МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств
(ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №8
по дисциплине
Теория массового обслуживания

по теме:
СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ M/G/1. ФОРМУЛА ХИНЧИНА - ПОЛЛЯЧЕКА

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.В Андреев*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель:

Проверить корректность формулы Хинчина - Поллячека примере систем типа M/M/1 и M/D/1.

Задание к лабораторной работе

Задание к лабораторной работе

1. Открыть Matlab.
2. Написать Matlab – программу, рассчитывающую характеристики СМО.
3. Получить зависимости всех вышеописанных характеристик от нормированной дисперсии времени обслуживания и коэффициента загрузки для системы типа M/G/1 по формулам 8.1 – 8.4. При этом нормированную дисперсию изменять следующим образом: $C_b^2 = 0$, 1, 10, 20, 30, …, 100, Среднее время обслуживания задать по своему усмотрению.
4. Получить зависимости вышеописанных характеристик от коэффициента загрузки для системы M/D/1 по формулам 8.5 – 8.8.
5. Получить зависимости характеристик от коэффициента загрузки для системы M/M/1по формулам 8.9 – 8.12.
6. Построить графики полученных зависимостей (каждая характеристика на отдельном графике, три СМО на одном графике).
7. Сравнить полученные результаты, сделать выводы по лабораторной работе.
8. Оформить отчет.
9. Сохранить Matlab-файл в папке «Мои документы\ОТМО\».
10. Сдать и защитить работу.

Рисунок 1 — Задание для лабораторной работы

ТЕОРИЯ

Основные сведения

Характеристики M/G/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{(1+C_б^2)}{2(1-\rho)}. \tag{8.1}$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \rho + \rho^2 \frac{(1+C_б^2)}{2(1-\rho)}. \tag{8.2}$$

Среднее время ожидания

$$W = \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+C_б^2)}{2(1-\rho)}. \tag{8.3}$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \bar{x} + \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+C_б^2)}{2(1-\rho)}. \tag{8.4}$$

Характеристики M/D/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)}. \tag{8.5}$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} + \rho. \tag{8.6}$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot x}{2(1-\rho)}. \tag{8.7}$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \frac{x(1-\rho)}{2(1-\rho)}. \tag{8.8}$$

Характеристики M/M/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{8.9}$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{8.10}$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot \bar{x}}{1-\rho}. \tag{8.11}$$

Среднее время пребывания требования в системе

46

Рисунок 2 — Теория для лабораторной работы

$$W = \frac{\bar{x}}{1-\rho}, \qquad (8.12)$$

Где

$C_b^2 = \frac{\sigma_b^2}{(\bar{x})^2}$ – нормированная дисперсия времени обслуживания,

σ_b^2 – дисперсия времени обслуживания,

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – коэффициент использования системы.

Рисунок 3 — Теория для лабораторной работы

ХОД РАБОТЫ

3.1 Поллячек и Хинчин

Феликс Поллячек (1892–1981) — австрийский математик и инженер. Один из первых исследовал очереди и СМО, разработал анализ характеристик M/G/1-систем. Ввёл формулу для среднего числа заявок в системе с произвольным временем обслуживания.

Александр Хинчин (1894–1959) - советский математик. Совместно с Поллячек разработал аналитические формулы для M/G/1.

3.2 Ход работы

Зададим базовые параметры СМО - интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки. Высчитаем мат.ожидание и дисперсию экспоненциального распределения, которое понадобится для M/M/1. Высчитаем коэффициент загруженности системы.

```
%define params
lambda = 5;
u = 15;

% E and D for exp distr
E = 1/lambda;
D = 1/lambda^2;

% coef of using sysytem
p_v = lambda / u;
```

Для расчетов параметров для системы M/G/1 я выбрал гамма распределение, оно характеризуется параметрами a и k

