

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ
КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств
(ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине
Теория массового обслуживания

по теме:
БЕЛЫЙ ШУМ И СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Студент:
Группа ИА-331

Я.А Гмыря

Предподаватель:

Преподаватель

А.В Андреев

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ	3
2 ТЕОРИЯ.....	6
3 БЕЛЫЙ ШУМ	9
4 СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ.....	12
5 СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ С ЗАТУХАНИЕМ	17
6 ВЫВОД	18

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель: Изучение концепции, лежащие в основе теории случайных процессов и получить навыки генерирования случайных блужданий и белого шума.

Задачи:

Задание к лабораторной работе

- 1. Белый шум.** Создайте .m файл в MATLAB и сгенерируйте в нём матрицу Ξ как в выражении (3.1) с K реализациями случайного процесса $\xi[n]$, $n = 1, \dots, N$. Возьмите N и $\xi[n] \sim N(\mu, \sigma)$ белый гауссовский шум (вариант в таблице 3.1). Постройте график среднего по ансамблю $\tilde{\mu}_\xi[n]$ как функцию от n , усредняя строки в Ξ . Постройте на том же полотне график усреднения по каждой реализации. Определите, является ли процесс эргодическим по среднему.
- Постройте диаграммы рассеяния со значениями $\xi[n_i]$ и $\xi[n_j]$ по осям для трёх разных пар (n_i, n_j) в соседних subplot на одном полотне. Определите, являются ли данные случайные величины коррелированными, рассчитав выборочную корреляцию $\tilde{r}_\xi(n_i, n_j)$. Представьте результаты в отчёте.
- Случайные блуждания. Теоретический расчёт.** Используя выражение (3.2), определите, чему будет равно $\mu_\xi[n]$ случайного блуждания для каждого n . Запишите результат в отчёте.
- СКО случайного блуждания.** С учётом того, что $\xi[0] = 0$ и $\xi[1] = \omega[1]$, где $M[\xi^2[1]] = \sigma_\omega^2$, выведите формулу для расчёта СКО $\sigma_\xi = M[\xi^2[n]]$ при $\sigma_\omega^2 = 1$. Определите поведение при $n \rightarrow \infty$.
- Автокорреляция.** Рассчитайте автокорреляционную функцию $r_\xi(n, n - 1)$, перемножив выражение (3.2) на $\xi[n - 1]$ и взяв математическое ожидание. Рассчитайте $r_\xi(n, n_2)$ и обобщите $r_\xi(n, n - l)$ для любого $l > 0$. Определите, является ли процесс стационарным в широком смысле. Запишите выражение для нормированного

коэффициента корреляции и проанализируйте поведение при фиксированном l при $n \rightarrow \infty$.

6. В новом .m файле создайте матрицу размера $N \times K$ по правилу (3.2) согласно варианту таблицы 3.2. Постройте график всех реализаций на одном полотне и объясните результат. Сгенерируйте скаттерограммы для пар $(\xi[n_i], \xi[n_j])$, где $(n_i, n_j) \in \{(10,9), (50,49), (100,99), (200,199)\}$ и $(n_i, n_j) \in \{(50,40), (100,90), (200,190)\}$ на двух соседних графиках с разными цветами для каждой пары. Сравните с теоретическими результатами и сделайте выводы.
7. Рассчитайте выборочную автокорреляцию по ансамблю $\hat{r}_\xi(n, n - 1)$ как функцию от n , усредняя значения $\xi[n]$ и $\xi[n - 1]$ по строкам матрицы Ξ . Постройте график совместно с теоретическими значениями $r_\xi(n, n - 1)$. Оцените, насколько экспериментальные и теоретические данные совпадают. Обсудите возможность оценки автокорреляции по одной реализации.
8. **Случайные блуждания с затуханием.** Теоретически рассчитайте значения $\sigma_\xi[n]$ в зависимости от $\sigma_\xi[n - 1]$ (рекурсивно) и в общем виде по выражению (3.3). Рассчитайте автокорреляционную функцию $r_\xi(n, n - l) = M[\xi[n]\xi[n - l]]$. Определите, является ли процесс стационарным, и что происходит при $n \rightarrow \infty$.
9. В новом .m файле создайте матрицу $N \times K$ по правилу (3.3) согласно варианту таблицы 3.2. Постройте график всех реализаций на одном полотне. Сгенерируйте скаттерограммы для пар $(\xi[n_i], \xi[n_j])$, где $(n_i, n_j) \in \{(10,9), (50,49), (100,99), (200,199)\}$ и $(n_i, n_j) \in \{(50,40), (100,90), (200,190)\}$. Сравните с результатами пункта 6 и проанализируйте различия.
10. Рассчитайте выборочную автокорреляцию по ансамблю $\hat{r}_\xi(n, n - 1)$ для процесса с затуханием по аналогии с заданием 7. Постройте график совместно с теоретическими значениями $r_\xi(n, n - 1)$. Сравните результаты для белого шума, случайного блуждания и случайного блуждания с затуханием, оцените влияние параметров K и N и проверьте гипотезу о равенстве среднего по времени и среднего по ансамблю для разных лагов.

