МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств
(ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №2
по дисциплине
Теория массового обслуживания

по теме:
МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.В Андреев*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель: Получение знаний о генераторах случайных величин и их практической реализации. Работа также закрепляет практические навыки применения теории вероятности и основ статистического анализа.

Задачи:

Задание к лабораторной работе

1. Создайте `.m` файл в MATLAB и постройте алгоритм, который будет рассчитывать выборочные значения случайной переменной, заданной законом распределения соответственно вашему варианту (варианты задания представлены в таблице 2.1 в конце описания работы). Обратите внимание, что в таблице указаны формулы для плотности распределения. Для применения метода обратных функций необходимо сначала получить функции распределения, что можно сделать путем взятия интеграла от плотности распределения (на бумаге или при помощи специальной функции MATLAB).
2. Сгенерируйте три выборки случайной величины следующих размеров: $N = 50$, $N = 200$, $N = 1000$.
3. Рассчитайте точечные оценки среднего, дисперсии и среднеквадратического отклонения (СКО).
4. Рассчитайте интервальные оценки среднего и дисперсии для уровней значимости α: 0.1, 0.05 и 0.01 (всего 18 чисел для среднего и 18 чисел для дисперсии).
5. Сведите все результаты, полученные в пунктах 3 и 4, в таблицы и сохраните их для отчета.
6. Постройте гистограммы, описывающие закон распределения случайной величины по каждой из трех выборок. Для построения гистограммы необходимо разделить интервал, на котором распределена величина, на заданное количество подынтервалов, и рассчитать количество попаданий сгенерированных значений величины в полученные подынтервалы. Высота гистограммы на каждом из подын-

тервалов определяет количество попаданий. Рекомендуется брать подынтервалы одинакового размера. Для расчета подходящего числа интервалов на гистограмме используется формула:

$$k = \lfloor 1 + 3.2 \cdot \ln(N) \rfloor$$

где k — число интервалов, N — величина выборки.

7. Постройте поверх каждой гистограммы график теоретической плотности распределения вероятности.
8. Создайте отдельный график, на котором постройте вместе теоретические функцию распределения вероятности и плотность распределения вероятности.
9. Сделайте выводы по полученным результатам (0,5 страницы).
10. Повторите шаги 1–9 для дискретно распределенной случайной величины, учитывая, что некоторые шаги потребуют других вычислений (варианты законов распределения представлены в таблице 2.2). При построении гистограммы для дискретной переменной поместите теоретически заданный и эмпирически полученный законы распределения на одном графике. Если дискретная случайная величина распределена на интервале, равном бесконечности, гистограмму строят для первых 20–30 значений.
11. Сделайте выводы по лабораторной работе (0,5 страницы) и подготовьте отчет.

Вложение

Таблица 2.1. Непрерывные случайные величины

Вариант	Плотность распределения	Интервал распределния
1	0.25	[0; 4]
2	$\frac{x}{4.5}$	[0; 3]
3	$0.5e^{\frac{x}{2}}$	$[-\infty; 0]$
4	$\frac{1}{x \cdot ln10}$	(0; 10]
5	$1.5\sqrt{x}$	[0; 1]
6	$\frac{3x^2}{8}$	[0; 2]
7	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	[1;4]
8	$\frac{2}{x^3}$	$[1; \infty]$
9	$\sin(x)$	$[0; \frac{\pi}{2}]$
10	$2\cos(2x)$	$[0; \frac{\pi}{4}]$