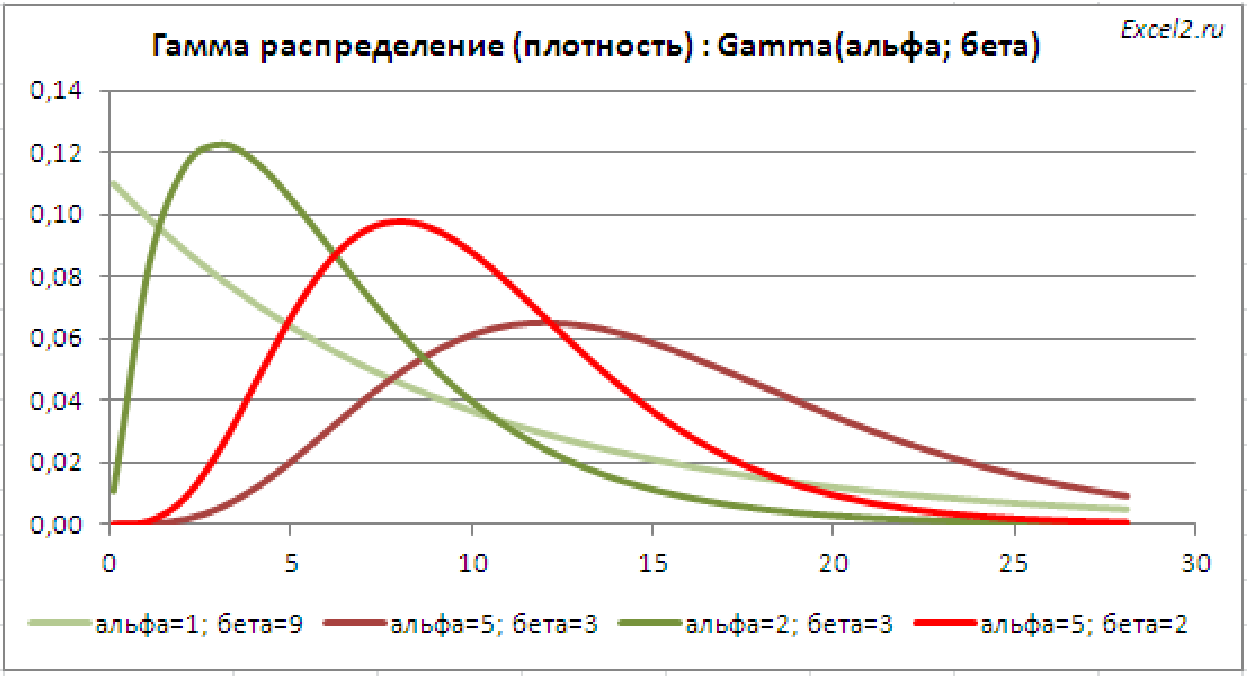

Рисунок 4 — Гамма-распределение

a - коэффициент формы, благодаря ему распределение становится более симметричным и меньше скошено вправо или влево (при увеличении). b - коэффициент масштабирования, он растягивает распределение, среднее и дисперсия увеличиваются.

Чтобы правильно подобрать a и b нужно решить систему уравений

$$ab = 0.2$$
$$ab^2 = 0.04$$

Отсюда a = 1, b = 0.2. Теперь зададим распределение

```
%params for time serving distr (gamma)
a = 1;
b = 0.2;
N_i = 250;

%exp distr
exp_distr = exprnd(E, 1, N_i);

%gamma distr
MG1_tn = gamrnd(a, b, 1, N_i);
```