Таблица 3.1. Белый гауссовский шум

Вариант	N	K	μ	σ
1	200	200	2	10
2	200	400	4	8
3	300	600	6	4
4	400	800	8	2
5	500	1000	10	1
6	600	200	12	10
7	700	400	14	8
8	800	600	16	4
9	900	800	18	2
10	1000	1000	20	1

Таблица 3.2. Случайные блуждания

Вариант	N	K	μ	σ	l_1	l_2
1	200	200	0	1	1	10
2	200	400	0	1	2	20
3	300	600	0	1	3	30
4	400	800	0	1	4	40
5	500	1000	0	1	5	50
6	600	200	0	1	6	60

ТЕОРИЯ

Теория:

Основные сведения

Случайные процессы встречаются практически во всех областях инженерных наук, включая биомедицинскую инженерию. Это особенно характерно при работе с данными, полученными в ходе реальных экспериментов, при помощи неидеальных датчиков и при влиянии внешних факторов. Для получения навыков работы со случайными сигналами, необходимо понимать их поведение на примере моделей этих процессов. В данной лабораторной работе рассматриваются основные концепции для описания случайных процессов и изучается природу случайных процессов.

Примечание. Для выполнения лабораторной работы необходимы базовые знания в области теории случайных процессов и теории вероятностей. Необходимо знать понятия: закон распределения, стационарность, эргодичность.

Белый шум

Случайный процесс в дискретном времени – это последовательность случайных переменных. Случайный процесс $\xi(t)$ имеет две размерности; переменная t принимает значения 0, 1, 2, ..., при которых реализация выбирается из непрерывного пространства состояний в соответствии с распределением. Простейшим случайнм процессом является белый гауссовский шум, который представляет собой последовательность некоррелированных случайных переменных с нормальным распределением.

В дальнейшем в этой работе будем обозначать отсчеты времени через n (по аналогии с t), временной сдвиг (лаг) через l (по аналогии с τ).

Для демонстрации двумерной природы случайного процесса мы можем представить матрицу Ξ , размерности $N \times K$:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1[1] & \dots & \xi_K[1] \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1[N] & \dots & \xi_K[N] \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Таким образом, n -ая строка Ξ содержит K различных реализаций выборки

$\xi[n]$, где столбец k – это одна реализация всей последовательности

Рисунок 2 — Теория для лабораторной работы

{ $\xi[1], \dots, \xi[N]\}$ }, индексируемой номером реализации k.

Мы можем рассчитать среднее по ансамблю:

$$\mu_\xi[n] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi_k[n]$$

А также среднее по времени для k-й реализации:

$$\tilde{\xi}_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_k[n]$$

Как правило, на практике мы берем выборки из пространства событий вместо того, чтобы считать это пространство непрерывным. В большинстве случаев это пространство непрерывно и теоретические средние по ансамблю считаются посредством интеграла, а не суммы. Сейчас мы не рассматриваем разницу между этими случаями (непрерывный, дискретный случайный процесс).

Важной концепцией случайных процессов является эргодичность, которая означает, что статистические характеристики случайного процесса, полученные в ходе усреднения по времени, равны полученным при усреднении по ансамблю. Для этого необходимо, чтобы $\mu_\xi[n] = \mu_\xi$ независимо от n, и $\tilde{\xi}_k = \tilde{\xi}$ независимо от k. Эргодичность связана со стационарностью в широком смысле.

Важной характеристикой случайного процесса является выборочная корреляция по ансамблю:

$$\hat{r}_\xi(n_i, n_j) = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K \xi_k[n_i] \xi_k[n_j]$$

Мы называем ее «выборочной», поскольку K конечно, настоящее среднее по ансамблю $r_\xi(n_i, n_j) = M[\xi(n_i)\xi(n_j)]$ будет получено при $K \rightarrow \infty$.

Также важное значение играет нормированный коэффициент корреляции:

$$\rho_\xi(n, n-l) = -\frac{r_\xi(n, n-l)}{\sqrt{\sigma_\xi(n)\sigma_\xi(n-l)}}$$

Рисунок 3 — Теория для лабораторной работы

Случайные блуждания (винеровский процесс)

Для задания процесса со случайными блужданиями необходимо рекурсивно генерировать последовательность:

$$\xi[n] = \xi[n - 1] + \omega[n], \quad (3.2)$$

где $\omega[n] \sim N(\mu, \sigma)$.

