mathbf{x}_i) - N a_l(\boldsymbol{\theta})) \propto h_p(\boldsymbol{\theta}) exp((\boldsymbol{\lambda_1} + \sum\limits_{i=1}^{N} t(\mathbf{x}_i))^T \boldsymbol{\theta} - (\lambda_2 + N) a_l(\boldsymbol{\theta}))$

В итоге апостериорное и априорное распределение $\propto \pi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda_1'}, \lambda_2')$, где $\boldsymbol{\lambda_1'} = \boldsymbol{\lambda_1} + \sum\limits_{i=1}^{N} t(\mathbf{x}_i), \lambda_2' = \lambda_2 + N$.

3 Третья задача

$\pi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \le \theta \le 1, \\ 0, & , \end{cases}$

$\theta' = log\frac{\theta}{1-\theta}$ - оцениваемый параметр.

а) Покажем, что такое преобразование параметра есть взаимнооднозначное отображение из $(0, 1)$ в $\mathbf{R}$.

$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} > 0$ и $log\frac{\theta}{1-\theta}$ - непрерывная фунция от $\theta \rightarrow$, по теореме об обратной функции, существует функция, обратная к $log\frac{\theta}{1-\theta}$, причем непрерывная и строго возрастающая $\rightarrow$ преобразование $\theta' = log\frac{\theta}{1-\theta}$ есть взаимнооднозначное отображение (по теореме о взаимнооднозначном отображении).

б) Найдем априорное распределение $\omega(\theta)$ θ' для равномерного априорного распределения $\pi(\theta)$:

$\omega(\theta) d\theta = \pi(\theta') d\theta' = \pi(\theta'(\theta)) \frac{d\theta'}{d\theta} d\theta = \frac{1}{\theta(1-\theta) d\theta}$

$$\rightarrow \omega(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \text{ - не равномерное.}$$

4 Четвертая задача

а) Покажем, что для нормального распределения $p(x|\theta)$ с известной дисперсией $\sigma^2 > 0$ матрица Фишера $I(\theta)$ не зависит от θ.

Запишем логарифм правдоподобия:

$l(x|\theta) = logf(x|\theta) = -\frac{1}{2}log(2\pi\sigma^2) - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}$

$l^{'}(x|\theta) = \frac{x-\theta}{\sigma^2}, l^{''}(x|\theta) = -\frac{1}{\sigma^2}$

Убедимся, что матрица Фишера не зависит от θ:

$$I(\theta) = -\mathbf{E}[l^{''}(x|\theta)] = \frac{1}{\sigma^2}$$

б) Выпишем априорное распределение Джеффри $\pi_J(\theta)$ для распределения из а):

$\pi_J(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}} \propto 1$

Распределение - не корректное, т.к. $\int \pi_J(\theta)d\theta \neq 1$

в) Апостериорное распределение:

$$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)p(\theta)$$
$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}exp(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\sigma_0^2})$$
$$p(\theta|x) \propto exp(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\sigma_0^2})exp(-\frac{(x-\theta)}{2\sigma^2}) \propto exp(-\frac{-(\theta-\overline{\theta})^2}{2\overline{\sigma}^2}) \text{ корректно.}$$