

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ
КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств
(ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине
Математические основы обработки сигналов

по теме:
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ

Студент:
Группа ИА-331

Я.А Гмыря

Предподаватель:
Преподаватель

А.А Калачиков

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ	3
1 ТЕОРИЯ.....	6
2 ПРАКТИКА	21
3 ВЫВОД	31

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель: Вспомнить, что такое преобразование Фурье. Произвести разложение в ряд Фурье на Python. Узнать, что такое ортогональность сигнала.

Задачи:

1 Вычисление коэффициентов ряда Фурье гармонического колебания

Целью практики является численное вычисление коэффициентов ряда Фурье простых сигналов. Гармоническое колебание записывается в виде

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1)$$

Для формирования отрезка колебания заданной длительности нужно задать (определить) требуемые параметры колебания и вектор отсчетов независимой переменной t . Для формирования вектора отсчетов времени используется встроенная функция модуля `np.linspace()` из модуля `numpy`. Для вывода графика используется функция `plt.plot()` модуля `matplotlib.pyplot`. Для вычисления коэффициентов ряда Фурье в синусной/косинусной форме используется интегрирование произведения сигнала $x(t)$ на опорные колебания $\sin(t)$ и $\cos(t)$. Интегрирование выполняется на периоде колебания $x(t)$. Частоты опорных колебаний выбираются кратными основной частоте.

```
import numpy as np
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

f=5
T=1/f
Ts=0.01
#t = np.linspace(- 0.1, 0.1, 100, endpoint=False)
t=np.arange(-0.1,0.1,Ts)
s= 2*np.cos(2*np.pi*f*t)
sc=np.cos(2*np.pi*f*t)
ss=np.sin(2*np.pi*f*t)

m1=s*sc
m2=s*ss

plt.plot(t, s,t,sc,t,m1)

plt.ylim(-2, 2)

a1=1/T*np.sum(m1)*Ts
```

Задайте гармоническое колебание $x(t)$, выберите значение амплитуды, частоты, начальную фазу задайте равной 0.

Вычислите коэффициенты a_n и b_n для $n = 0,1,2,3,4$. По полученным коэффициентам вычислите и постройте графики A_n , $\phi(n)$.

Измените начальную фазу колебания и повторите вычисления.

Рисунок 1 — Задачи на практику

2 Программное вычисление коэффициентов ряда Фурье периодического прямоугольного сигнала

Сформируйте периодический прямоугольный сигнал с заданным периодом T и длительностью τ . Проведите вычисления коэффициентов ряда Фурье интегрированием произведения сигнала на опорные колебания.

По полученным коэффициентам a_n и b_n вычислить коэффициенты ряда Фурье в тригонометрической форме A_n и ϕ_n . Изобразите спектры амплитуд и фаз до 6 гармоники.

Выполните синтез временного колебания путем суммирования 2, 4, 6 коэффициентов ряда Фурье и изобразите полученные временные колебания.

3 Проверка ортогональности колебаний

Свойство ортогональности колебаний широко используется при формировании и приеме сигналов в современных системах мобильной связи.

В этом разделе проведем формирование колебаний и выполним проверку свойства ортогональности колебаний $s_k(t)$ и $s_n(t)$ на интервале времени $0 \leq t \leq T$

$$\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0 \quad (2)$$

Для проверки свойства ортогональности сформируйте сигнал $s_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ с частотой $f_1 = \frac{1}{T}$. Сформируйте сигнал $s_n(t) = \sin(2\pi n f_1 t)$ и вычислите интеграл $\int_0^T s_1(t)s_n(t)dt$. Проверьте, что интеграл $\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0$ для всех положительных k и n .

Измените значение частоты одного из колебаний и снова проверьте выполнение свойства ортогональности.

Измените интервал интегрирования на несколько точек, проверьте выполнение свойства ортогональности.

Сформируйте сигнал $s_n(t) = e^{j(2\pi n f_1 t)}$ и вычислите интеграл $\int_0^T s_1(t)s_n(t)dt$. Проверьте, что интеграл $\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0$ для положительных и отрицательных k и n . На выбор номера n и k меняйте в пределах до 10.

Измените значение частоты одного из колебаний и снова проверьте выполнение свойства ортогональности.

Измените интервал интегрирования на несколько точек, проверьте выполнение свойства ортогональности.

4 Спектр периодического прямоугольного сигнала (письменно)

Используя выражения для расчета компонент ряда Фурье (гармоник) периодического прямоугольного сигнала вычислить и сравнить спектры последовательности прямоугольных видеоимпульсов для трех случаев

- $T = 0.1 \text{ с}, \tau = 0.05\text{с}$

- $T = 0.1 \text{ с}, \tau = 0.025\text{с}$
- $T = 0.2 \text{ с}, \tau = 0.025\text{с}$

ТЕОРИЯ

Ряд Фурье — это способ представить периодическую функцию в виде суммы простых гармонических колебаний (синусов и косинусов) с разными частотами, амплитудами и фазами.

Функции $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x)\}$ являются базисом пространства периодических функций (как в линейной алгебре есть базис, допустим, трехмерного пространства, который состоит из ортов i , j и k , и все вектора в этом пространстве могут быть разложены по этим ортам, т.е представлены в виде их линейной комбинации), поэтому почти любую периодическую функцию можно представить в виде суммы функций, принадлежащих этому базису.

Еще одним примером разложения является ряд Тейлора. Базисом для пространства функций является множество функций $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$, по которому также можно разложить почти любую функцию, т.е. представить в виде линейной комбинации многочленов.

Ряд Фурье и его коэффициенты вычисляются следующим образом:

Ряд Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)) \quad (1)$$

где a_k, b_k - коэффициенты ряда Фурье, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам

Коэффициенты ряда Фурье

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega_1 t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega_1 t) dt \quad (2)$$

где $\frac{a_0}{2}$ — постоянная составляющая (или среднее значение сигнала), a_k и b_k — коэффициенты ряда Фурье, a_k отвечает за амплитуды чётных (симметричных) составляющих функции и показывают, насколько сильно в сигнале выражена компонента вида $\cos(\omega_0 t)$, а b_k отвечает за амплитуды нечётных (асимметричных) составляющих функции и показывают, насколько сильно в сигнале выражена компонента вида $\sin(\omega_0 t)$.
 k — номер гармоники ($k = 1, 2, 3, 4, \dots$),
 $\cos(k\omega_1 t)$ и $\sin(k\omega_1 t)$ — базисные функции.

Важно заметить, что сигнал, который нужно разложить в ряд Фурье, должен содержать только гармоники с частотой кратной w_1 . Если такое условие не выполняется, то сигнал не будет периодическим и разложить его в классический ряд Фурье невозможно.

Пример вычисления коэффициентов ряда Фурье:

