

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ
КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств
(ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №8
по дисциплине
Теория массового обслуживания

по теме:
СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ М/G/1. ФОРМУЛА
ХИНЧИНА - ПОЛЛЯЧЕКА

Студент:
Группа ИА-331

Я.А Гмыря

Предподаватель:
Преподаватель

А.В Андреев

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ	3
2	ТЕОРИЯ.....	4
3	ХОД РАБОТЫ	6
3.1	Поллячек и Хинчин.....	6
3.2	Ход работы.....	6
3.3	Контрольные вопросы	13
4	ВЫВОД	16

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель:

Проверить корректность формулы Хинчина - Поллячека примере систем типа М/М/1 и М/D/1.

Задание к лабораторной работе

Задание к лабораторной работе

1. Открыть Matlab.
2. Написать Matlab – программу, рассчитывающую характеристики СМО.
3. Получить зависимости всех вышеописанных характеристик от нормированной дисперсии времени обслуживания и коэффициента загрузки для системы типа М/G/1 по формулам 8.1 – 8.4. При этом нормированную дисперсию изменять следующим образом: $C_b^2 = 0, 1, 10, 20, 30, \dots, 100$, Среднее время обслуживания задать по своему усмотрению.
4. Получить зависимости вышеописанных характеристик от коэффициента загрузки для системы М/D/1 по формулам 8.5 – 8.8.
5. Получить зависимости характеристик от коэффициента загрузки для системы М/М/1 по формулам 8.9 – 8.12.
6. Построить графики полученных зависимостей (каждая характеристика на отдельном графике, три СМО на одном графике).
7. Сравнить полученные результаты, сделать выводы по лабораторной работе.
8. Оформить отчет.
9. Сохранить Matlab-файл в папке «Мои документы\ОТМО\».
10. Сдать и защитить работу.

Рисунок 1 — Задание для лабораторной работы

ТЕОРИЯ

Основные сведения

Характеристики M/G/1

Средняя длина очереди

$$\bar{N}_q = \rho^2 \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.1)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{N} = \rho + \rho^2 \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.2)$$

Среднее время ожидания

$$W = \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.3)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \bar{x} + \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.4)$$

Характеристики M/D/1

Средняя длина очереди

$$\bar{N}_q = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)}. \quad (8.5)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{N} = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} + \rho. \quad (8.6)$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot x}{2(1-\rho)}. \quad (8.7)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \frac{x(1-\rho)}{2(1-\rho)}. \quad (8.8)$$

Характеристики M/M/1

Средняя длина очереди

$$\bar{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \quad (8.9)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (8.10)$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot \bar{x}}{1-\rho}. \quad (8.11)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$W = \frac{\bar{x}}{1-\rho}, \quad (8.12)$$

Где

$C_b^2 = \frac{\sigma_b^2}{(\bar{x})^2}$ – нормированная дисперсия времени обслуживания,

σ_b^2 – дисперсия времени обслуживания,

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – коэффициент использования системы.

Рисунок 3 — Теория для лабораторной работы

ХОД РАБОТЫ

3.1 Поллячек и Хинчин

Феликс Поллячек (1892–1981) — австрийский математик и инженер. Один из первых исследовал очереди и СМО, разработал анализ характеристик М/Г/1-систем. Ввёл формулу для среднего числа заявок в системе с произвольным временем обслуживания.

Александр Хинчин (1894–1959) - советский математик. Совместно с Поллячек разработал аналитические формулы для М/Г/1.