Таблица 2.2. Дискретные случайные величины

Вариант	Закон распределения
1	$P\{X = k\} = 0.2;\ k = 1, 2, 3, 4, 5$
2	$P\{X = ki\} = pi;\ p = \{0.1; 0.1; 0.8\};\ k = \{1; 5; 7\}$
3	$P\{X = ki\} = pi;\ p = \{0.05; 0.1; 0.05; 0.2; 0.6\};\ k = \{1; 2; 3; 4; 10\}$
4	$P\{X = ki\} = pi;\ p = \{0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05\}\ k = 4, 5, ..., 10$
5	$P\{X = k\} = 1/15;\ k = 1, 2, ..., 15$
6	$P\{X = k\} = 0.1^k(1 - 0.1);\ k = 0,1, ...$
7	$P\{X = k\} = \frac{3^k}{4^{k+1}};\ k = 0,1, ...$
8	$P\{X = k\} = 2^{-k-1};\ k = 0, 1, ...$
9	$P\{X = k\} = C_4^k 0.2^k \cdot 0.8^{4-k}\ ;\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

Рисунок 1 — Варианты заданий

ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ПО ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория:

Оценка среднего и дисперсии

Имея ряд сгенерированных значений случайной величины, мы можем рассчитать точечные оценки среднего и дисперсии случайной величины, а также доверительные интервалы этих оценок. Положим, мы имеем N независимых значений случайной величины X.

Точечная оценка математического ожидания рассчитывается с помощью следующей формулы:

$$M_N^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (2.3)$$

Точечная оценка дисперсии может быть рассчитана следующим образом:

$$D_N^* = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \qquad (2.4)$$

Примечание. В MATLAB имеются специальные функции для вычисления данных оценок. Используйте справку MATLAB, чтобы найти их.

В случае, если мы знаем дисперсию реального значения и число N достаточно большое ($N > 30$), чтобы посчитать закон распределения выборки равным распределению Стьюдента, мы можем использовать следующее выражение для нахождения интервальной оценки среднего:

$$\left[M_N^* - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{N-1}\frac{S}{\sqrt{N}};\ M_N^* + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{N-1}\frac{S}{\sqrt{N}}\right] \qquad (2.5)$$

Где S – выборочная дисперсия; $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{N-1}$ – коэффициент Стьюдента для ($N - 1$) степеней свободы и уровня значимости α.

Для нахождения интервальной оценки дисперсии для описанного выше случая, может быть использовано следующее:

$$\left[\frac{S^2(N-1)}{X^2_{\frac{\alpha}{2},N-1}};\frac{S^2(N-1)}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2},N-1}}\right] \qquad (2.6)$$

Где $X^2_{\frac{\alpha}{2},N-1}$ – коэффициент хи-квадрат для ($N - 1$) степеней свободы и уровня значимости α.

Для оценки выборочной дисперсии можно использовать следующую

18

формулу:

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - M)^2 \qquad (2.7)$$

Рисунок 2 — Теория для вычисления базовых параметров случайной величины

Реализация:

```matlab
% Constant

% Distribution density f(x): (3x^2)/2
% Integral F(x) = (x^3)/2
% (x^3)/2 = z
% x = 2z^(1/3)

%define function
get_rand_num = @(z) (2 * z)^(1/3);

%define selection size
N = [50, 200, 1000];

%define alpha
alpha = [0.1, 0.05, 0.01];

for k = 1: length(N)

    %generate selection
    selection = generate_selection(get_rand_num, N(k));

    %compute mean and disp
    mean_local = mean(selection);
    disp_local = var(selection);

    %output result
    fprintf("N = %d mean = %f \t disp = %f\n", N(k), mean_local, disp_local);

    for m = 1 : length(alpha)

        %compute mean interval
        student_coeff = tinv(1 - alpha(m)/2, N(k)-1);

        std_disp = sqrt(disp_local);

        left_m = mean_local - (student_coeff * (std_disp / sqrt(N(k))));
        right_m = mean_local + (student_coeff * (std_disp / sqrt(N(k))));

        %compute disp interval
        S2 = sum((selection - mean_local).^2) / (N(k) - 1);
        chi2_l = chi2inv(alpha(m)/2, N(k)-1);
        chi2_h = chi2inv(1 - alpha(m)/2, N(k)-1);

        left_d = (S2 * (N(k) - 1)) / chi2_h;
        right_d = (S2 * (N(k) - 1)) / chi2_l;


        fprintf("N = %d  alpha = %f \t mean interval: [%f, %f] \t var interval: [%f, %f]\n", N(k), alpha(m), left_m, right_m, left_d, right_d);

