МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств (ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №7
по дисциплине
Математические основы обработки сигналов

по теме:
ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.А Калачиков*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ТЕОРИЯ 4

2 ПРАКТИКА 10

3 ВЫВОД 13

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель:

Изучить частотную характеристику линейной цепи. Узнать, как характеристика влияет на входной сигнал.

ТЕОРИЯ

Если подать на вход линейной цепи гармонический сигнал $x(t) = Acos(\omega_0 t + \phi)$, то получим сигнал той же формы, но амплитуда и фаза изменятся.

Запишем гармонический сигнал:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Если представить сигнал в комплексной форме, то гармонический сигнал $Acos(\omega_0 t + \phi)$ - действительная часть такого сигнала:

$$x(t) = \Re\{Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}\}$$

Разложим экспоненту и получим комплексную амплитуду:

$$\Re\{Ae^{i\varphi}e^{i\omega_0 t}\}$$

$$Ae^{i\varphi} = A_k$$

Итоговый сигнал будет иметь вид:

$$x(t) = A_k e^{i\omega_0 t}$$

Теперь пропустим сигнал через линейную цепь с импульсной характеристикой $h(\tau)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)Ae^{i\omega_0\tau}d\tau =$$

Поскольку $Ae^{i\omega_0 t}$ не зависит от τ, вынесем ее за знак интеграла. Заметим, что $Ae^{i\omega_0 t}$ - наш исходный сигнал $x(t)$. Под знаком интеграла можем увидеть ППФ над импульсной характеристикой, запишем этот интеграл как $H(iw)$.

$$Ae^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-i\omega_0 t}d\tau = Ae^{i\omega_0 t}H(i\omega_0)$$

$$\boxed{H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt}$$

ППФ от импульсной характеристики - комплексная частотная характеристика

$$A_y = A_x \cdot H(i\omega_0)$$

$A_y = A_x \cdot H(i\omega_0) = |A_x| \cdot |H(i\omega_0)|$ - комплексная амплитуда для гармонического сигнала на частоте w_0

Выходной сигнал цепи $y(t)$ будет отличаться только комплексной амплитудной.

$$x(t) \leftrightarrow X(i\omega)$$

$$y(i\omega) = \boxed{X(i\omega) \cdot H(i\omega)}$$

$H(iw_0)$ - комплексная коэффициент передачи

$$H(i\omega) = \frac{y(i\omega)}{x(i\omega)}$$

$$A(i\omega) = |H(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$$

Здесь $|H(i\omega)|$ - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), $e^{i\varphi(\omega)}$ - фазо-частотная характеристика (АЧХ).

Если импульсная характеристика RC цепи равна

$$h(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

то комплексная частотная характеристика равна

$$H(iw) = \frac{1}{1+T}$$

АЧХ можно посчитать как

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

а ФЧХ как

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega RC)$$

Пример

Допустим, мы подали на вход системы $x(t) = Acos(\omega_0 t)$ и получили следующие характеристики цепи:

