Лабораторная работа №5.

Для заданного вещественного x и малой величины eps вычислить сумму бесконечного ряда:

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{(2i+1)!} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - ... + (-1)^i \frac{x^i}{(2i+1)!} + ...$$

Написание алгоритма решения задачи будет состоять из двух шагов.

Рекуррентная формула выводится из предположения, что слагаемые ряда являются членами *бесконечно убывающей* геометрической прогрессии. Пусть $s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_i + ...$. Таким образом, рекуррентная формула выглядит следующим образом:

$$a_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ q \cdot a_{i-1}, & i \geq 1 \end{cases},$$

где $q = \dfrac{a_i}{a_{i-1}}$. Значение a_0 либо вычисляется по формуле ряда (записывается после знака суммы) – вместо параметра подставить его начальное значение, либо из записи самого ряда – первое слагаемое ряда. Формула для a_i берется либо из формулы ряда $a_i = (-1)^i \dfrac{x^i}{(2i+1)!}$, либо ее необходимо определить по изменению слагаемых ряда. Для нахождения формулы a_{i-1} подставим (i-1) в формулу $a_i = (-1)^i \dfrac{x^i}{(2i+1)!}$ вместо i: $a_{i-1} = (-1)^{i-1} \dfrac{x^{i-1}}{(2i-1)!}$.

Для вычисления q необходимо знать, что есть факториал числа.

Определение. Факториалом числа i называют произведение последовательных натуральных чисел от 1 до i включительно, т.е. $i! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot i$.

Таким образом, $(2i-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2i-1)$, а $(2i+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2i-1) \cdot 2i \cdot (2i+1) = (2i-1)! \cdot 2i \cdot (2i+1)$. Вычислим $q = \dfrac{(-1)^i \cdot x^i \cdot (2i-1)!}{(2i+1)! \cdot (-1)^{i-1} \cdot x^{i-1}} = \dfrac{-x \cdot (2i-1)!}{(2i-1)! \cdot 2i \cdot (2i+1)} = \dfrac{-x}{2i \cdot (2i+1)}$.

Получим рекуррентную формулу

$$a_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \dfrac{-x}{2i \cdot (2i+1)} \cdot a_{i-1}, & i \geq 1 \end{cases}.$$

При записи этой формулы наиболее частой ошибкой является следующая запись этой формулы:

$$a_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \dfrac{-x}{2i \cdot (2i+1)} \cdot \left((-1)^{i-1} \dfrac{x^{i-1}}{(2i-1)!} \right), & i \geq 1 \end{cases}.$$

Эта формула не будет являться рекуррентной, так как в ней нет зависимости последующего элемента последовательности от предыдущего, следовательно, нет возможности применить стандартный алгоритм вычисления элементов и суммы этих элементов (описание см. ниже).

Глубина рекурсии равна 1, т.е. для вычисления элементов последовательности требуются две переменные. Как и в примере 1, обойдемся одной переменной.

Примечание. При вычислении суммы ряда решающую роль играет величина *eps*. Она задаётся для того, чтобы ограничивать количество вычисляемых элементов последовательности, добавляемых в сумму. При вычислении каждого элемента последовательности его модуль сравнивается с *eps*. Если он больше *eps*, то вычисления продолжаются, в противном случае вычисление элементов последовательности и добавление их в искомую сумму прекращается. Такой процесс называется вычислением суммы ряда с точностью *eps*. В качестве значения переменной *eps* можно взять 0,001 или 0,00001 и т.п.

Алгоритм

```
Объявление вещ: x, eps ,S, a, цел: i
ввод x, eps
‘начальное значение номера элемента последовательности
i=0
‘начальное значение элемента последовательности
a=1
‘начальное значение суммы элементов последовательности
s=a
‘цикл для вычисления элементов и суммы последовательности
пока |a|>=eps
‘увеличиваем номер элемента
    i=i+1
‘вычисляем новый элемент
    a=a*(-x)/(2*i*(2*i+1))
‘добавляем его в сумму
    s=s+a
все_цикл
печать s
```

Написать программу, соответствующую алгоритму

```
Dim x, eps, s, a As Single, i As Integer
x = Range("a2").Value
eps = Range("b2").Value
i = 0
a = 1
s = a
While Abs(a) >= eps
    i = i + 1
    ‘вычисляется элемент последовательности
    a = a * (-x) / (2 * i * (2 * i + 1))
    ‘элемент последовательности добавлется в сумму
```

```
    s = s + a
Wend
MsgBox "S=" & CStr(s)
```

Пример 5. Найти наименьший номер члена последовательности, для которого выполняется условие $|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$. Вывести на экран этот номер и все элементы a_n, где $n = 1,2,3....$ Последовательность задается формулой $a_n = \ln^2(a_{n-1}) + 1, \quad a_1 = 0.01$.