```

Рисунок 3 — Реализация программы для плотности распределения (часть 1)

```matlab
    count_of_intervals = floor(1 + 3.2 * N(k));

    x_1 = 0:0.01:1.5;
    x_2 = 0: 0.01 :10;

    f = @(x) (3*x.^2)/2;
    F = @(x) (x.^3) / 2;

    y_f = f(x_1).*1.6;
    y_F = F(x_2).*1.6;

    %build plots
    figure;
    histogram(selection, 'NumBins', count_of_intervals);
    hold on;
    plot(x_1, y_f)
    hold off;
    title('Гистограмма данных');
    xlabel('Значения');
    ylabel('Количество');
    grid on;

end

y_f = f(x_2).*1.6;

figure;
plot(x_2, y_f, 'r', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(x_2, y_F, 'b--', 'LineWidth', 2);
hold off;

%define sub functions
function selection = generate_selection(generator, N)
    %define selection
    selection_local = zeros(N, 1);

    %compute random num
    for k = 1 : N
        %generate z
        z = rand();

        %compute rand_num
        rand_num = generator(z);

        selection_local(k) = rand_num;
    end

    selection = selection_local;
```

Рисунок 4 — Реализация программы для плотности распределения (часть 2)

Результат:

```
N = 50 mean = 0.985379   disp = 0.066043
N = 50  alpha = 0.100000    mean interval: [0.924447, 1.046311]    var interval: [0.048782, 0.095375]
N = 50  alpha = 0.050000    mean interval: [0.912344, 1.058414]    var interval: [0.046084, 0.102555]
N = 50  alpha = 0.010000    mean interval: [0.887980, 1.082778]    var interval: [0.041366, 0.118759]
N = 200 mean = 0.931362     disp = 0.051661
N = 200  alpha = 0.100000   mean interval: [0.904803, 0.957921]    var interval: [0.044139, 0.061427]
N = 200  alpha = 0.050000   mean interval: [0.899669, 0.963055]    var interval: [0.042842, 0.063528]
N = 200  alpha = 0.010000   mean interval: [0.889563, 0.973161]    var interval: [0.040453, 0.067916]
N = 1000 mean = 0.942711    disp = 0.056815
N = 1000  alpha = 0.100000  mean interval: [0.930302, 0.955121]    var interval: [0.052865, 0.061252]
N = 1000  alpha = 0.050000  mean interval: [0.927920, 0.957503]    var interval: [0.052144, 0.062146]
N = 1000  alpha = 0.010000  mean interval: [0.923259, 0.962164]    var interval: [0.050773, 0.063944]
```

Рисунок 5 — Базовые параметры случайной величины для выборок разного объема (N = 50, 200, 1000)