Положим, мы имеем дискретную случайную величину X , которая принимает конечное или счетное число значений $\{x_i\}$, $i=1, 2, \dots, n$ с

24

вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ (в общем случае, n может быть равно ∞).

Случайные блуждания с затуханием

Случайные блуждания с поглощением являются стационарным случайнм процессом и могут быть заданы следующим выражением:

$$\xi[n] = 0.9\xi[n - 1] + \omega[n], \quad (3.3)$$

где $\omega[n] \sim N(\mu, \sigma)$. Также, как и случайные блуждания, этот процесс является авто-регрессионным (AR) процессом первого порядка.

Так как данный процесс является стационарным для больших значений n , среднее по времени должно быть равно среднему по ансамблю. Тогда автокорреляция может быть рассчитана по одной реализации:

$$\hat{r}_\xi(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=l}^N \xi[n]\xi[n - l].$$

Рисунок 4 — Теория для лабораторной работы

БЕЛЫЙ ШУМ

Что такое белый (гауссовский) шум?

Белый шум (гауссовский шум) - простейший случайный процесс, который представляет собой последовательность некоррелированных случайных переменных с нормальным распределением. Эргодичен и стационарен.

Что такое эргодичный случайный процесс?

Эргодичный случайный процесс - случайный процесс, у которого среднее по времени и ансамблю в теории совпадают (при бесконечном числе измерений), но на деле немного отличаются, т.к бесконечное число измерений получить невозможно.

Что такое среднее по ансамблю?

Среднее по ансамблю - это математическое ожидание случайного процесса, вычисленное по множеству разных реализаций (ансамблю) в фиксированный момент времени. Иными словами: у нас есть мн-во реализаций процесса (выборок) для одного и того же отсчета (момента времени), допустим для отсчета $n = 3$. Мы суммируем все значения реализаций в момент времени $n = 3$ и делим на общее кол-во реализаций. Это и будет средним по ансамблю. При вычислении нужно суммировать строки.

Что такое среднее по времени?

Среднее по ансамблю - это математическое ожидание случайного процесса, вычисленное по множеству разных отсчетов (моментов времени) в фиксированной реализации (выборке). Иными словами: у нас есть единственная реализация в разные моменты времени. Мы суммируем значения СП во все моменты времени и делим на кол-во отсчетов (моментов времени). При вычислении суммируем столбцы.

Что нам дает эргодичность?

Часто необходимо знать, как будет себя вести случайный процесс, но это достаточно сложно, т.к процесс все-таки случаен и будет вести себя в каждой выборке по-разному. Если СП обладает таким свойством, как эргодичность, то это во многом упрощает эту задачу, т.к среднее по реализациям (ансамблю) равно среднему по времени (в теории), т.е мы можем взять всего одну реализацию (выборку) и ее среднее (мат.ожидание) будет одинаковым (в теории) для всех реализаций.

Что такое стационарность СП?

Стационарность — это свойство случайного процесса, при котором его статистические характеристики не зависят от времени. Процесс называется стационарным в строгом смысле, если его любые вероятностные характеристики не зависят от сдвига во времени. Процесс называется стационарным в слабом смысле, если математическое ожидание, дисперсия и ковариация (при условии, что она зависит только от лага (разности во времени)) не зависят от сдвига во времени. Любой эргодический процесс - стационарен, но не каждый стационарный процесс эргодичен.

Реализация:

```
1 % define params
2 N = 600; % samples
3 K = 200; % realizations
4 mu = 12; % avg
5 sigma = 10; % SKO
6
7 % create matrix with realization N(mu, sigma), where (N - rows, K - cols)
8 realization_matrix = mu + sigma * randn(N,K);
9
10 % compute avg ensemble
11 avg_ensemble = mean(realization_matrix, 2);
12
13 % compute avg realization
14 avg_realization = mean(realization_matrix, 1)';
15
16 % create plots for comparison
17
18 rows = 1 : 1 : N;
19 cols = 1 : 1 : K;
20
21 subplot(2, 1, 1);
22 plot(rows, avg_ensemble);
23 xlabel("ensemble");
24 ylabel("avg");
25 title("avg ensemble");
26 grid on;
27
28 subplot(2, 1, 2);
29 plot(cols, avg_realization);
30 xlabel("time (sample)");
31 ylabel("avg");
32 title("avg time");
33 grid on;
34
35 % build scatter for realization_matrix(n_i) and realization_matrix(n_j)
36 ni = [10, 50, 100];
37 nj = [25, 87, 153];
38
39 for k = 1:3
40 subplot(1, 3, k);
41 scatter(realization_matrix(ni(k), :), realization_matrix(nj(k), :), 'filled');
42 r = corr(realization_matrix(ni(k), :)', realization_matrix(nj(k), :)');
43
44 xlabel(['\'xi' num2str(ni(k)) '\'']);
45 ylabel(['\'xi' num2str(nj(k)) '\'']);
46 title(sprintf('scatter plot for n_i=%d, n_j=%d, r=%f', ni(k), nj(k), r));
47 grid on;
48 end
```