3.2 Ход работы

Зададим базовые параметры СМО - интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки. Вычисляем мат.ожидание и дисперсию экспоненциального распределения, которое понадобится для М/М/1. Вычисляем коэффициент загрузки системы.

```
%define params
lambda = 5;
u = 15;

% E and D for exp distr
E = 1/lambda;
D = 1/lambda^2;

% coef of using sysytem
p_v = lambda / u;
```

Для расчетов параметров для системы М/Г/1 я выбрал гамма распределение, оно характеризуется параметрами a и k

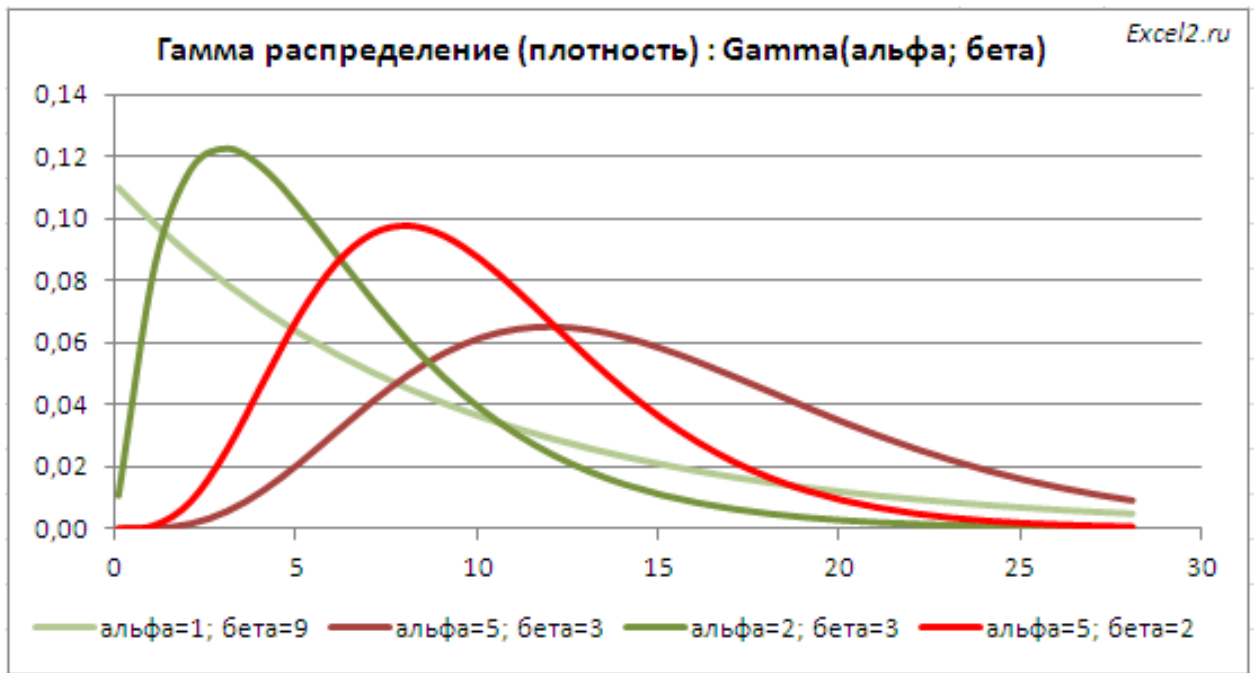


Рисунок 4 — Гамма-распределение

a - коэффициент формы, благодаря ему распределение становится более симметричным и меньше скошено вправо или влево (при увеличении). b - коэффициент масштабирования, он растягивает распределение, среднее и дисперсия увеличиваются.

Чтобы правильно подобрать a и b нужно решить систему уравнений

$$ab = 0.2$$

$$ab^2 = 0.04$$

Отсюда $a = 1$, $b = 0.2$. Теперь зададим распределение

```
%params for time serving distr (gamma)
a = 1;
b = 0.2;
N_i = 250;

%exp distr
exp_distr = exprnd(E, 1, N_i);

%gamma distr
MG1_tn = gamrnd(a, b, 1, N_i);
```