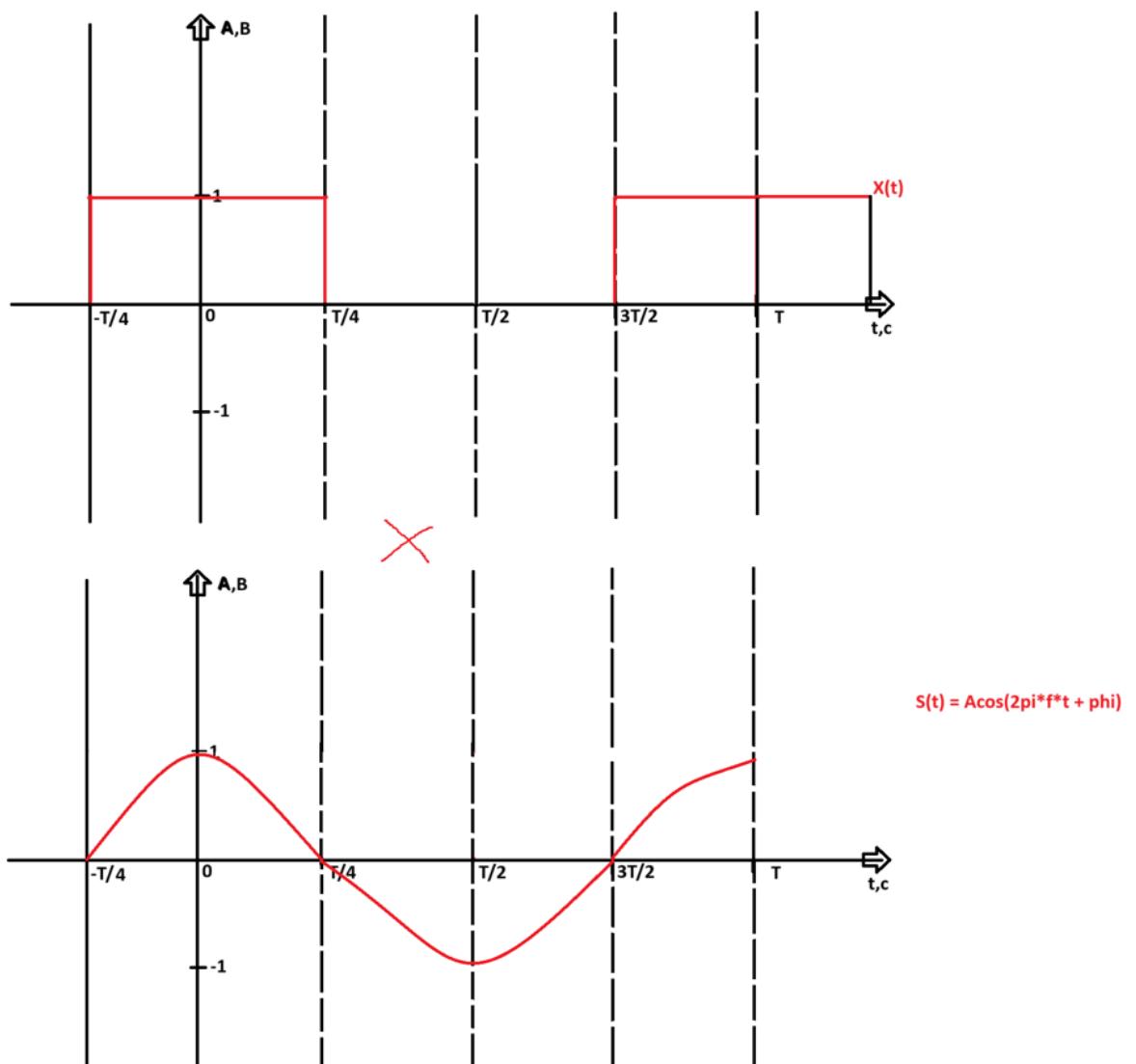


Рисунок 4 — Геометрическая интерпретация вычисления a_k

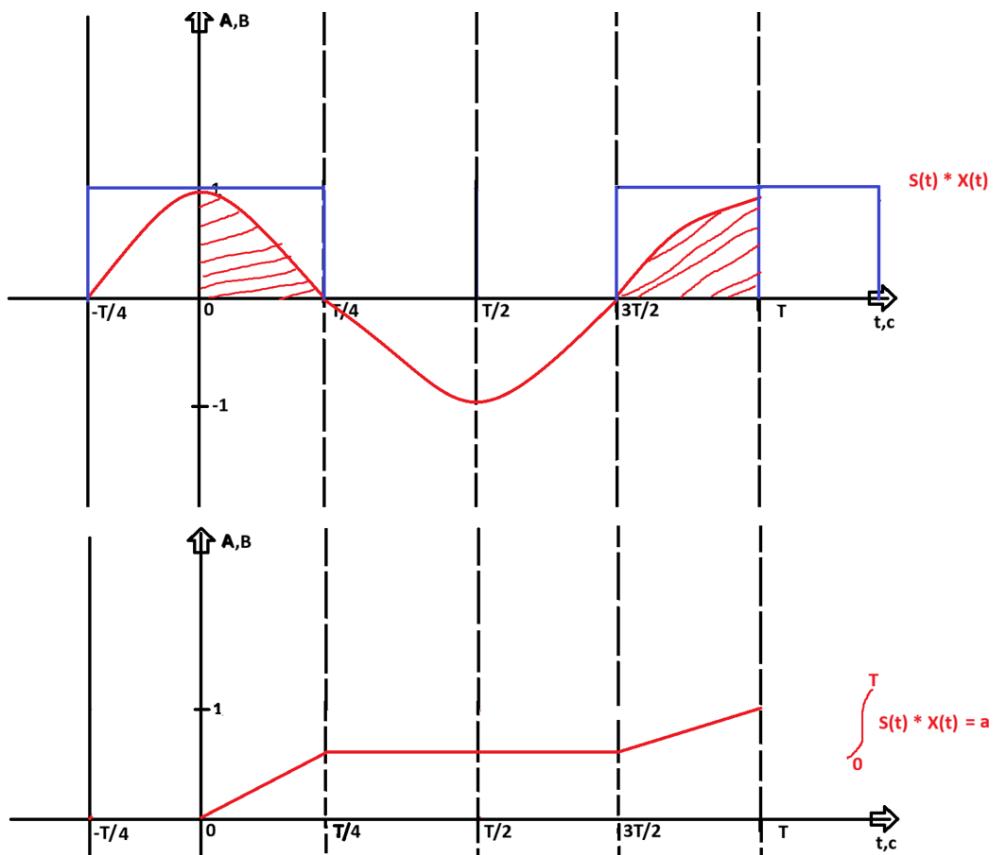


Рисунок 5 — Геометрическая интерпретация вычисления a_k

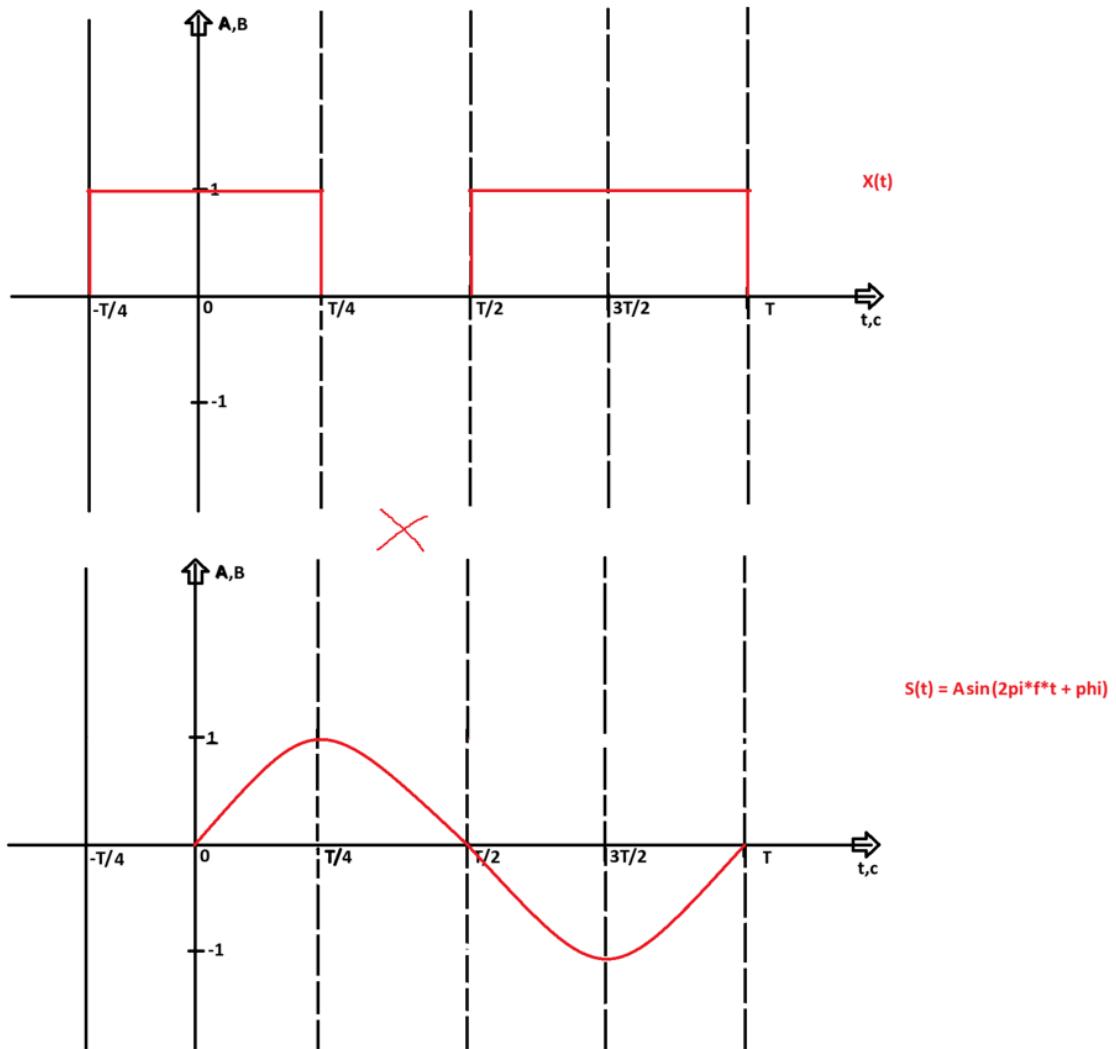


Рисунок 6 — Геометрическая интерпретация вычисления b_k

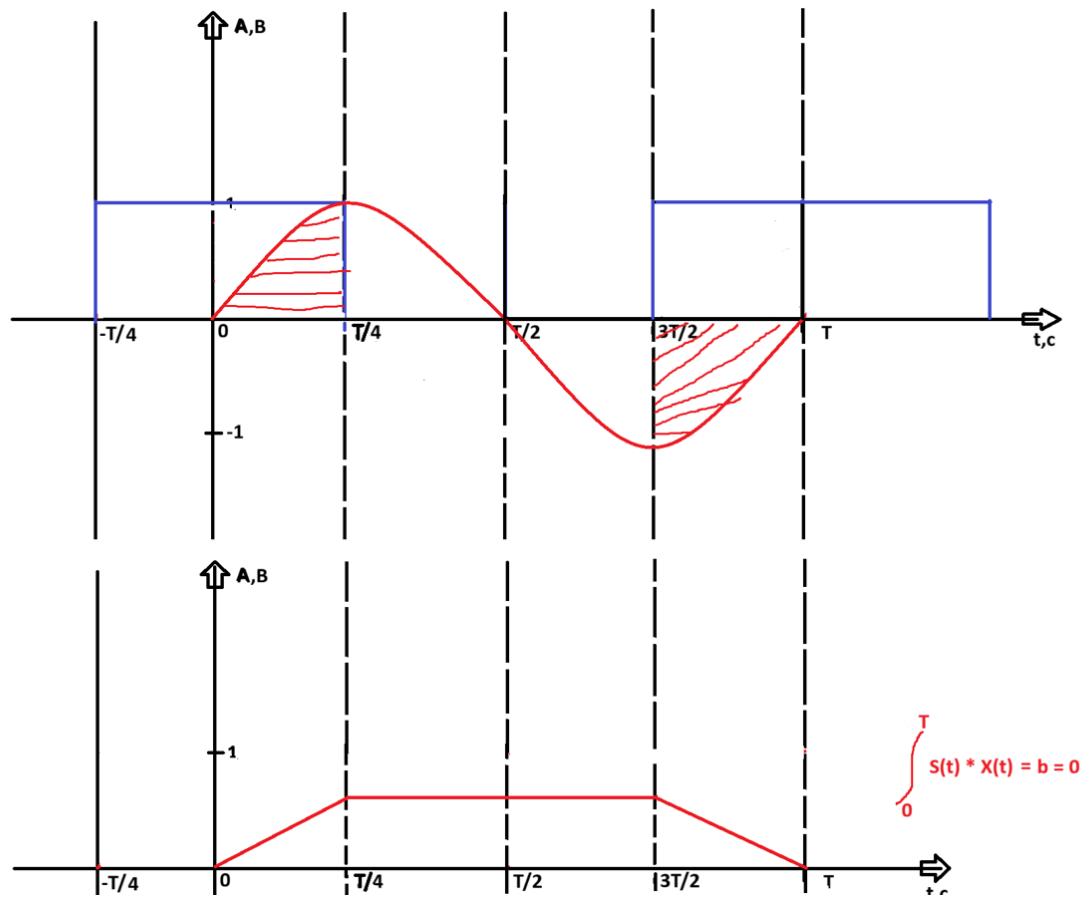


Рисунок 7 — Геометрическая интерпретация вычисления b_k

Заметим, что исходный сигнал (прямоугольный) - четный, поэтому коэффициенты b_k будут всегда равны нулю и в разложении будет участвовать только $\cos(\omega_0 t)$.