Рисунок 5 — Реализация задания для белого шума

Результат:

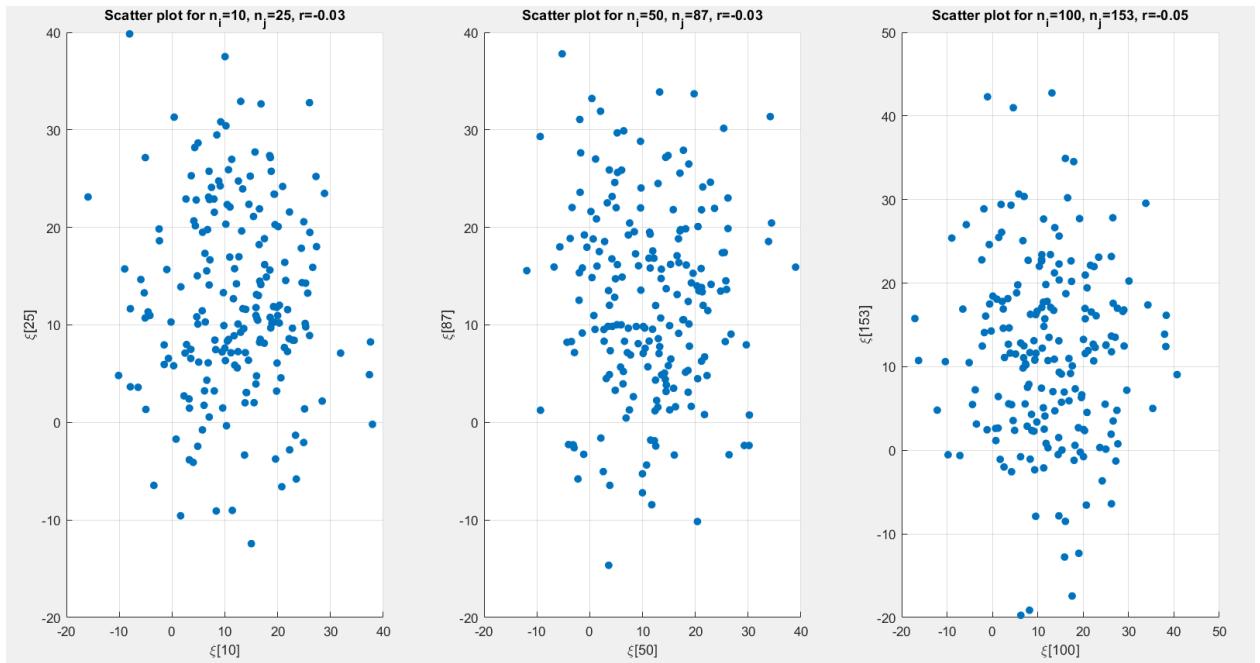


Рисунок 6 — Результат задания для белого шума

Сверху изображена диаграмма рассеяния, где показана зависимость между реализациями процесса в разные моменты времени. Точки расположены хаотично, что указывает на то, что в каждый момент времени все реализации некоррелированные, т.е поведение одной реализации не зависит от поведения другой (что и сказано в определении белого шума). Над каждым графиком указана коореляция, которая почти равна нулю, что подтверждает выше сказанное.

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Что такое случайные блуждания?

Случайное блуждание - последовательность, построенная по следующей рекурентной формуле:

$$\xi[n] = \xi[n - 1] + \omega[n], \quad (3.2)$$

где $\omega[n] \sim N(\mu, \sigma)$.

Рисунок 7 — Рекурентная формула случайного блуждания

где $\omega[n] = N(u, \sigma)$, а $\xi[0]$ как правило берется равным нулю.

Чему будет равно математическое ожидание случайного блуждания?

