МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра системи штучного інтелекту

Лабораторна робота 3

з дисципліни

“Дискретна математика”

Виконав:

студент групи КН-109

Гладун Ярослав

Викладач:

Мельникова Н. І.

Львів - 2018 р.

Тема: Побудова матриці бінарного відношення

Мета: набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

Теоретичні відомості:

Декартів добуток множин A і B (позначається $A\times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a\in A$, $b\in B$. При цьому вважається, що $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Потужність декартова добутку дорівнює $|A\times B| = |A|\times|B|$.

Приклад. Довести тотожність $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Розв'язання.

Нехай $(x, y)\in(A\times B)\cap(C\times D)\Leftrightarrow$

$(x, y)\in(A\times B)\ \&\ (x, y)\in(C\times D)\Leftrightarrow$

$(x\in A\ \&\ y\in B)\ \&\ (x\in C\ \&\ y\in D)\Leftrightarrow$

$(x\in A\ \&\ x\in C)\ \&\ (y\in B\ \&\ y\in D)\Leftrightarrow$

$(x\in A\cap C)\ \&\ (y\in B\cap D)\Leftrightarrow(x, y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку $A\times B$ (тобто $R\subset A\times B$).
Якщо пара (a,b) належить відношенню R, то пишуть

$(a, b)\in R$, або aRb.

Областю визначення бінарного відношення $R\subset X\times Y$ називається множина $\delta_R=\{x\mid \exists y\ (x, y)\in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R=\{y\mid \exists x\ (x, y)\in R\}$ ($\exists$ - існує).

Для скінчених множин бінарне відношення $R\subset A\times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m\times n}=(r_{ij})$, де $m=|A|$, а $n=|B|$.

Елементами матриці є значення $r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } (a_i,b_j)\in R,\\ 0, & \text{якщо } (a_i,b_j)\notin R.\end{cases}$

Види бінарних відношень.

Нехай задано бінарне відношення R на множині A^2: $R\subseteq A\times A=\{(a, b)\mid a\in A, b\in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a\in A$ виконується aRa, тобто $(a,a)\in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині.
2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a\in A$ не виконується aRa, тобто $(a,a)\notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.
3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a,b\in A$ з aRb слідує bRa, тобто якщо $(a,b)\in R$ то і $(b,a)\in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.
4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a,b\in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b)\in R$ і $(b,a)\in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c \in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc. Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то $(a, c) \notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Варіант 2 (завдання)

1. Чи є вірною рівність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

$R = \{(x, y) | x \in A \,\&\, y \subset B \,\&\, |y| = |x|, x \cap y = \otimes\}$,

де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3,5\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 - 2x + y^2 \le 3\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$A(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Перевірити чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, y = \ln|x|\}$.

Варіант 2 (розв'язок)

1. Нехай (x, y) $\in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow$

$x \in (A \cap B) \,\&\, y \in (C \cap D) \Leftrightarrow$

$x \in A \,\&\, x \in B \,\&\, y \in C \,\&\, y \in D$

Нехай (x, y) $\in (A \times C) \cap (B \times D) \Leftrightarrow$

$(x, y) \in (A \times C) \,\&\, (x, y) \in (B \times D) \Leftrightarrow$

$x \in A \,\&\, y \in C \,\&\, x \in B \,\&\, y \in D$

Отже, $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

2. $R = \{(x, y) | x \in A \,\&\, y \in B \,\&\, |y| = |x|, x \cap y = \varnothing\}$