Написание алгоритма решения задачи будет состоять из двух шагов.

Формула для вычисления элементов последовательности:

$$a_i = \begin{cases} 0.01, & i = 1 \\ \ln^2(a_{i-1}) + 1, & i \geq 2 \end{cases},$$

где i – номер текущего элемента последовательности.

Глубина рекурсии в данном случае равна 1, т.е. для вычисления элементов последовательности нужны две переменные.

Алгоритм

```
Объявление цел: i; вещ: at, ap, eps
ввод eps
‘номер элемента равен 1
i=1
‘ текущий элемент
at=0.01
печать at
‘номер элемента увеличивается на 1
i=i+1
‘ новый элемент
ap=ln^2(at)+1
печать ap
‘ цикл для вычисления элементов последовательности
пока |at-ap|>=eps
‘номер элемента увеличивается на 1
   i=i+1
‘последующий элемент становится текущим
   at=ap
‘вычисляется последующий элемент
   ap=ln^2(at)+1
   печать ap
всё_цикл
печать i
```

Написать программу, соответствующую алгоритму

```
Dim i As Integer, at, ap, eps As Single
Dim s As String
eps = Cells(2, 1).Value
i = 1
at = 0.01
s = CStr(at) & Chr(10)
```

```
i = i + 1
ap = Log(at) ^ 2 + 1
s = s + CStr(ap) & Chr(10)
While Abs(at - ap) >= eps
      i = i + 1
      at = ap
      ap = Log(at) ^ 2 + 1
      s = s + CStr(ap) & Chr(10)
Wend
MsgBox "i=" & CStr(i) & Chr(10) & s
```

Структура алгоритмов вычисления рекуррентных последовательностей

Как видно из решения задач, приведенные алгоритмы имеют общую структуру. Алгоритмы решения задач на нахождение элементов и/или суммы элементов последовательности можно записать в следующем виде:

```
задать начальное значение номера элемента i = i0
задать начальное значение элемента a = a0
задать начальное значение суммы элементов s = a0
цикл <условие_продолжения_вычислений>
    i =i+1
    a = f(a, a0)
    печать a (если нужно)
    s = s+a (если нужно)
все_цикл
печать s (если нужно)
печать i (если нужно)
```

Здесь $f(a,a_0)$ – это функция, описывающая зависимость последующего элемента последовательности от предыдущего.

Задание. Из условий задачи найти рекуррентную формулу. Используя найденную формулу решить поставленную задачу.

Даны числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и некоторое число ε. Найти сумму тех членов ряда, модуль которых больше или равен заданному ε.

Вариант	Формула общего члена ряда	Вариант	Формула общего члена ряда
1	$a_n = \frac{n!}{3n^n}, \quad n = 1,2,3...$	7	$a_n = \frac{n!}{(2n^n)}, \quad n = 1,2,3...$
2	$a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}, \quad n = 1,2,3...$	8	$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad n = 1,2,3...$
3	$a_n = \frac{10^n}{n!}, \quad n = 1,2,3...$	9	$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad n = 1,2,3...$
4	$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{(2n)!}, \quad n = 1,2,3...$	10	$a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n = 1,2,3...$
5	$a_n = \frac{n!}{(2n)!}, \quad n = 1,2,3...$	11	$a_n = \frac{2^n}{(n-1)!}, \quad n = 1,2,3...$
6	$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}, \quad n = 1,2,3...$	12	$a_n = \frac{2n-1}{2^n}, \quad n = 1,2,3...$

Найти наименьший номер члена последовательности, для которого выполняется условие: $\left|a_n - a_{n-1}\right| < \varepsilon$. Вывести на экран номер и все элементы a_n, где $n = 1,2,3...$

Вариант	Формула общего члена ряда	Вариант	Формула общего члена ряда
13	$a_n = \frac{x}{2a_{n-1}^2}, \quad a_1 = x$	19	$a_n = e^{-a_n - 1}, \quad a_1 = 0$
14	$a_n = arctg(a_{n-1}) + 1, \quad a_1 = 0$	20	$a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \quad n = 2,3,...$
15	$a_n = 2 + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 2$	21	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2$
16	$a_n = \frac{1}{2} tg(a_{n-1}), \quad a_1 = 0.5$	22	$a_n = \frac{2 + a_{n-1}^2}{2a_{n-1}}, \quad a_1 = 2$
17	$a_n = \frac{1}{(2n)^2}, \quad a_1 = 0.5$	23	$a_n = \frac{2^{n+1}}{(3n)^n}, \quad a_1 = \frac{4}{3}$
18	$a_n = \frac{1}{2}\cos(a_{n-1}), \quad a_1 = 0.5$	24	$a_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad a_1 = 2$