Если $\xi[0] = 0$, то

$$\xi[n] = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_n = N(u, \sigma) + N(u, \sigma) + N(u, \sigma) \dots = nN(u, \sigma)$$

Логично, что $M\{N(u, \sigma)\} = u$, поэтому

$$M\{\xi[n]\} = nu$$

Если u не равно 0 (как в моем случае), то мат.ожидание линейно зависит от кол-ва измерений (отсчетов). Это лучше всего иллюстрируют два рисунка ниже:

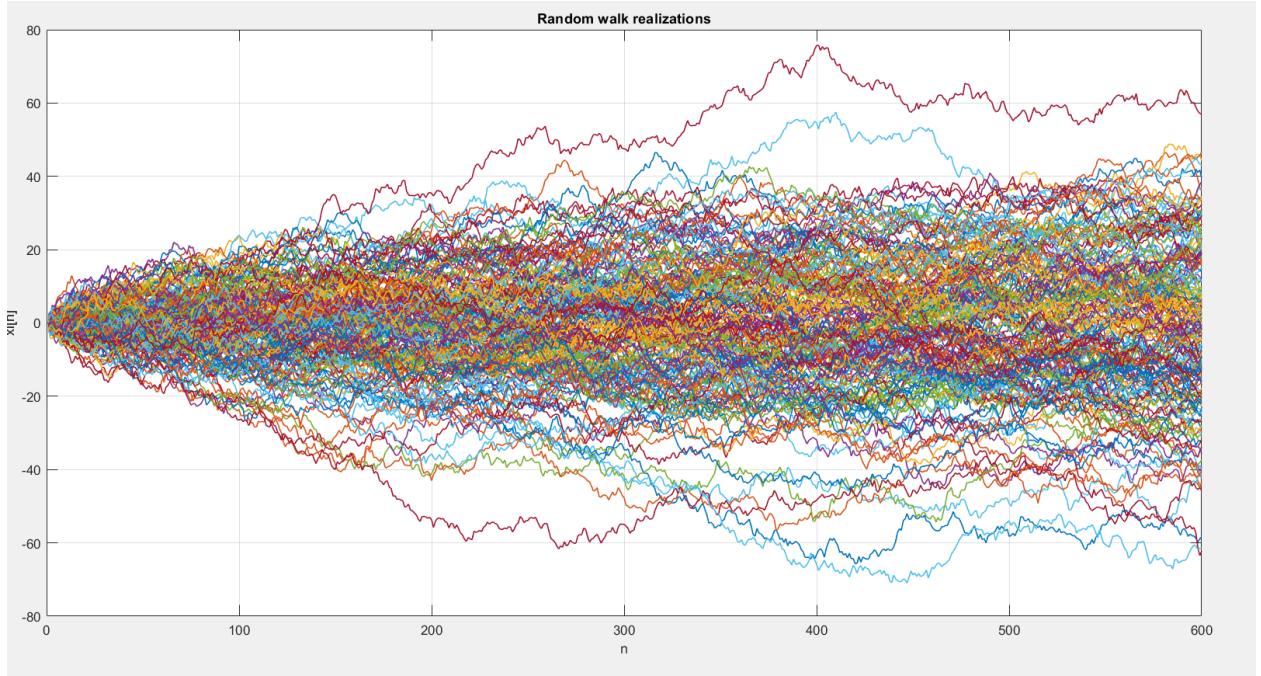


Рисунок 8 — Мн-во реализаций СБ при $u = 0$

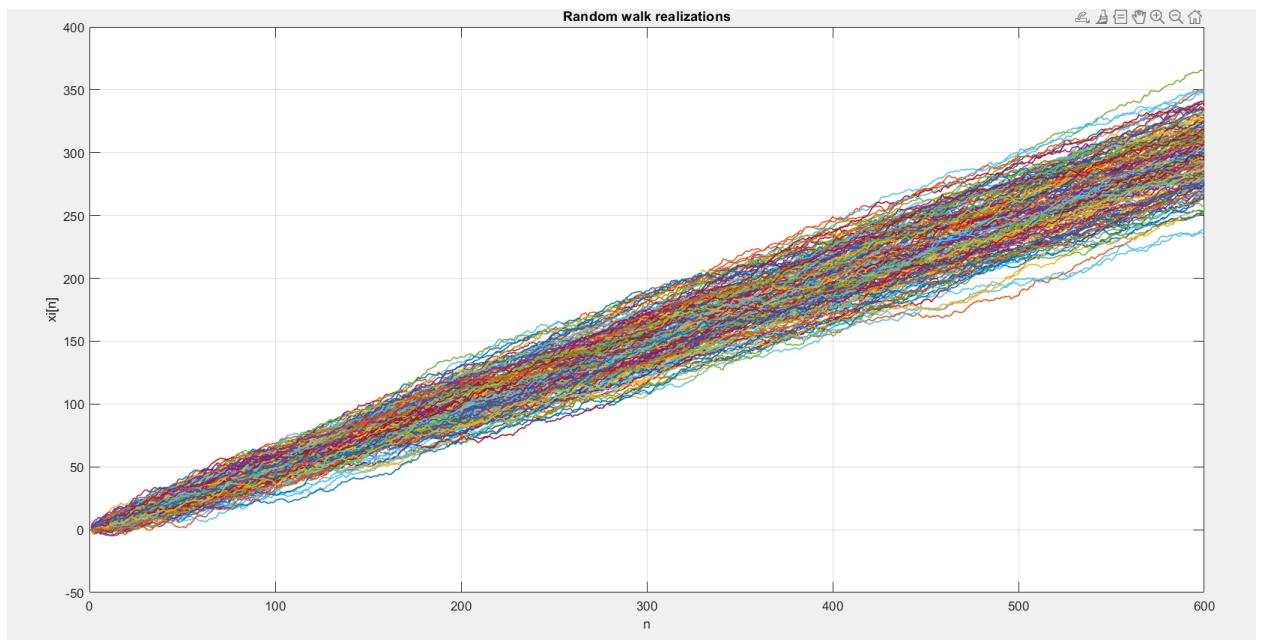


Рисунок 9 — Мн-во реализаций СБ при $u = 0.5$

Если u не равно 0, то оно будет вести себя, как линейная функция с некоторым наклоном, и значения СБ будут сконцентрированы вокруг этой наклонной линии.

Чему будет равно СКО случайного блуждания?

Если $\xi[0] = 0$, то

$$\xi[n] = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_n = N(u, \sigma) + N(u, \sigma) + N(u, \sigma) \dots = nN(u, \sigma)$$

$$VAR\{\xi[n]\} = nVAR\{N(u, \sigma)\} = n\sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{n\sigma^2} = \sqrt{n}\sigma$$

Т.к в моем случае $\sigma = 1$, то:

$$\sigma = \sqrt{n}$$

Это значит, что СКО зависит от кол-ва измерений, т.е с увеличением измерений случайное блуждание будет расходиться. В моей программе кол-во измерений составляет 600. Я увеличу кол-во измерений до 1200 и зафиксирую изменения