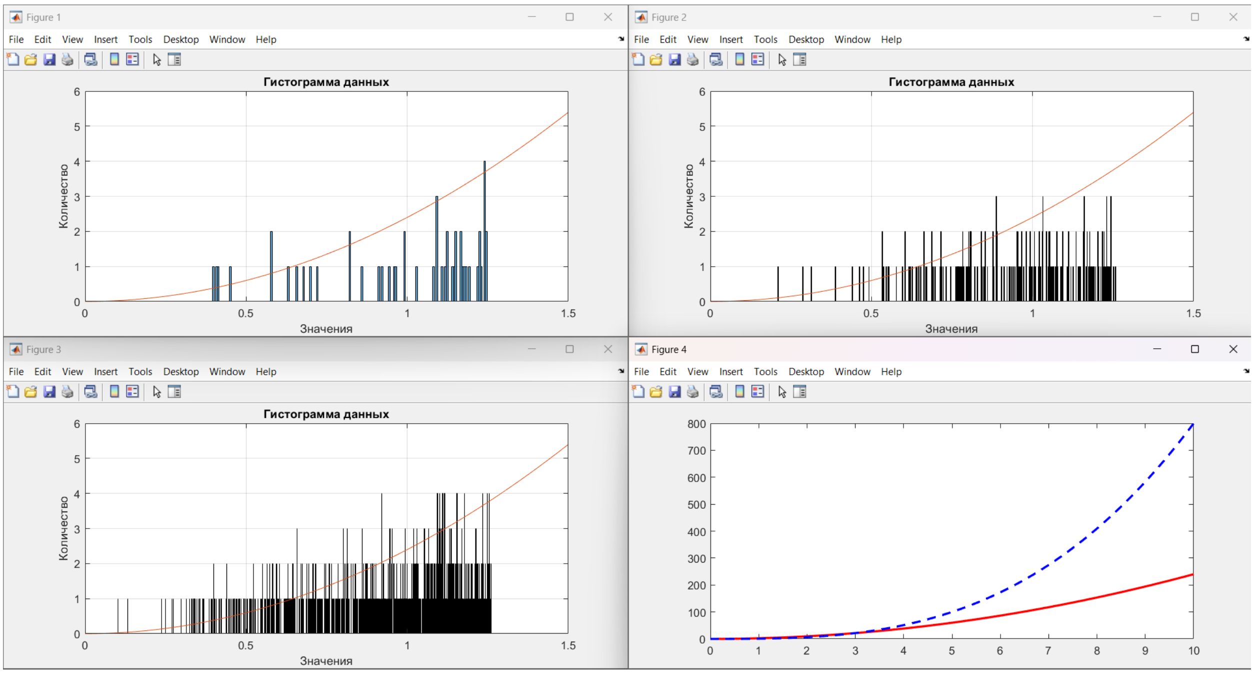

Рисунок 6 — Гистограммы и плотнось распределения для выборок разного объема

Последний график визуализирует теоретические плотность распределения и функцию распределения случайной величины. Гистограмма показывает кол-во чисел, попадающих в определнный промежуток. Кол-во промежутков вычисляются по следующей формуле:

$$k = [1 + 3.2 \cdot \ln(N)] \qquad (2.8)$$

Где k – подходящее число интервалов, N – величина выборки.

Рисунок 7 — Формула расчета кол-ва интервалов

ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ПО ЗАДАННОМУ РЯДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Реализация:

```
%define arguments
x = 0 : 100;

%define descrete distr
f = @(x) (0.1) * (1 - 0.1).^x;

%function values
X = f(x);

%define selection size
N = [50, 200, 1000];

%define alpha
alpha = [0.1, 0.05, 0.01];

for k = 1: length(N)

    %define selection
    selection = zeros(N(k), 1);

    %generate numbers
    for i = 1: N(k)
        selection(i) = generate_rand_num(X, x);
    end

    %compute mean and disp
    mean_local = mean(selection);
    disp_local = var(selection);

    %output result
    fprintf("N = %d mean = %f \t disp = %f\n", N(k), mean_local, disp_local);

    for m = 1 : length(alpha)

        %compute mean interval
        student_coeff = tinv(1 - alpha(m)/2, N(k)-1);

        std_disp = sqrt(disp_local);

        left_m = mean_local - (student_coeff * (std_disp / sqrt(N(k))));
        right_m = mean_local + (student_coeff * (std_disp / sqrt(N(k))));
```

Рисунок 8 — Реализация программы для ряда распределения (часть 1)

```
        %compute disp interval
        S2 = sum((selection - mean_local).^2) / (N(k) - 1);
        chi2_l = chi2inv(alpha(m)/2, N(k)-1);
        chi2_h = chi2inv(1 - alpha(m)/2, N(k)-1);

        left_d = (S2 * (N(k) - 1)) / chi2_h;
        right_d = (S2 * (N(k) - 1)) / chi2_l;

        fprintf("N = %d  alpha = %f \t mean interval: [%f, %f] \t var interval: [%f, %f]\n", N(k), alpha(m), left_m, right_m, left_d, right_d);


    end

count_of_intervals = floor(1 + 3.2 * N(k));

figure;
histogram(selection, 'NumBins', count_of_intervals);
hold on;
plot(x, X.*N(k))
title('Гистограмма данных');
xlabel('Значения');
ylabel('Количество');
grid on;

end


%sub function
function rand_num = generate_rand_num(X, x)
    rand_num = 0;

    %generate z
    z = rand();

    %find interval
    for i = 1 : length(X)

        z = z - X(i);

        if z < 0
            rand_num = x(i);
            break;
```