Необходимо построить зависимости СМО M/G/1 от загруженности системы ρ и нормированной дисперсии времени обслуживания c^2 . Зададим набор значений вручную. $0 < \rho < 1$. Далее в цикле высчитываем метрики и выводим на график.

```
%vector of var
var = [0, 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100];
p_v = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9];
p_count = length(p_v);

N_q = zeros(p_count, 1);
N = zeros(p_count, 1);
W = zeros(p_count, 1);
T = zeros(p_count, 1);

for i = 1: length(p_v)
    stats = MG1_param(MG1_tn, 0, p_v(i));
    N_q(i) = stats.N_q;
    N(i) = stats.N;
    W(i) = stats.W;
    T(i) = stats.T;
end

figure;
subplot(4, 1, 1);
plot(p_v, N_q);
xlabel("p");
ylabel("N_q");
title      ("                M/G/1");
subplot(4, 1, 2);
plot(p_v, N);
xlabel("p");
ylabel("N");
title      ("                M/G/1");
subplot(4, 1, 3);
plot(p_v, W);
xlabel("p");
ylabel("N");
title      ("                M/G/1");
subplot(4, 1, 4);
plot(p_v, T);
xlabel("p");
```



```
ylabel("N");  
title      ("                      M/G/1");
```

Для остальных систем код идентичен.

Код для высчитывания метрик разных СМО

```
function stats = MG1_param(tn, c, p)  
    %N_q - avg queue len  
    %N - avg tasks count in system  
    %W - avg waiting time  
    %T - avg time task into system  
    %t_n - set of time serving  
  
    %avg time serving  
    avg_tn = mean(tn);  
  
    %compute params  
    stats.N_q = p^2 * (1 + c) / (2*(1-p));  
    stats.N = p + stats.N_q;  
    stats.W = p * avg_tn * (1 + c) / (2*(1-p));  
    stats.T = avg_tn + stats.W;  
  
end  
  
function stats = MD1_param(t, p)  
    %N_q - avg queue len  
    %N - avg tasks count in system  
    %W - avg waiting time  
    %T - avg time task into system  
    %t - time serving  
  
    %compute params  
    stats.N_q = p^2 * 1 / (2*(1-p));  
    stats.N = p + stats.N_q;  
    stats.W = p * t / (2*(1-p));  
    stats.T = t*(1 - p) / (2 * (1 - p));  
  
end  
  
function stats = MM1_param(tn, p)  
    %N_q - avg queue len  
    %N - avg tasks count in system
```

```

%W - avg waiting time
%T - avg time task into system
%t_n - set of time serving

```

```

%avg time serving
avg_tn = mean(tn);

```

```

%compute params
stats.N_q = p^2/(1-p);
stats.N = p / (1 - p);
stats.W = stats.N * avg_tn;
stats.T = avg_tn / (1-p);

```

```
end
```

Результаты:

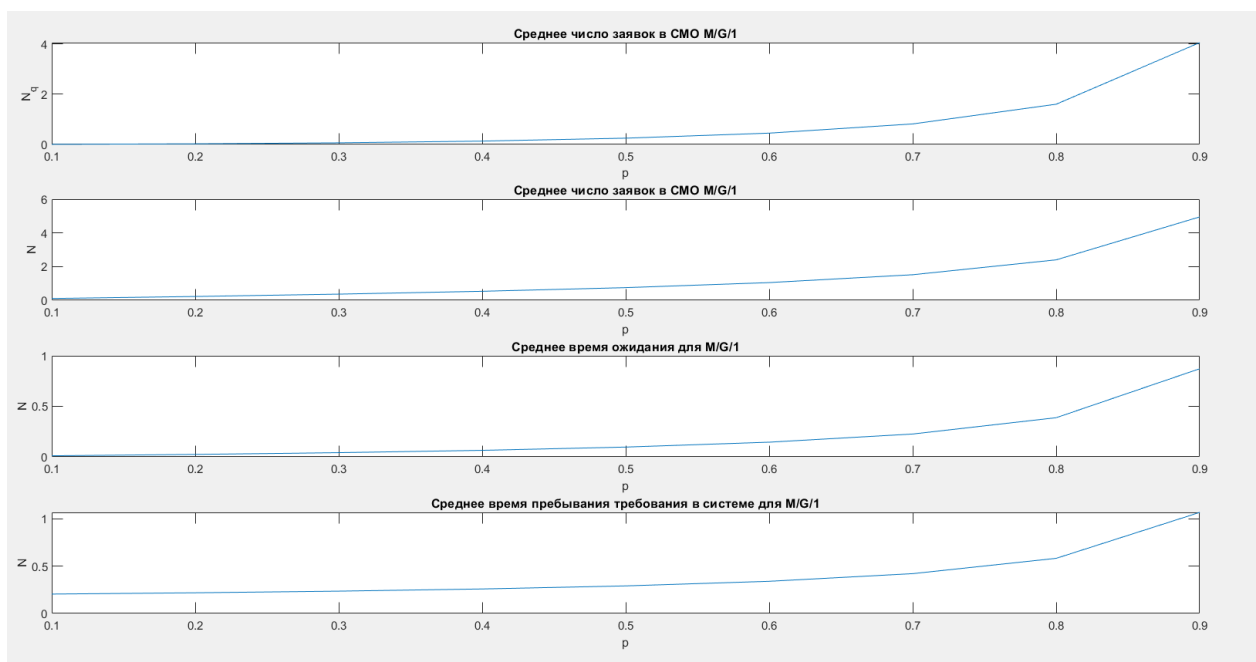


Рисунок 5 — Зависимость параметров СМО M/G/1 от загрузки

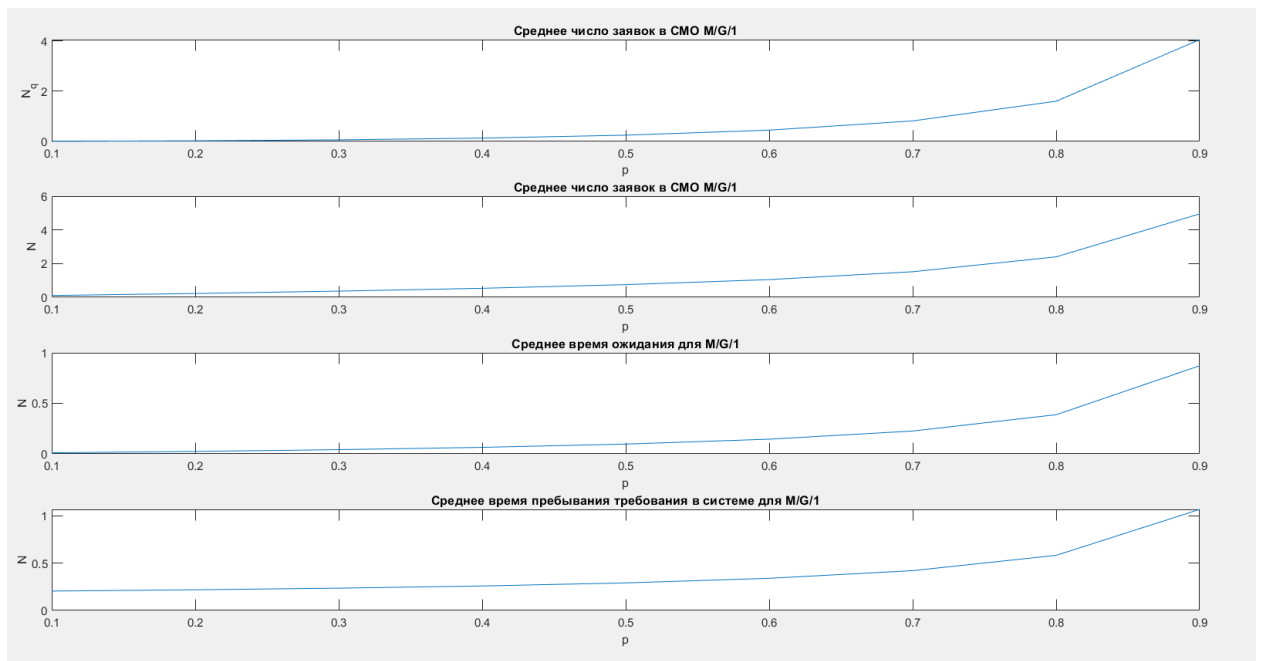


