МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств (ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине
Математические основы обработки сигналов

по теме:
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.А Калачиков*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель: Вспомнить, что такое преобразование Фурье. Произвести разложение в ряд Фурье на Python. Узнать, что такое ортогональность сигнала.
Задачи:

1 Вычисление коэффициентов ряда Фурье гармонического колебания

Целью практики является численное вычисление коэффициентов ряда Фурье простых сигналов. Гармоническое колебание записывается в виде

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{1}$$

Для формирования отрезка колебания заданной длительности нужно задать (определить) требуемые параметры колебания и вектор отсчетов независимой переменной t. Для формирования вектора отсчетов времени используется встроенная функция модуля np.linspace() из модуля numpy. Для вывода графика используется функция plt.plot() модуля matplotlib.pyplot. Для вычисления коэффициентов ряда Фурье в синусной/косинусной форме используется интегрирование произведения сигнала x(t) на опорные колебания sin(t) и cos(t). Интегрирование выполнется на периоде колебания x(t). Частоты опорных колебаний выбираются кратными основной частоте.

```
import numpy as np
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

f=5
T=1/f
Ts=0.01
#t = np.linspace(-0.1, 0.1, 100, endpoint=False)
t=np.arange(-0.1,0.1,Ts)
s= 2*np.cos(2*np.pi*f *t)
sc=np.cos(2*np.pi*f *t)
ss=np.sin(2*np.pi*f *t)

m1=s*sc
m2=s*ss

plt.plot(t, s,t,sc,t,m1)

plt.ylim(-2, 2)

a1=1/T*np.sum(m1)*Ts
```

Задайте гармоническое колебание x(t), выберите значение амплитуды, частоты, начальную фазу задайте равной 0.

Вычислите коэффициенты a_n и b_n для n = 0,1,2,3,4. По полученным коэффициентам вычислите и постройте графики A_n, $\phi(n)$.

Измените начальную фазу колебания и повторите вычисления.

Рисунок 1 — Задачи на практику

2 Программное вычисление коэффициентов ряда Фурье периодического прямоугольного сигнала

Сформируйте периодический прямоугольный сигнал с заданным периодом T и длительностью τ. Проведите вычисления коэффициентов ряда Фурье интегрированием произведения сигнала на опорные колебания.

По полученным коэффициентам a_n и b_n вычислить коэффициенты ряда Фурье в тригонометрической форме A_n и ϕ_n. Изобразите спектры амплитуд и фаз до 6 гармоники.

Выполните синтез временного колебания путем суммирования 2, 4, 6 коэффициентов ряда Фурье и изобразите полученные временные колебания.

3 Проверка ортогональности колебаний

Свойство ортогональности колебаний широко используется при формировании и приеме сигналов в современных системах мобильной связи.

В этом разделе проведем формирование колебаний и выполним проверку свойства ортогональности колебаний $s_k(t)$ и $s_n(t)$ на интервале времени $0 \le t \le T$

$$\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0 \tag{2}$$

Для проверки свойства ортогональности сформируйте сигнал $s_1(t) = sin(2\pi f_1 t)$ с частотой $f_1 = \frac{1}{T}$. Сформируйте сигнал $s_n(t) = sin(2\pi n f_1 t)$ и вычислите интеграл $\int_0^T s_1(t)s_n(t)dt$. Проверьте, что интеграл $\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0$ для всех положительных k и n.

Измените значение частоты одного из колебаний и снова проверьте выполнение свойства ортогональности.

Измените интервал интегрирования на несколько точек, проверьте выполнение свойства ортогональности.

Сформируйте сигнал $s_n(t) = e^{j(2\pi n f_1 t)}$ и вычислите интеграл $\int_0^T s_1(t)s_n(t)dt$. Проверьте, что интеграл $\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0$ для положительных и отрицательных k и n. На выбор номера n и k меняйте в пределах до 10.

Измените значение частоты одного из колебаний и снова проверьте выполнение свойства ортогональности.

Измените интервал интегрирования на несколько точек, проверьте выполнение свойства ортогональности.