Пример

Рассмотрим простейший сигнал $\cos(2\pi * t)$. Рассчитаем для него a_1 и b_1 :

Перемножим наш сигнал на cos-компоненту при $k = 1$

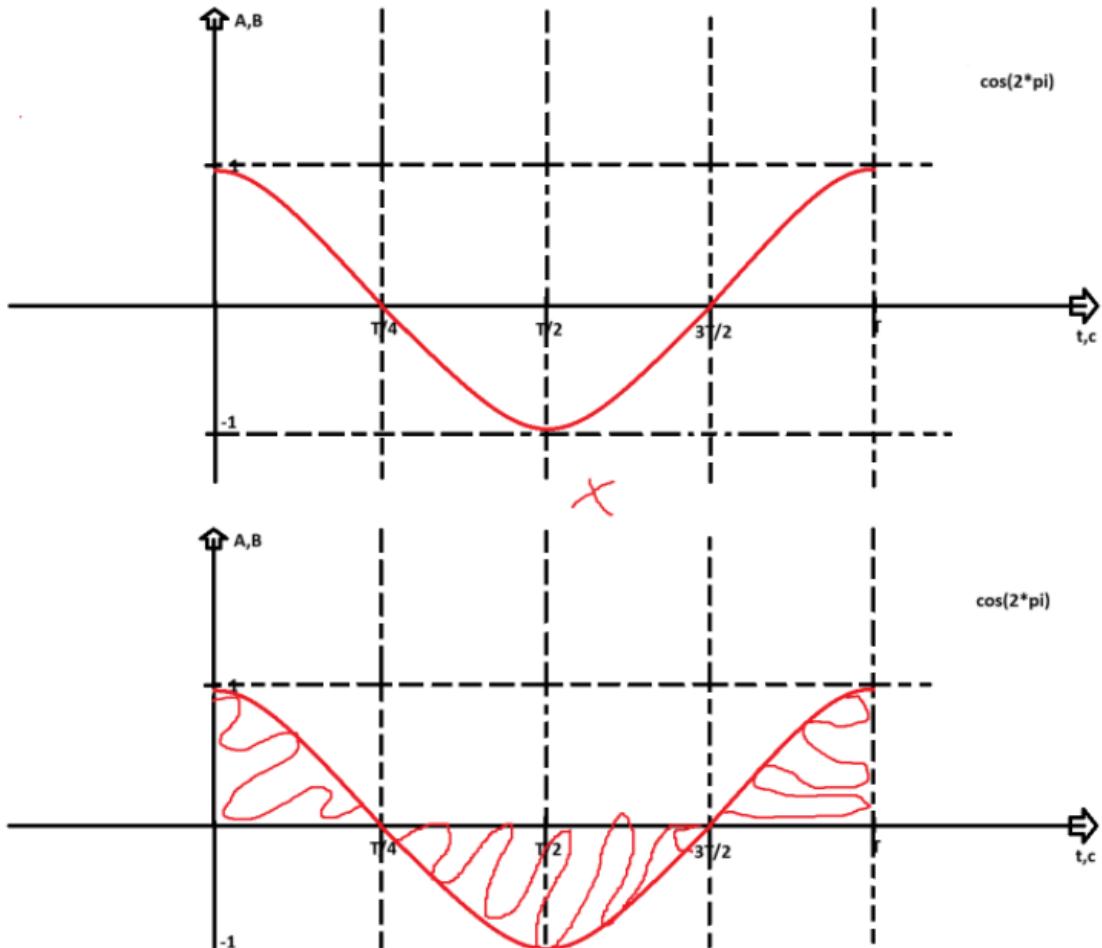


Рисунок 8 — Вычисление a_1

То, как будет изменяться интеграл от их произведения

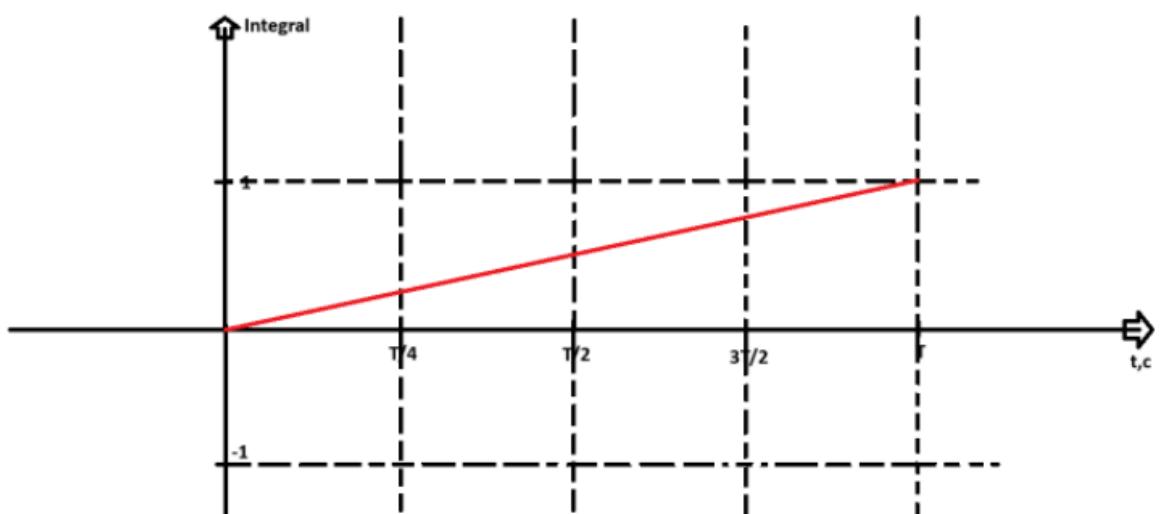


Рисунок 9 — Вычисление a_1

Значение интеграла в момент времени T будет равно π , это значит, что в нашем сигнале присутствует cos-компоненты с частотой 1 Гц (что логично).

Теперь рассчитаем b_1 , т.е сколько в нашем сигнале содержится компоненты $\sin(2\pi * t)$