Рисунок 6 — Зависимость параметров СМО M/G/1 от дисперсии времени обработки

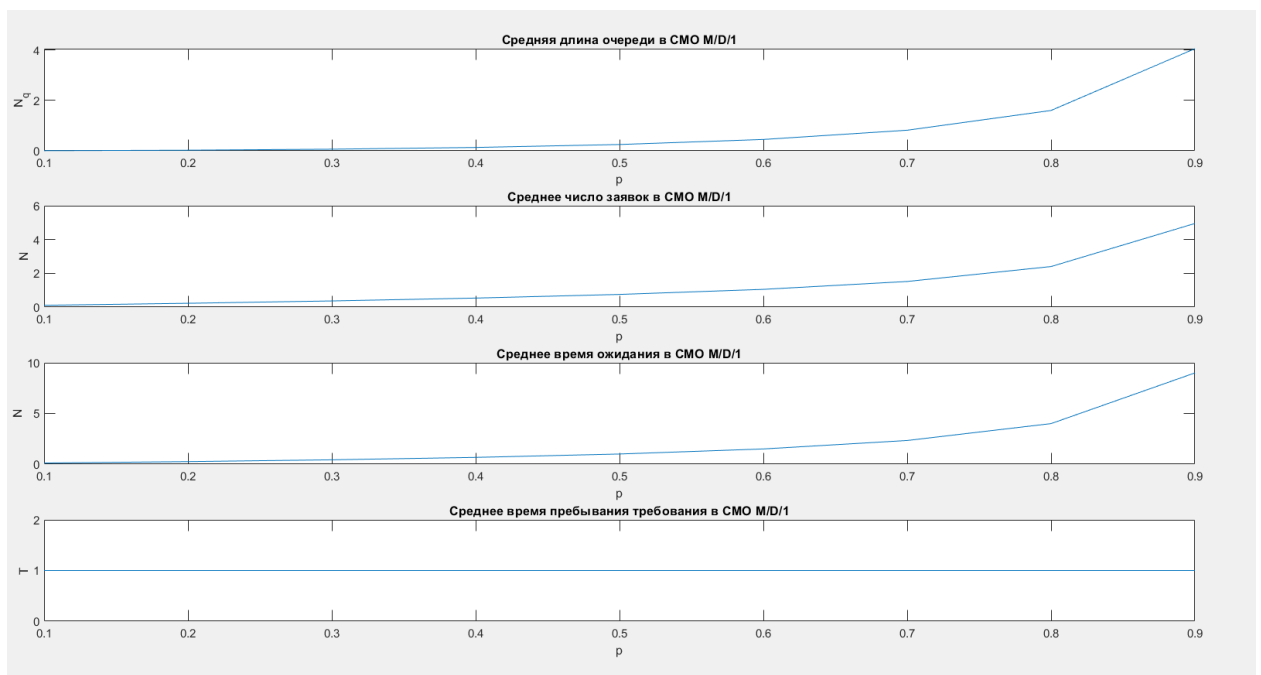
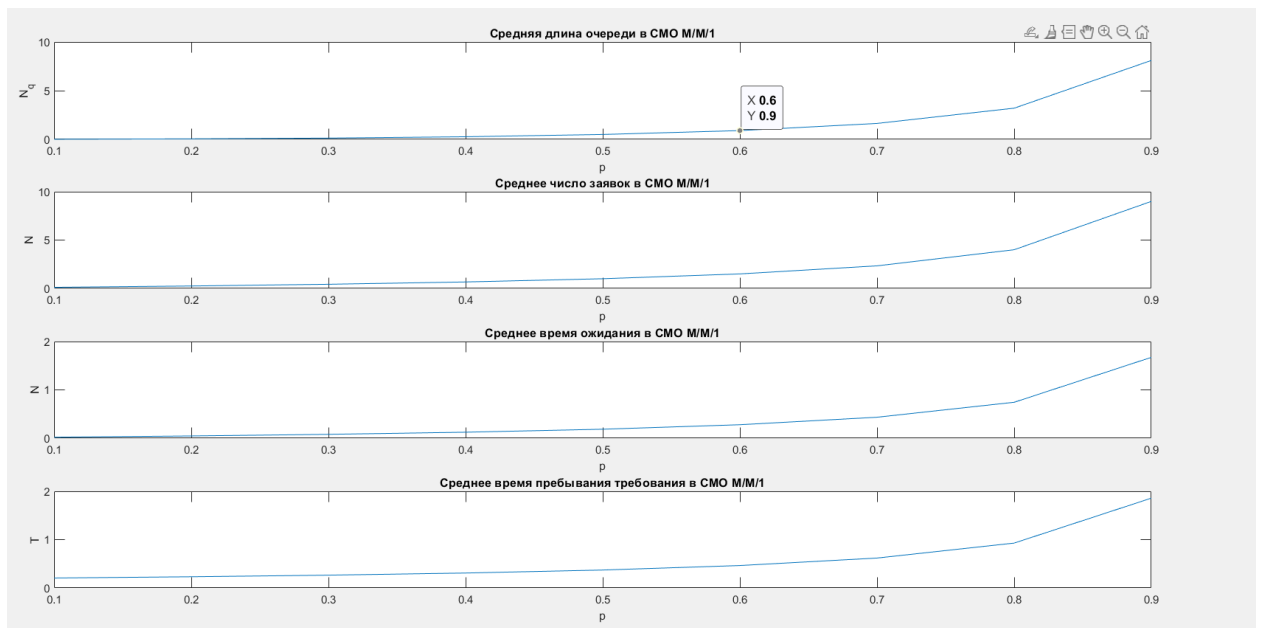