Необходимо построить зависимости СМО M/G/1 от загруженности системы p и нормированной дисперсии времени обслуживания c^2. Зададим набор значений вручную. $0 < p < 1$. Далее в цикле высчитываем метрики и выводим на график.

```
%vector of var
var = [0, 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100];
p_v = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9];
p_count = length(p_v);

N_q = zeros(p_count, 1);
N = zeros(p_count, 1);
W = zeros(p_count, 1);
T = zeros(p_count, 1);

for i = 1: length(p_v)
    stats =  MG1_param(MG1_tn, 0, p_v(i));
    N_q(i) = stats.N_q;
    N(i) = stats.N;
    W(i) = stats.W;
    T(i) = stats.T;
end

figure;
subplot(4, 1, 1);
plot(p_v, N_q);
xlabel("p");
ylabel("N_q");
title   ("            M/G/1");
subplot(4, 1, 2);
plot(p_v, N);
xlabel("p");
ylabel("N");
title   ("            M/G/1");
subplot(4, 1, 3);
plot(p_v, W);
xlabel("p");
ylabel("N");
title   ("           M/G/1");
subplot(4, 1, 4);
plot(p_v, T);
xlabel("p");
```

```
ylabel("N");
title   ("                        M/G/1");
```

Для остальных систем код идентичен.

Код для высчитывания метрик разных СМО

```
function stats = MG1_param(tn, c, p)
    %N_q - avg queue len
    %N - avg tasks count in system
    %W - avg waiting time
    %T - avg time task into system
    %t_n - set of time serving

    %avg time serving
    avg_tn = mean(tn);

    %compute params
    stats.N_q = p^2 * (1 + c) / (2*(1-p));
    stats.N = p + stats.N_q;
    stats.W = p * avg_tn * (1 + c) / (2*(1-p));
    stats.T = avg_tn + stats.W;

end

function stats = MD1_param(t, p)
    %N_q - avg queue len
    %N - avg tasks count in system
    %W - avg waiting time
    %T - avg time task into system
    %t - time serving

    %compute params
    stats.N_q = p^2 * 1 / (2*(1-p));
    stats.N = p + stats.N_q;
    stats.W = p * t / (2*(1-p));
    stats.T = t*(1 - p) / (2 * (1 - p));
end

function stats = MM1_param(tn, p)
    %N_q - avg queue len
    %N - avg tasks count in system
```

```
    %W - avg waiting time
    %T - avg time task into system
    %t_n - set of time serving

    %avg time serving
    avg_tn = mean(tn);

    %compute params
    stats.N_q = p^2/(1-p);
    stats.N = p / (1 - p);
    stats.W = stats.N * avg_tn;
    stats.T = avg_tn / (1-p);

end
```

Результаты:

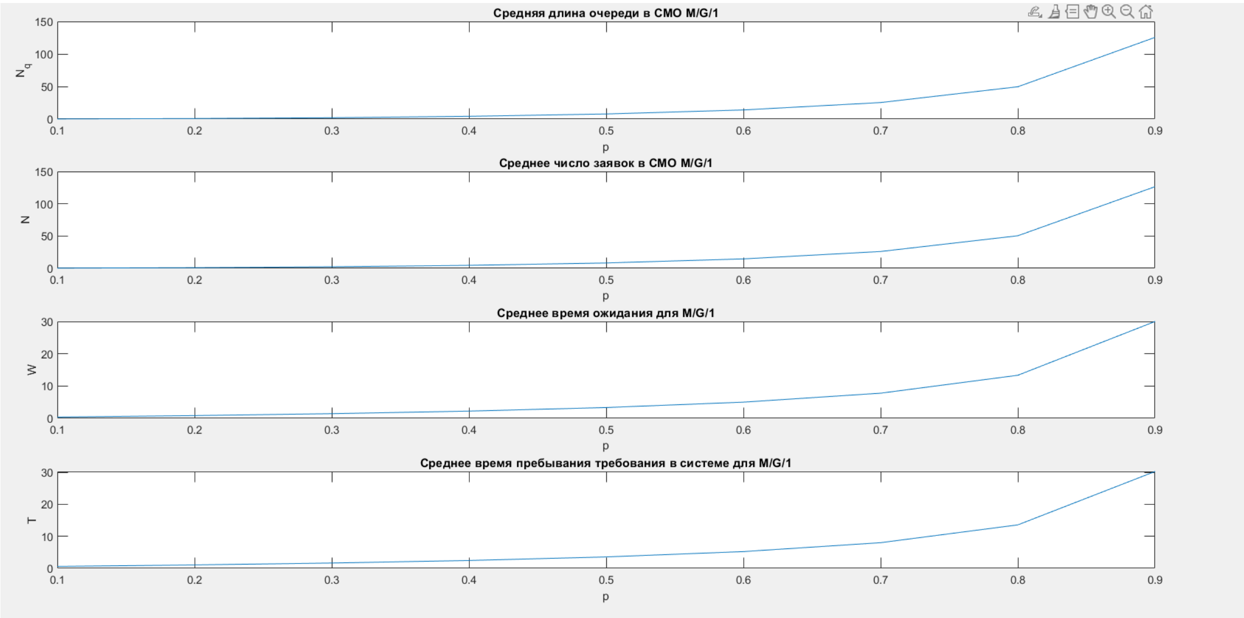

Рисунок 5 — Зависимость параметров СМО M/G/1 от загруженности

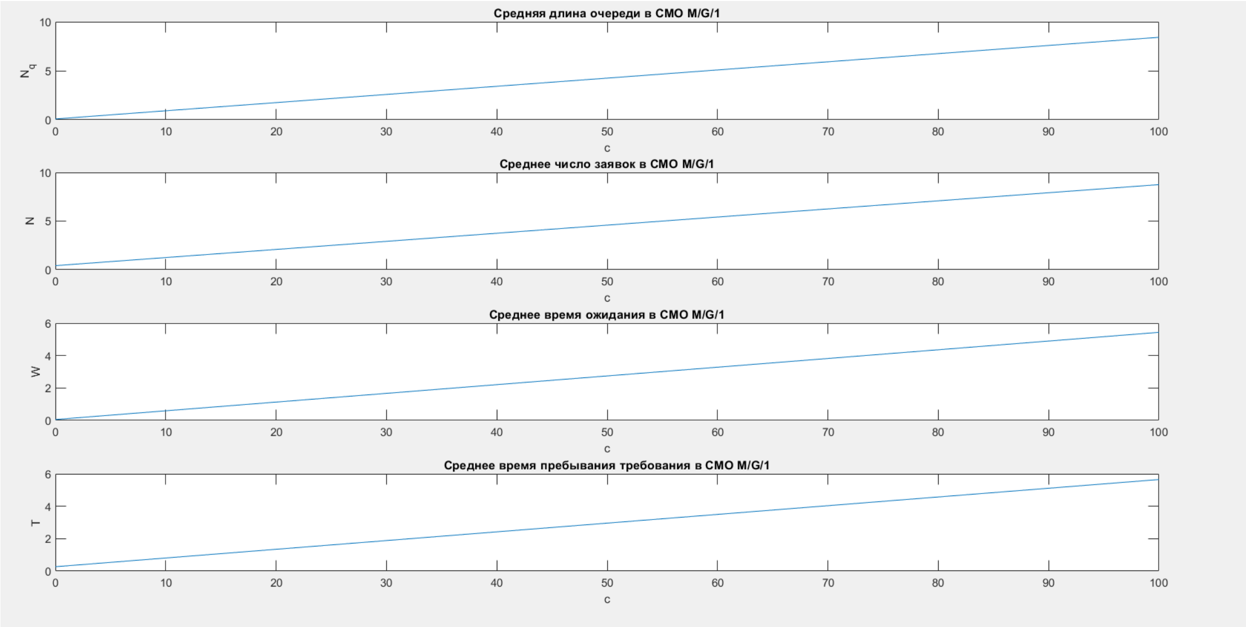

Рисунок 6 — Зависимость параметров СМО M/G/1 от дисперсии времени обработки

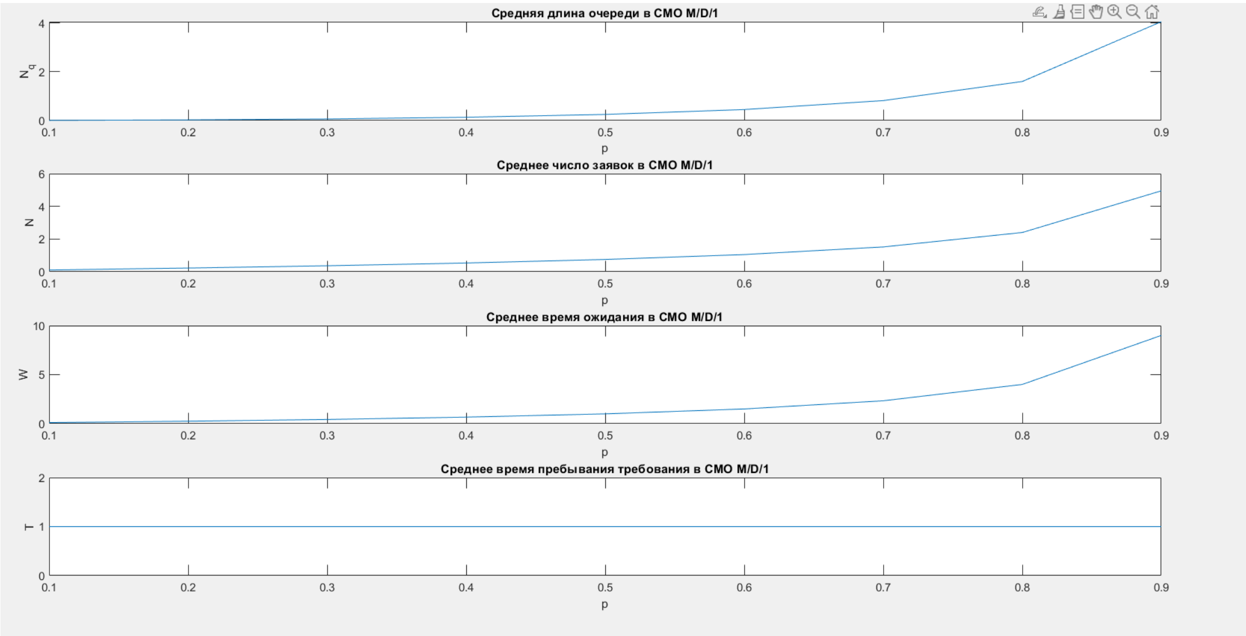

Рисунок 7 — Зависимость параметров СМО M/D/1 от загруженности системы

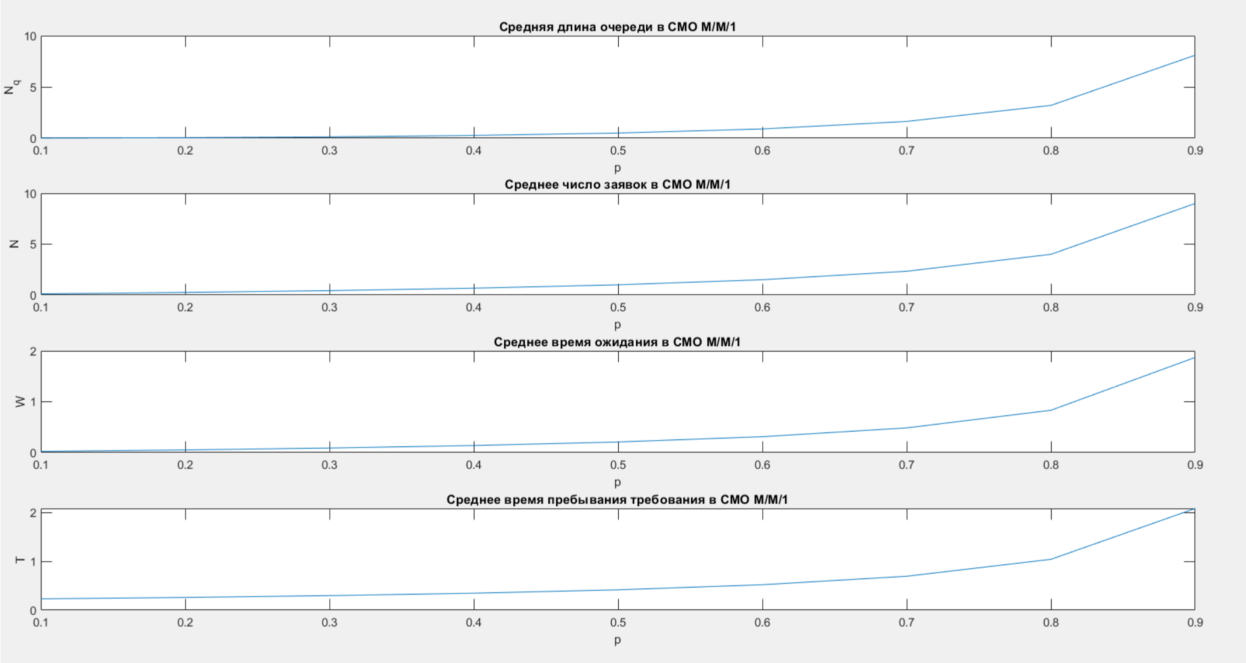

Рисунок 8 — Зависимость параметров СМО M/M/1 от загруженности системы

По результатам можем заметить, что метрики всех видов рассмотренных СМО экспоненциально растут при росте загруженности системы, кроме системы M/D/1, потому что у нее время обработки детерминированно (константа). Система M/G/1 зависит от нормированной дисперсии времени обработки линейно.

3.3 Контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Формула Хинчина – Полячека для системы массового обслуживания типа M/G/1.
2. Формула Хинчина – Полячека для системы массового обслуживания типа M/M/1.
3. Формула Хинчина – Полячека для системы массового обслуживания типа M/D/1.
4. Нормированная дисперсия времени обслуживания.
5. Средняя длина очереди.
6. Среднее число заявок в СМО.
7. Среднее время ожидания.