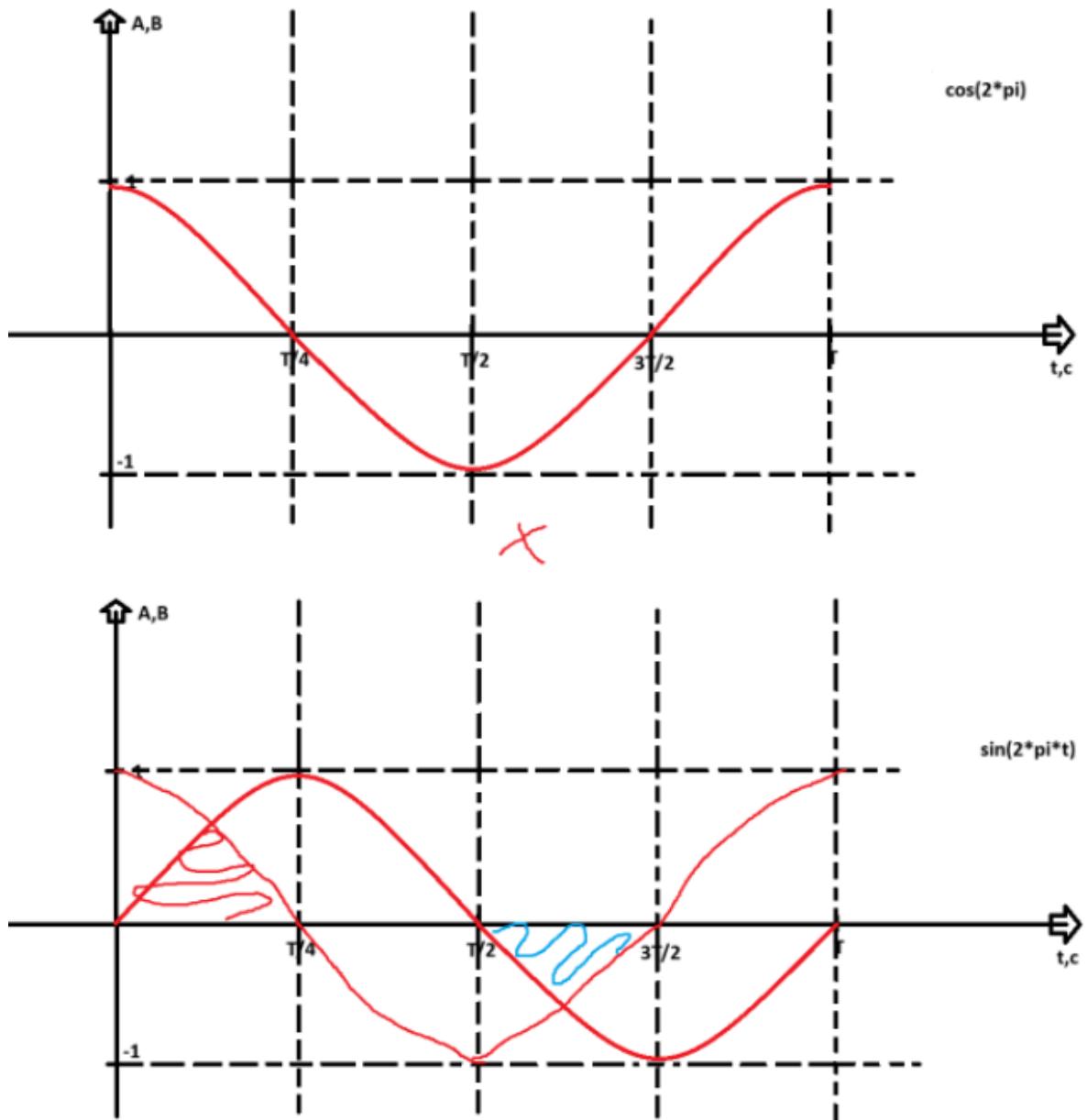


Рисунок 10 — Вычисление a_1

То, как будет изменяться интеграл от их произведения

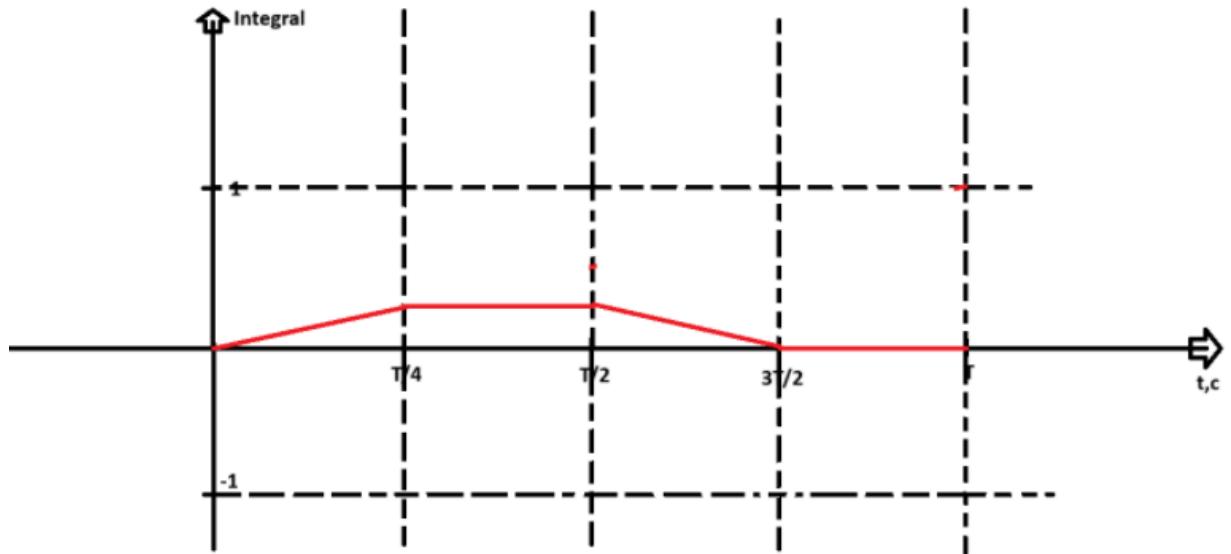


Рисунок 11 — Вычисление a_1

Значение интеграла в момент времени T будет равно 0, это значит, что в нашем сигнале не присутствует sin-компоненты с частотой 1Гц (что логично, ведь наш сигнал изначально косинус, который симметричен).

В нашем сигнале точно нет никаких sin-компонент. Может, есть компонента $\cos(4\pi * t)$?

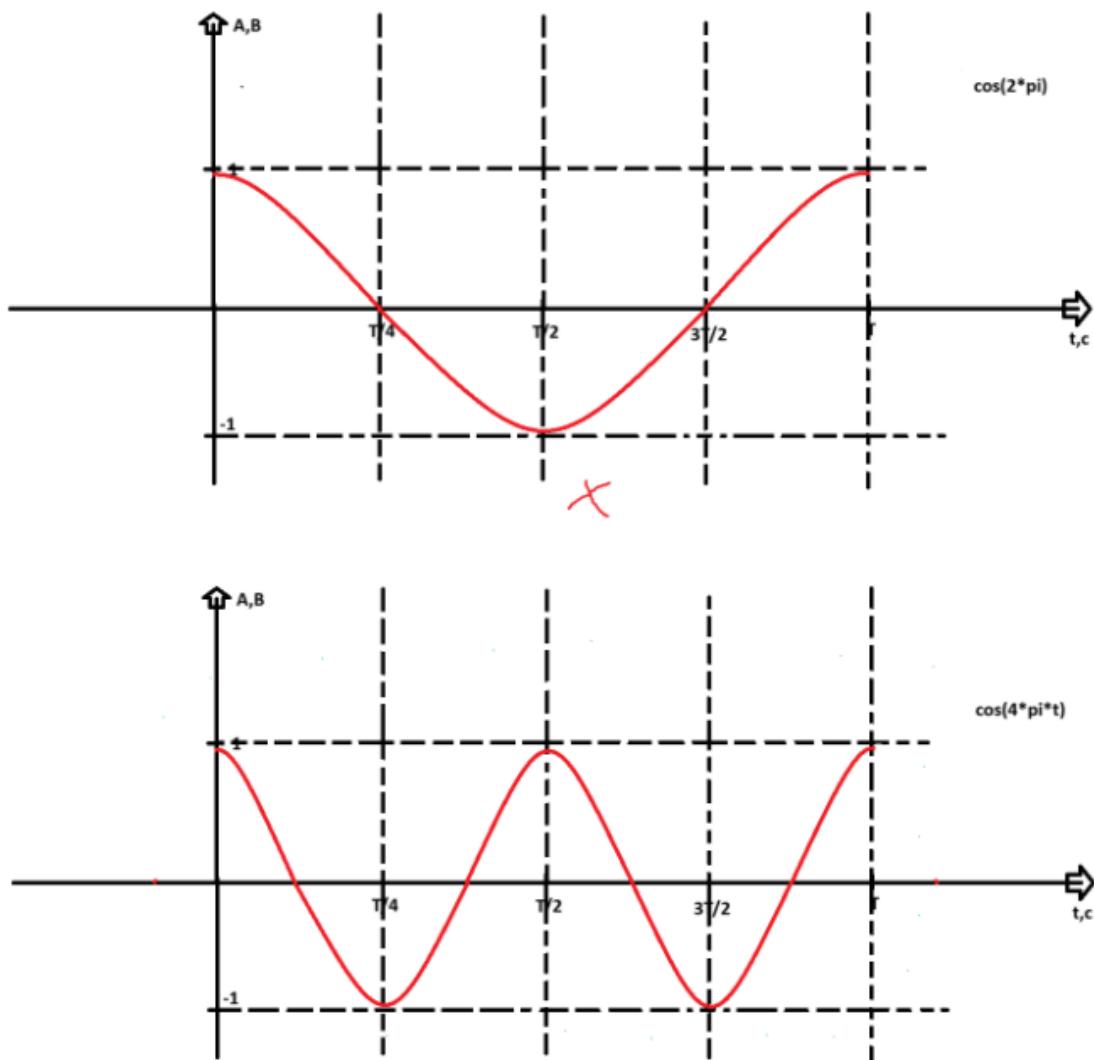


Рисунок 12 — Вычисление a_1

То, как будет изменяться интеграл от их произведения

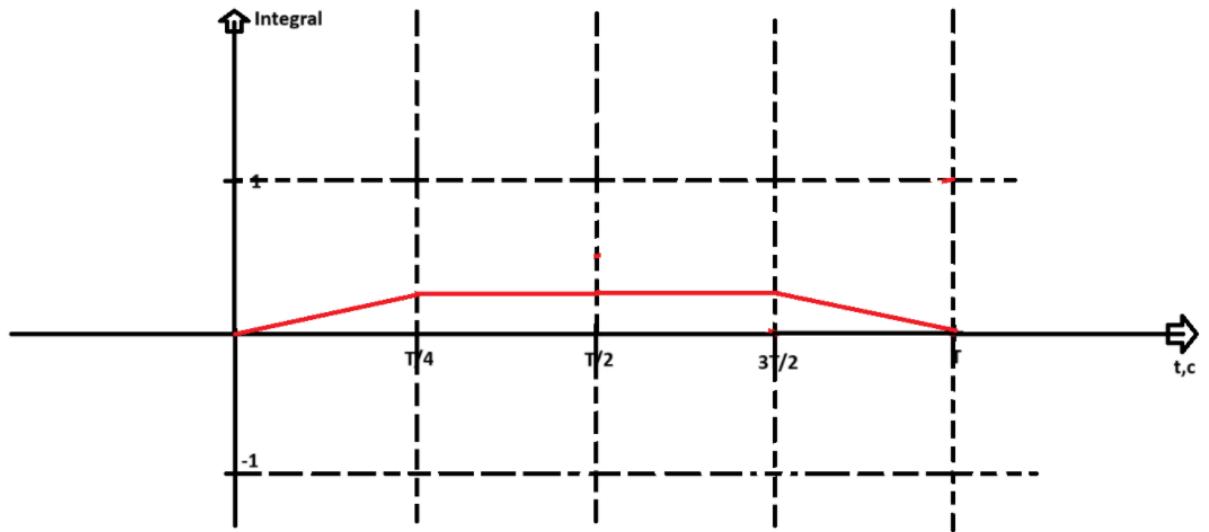


Рисунок 13 — Вычисление a_1

В графике много симметричностей, которые по итогу дают ноль. При увеличении частоты компонент ничего не поменяется: будут симметричности, которые в сумме будут сводить интеграл к нулю. Это значит, что в нашем сигнале только 1 компонента $\cos(2\pi * t)$.