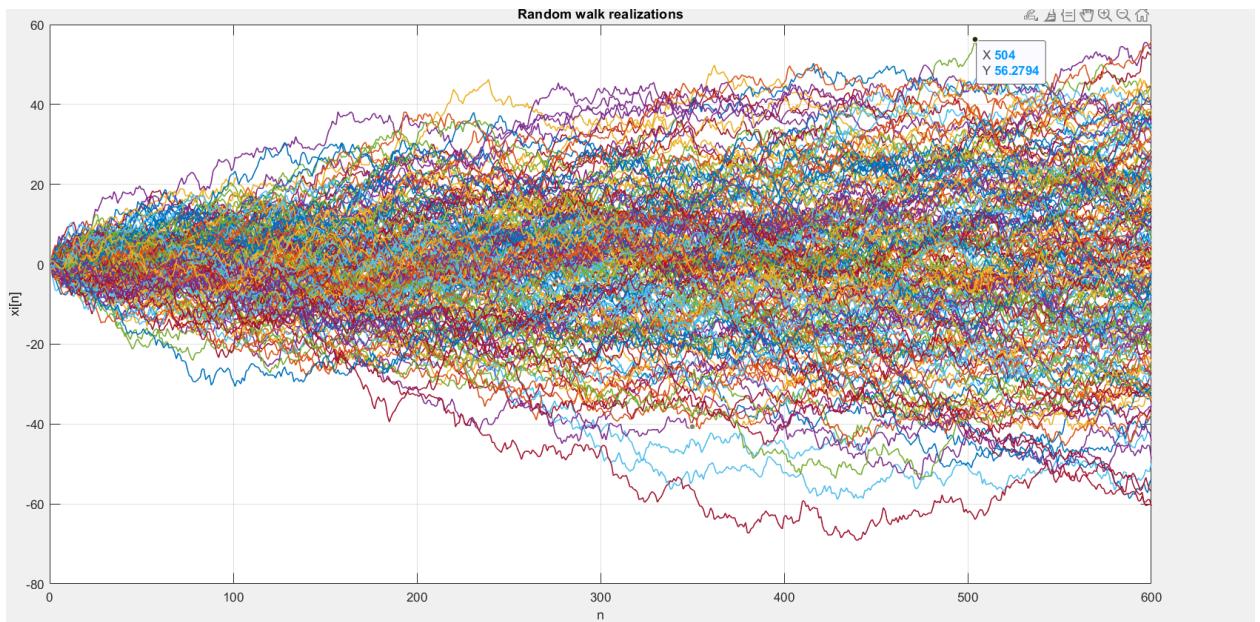


Рисунок 10 — Мн-во реализаций СБ при $N = 600$

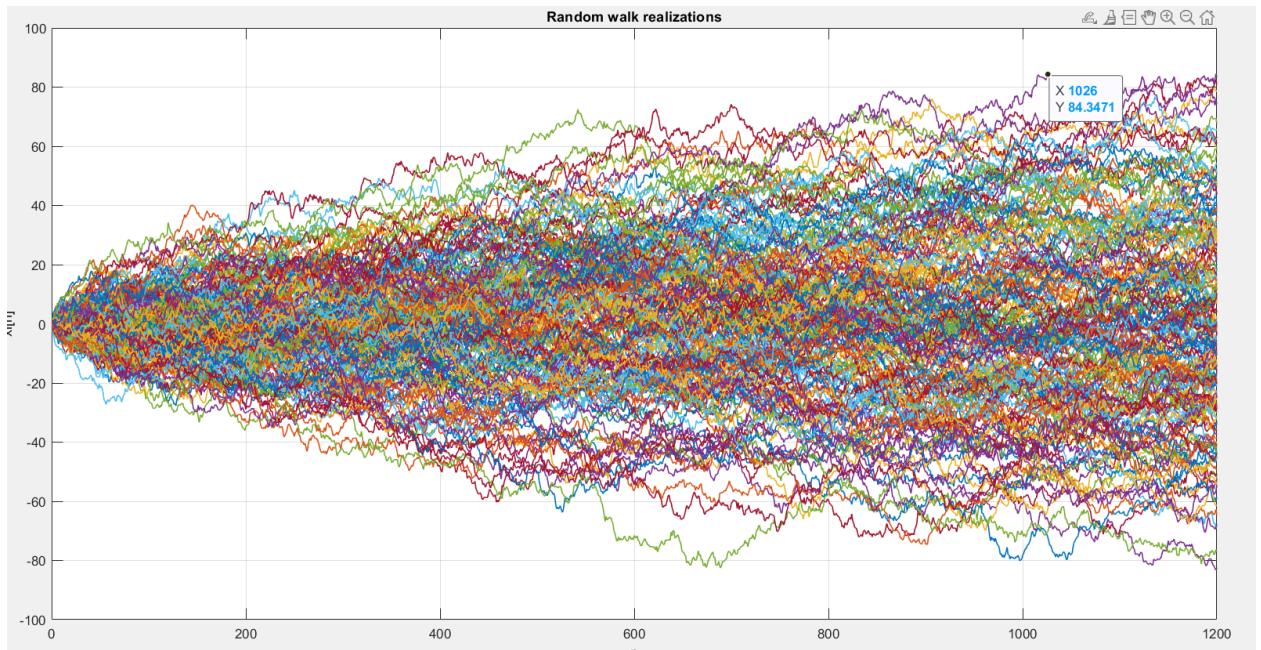


Рисунок 11 — Мн-во реализаций СБ при $N = 1200$

Во втором случае разброс значений (ско) выше, чем в первом, что подтверждает теорию.

Чему будет равна автокорреляция случайного блуждания?

Автокорреляция - корреляция между соседними точками процесса.

В нашем случае автокорреляция будет следующая:

$$r = M\{\xi[n] * \xi[n - 1]\}$$

Заметим, что $\xi[n] = \xi[n - 1] + \omega_1$, тогда

$$r = M\{(\xi[n - 1] + \omega_1) * \xi[n - 1]\} = M\{(\xi[n - 1])^2\} + M\{\xi[n - 1]\omega_1\}$$

Заметим, что $M\{(\xi[n - 1])^2\} = VAR\{\xi[n - 1]\} = (n - 1)\sigma^2$, $M\{\omega_1\} = u$, $M\{\xi[n - 1]\} = (n - 1)u$, тогда

$$r = (n - 1)\sigma^2 + (n - 1)u^2$$

В моем случае $u = 0$, поэтому

$$r = (n - 1)\sigma^2$$

Из этого можно сделать вывод, что в случайном блуждании автокорреляция зависит от n (момента времени или отсчета), а это значит, что процесс не стационарен, т.е будет изменять свои параметры с течением времени.

При лаге $l > 0$ получим такую же формулу:

$$r = (n - l)\sigma^2$$

Если захотим вычислить нормированный коэффициент корреляции, то получим

$$\rho_\xi(n, n - l) = \frac{r_\xi(n, n - l)}{\sqrt{\text{Var}[\xi[n]] \text{Var}[\xi[n - l]]}} = \frac{n\sigma_\omega^2}{\sqrt{n\sigma_\omega^2 \cdot (n - l)\sigma_\omega^2}} = \sqrt{\frac{n - l}{n}}.$$

При $n - l > \infty$ и фиксированном l выражение сверху будет стремиться к 1. Это значит, что с течением времени все соседние значения будут полностью зависимы.