Рисунок 9 — Реализация программы для ряда распределения (часть 2)

Результат:

```
>> IA_331_lab2_2
N = 50 mean = 9.840000   disp = 192.055510
N = 50  alpha = 0.100000     mean interval: [6.554170, 13.125830]    var interval: [141.858783, 277.354413]
N = 50  alpha = 0.050000     mean interval: [5.901484, 13.778516]    var interval: [134.013053, 298.233082]
N = 50  alpha = 0.010000     mean interval: [4.587629, 15.092371]    var interval: [120.294450, 345.355773]
N = 200 mean = 9.615000      disp = 96.710327
N = 200  alpha = 0.100000    mean interval: [8.465854, 10.764146]    var interval: [82.629361, 114.993072]
N = 200  alpha = 0.050000    mean interval: [8.243743, 10.986257]    var interval: [80.202453, 118.926089]
N = 200  alpha = 0.010000    mean interval: [7.806487, 11.423513]    var interval: [75.728814, 127.141198]
N = 1000 mean = 8.912000     disp = 81.271528
N = 1000  alpha = 0.100000   mean interval: [8.442647, 9.381353]     var interval: [75.621303, 87.618741]
N = 1000  alpha = 0.050000   mean interval: [8.352573, 9.471427]     var interval: [74.590005, 88.897588]
N = 1000  alpha = 0.010000   mean interval: [8.176273, 9.647727]     var interval: [72.628097, 91.469494]
fx >>
```

Рисунок 10 — Базовые параметры случайной величины для выборок разного объема (N = 50, 200, 1000)