4 Спектр периодического прямоугольного сигнала (письменно)

Используя выражения для расчета компонент рядя Фурье (гармоник) периодического прямоугольного сигнала вычислить и сравнить спектры последовательности прямоугольных видеоимпульсов для трех случаев

- T = 0.1 с, $\tau = 0.05c$

3

- T = 0.1 с, $\tau = 0.025c$
- T = 0.2 с, $\tau = 0.025c$

Рисунок 2 — Задачи на практику

РЯД ФУРЬЕ

Ряд Фурье — это способ представить периодическую функцию в виде суммы простых гармонических колебаний (синусов и косинусов) с разными частотами, амплитудами и фазами.

Функции $\{1, cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x).\}$ являются базисом пространтсва периодических функций (как в линейной алгебре есть базис, допустим, трехмерного пространтсва, который состоит из ортов i, j и k, и все вектора в этом пространстве могут быть разложены по этим ортам, т.е представлены в виде их линеной комбинации), поэтому почти любую периодическую функцию можно представить в виде суммы функций, принадлежащих этому базису.

Еще одним примером разложения является ряд Тейлора. Базисом для пространства функций является множество функций $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$, по которому также можно разложить почти любую функцию, т.е. представить в виде линейной комбинации многочленов.

Ряд Фурье и его коэффициенты вычисляются следующим образом:

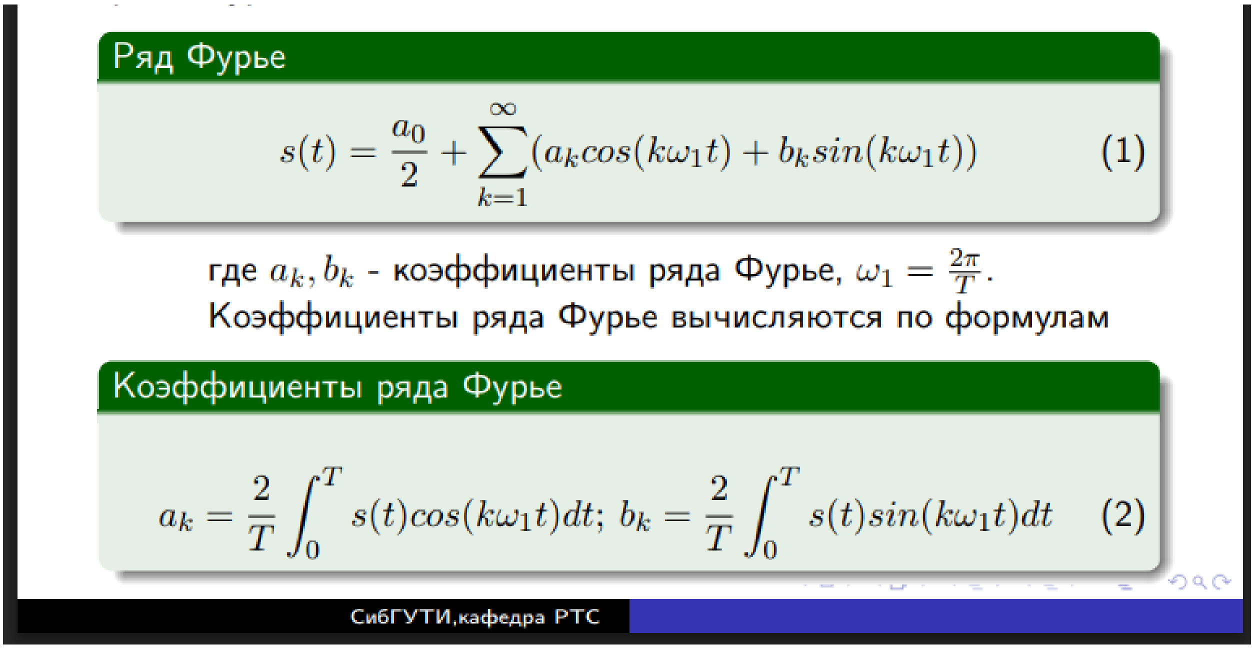

Рисунок 3 — Формула ряда Фурье и коэффициентов

где $\frac{a_0}{2}$ — постоянная составляющая (или среднее значение сигнала), a_k и b_k — коэффициенты ряда Фурье, a_k отвечает за амплитуды чётных (симметричных) составляющих функции и показывают, насколько сильно в сигнале выражена компонента вида cos($\omega_0 t$), а b_k отвечает за амплитуды нечётных (асимметричных) составляющих функции и показывают, насколько сильно в сигнале выражена компонента вида sin($\omega_0 t$).
k — номер гармоники ($k = 1,2,3,4,\dots$),
cos$(k\omega_1 t)$ и sin$(k\omega_1 t)$ — базисные функции.

Важно заметить, что сигнал, который нужно разложить в ряд Фурье, должен содержать только гармонники с частотой кратной w_1. Если такое условие не выполняется, то сигнал не будет периодическим и разложить его в классический ряд Фурье невозможно.

Пример вычисления коэффициентов ряда Фурье:

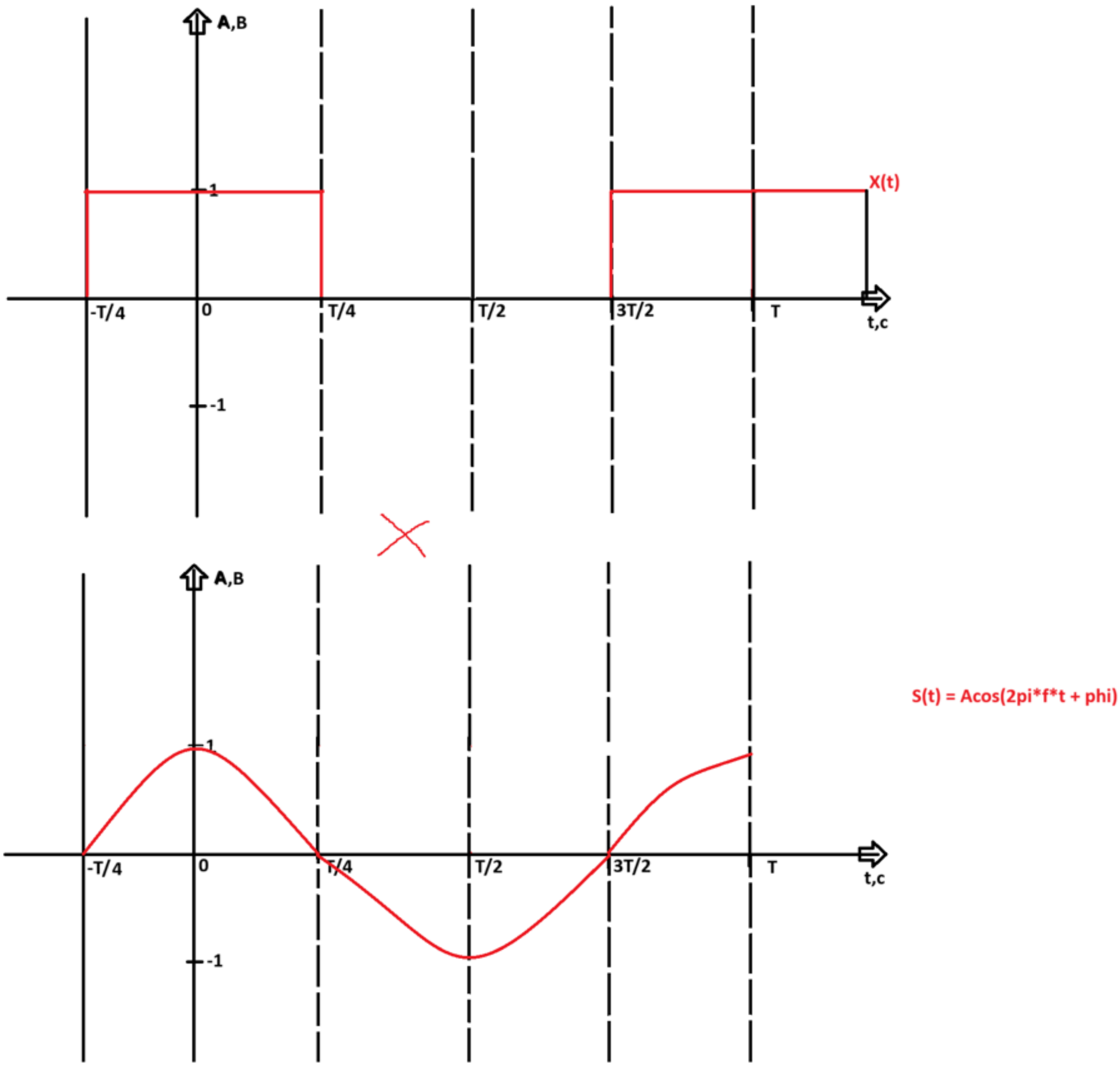

Рисунок 4 — Геометрическая интерпретация вычисления a_k

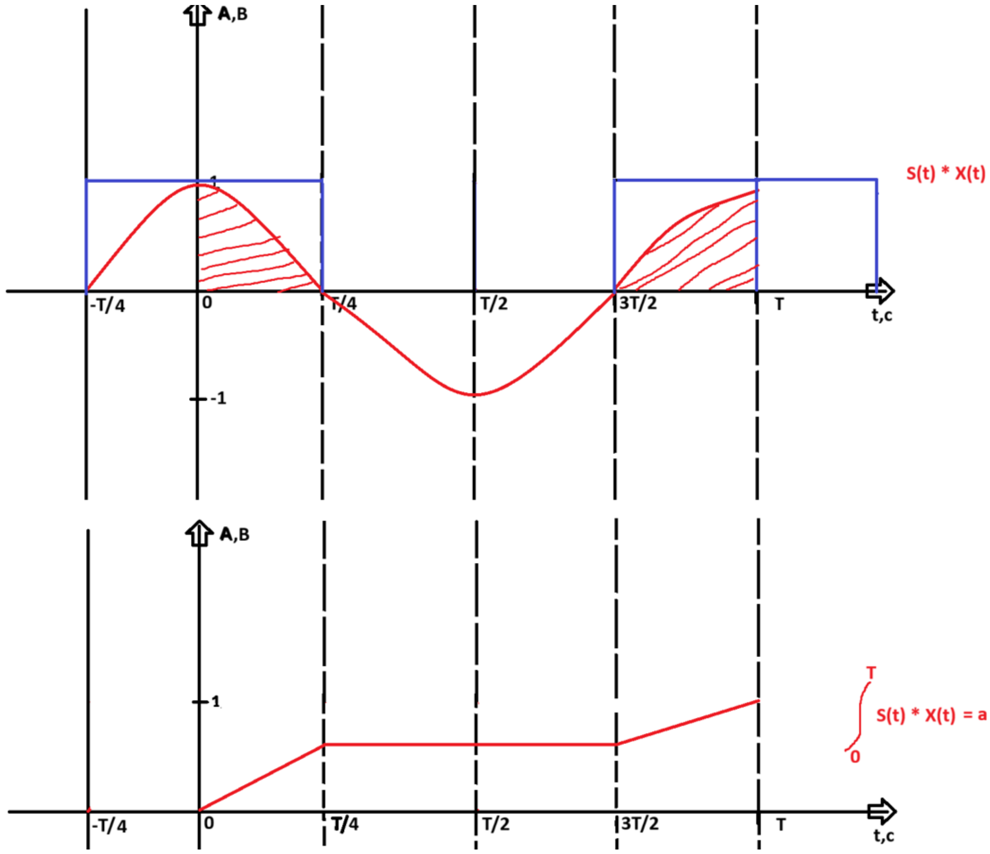

Рисунок 5 — Геометрическая интерпретация вычисления a_k

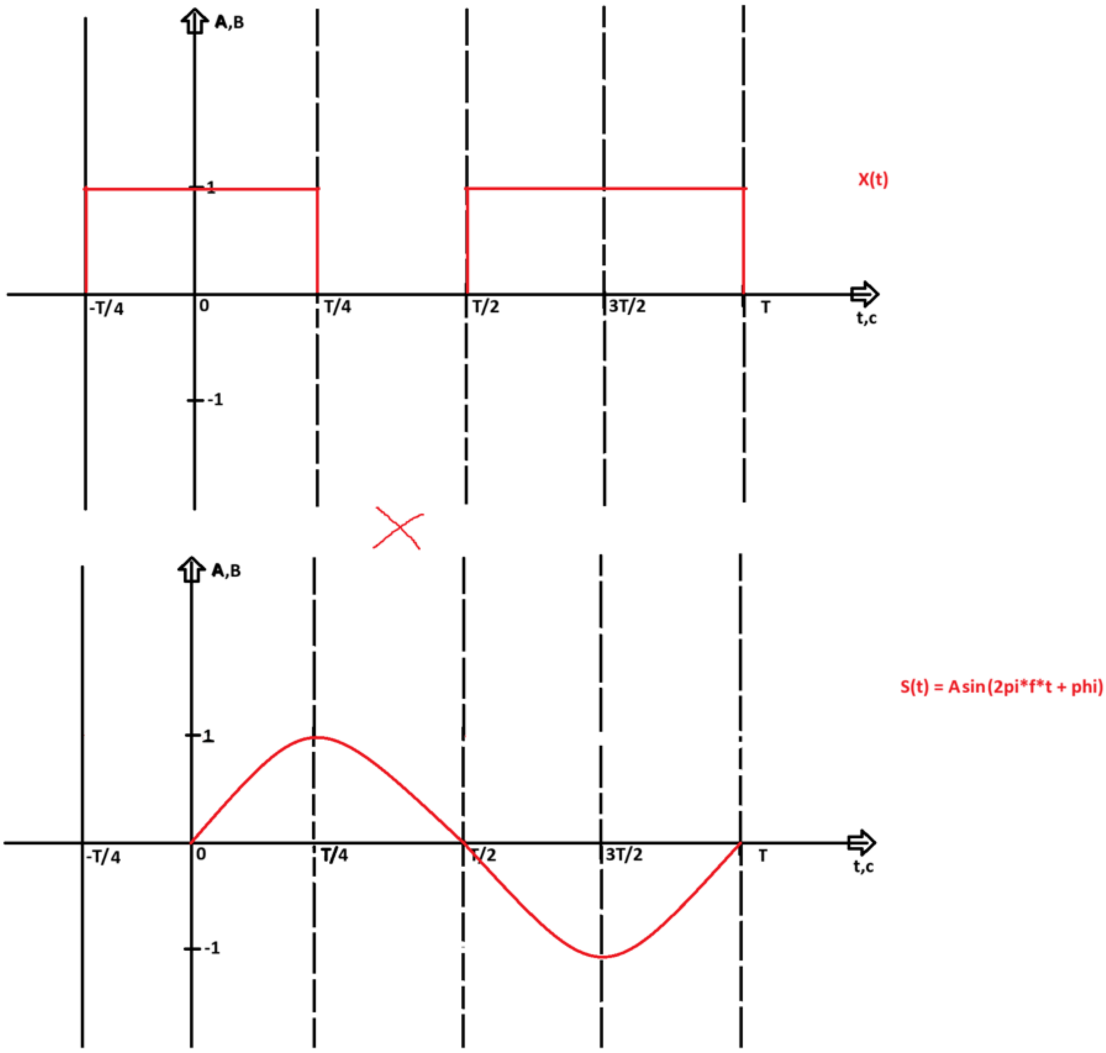

Рисунок 6 — Геометрическая интерпретация вычисления b_k

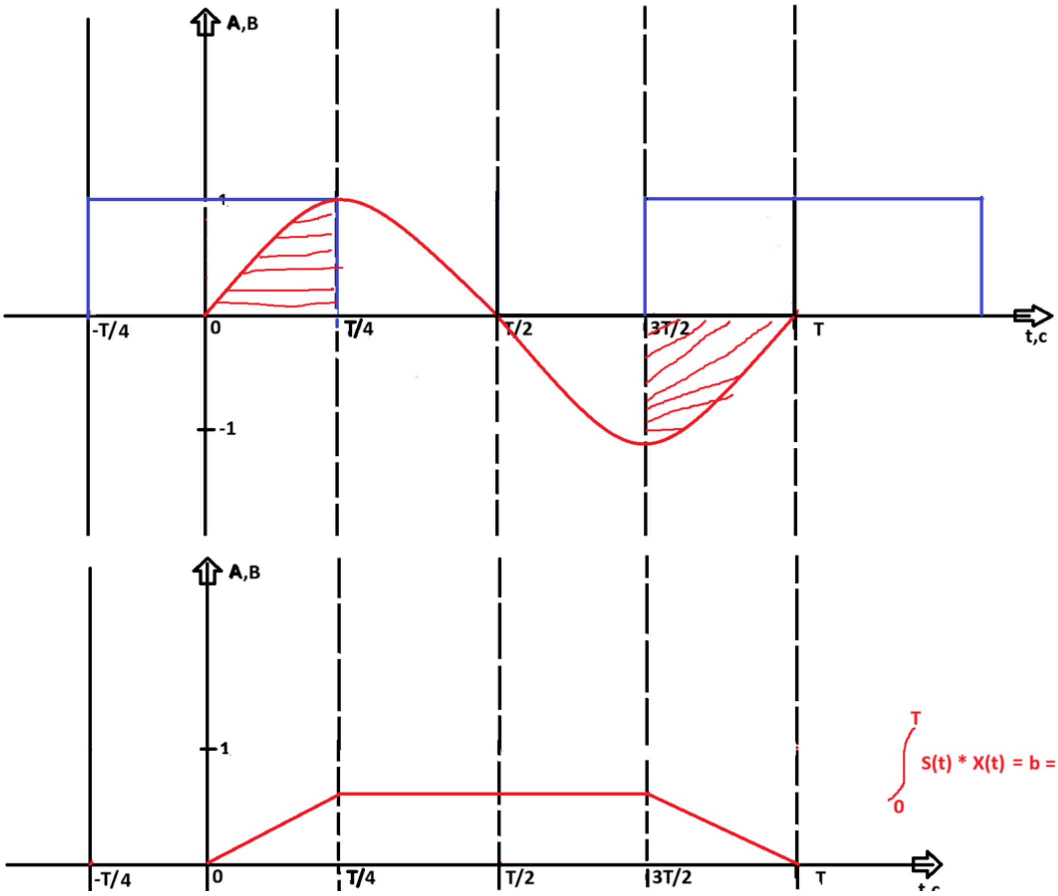

Рисунок 7 — Геометрическая интерпретация вычисления b_k

Заметим, что исходный сигнал (прямоугольный) - четный, поэтому коэффциенты b_k будут всегда равны нулю и в разложении будет участвовать только $\cos(\omega_0 t)$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФАЗОРА ПРИ СЛОЖЕНИИ СИГНАЛОВ С ОДИНАКОВОЙ ЧАСТОТОЙ

Если складывать сигналы с одинаковой частотой, то изменятся будут только амплитуда и фаза. Эти два параметра и содержит фазор, поэтому достаточно просто сложить фазоры двух сигналов.

Алгоритм сложения фазоров:

1. Переводим фазоры из экспоненциальной формы записи в обыкновенную
2. Складываем 2 комплексных числа из прошлого шага, как вектора
3. Переводим фазор обратно в экспоненциальную форму

Таким образом, мы можем узнать, как изменится начальная фаза и амплитуда колебания при сложении.

ВИЗУАЛИЦАИЯ С ПОМОЩЬЮ PYTHON

Сложим 2 сигнала с одинаковой частотой, но разными фазами и амплитудой. Получим новый сигнал с новой амплитудой и новой фазой