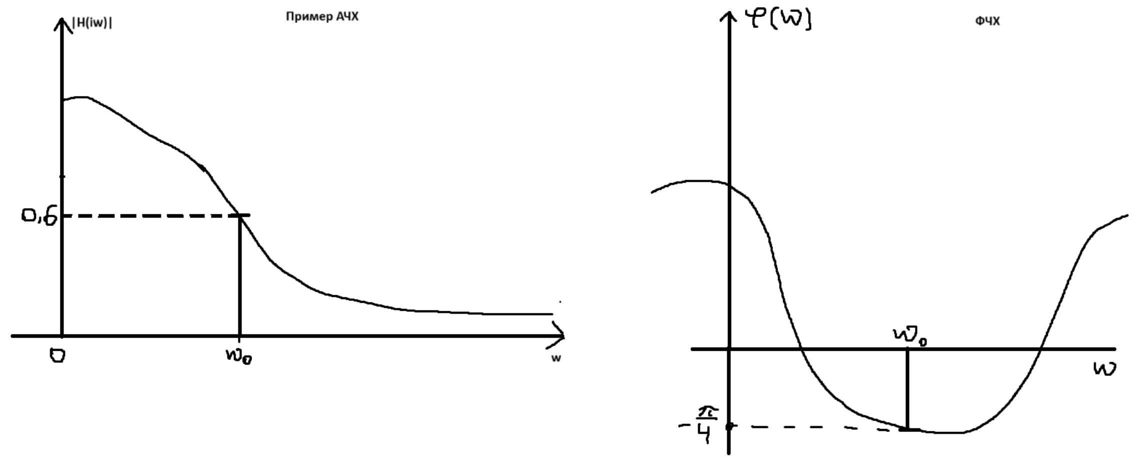

Рисунок 1 — АЧХ и ФЧХ цепи

АЧХ и ФЧХ показывают, насколько хорошо или плохо цепь будет пропускать сигнал на определенных частотах. В нашем случае можем видеть, что чем больше частота, тем ниже амплитуда выходного сигнала, т.е высокие частоты срезаются и остаются только низкие.

На выходе получим $y(t) = |H(i\omega_0)|cos(\omega_0)t - \phi(\omega_0) = 0.6cos(\omega_0 t + \frac{\phi}{4})$

Таким образом, зная АЧХ и ФЧХ цепи, мы можем расчитать выходной сигнал на конкретной частоте ω_0.

Условие безыскаженной передачи сигналов

При передаче сигналов через LTI цепь амплитуды и фазы спектральных составляющих сигналов будут изменяться в соответствии с формой $H(i\omega)$, потому что АЧХ и ФЧХ изменяются неравномерно, что приведет к изменению формы сигнала на выходе. Условие отсутсвия искажений (изменения формы):

Чтобы передача была без искажений, нужно чтобы коэффициент усилениия H_0 не зависел от частоты (график константы), в таком случае на каждой частоте сигнал будет принимать одинаковое значение и искажений не будет. Также необходимо, чтобы фаза линейно зависела от частоты, тогда фазовый сдвиг будет зависеть только от времени t_0. Все эти условия должны выполняться на частоте $\omega_1 <= \omega <= \omega_2$

$$\phi(\omega) = -\omega t_0$$

$$|H(i\omega)| = H_0$$

Идеальный выходной сигнал можно записать так:
$y(t) = H_0 x(t - t_0)$

Линейная цепь - частотно-селективный фильтр

Основное применение линейных цепей - фильтрация сигналов. Линейная цепь пропускает определенные компоненты сигнала с минимальным подавлением и подавляет остальные компоненты.

Частота среза - частота, после которой сигнал начинает сильно ослабевать

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$$

Если знать частоту среза, то можно определить участок, на котором искажения сигнала будут минимальны, т.е где АЧХ $\approx const$ и $\phi(\omega) = -\omega t_0$

Идеальная АЧХ RC цепи:

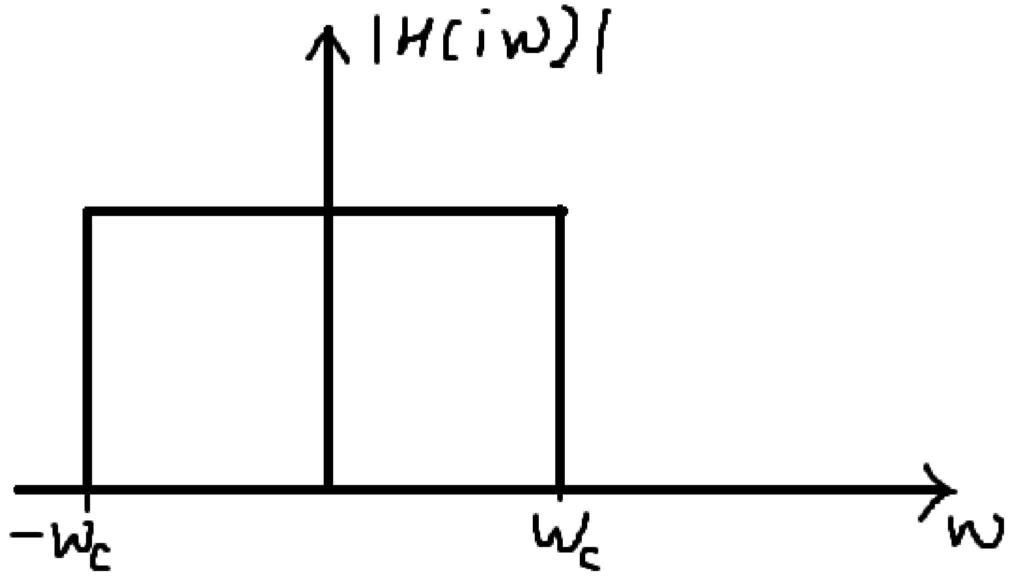

Рисунок 2 — Идеальная АЧХ

Видим, что на промежутке $[-w_c; w_c]$ АЧХ никак не меняется.

Изобразим идеальную АЧХ ФНЧ (фильтра низкой частоты)

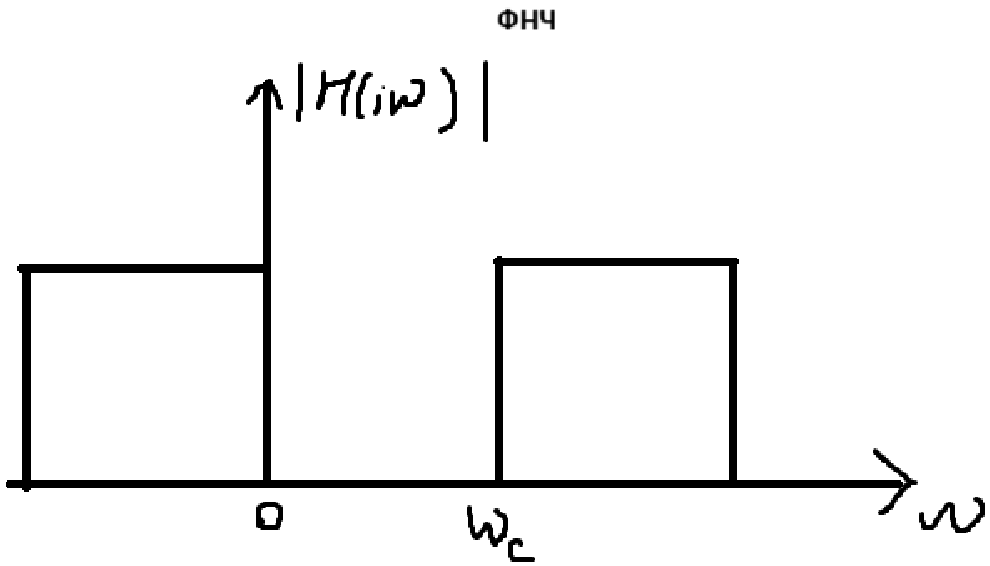

Рисунок 3 — Идеальная АЧХ ФНЧ

Данная АЧХ является прямоугольным сигналом. Это значит, что импульсная характеристика такой цепи имеет вид $h(t) = \frac{sin\omega_c t}{\omega_c t}$. Данная функция никогда не угаснет, т.е $-\infty <= t <= \infty$. Это значит, что реакция идеального фильтра бесконечна, т.е при подаче сигнала на такой фильтр мы никогда не получим результа. Это всего лишь идеальная модель и в жизни такого не бывает, значит, АЧХ и ФЧХ фильтров не идеальны.

ПРАКТИКА

Задание 1: вычисление интеграла свертки сигнала и импульсной характеристики

Зададим гармонический сигнал и импульсную характеристику RC цепи. Выполним операцию свертки и получим выходной сигнал.