Иная форма записи ряда Фурье

Классическая форма ряда Фурье не очень удобна для вычисления, поэтому ее заменяют косинусной формой ряда Фурье:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n * \cos(n * \omega_1 t + \phi_n)$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, а $\phi_n = -\arctg(\frac{b_n}{a_n})$

Ряд Фурье в комплексной форме

Вспомним тригонометрические тождества Эйлера:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Рисунок 14 — Тригонометрические тождества Эйлера

Теперь \cos в формуле из прошлого пункта заменим соответствующим тождеством:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{i(n\omega_1 t + \phi_n)} + e^{-i(n\omega_1 t + \phi_n)}}{2}$$

Видим у экспонент сумму в степени. Преобразуем выражение

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} (e^{i\phi_n} e^{in\omega_1 t} + e^{-i\phi_n} e^{-in\omega_1 t})$$

Раскроем скобки:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n e^{i\phi_n}}{2} e^{in\omega_1 t} + \frac{A_n e^{-i\phi_n}}{2} e^{-in\omega_1 t}$$

В этой формуле $e^{in\omega_1 t}$ и $e^{-in\omega_1 t}$ - колебания.

$\frac{A_n e^{i\phi_n}}{2}$ и $\frac{A_n e^{-i\phi_n}}{2}$ - комплексные амплитуды. Обычно их заменяют на \dot{C}_n и \dot{C}_{-n} соответственно.

Чтобы не считать 2 коэффициента, можно рассматривать сумму от $-\infty$ до ∞ и записать формулу так:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_1 t}$$

Примечание: спектр сигнала будет распространяться в отрицательную и положительную сторону. Это не значит, что частота стала отрицательной, это всего лишь симметрия графика.

Вычисление C_n :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) * e^{-in\omega_1 t} dt$$

Установим некоторую взаимосвязь между тригонометрической и комплексной формой ряда Фурье:

$A_0 = \dot{C}_0$, что логично, ведь если в формулу для их вычисления подставить 0, то получим одно и то же значение.

Теперь обратим внимание, что:

$$\begin{aligned} \frac{A_n * e^{i\phi_n}}{2} &= \dot{C}_n = |\dot{C}_n| * e^{i\phi_n} \\ \frac{A_n * e^{-i\phi_n}}{2} &= \dot{C}_{-n} = |\dot{C}_n| * e^{-i\phi_n} \end{aligned}$$

Из двух уравнений выше следует, что:

$$|\dot{C}_n| = \frac{A_n}{2}$$

Это значит, что коэффициент А тригонометрического ряда Фурье вдвое больше коэффициента $|\dot{C}_n|$ комплексного ряда Фурье. Это связано с тем, что коэффициентов $|\dot{C}_n|$ вдвое больше (спектр в обе стороны).

Коэффициенты ряда Фурье являются комплексно сопряженными, т.е:

$$\dot{C}_{-n} = C_n^*$$

Прямоугольный сигнал и ряд Фурье для него

Прямоугольный сигнал имеет следующие характеристики:

$T(s)$ - период (время одного колебания)

$\tau(s)$ - длительность сигнала (то время, когда сигнал не равен 0)

$U(B)$ - максимальное значение сигнала

$q = \frac{T}{\tau}$ - скважность сигнала

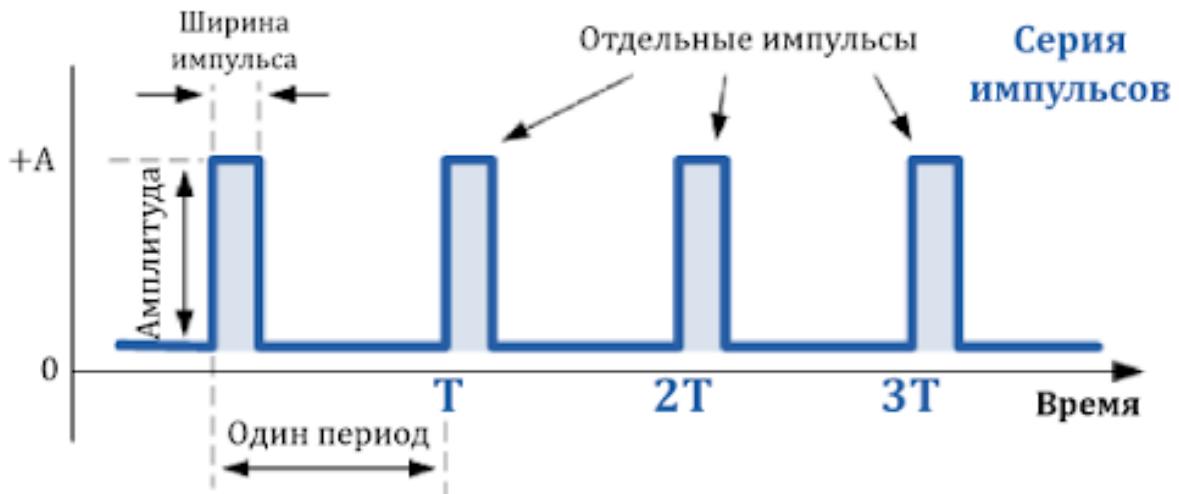


Рисунок 15 — Пример прямоугольного сигнала с обозначением характеристик

Для прямоугольного сигнала коэффициент \dot{C}_n вычисляется иначе: интегрирование идет не по T , а по τ

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U e^{-in\omega_1 t} dt$$

U не зависит от t , поэтому вынесем ее за интеграл. Вспомним, что $\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^x$. Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} & \frac{U}{T} \cdot \left. \frac{e^{-in\omega_1 t}}{-in\omega_1} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{U}{T} \cdot \frac{1}{-in\omega_1} \left[e^{-in\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{-in\omega_1 (-\frac{\tau}{2})} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{U}{T} \cdot \frac{1}{-in\omega_1} \left[e^{-in\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{in\omega_1 \frac{\tau}{2}} \right]$$

Теперь заменим ω_1 на $2\pi f_1$ и внесем двойку вместе с i под знак выражения в скобках, а πf_1 занесем в первый множитель:

$$\frac{U}{Tn\pi f_1} \cdot \frac{e^{in\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{-in\omega_1 \frac{\tau}{2}}}{2i}$$

Видим $\sin(n\omega_1 \frac{\tau}{2})$ (по тригонометрическому тождеству Эйлера):

$$\frac{U}{Tn\pi f_1} \cdot \sin\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)$$

Заменим ω_1 под синусом на $2\pi f_1$ и f_1 запишем как $\frac{1}{T}$. $n\pi f_1$ из знаменателя первого множителя внесем в знаменатель второго:

$$\frac{U}{T} \cdot \frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T})}{n\pi \frac{1}{T}}$$

Теперь домножим числитель и знаменатель на τ

$$\frac{U\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T})}{n\pi \frac{\tau}{T}}$$

Все эти преобразования нужны были для того, чтобы торой множитель превратился в один из замечательных пределов, который на бесконечности стремится к единице.

Итоговая формула для вычисления коэффициентов в комплексной форме ряда Фурье для прямоугольного периодического сигнала:

$$\boxed{\frac{U\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T})}{n\pi \frac{\tau}{T}}}$$

Ортогональность сигнала

Два сигнала $x(t)$ и $y(t)$ называются **ортогональными** на интервале $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt = 0$$

Это означает, что сигналы в радиоканале "не мешают" друг другу, т.е не заглушают друг друга и их можно передавать вместе. Эта идея используется в таких технологиях, как CDMA и OFDM.

ПРАКТИКА

Здание 1: простой сигнал с 1 компонентой с нулевой начальной фазой

Реализация задания в файле **task1.py**

Результат:

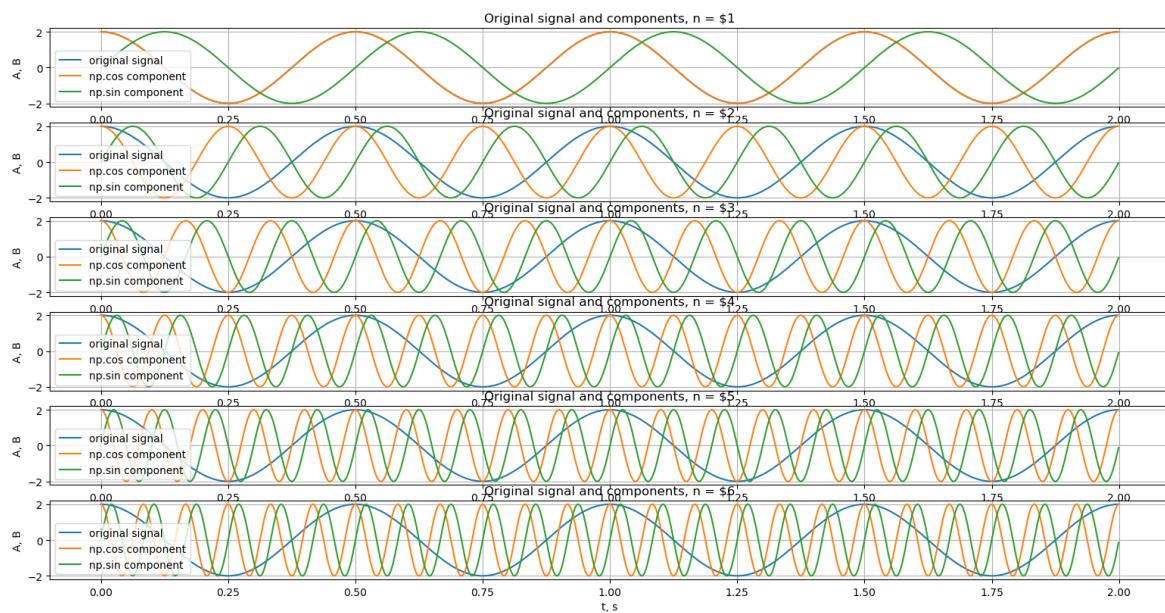


Рисунок 16 — Графики оригинального сигнала и компонент

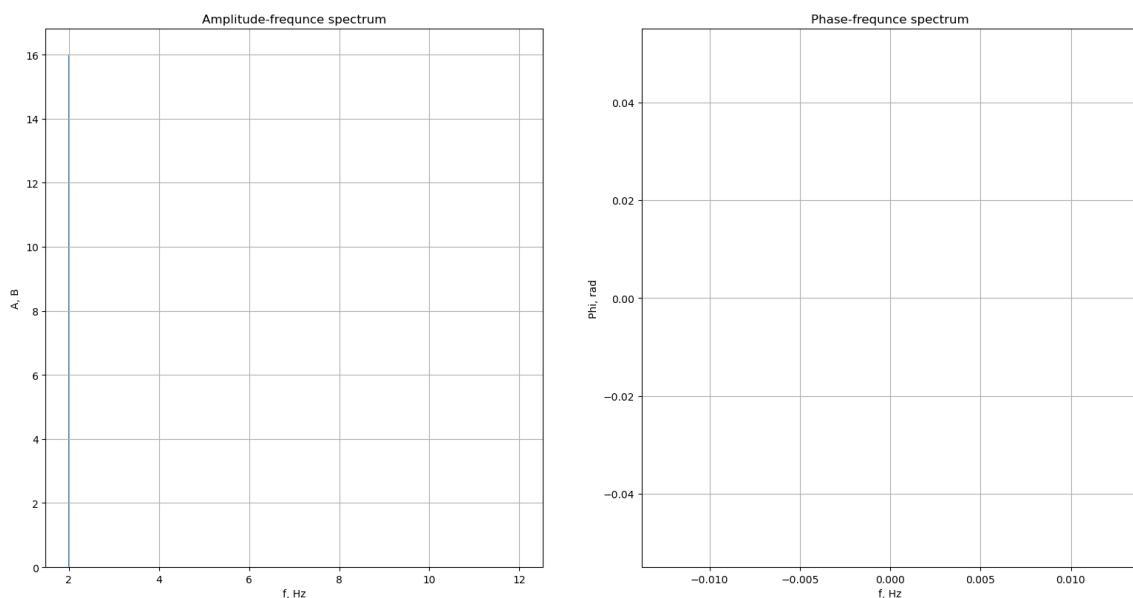


Рисунок 17 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 1 компонента с часоттой 2Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал.

Здание 2: простой сигнал с 2 компонентами с нулевой начальной фазой

Реализация задания в файле **task2.py**

Результат:

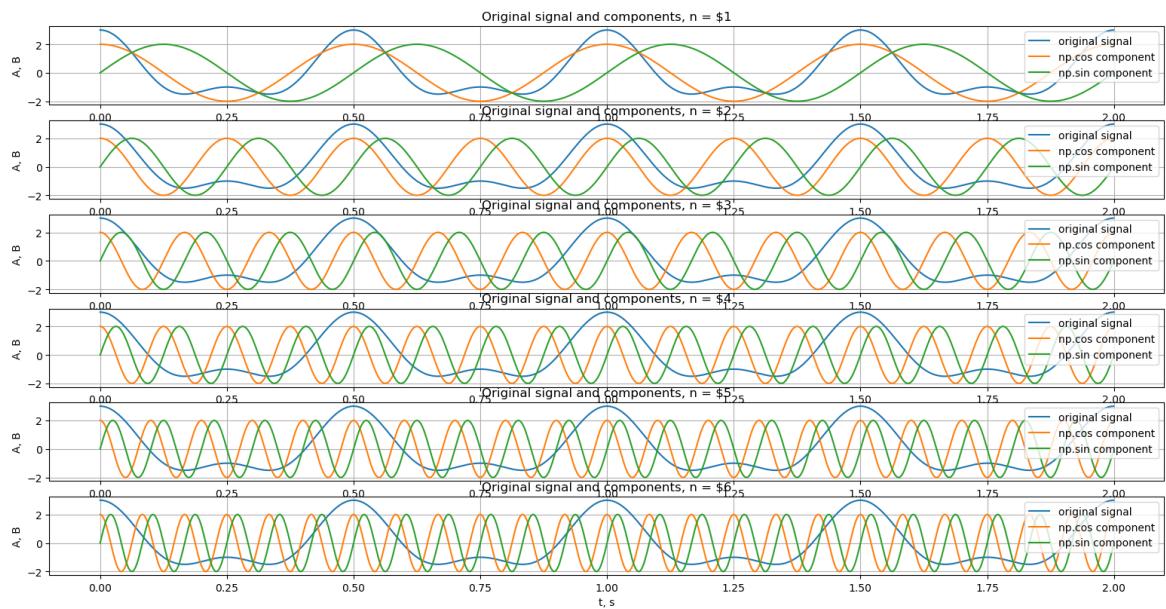


Рисунок 18 — Графики оригинального сигнала и компонент

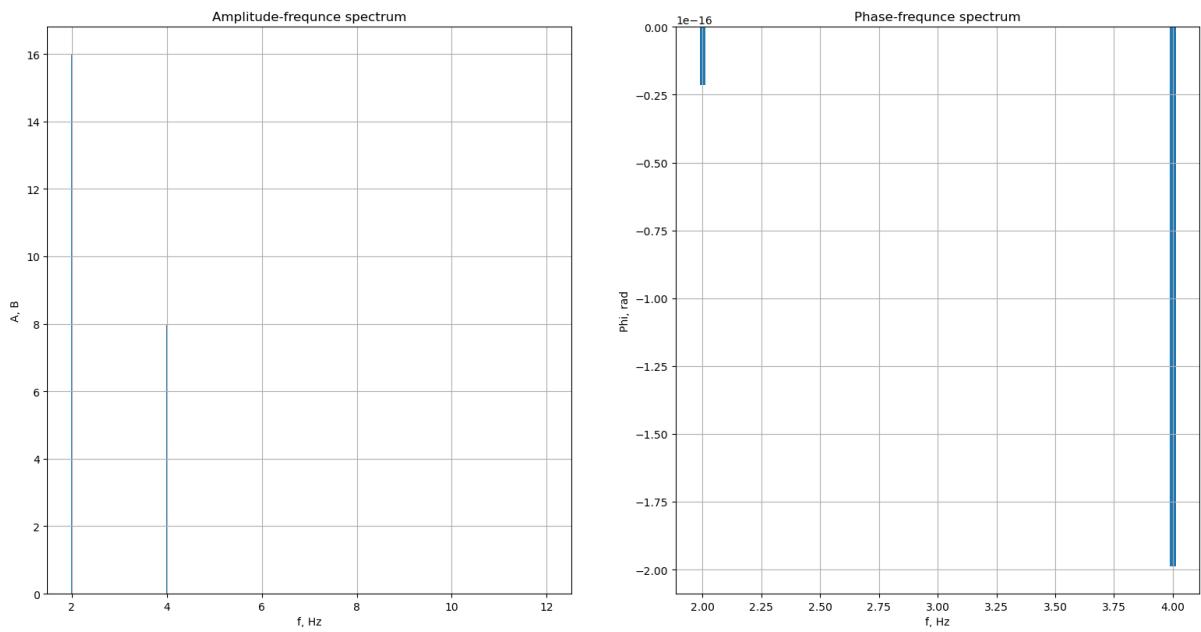


Рисунок 19 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 2 компоненты с частотой 2 и 4 Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал. На ФЧХ графике ложные фазы (это связано со свойствами `arctan`).

Здание 3: простой сигнал с 2 компонентами с ненулевой начальной фазой

Реализация задания в файле **task3.py**

Результат:

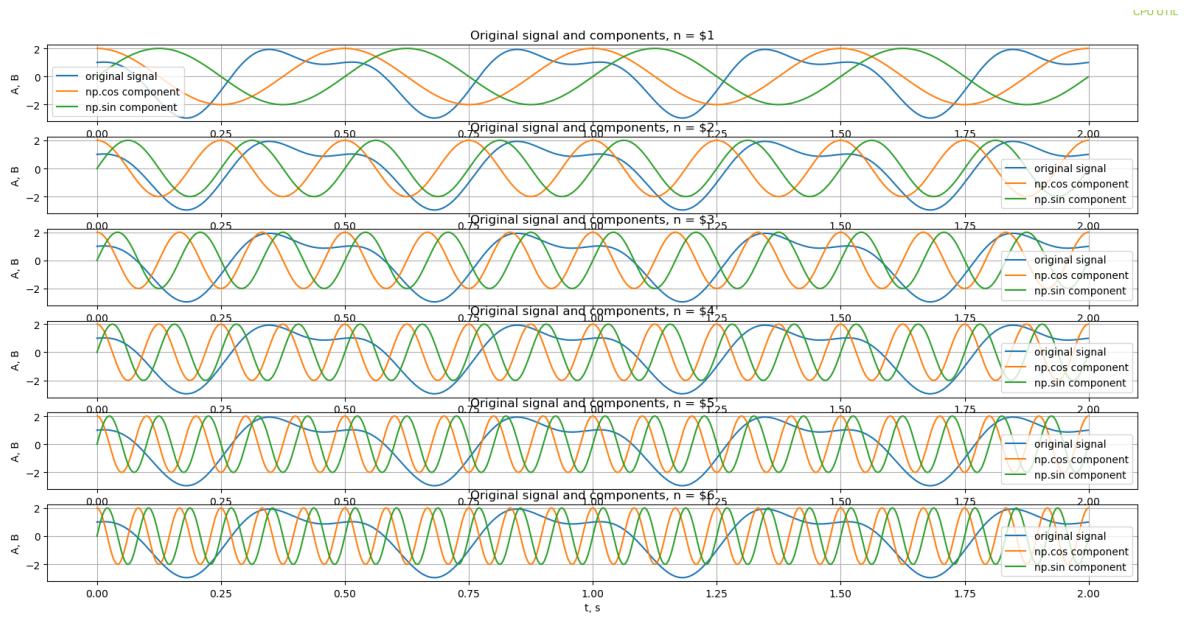


Рисунок 20 — Графики оригинального сигнала и компонент

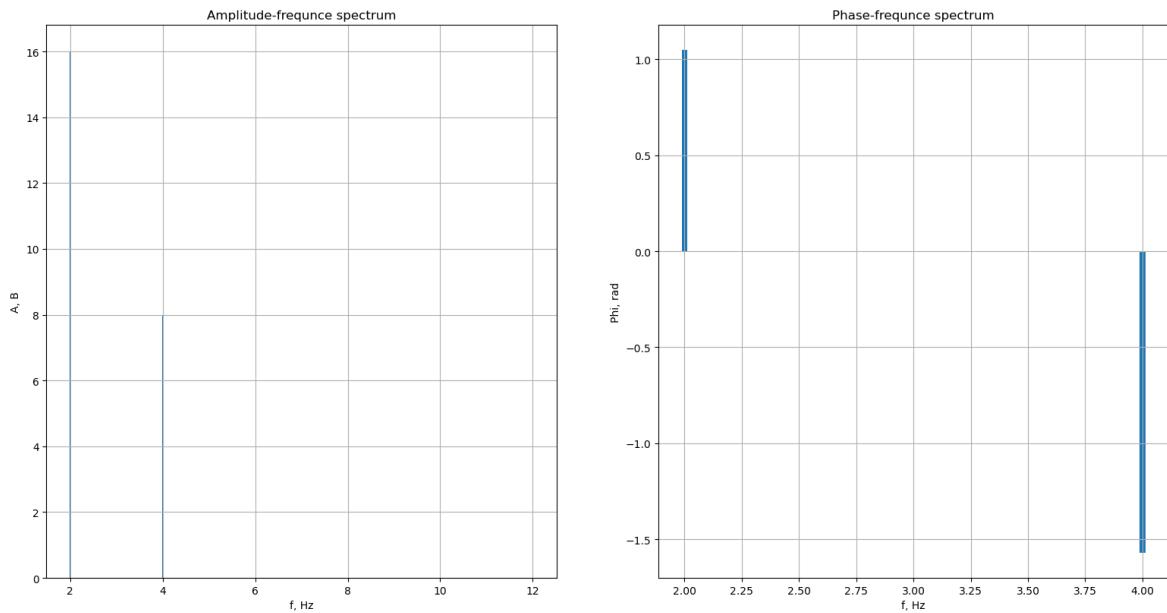


Рисунок 21 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 2 компоненты с часоттой 2 и 4 Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал. На ФЧХ видим фазу $\pi/3$ для компоненты на 2Гц и $-\pi/3$ на 4 Гц, точно такой сигнал я и задавал.

Здание 4: прямоугольный сигнал

Релизация задания в файле **task4.py**

Результат:

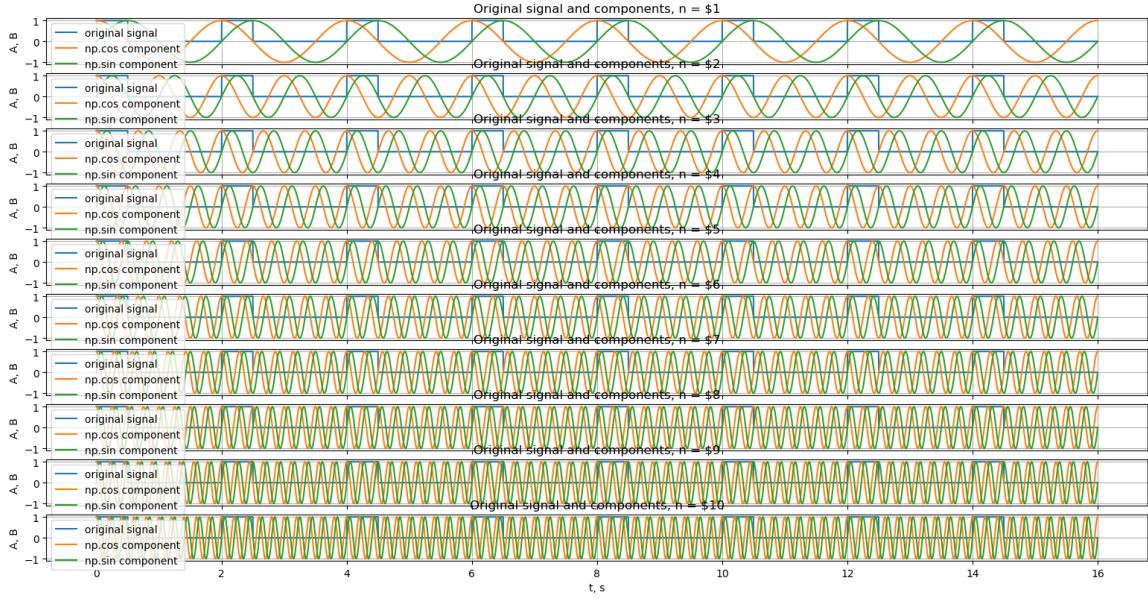


Рисунок 22 — Графики оригинального сигнала и компонент

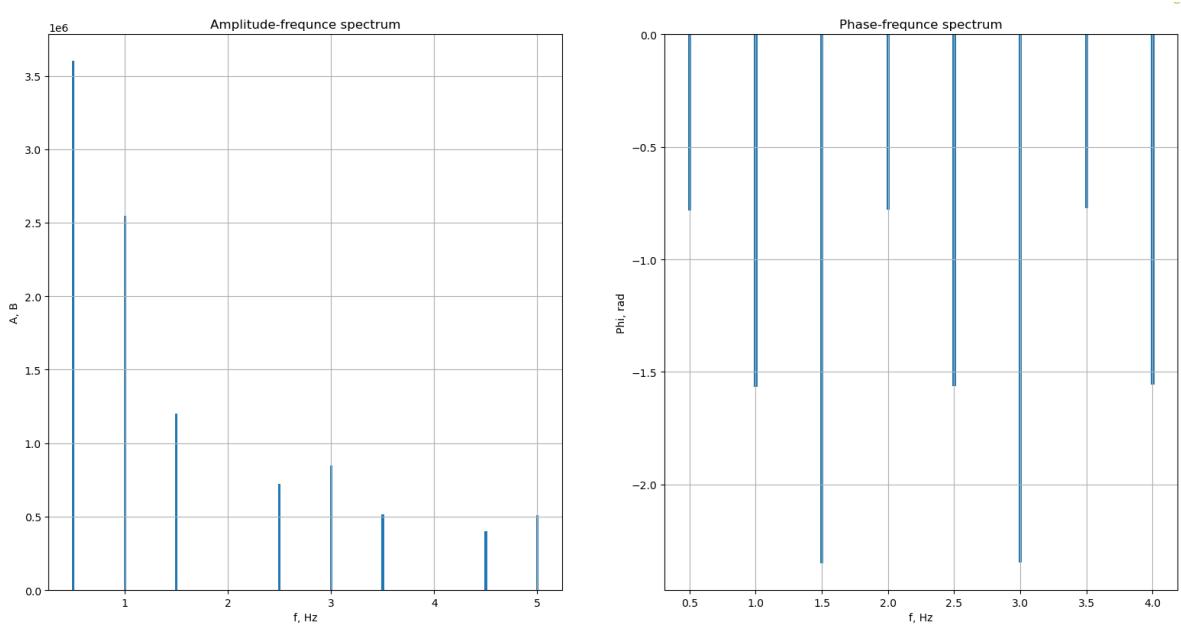


Рисунок 23 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 2 компоненты с часоттой 2 и 4 Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал. На ФЧХ видим фазу $\pi/3$ для компоненты на 2Гц и $-\pi/3$ на 4 Гц, точно такой сигнал я и задавал.