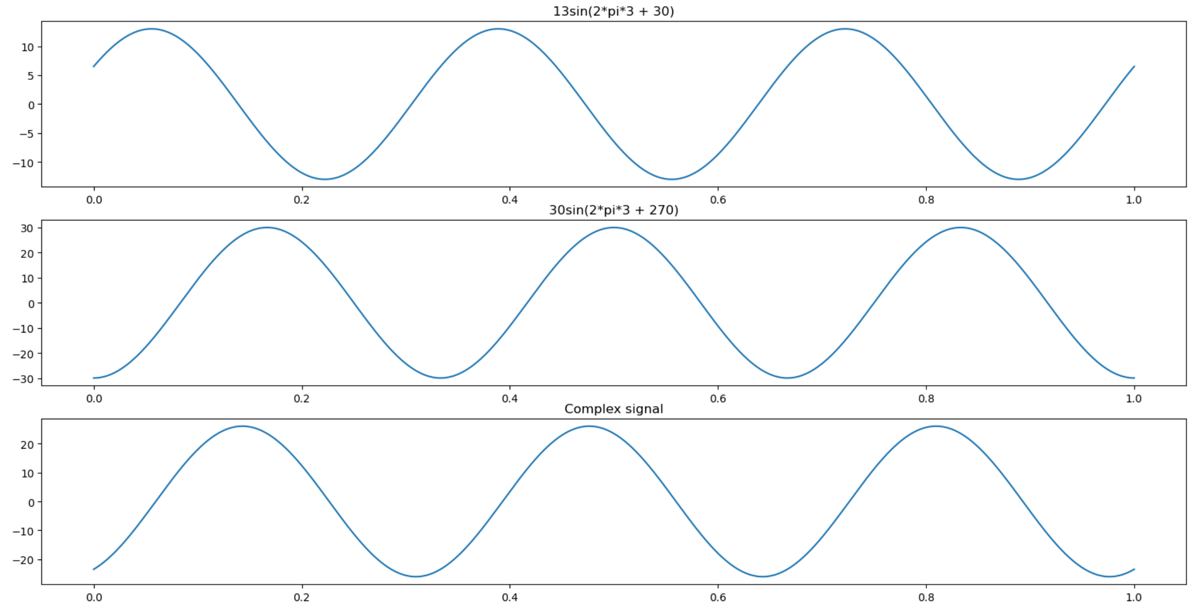

Рисунок 8 — Результат сложения сигналов с совпадающей частотой

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СЛОЖЕНИЯ СИГНАЛОВ С РАЗНОЙ ЧАСТОТОЙ

$$x(t) = \frac{4}{\pi}cos(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \frac{4}{3\pi}cos(2\pi 3ft - \frac{\pi}{2})$$

Рисунок 9 — Сложение двух сигналов разной частоты

В результате получим такую функцию:

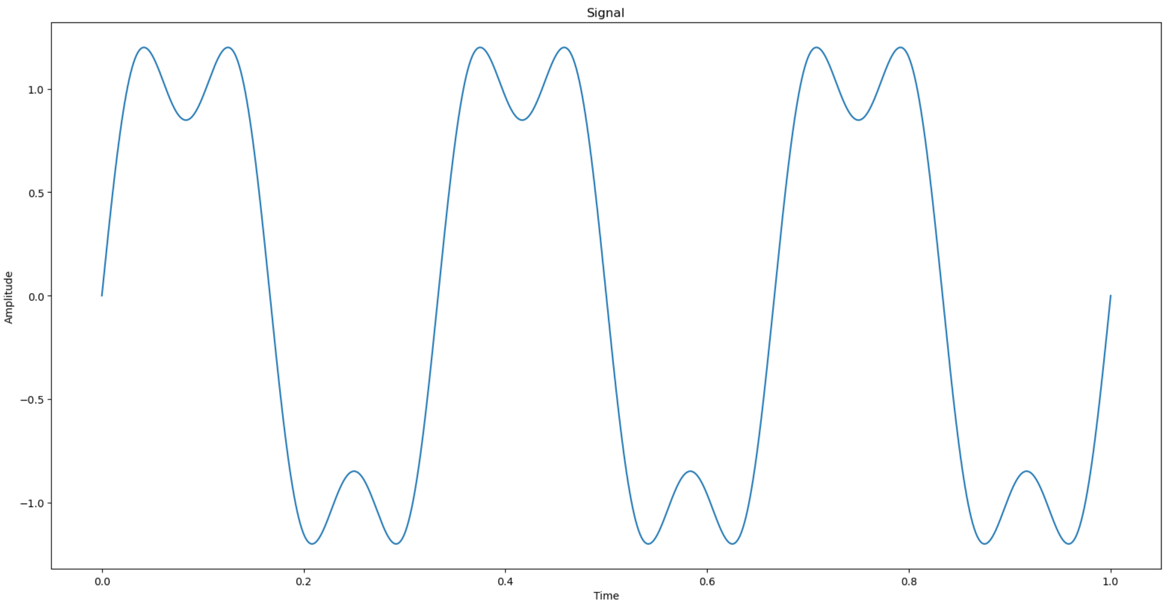

Рисунок 10 — Результат сложения сигналов разной частоты

Про этот сигнал нельзя однозначно сказать, какая у него частота, т.к в нем содержатся компоненты на 3Гц и 9Гц, и частота у сигнала переменная.

Просуммируем такие сигналы и визуализируем новый сигнал:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{5} \frac{4}{(2n-1)\pi}cos(2\pi(2n-1)ft - \frac{\pi}{2})$$

Рисунок 11 — Сложение N сигналов разной частоты

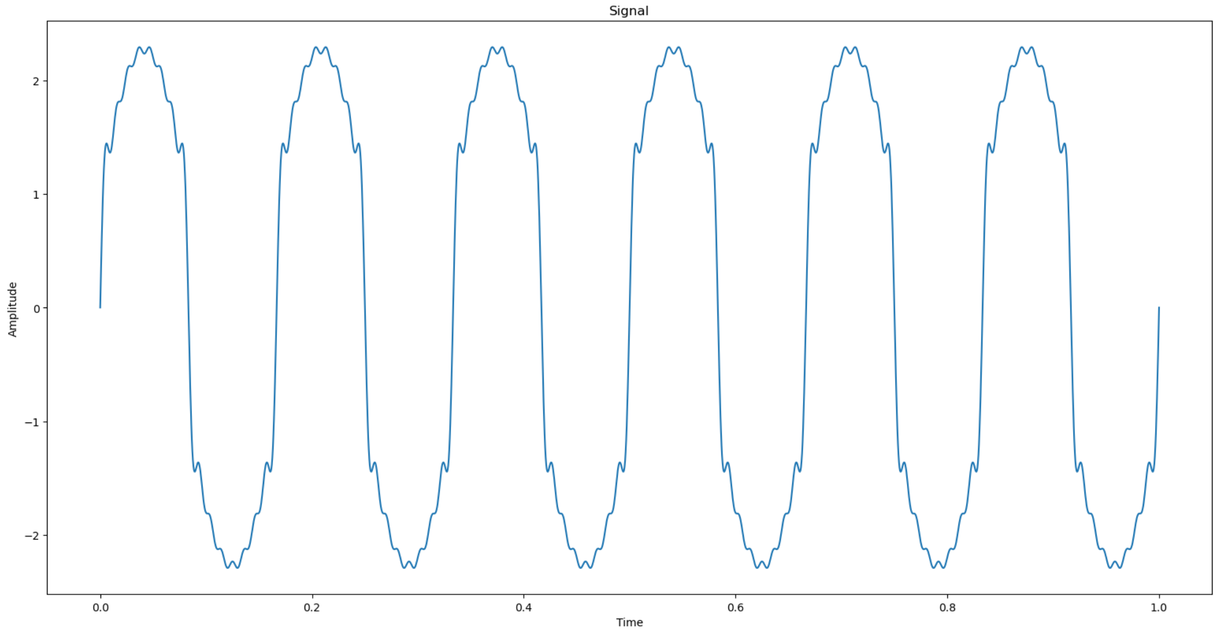

Рисунок 12 — Результат сложения N сигналов разной частоты

ВЫВОД

При сложении сигналов ”на бумаге”используется фазор. Если складывать сигналы с одинаковой частотой, то получим новый сигнал с той же частотой, но разной фазой и амплитудой. Если складывать сигналы с разной частотой, то получим сигнал с переменной частотой. В теории, если суммировать бесконечное число сигналов разной частоты, то получим прямоугольный сигнал.