A={1, 2}, B={1, 3, 5}

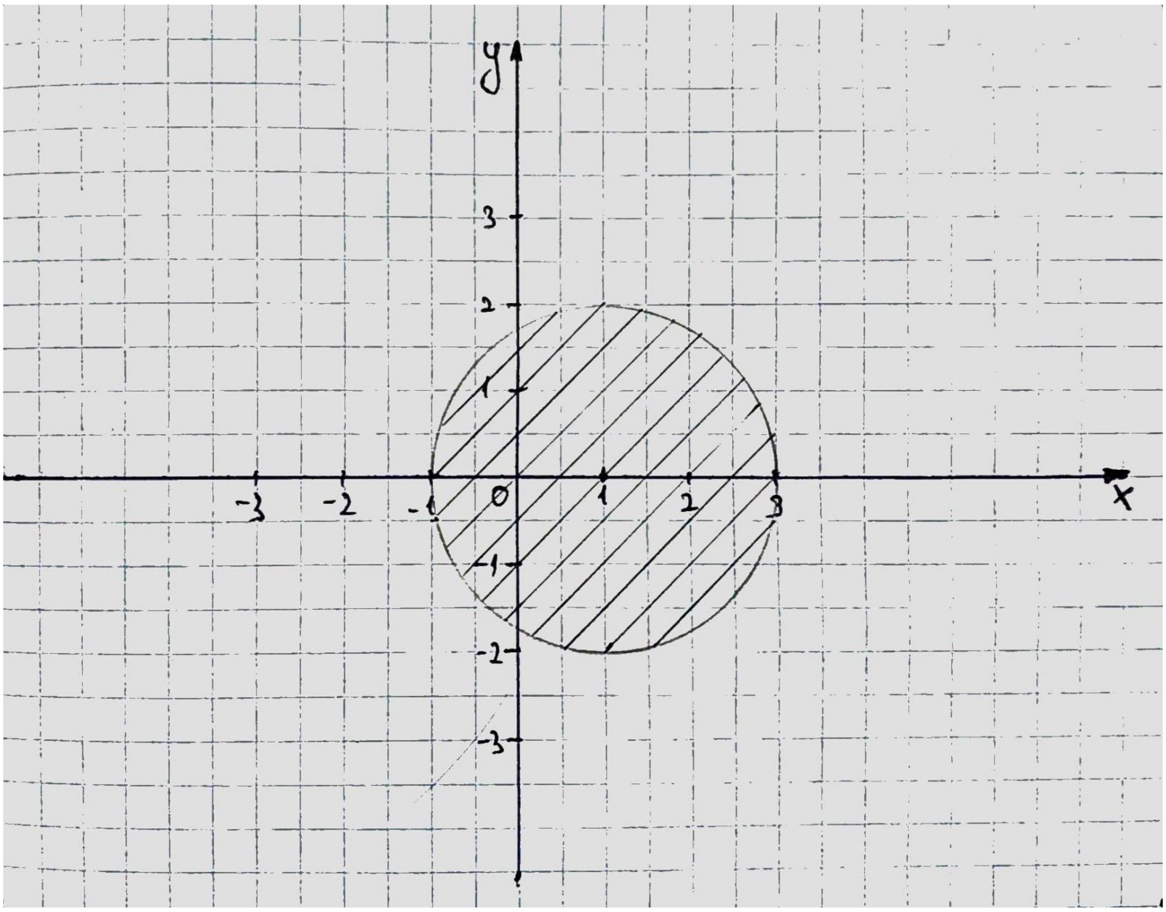
	∅	{1}	{3}	{5}	{1, 3}	{1, 5}	{3, 5}	{1, 3, 5}
∅	1	0	0	0	0	0	0	0
{1}	0	0	1	1	0	0	0	0
{2}	0	1	1	1	0	0	0	0
{1, 2}	0	0	0	0	0	0	1	0