Теперь по полученным фазам и амплитудам попытаемся восстановить сигнал:

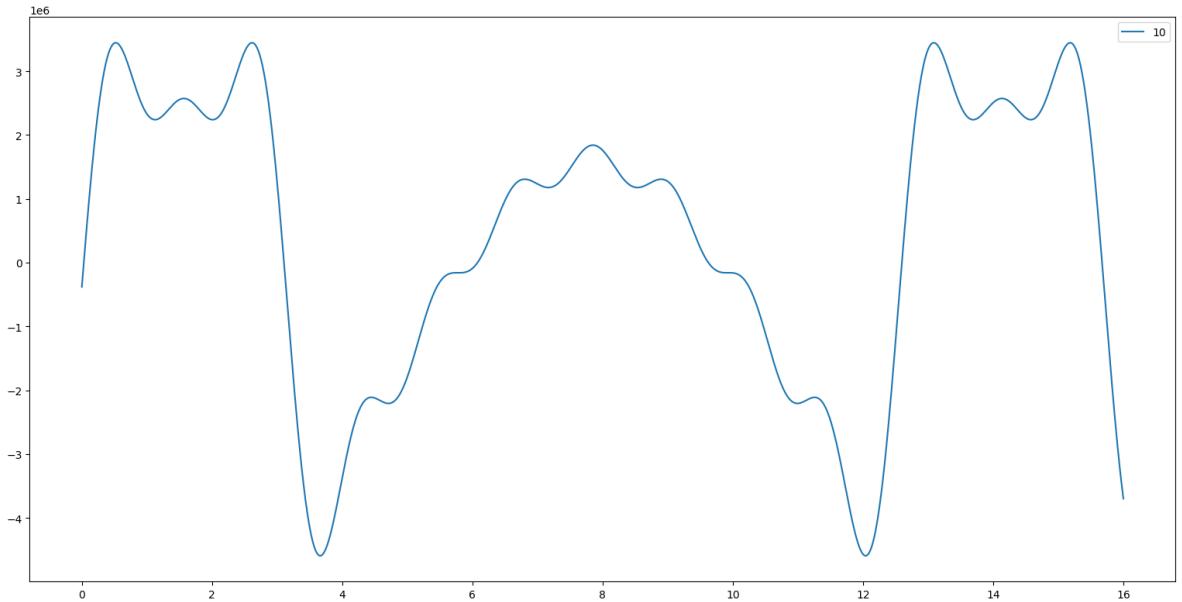


Рисунок 24 — Пример восстановленного сигнала

Сигнал не очень похож на прямоугольный, но можно заметить, что по бокам он начинает приобретать прямоугольную форму.

Задание 5: проверка ортогональности сигнала

Реализация задания в файле **task5.py**

Результат:

```

k = -6, n = 6      Integral = -0.125
k = 4, n = 4       Integral = 0.12500000000000006
k = -2, n = -3     Integral = 3.0531133177191803e-19
k = 3, n = -5      Integral = -3.4305891460917337e-17
k = 5, n = 2       Integral = -2.1593837828959295e-17
k = 7, n = 5       Integral = 1.7763568394002505e-18

```

Рисунок 25 — Проверка ортогональности при интегрировании по периоду

k и n - коэффициенты при частотах \sin сигналов, у которых проверяется ортогональность.

Заметим, что интеграл не равен нулю, когда n и k равны по модулю. Из этого можно сделать вывод о том, что $2 \sin$ сигнала ортогональны, если их частоты по модулю не равны.

Теперь сменим границы интегрирования. До этого интеграл был от 0 от T , теперь будет от 0 до $T+0.3$:

$k = -6, n = 6$	Integral = -0.2735806752965467
$k = 4, n = 4$	Integral = 0.2760045202181489
$k = -2, n = -3$	Integral = 0.019092418012882736
$k = 3, n = -5$	Integral = -0.007302351384024718
$k = 5, n = 2$	Integral = -0.005562230921944577
$k = 7, n = 5$	Integral = 0.0048785064624226335

Рисунок 26 — Проверка ортогональности при интегрировании не по периоду

Можем заметить, что интегралы ненулевые. Из этого следует, что ортогональность соблюдается только при рассмотрении сигналов на периоде.

Примечание: целых нулевых значений не получилось из-за ошибок округления и прочего. Числа с e^{-n} - машинный 0.

Задание 6: разложение в комплексный ряд Фурье периодического прямоугольного сигнала

Вычислим разложение в ряд Фурье для сигнала с разными параметрами:



Графика 3

$$1) T = 0,1c; \tilde{T} = 0,05c; U = 1$$

$$\frac{\tilde{T}}{T} = \frac{0,05c}{0,1c} = 0,5$$

$$C_n = \frac{U\tilde{T}}{T} \cdot \frac{\sin(\pi n \frac{\tilde{T}}{T})}{\pi n \cdot \frac{\tilde{T}}{T}}$$

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0,5 \cdot \frac{\sin(0,5\pi)}{0,5\pi} \approx 0,31$$

$$C_2 = 0,5 \cdot \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$$

$$C_3 = 0,5 \cdot \frac{\sin(1,5\pi)}{\pi} \approx -0,1$$

$$C_4 = 0,5 \cdot \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} = 0$$

$$C_5 = 0,5 \cdot \frac{\sin(2,5\pi)}{2,5\pi} \approx 0,063$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}$$

$$C_6 = 0,5 \cdot \frac{\sin(3\pi)}{3\pi} = 0$$

$$2) T = 0,1c; \tilde{T} = 0,025c; U = 1$$

$$\frac{\tilde{T}}{T} = \frac{0,025c}{0,1c} = 0,25$$

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0,25 \cdot \frac{\sin(0,25\pi)}{0,25\pi} \approx 0,23$$

$$C_2 = 0,25 \cdot \frac{\sin(0,5\pi)}{0,5\pi} \approx 0,16$$

$$C_3 = 0,25 \cdot \frac{\sin(0,75\pi)}{0,75\pi} = 0,045$$

$$C_4 = 0,25 \cdot \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$$

$$C_5 = 0,25 \cdot \frac{\sin(1,25\pi)}{1,25\pi} \approx -0,05$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}$$

$$C_6 = 0,25 \cdot \frac{\sin(1,5\pi)}{1,5\pi} \approx -0,053$$

3) $T = 0,2 \text{ s}$, $\tilde{T} = 0,05 \text{ s}$; $U = 1$

$$\frac{\tilde{T}}{T} = 0,25$$

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0,25 \cdot \frac{\sin(0,25\pi)}{0,25\pi} \approx 0,23$$

$$C_2 = 0,25 \cdot \frac{\sin(0,5\pi)}{0,5\pi} \approx 0,16$$

$$C_3 = 0,25 \cdot \frac{\sin(0,75\pi)}{0,75\pi} = 0,045$$

$$C_4 = 0$$

$$C_5 = 0,25 \cdot \frac{\sin(1,25\pi)}{1,25\pi} \approx -0,05$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} = 5 \text{ Hz}$$

$$C_6 = 0,25 \cdot \frac{\sin(1,5\pi)}{1,5\pi} \approx -0,053$$

Построим график АЧХ:

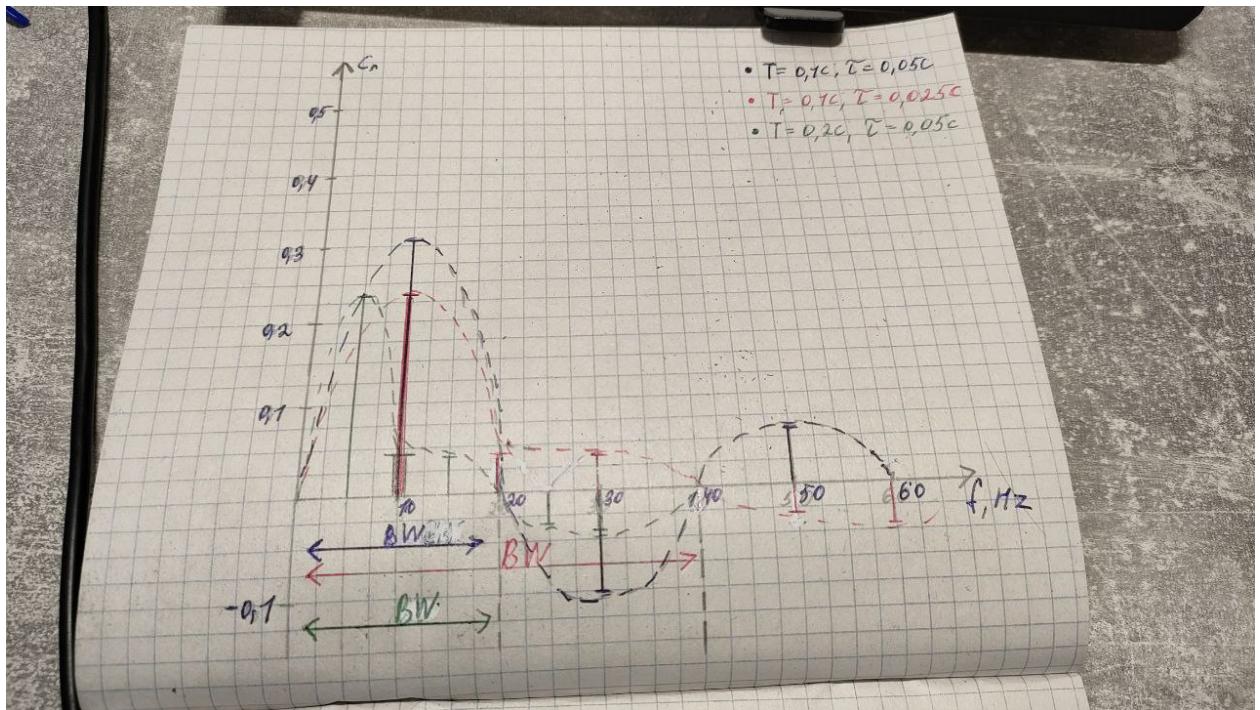


Рисунок 29 — График АЧХ

Можем заметить, что при уменьшении τ в 2 раза ширина спектра увеличилась вдвое, т.е ширина спектра обратно пропорциональна τ . При этом в спектре сигнала стало больше гармоник, и у каждой амплитуда стала меньше (энергия перераспределилась).

Еще можно заметить, что при увеличении периода Т число гармоник не меняется, их амплитуды тоже остаются прежними, но сами гармоники сдвинулись в область низких частот. Ширина спектра остается прежней.

ВЫВОД

В ходе работы я познакомился с удобным и полезным инструментом, используемый в ЦОС и связи, который называется ряд Фурье, реализовал алгоритм преобразования Фурье на Python, построил по полученным рассчетам АЧХ и ФЧХ сигнала. Изучил ортогональность сигналов, произвел рассчеты, узнал, в каких случаях сигналы будут ортогональны, а в каких нет. Познакомился с разложением Фурье для периодических прямоугольных сигналов.