Построим скаттерограммы (диаграммы рассеяния) случайного блуждания с лагами $l = 1$ и $l = 10$

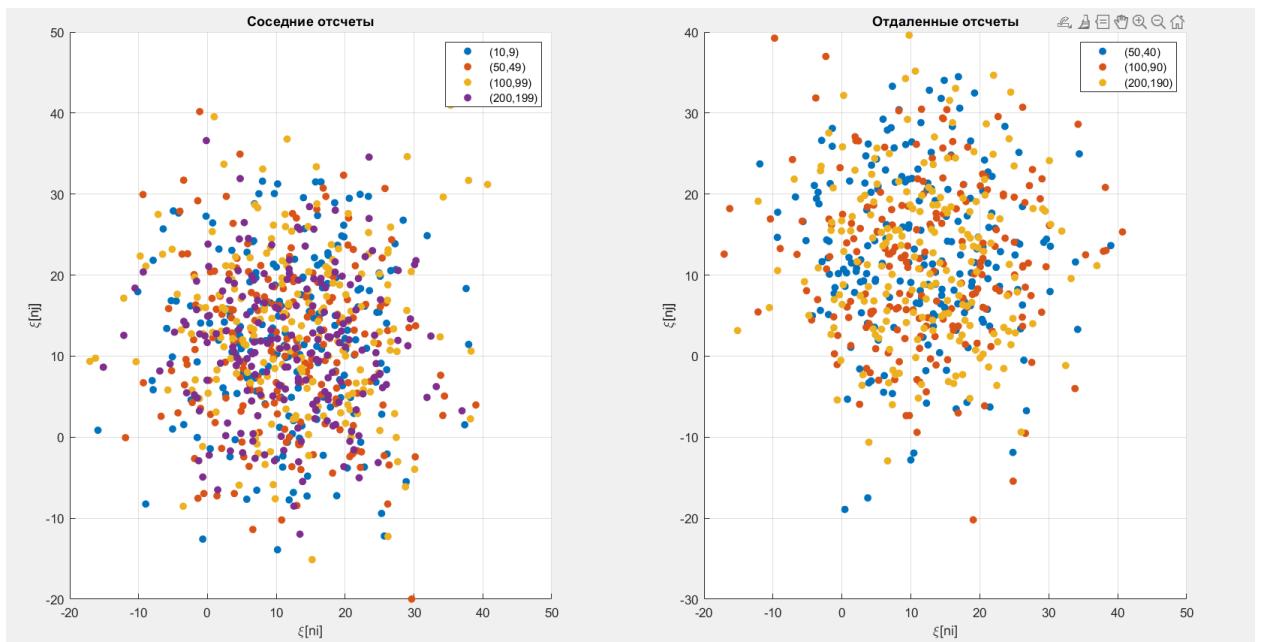


Рисунок 12 — Скаттерограммы для СБ с разными лагами

На графике слева точки более плотно сгруппированы возле диагонали, что указывает на более высокий коэффициент корреляции относительно графика справа. Это подтверждает теоретическую формулу о корреляции, т.к с увеличением лага уменьшается корреляция.

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ С ЗАТУХАНИЕМ

2. Математическое ожидание

Рекурсивное выражение:

$$\mathbb{E}[\xi[n]] = a \mathbb{E}[\xi[n-1]] + \mu$$

Решение рекурсии:

$$\mathbb{E}[\xi[n]] = a^n \mathbb{E}[\xi[0]] + \mu \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n \mathbb{E}[\xi[0]] + \frac{\mu(1-a^n)}{1-a}$$

Стационарное значение при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi[n]] = \frac{\mu}{1-a}$$

3. Дисперсия

Рекурсивное выражение:

$$\text{Var}[\xi[n]] = \text{Var}[a \xi[n-1] + \omega[n]] = a^2 \text{Var}[\xi[n-1]] + \sigma^2$$

Стационарная дисперсия при $n \rightarrow \infty$:

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\sigma^2}{1-a^2}$$

4. Автокорреляционная функция

$$r_\xi(l) = \mathbb{E}[\xi[n] \xi[n-l]] = \sigma_\xi^2 a^{|l|}, \quad |l| \geq 0$$

5. Стационарность

Процесс стационарен в широком смысле, так как при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi[n]] &= \frac{\mu}{1-a}, \\ \text{Var}[\xi[n]] &= \frac{\sigma^2}{1-a^2}, \\ r_\xi(l) &= \sigma_\xi^2 a^{|l|}. \end{aligned}$$

ВЫВОД

В ходе работы я изучил концепции, лежащие в основе теории случайных процессов и получил навыки генерирования случайных блужданий и белого шума.