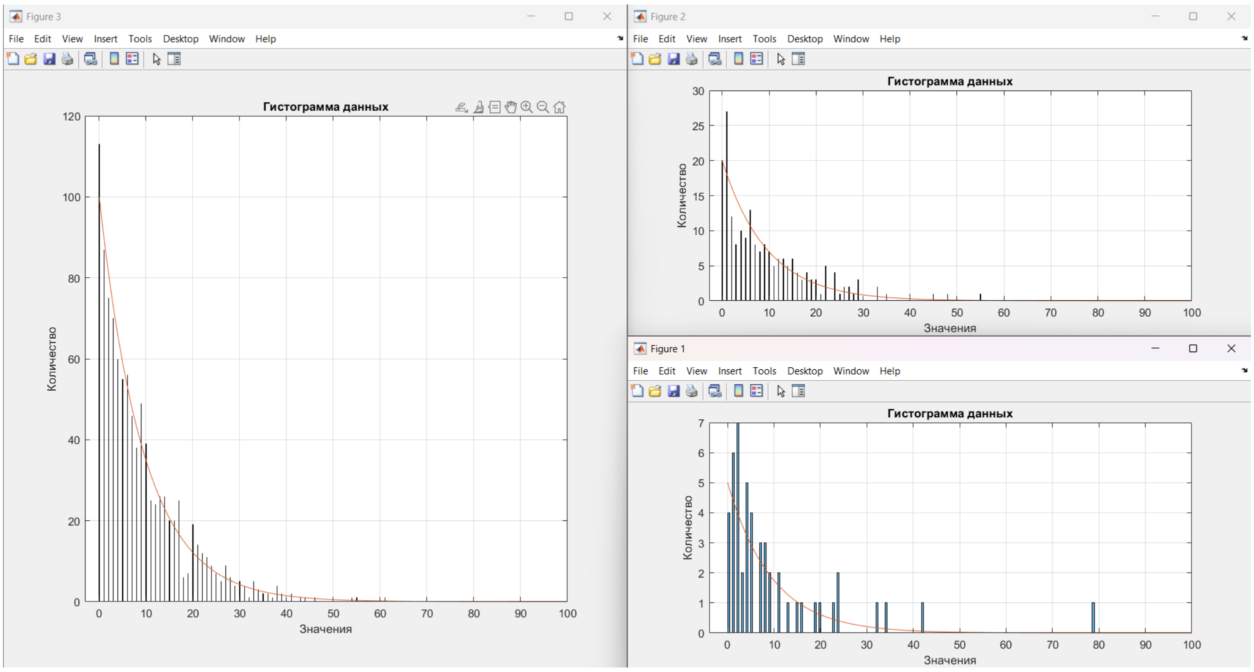

Рисунок 11 — Гистограммы и закон распределения для выборок разного объема

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ. ОЦЕНКА ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И РЕАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Теоретическое математическое ожидание для непрерывной велчины - интеграл от плотности распределения на определенном интервале (всё задано в таблице)

Вычисление:

Математическое ожидание для непрерывной величины:

$$E[X] = \int_0^{1.5} x f(x)\, dx = \int_0^{1.5} x \cdot \frac{3}{2}\frac{x^{1/2}}{(1.5)^{3/2}}\, dx = \frac{3}{2(1.5)^{3/2}} \int_0^{1.5} x^{3/2}\, dx$$

$$\int_0^{1.5} x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^{1.5} = \frac{2}{5}(1.5)^{5/2}$$

$$E[X] = \frac{3}{2(1.5)^{3/2}} \cdot \frac{2}{5}(1.5)^{5/2} = \frac{3}{5} \cdot 1.5 = 0.9$$

Математическое ожидание для дискретной величины: Теоретическое математическое ожидание для дискретной велчины - сумма произведений элементов выборки на вероятность их "выпадения". В моем случае используется геометрическое случайное распределение, поэтому формула упрощается до:

$$E[X] = \frac{1-p}{p}, \quad \text{где } p = 0.1$$

$$E[X] = \frac{1-0.1}{0.1} = \frac{0.9}{0.1} = 9$$

Можно сравнить с результатами, полученными ранее. Теоретическое и экспериментальное математическое ожидание отличаются на допустимые значения.

Дисперсия для непрерывной величины:

$$E[X^2] = \int_0^{1.5} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{1.5} x^2 \cdot \frac{3}{2}\frac{x^{1/2}}{(1.5)^{3/2}}\, dx = \frac{3}{2(1.5)^{3/2}} \int_0^{1.5} x^{5/2}\, dx$$

$$\int_0^{1.5} x^{5/2} dx = \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^{1.5} = \frac{2}{7}(1.5)^{7/2}$$

$$E[X^2] = \frac{3}{2(1.5)^{3/2}} \cdot \frac{2}{7}(1.5)^{7/2} = \frac{3}{7}(1.5)^2 \approx 0.9643$$

$$D[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.9643 - 0.9^2 \approx 0.1543$$

Итог:

$$\boxed{E[X] = 0.9, \quad D[X] \approx 0.1543}$$

Дисперсия для дискретной величины:

$$D[X] = \sum_{k=0}^{\infty} (k - E[X])^2 \, p(1-p)^k = \frac{1-p}{p^2}$$

$$D[X] = \frac{1-0.1}{(0.1)^2} = \frac{0.9}{0.01} = 90$$

АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛНИЯ

Асимметрия и эксцесс распределения

1. Асимметрия (Skewness)

Асимметрия показывает, насколько распределение *скошено* относительно своего среднего:

- Если $\text{Skewness} = 0$, распределение симметрично (как нормальное).
- Если $\text{Skewness} > 0$, хвост распределения длиннее вправо (распределение скошено вправо).
- Если $\text{Skewness} < 0$, хвост распределения длиннее влево (распределение скошено влево).