3. $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4 = 0$

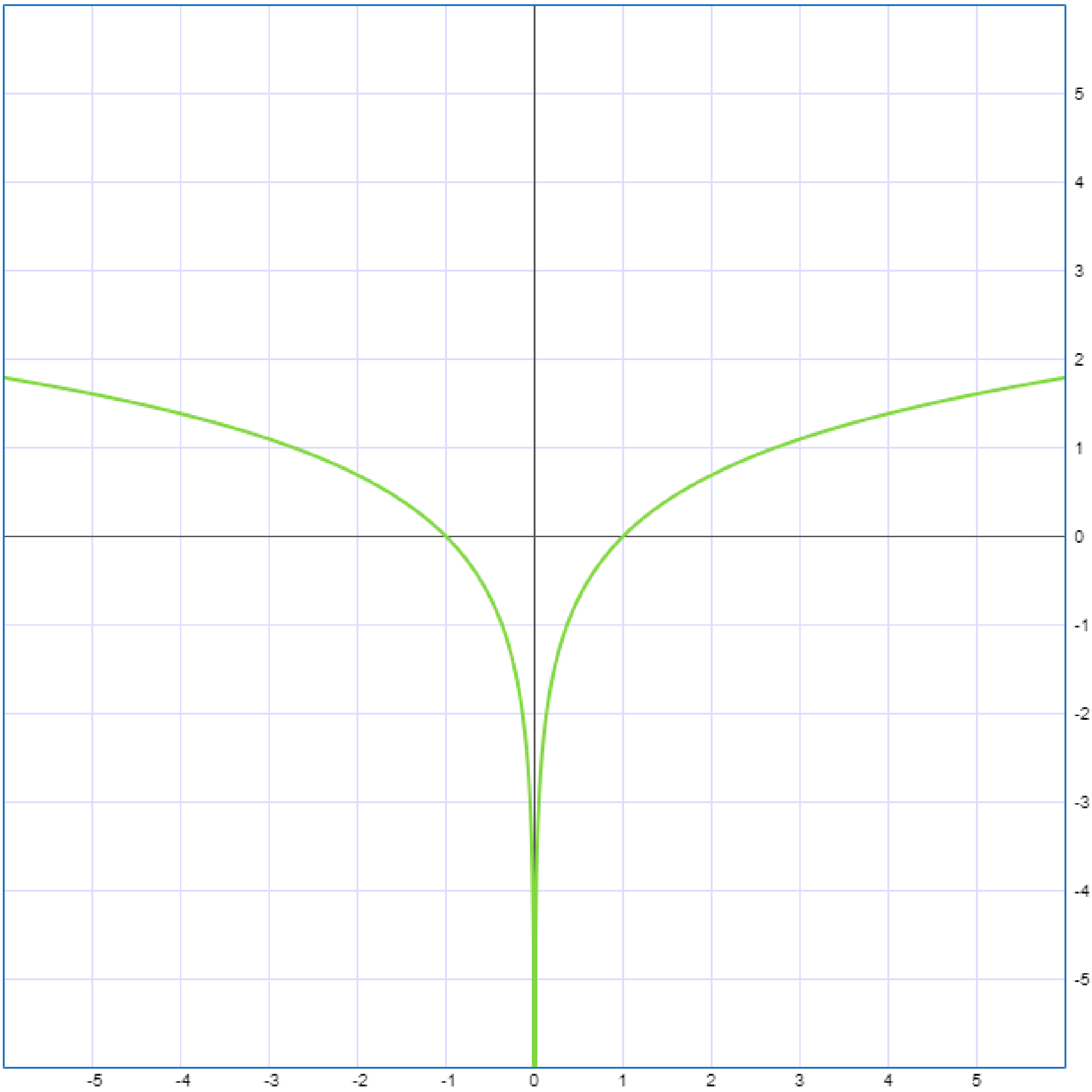
$(x-1)^2 + y^2 = 4$

$(x-1)^2 + y^2 < 4$



4. Дане відношення є антисиметричне.

5.



Як бачимо з графіку, дане відношення не є бієктивне і не є функціональне (у в т 0 не визначено).

Висновок: Отже, на цій лабораторній роботі я ознайомився на практиці із основними поняттями та типами бінарних відношень, навчився будувати матрицю бінарного відношення, та навчився користуватися деякими стандартними бібліотеками STL, які допомогли мені у виконанні лабораторної роботи.