8. Среднее время пребывания требования в системе.

47

9. Сравнение вероятностно-временных характеристик систем M/D/1 и M/M/1.

Рисунок 9 — Контрольные вопросы

Характеристики M/G/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \qquad (8.1)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \rho + \rho^2 \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \qquad (8.2)$$

Среднее время ожидания

$$W = \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \qquad (8.3)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \bar{x} + \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \qquad (8.4)$$

Характеристики M/D/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)}. \qquad (8.5)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} + \rho. \qquad (8.6)$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot x}{2(1-\rho)}. \qquad (8.7)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \frac{x(1-\rho)}{2(1-\rho)}. \qquad (8.8)$$

Характеристики M/M/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \qquad (8.9)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (8.10)$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot \bar{x}}{1-\rho}. \qquad (8.11)$$

Среднее время пребывания требования в системе

46

$$W = \frac{\bar{x}}{1-\rho}, \qquad (8.12)$$

Рисунок 10 — Вопросы 1-3

4. Нормированная дисперсия времени обслуживания - дисперсия времени обслуживания, нормированная по среднему времени обработки заявки: $c^2 = \frac{\sigma^2}{\dot{x}^2}$.

5. Средняя длина очереди - кол-во заявок, ожидающих свою обработку в очереди.

6. Среднее число заявок в СМО - кол-во заявок, которое находится в очереди и обрабатывается.

7. Среднее время ожидания - то время, которое заявка ожидает в очереди перед обработкой.

8. Среднее время пребывания требования в системе - то время, которое заявка находится в системе с момента ее поступления в нее до момента полной обработки.

9. Системы M/D/1 и M/M/1 отличаются временем обработки заявок. В M/M/1 время обработки распределено по экспоненциальному закону, а в M/D/1 время обработки - константа. Сисетма M/D/1 - идеализированная система, где время обработки никак не зависит от нагрузки, что в реальности невозможно.

ВЫВОД

В ходе работы я рассчитал метрики для разных видов СМО и сравнил полученные результаты.