Для нормального распределения:

$$\text{Skewness} = 0$$

То есть нормальное распределение симметрично относительно среднего.

2. Эксцесс (Kurtosis)

Эксцесс характеризует *островерхость* распределения — насколько высокая или плоская вершина у графика плотности:

- Для нормального распределения $\text{Kurtosis} = 3$.
- Часто используют избыточный эксцесс (Excess Kurtosis):

$$\text{Excess Kurtosis} = \text{Kurtosis} - 3$$

чтобы нормальное распределение имело избыточный эксцесс 0.

Интерпретация избыточного эксцесса:

- $\text{Excess Kurtosis} = 0 \rightarrow$ нормальное распределение (стандартная «колоколообразная» форма).

– Excess Kurtosis $> 0 \rightarrow$ пики выше и хвосты тяжелее (лепестковая форма).
– Excess Kurtosis $< 0 \rightarrow$ более плоская вершина и тонкие хвосты (плосковершинная форма).

Реализация:

```
mu = 0;
sigma = 1;

N = [50, 200, 1000];

for k = 1: length(N)
    X = normrnd(mu, sigma, N(k), 1);

    skew = skewness(X);
    kurt = kurtosis(X);

    fprintf("Skew = %f \t Kurt = %f\n", skew, kurt);
end
```

Рисунок 12 — Пример вычисления асимметрии и эксцесса для нормального стандартного распределения

ТЕСТ КОЛМОГОРОВА-СМИРНОВА

Теория:

Критерий Колмогорова-Смирнова является непараметрическим статистическим критерием, используемым для проверки гипотез о законе распределения генеральной совокупности или о равенстве законов распределения двух генеральных совокупностей. То есть данный тест позволяет проверить, принадлежит ли заданная выборка некоторому теоретическому распределению.

Для проверки работы критерия сгенерируем в MATLAB выборку из экспоненциального распределения и проверим, можно ли её считать выборкой из стандартного нормального распределения.

Реализация:

```
mu = 0;
sigma = 1;
lambda = 0.05;

N = [50, 200, 10000];
alpha = [0.1, 0.05, 0.01];

for k = 1:length(N)
    X = exprnd(1/lambda, N(k), 1);

    skew = skewness(X);
    kurt = kurtosis(X);
    fprintf("n = %d\t Skew = %.4f\t Kurt = %.4f\n", N(k), skew, kurt);

    x_sorted = sort(X);
    F = normcdf(x_sorted, mu, sigma);
    cdf_theoretical = [x_sorted, F];

    [h,p,ksstat,cv] = kstest(X, 'CDF', cdf_theoretical, 'Alpha', alpha(k));

    if h == 0
        fprintf('Гипотеза НЕ отклоняется (уровень %.2f): p = %.4f\n', alpha(k), p);
    else
        fprintf('Гипотеза отклоняется (уровень %.2f): p = %.4f\n', alpha(k), p);
    end

    fprintf('Статистика D = %.4f, критическое значение = %.4f\n\n', ksstat, cv);
end
```

Рисунок 13 — Пример использования теста Колмогорова-Смирнова

Результат:

```
>> IA_331_lab2_3
n = 50   Skew = 1.3847   Kurt = 3.8828
Гипотеза отклоняется (уровень 0.10): p = 0.0000
Статистика D = 0.8208, критическое значение = 0.1696

n = 200  Skew = 1.5688   Kurt = 6.7160
Гипотеза отклоняется (уровень 0.05): p = 0.0000
Статистика D = 0.8922, критическое значение = 0.0952

n = 10000    Skew = 2.0666   Kurt = 9.4794
Гипотеза отклоняется (уровень 0.01): p = 0.0000
Статистика D = 0.8848, критическое значение = 0.0163

fx >>
```

Рисунок 14 — Результат использования теста Колмогорова-Смирнова

Вывод:

Тест показывает, что выборка из экспоненциального распределения не является выборкой из нормального стандартного распределения, что логично.