Второе задание по курсу «Байесовские методы статистического оценивания»

Бурнаев Е., Зайцев А., Янович Ю.

1. (2 балла) Рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин из равномерного распределения $U([0, \theta])$ с неизвестным параметром θ. Априорное распределение параметра θ задается Парето распределением

$$F(\theta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta_m}{\theta}\right)^k, & \theta \geq \theta_m \\ 0, & \theta < \theta_m \end{cases},$$

где $\theta_m > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ — известные параметры.

Докажите, что апостериорное распределение параметра также имеет Парето распределение и найдите его параметры.

Примечание. То есть в данной задаче доказывается, что Парето распределение параметра и равномерное правдоподобие сопряжены.

2. (2 балла) Мы наблюдаем выборку $D = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ независимых однаково распределенных случайных величин. Пусть правдоподобие $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ из экспоненциального семейства:

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = h_l(\mathbf{x}) \exp\left(\boldsymbol{\theta}^T t(\mathbf{x}) - a_l(\boldsymbol{\theta})\right),$$

Пусть так же априорное распределение лежит в экспоненциальном семействе, параметризованном $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_2)$:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_2) = h_p(\boldsymbol{\theta}) \exp\left(\boldsymbol{\lambda}_1^T \boldsymbol{\theta} - \lambda_2 a_l(\boldsymbol{\theta}) - a_p(\boldsymbol{\lambda}, \lambda_2)\right).$$

Показать, что такое семейство априорных распределение является сопряженным относительно введенного правдоподобия (то есть, апостериорное распределение тоже будет иметь вид $\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}_1', \lambda_2')$ для некоторых $\boldsymbol{\lambda}_1'$, λ_2'). Найти параметры апостериорного распределения $\boldsymbol{\lambda}_1'$, λ_2').

3. (1 балл) Пусть в качестве априорного распределения $\pi(\theta)$ задано равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. В качестве оцениваемого параметра рассмотрим $\theta' = \log \frac{\theta}{1-\theta}$ — функционально зависимый от θ.

- Показать, что такое преобразование параметра дает взаимнооднозначное отображение из $(0, 1)$ в $\mathbb{R}^1$.
- Каким будет априорное распределение θ' для равомерного априорного распределения $\pi(\theta)$. Равномерное ли оно?

4. (2 балла)

- Показать, что для нормального распределения

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right)$$

с известной дисперсией $\sigma^2 > 0$ матрица Фишера $I(\theta)$ не будет зависеть от θ.

- Выписать априорное распределение Джеффри $\pi_J(\theta)$ для такого распределения. Является ли такое априорное распределения корректным (будет ли интеграл $\int \pi_J(\theta) d\theta = 1$)?
- Является ли апостериорное распределение $p(\theta|x)$ для такого априорного распределения корректным?