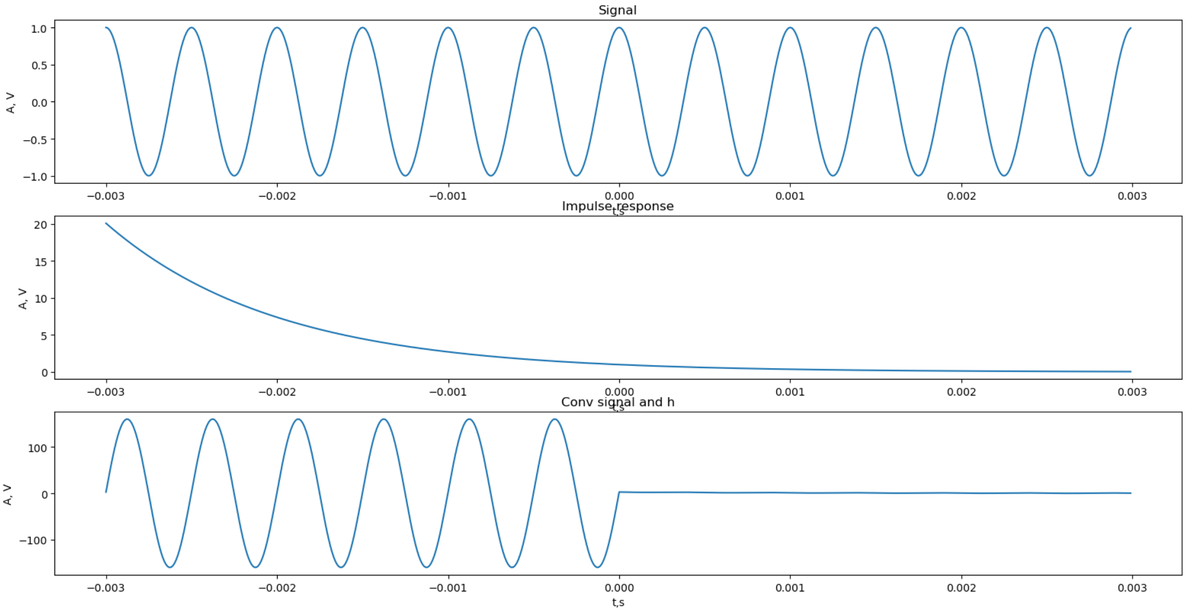

Рисунок 4 — Задание 1

Можем заметить, что амплитуда кратно увеличилась, фаза тоже изменилась.

Задание 2: вычисление частотной характеристики RC цепи

Вычислим АЧХ и ФЧХ RC цепи:

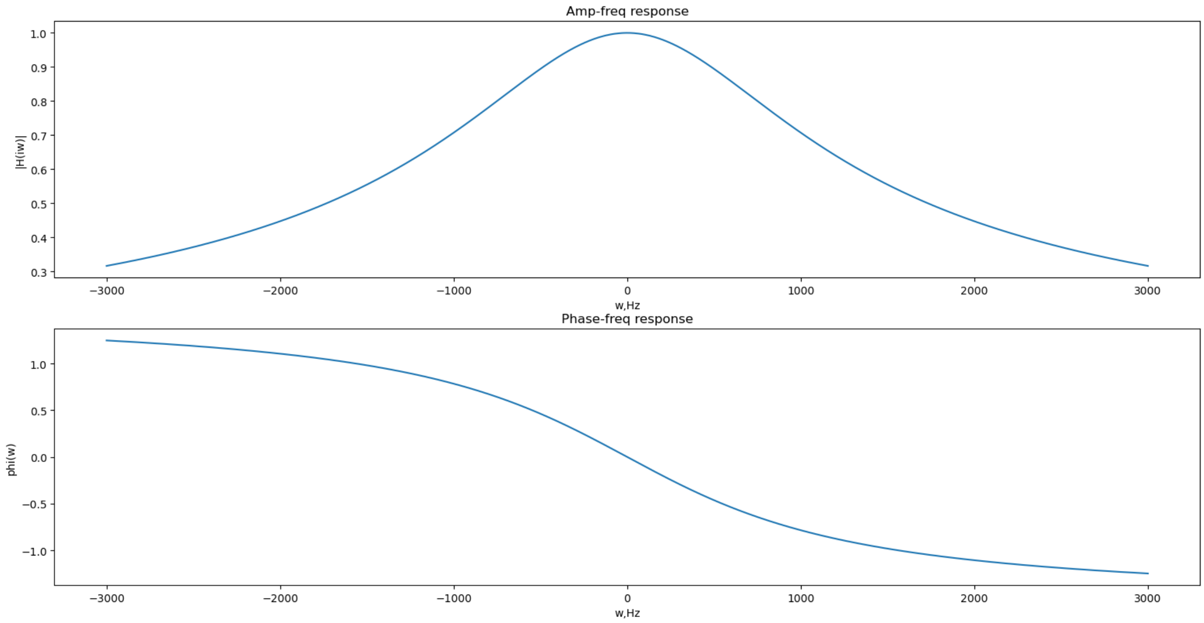

Рисунок 5 — АЧХ и ФЧХ RC цепи

Задание 3: вычисление сигнала на выходе линейной цепи по частотной характеристике цепи

Зная АЧХ и ФЧХ цепи, мы можем вычислить значение выходного сигнала. Наш сигнал имеет частоту 2000 Гц. Если посмотреть на график АЧХ и ФЧХ, то этому значению соответствуют амплитуда 0.45В и фаза -1.9 рад. Выходной сигнал будет иметь вид $0.45cos(4000\pi + 1.9)$.

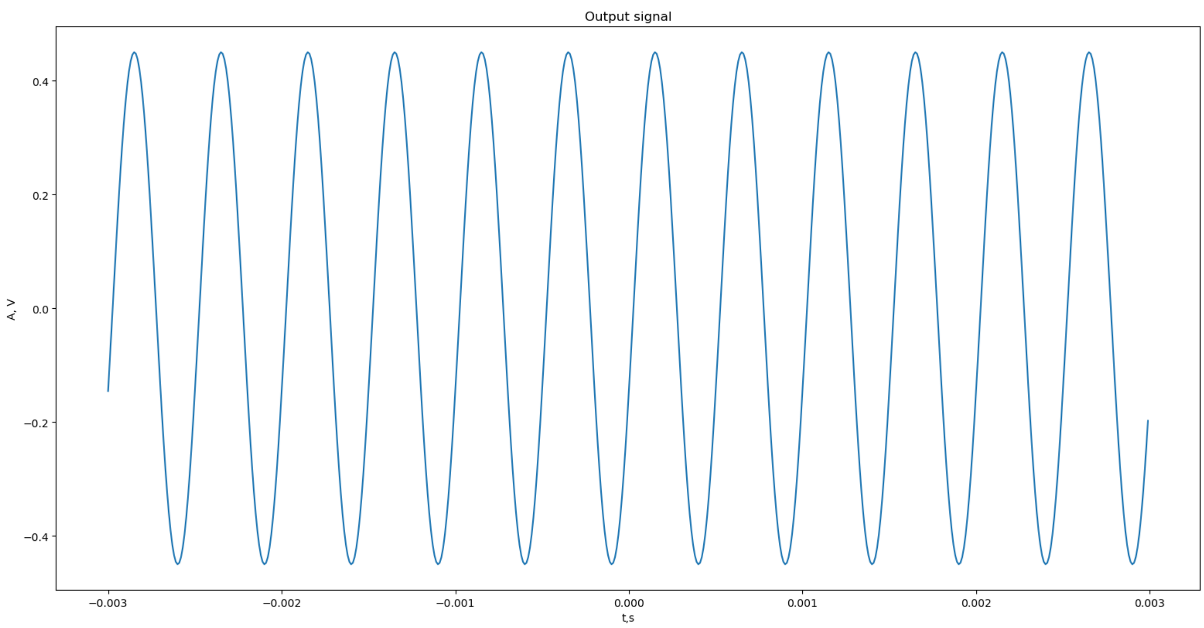

Рисунок 6 — Выходной сигнал

Видим, что в выходном сигнале изменилась фаза и амплитуда, но форма сигнала осталась прежней.

ВЫВОД

В ходе работы я познакомился с частотной характеристикой линенйой цепи (АЧХ и ФЧХ). Узнал, как форма АЧХ и ФЧХ отражается на сигнале во временной области.