Рисунок 7 — Зависимость параметров СМО M/D/1 от загрузки системы



По результатам можем заметить, что метрики всех видов рассмотренных СМО экспоненциально растут при росте загрузки системы, кроме системы М/Д/1, потому что у нее время обработки детерминированно (константа). Система М/Г/1 зависит от нормированной дисперсии времени обработки линейно.

3.3 Контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Формула Хинчина – Поллячека для системы массового обслуживания типа $M/G/1$.
2. Формула Хинчина – Поллячека для системы массового обслуживания типа $M/M/1$.
3. Формула Хинчина – Поллячека для системы массового обслуживания типа $M/D/1$.
4. Нормированная дисперсия времени обслуживания.
5. Средняя длина очереди.
6. Среднее число заявок в СМО.
7. Среднее время ожидания.
8. Среднее время пребывания требования в системе.

47

-
9. Сравнение вероятностно-временных характеристик систем $M/D/1$ и $M/M/1$.

Рисунок 9 — Контрольные вопросы

Основные сведения
Характеристики M/G/1

Средняя длина очереди

$$\bar{N}_q = \rho^2 \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.1)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{N} = \rho + \rho^2 \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.2)$$

Среднее время ожидания

$$W = \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.3)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \bar{x} + \rho \cdot \bar{x} \frac{(1+c_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (8.4)$$

Характеристики M/D/1

Средняя длина очереди

$$\bar{N}_q = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)}. \quad (8.5)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{N} = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} + \rho. \quad (8.6)$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot x}{2(1-\rho)}. \quad (8.7)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \frac{x(1-\rho)}{2(1-\rho)}. \quad (8.8)$$

Характеристики M/M/1

Средняя длина очереди

$$\bar{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \quad (8.9)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (8.10)$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot \bar{x}}{1-\rho}. \quad (8.11)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$W = \frac{\bar{x}}{1-\rho}, \quad (8.12)$$

4. Нормированная дисперсия времени обслуживания - дисперсия времени обслуживания, нормированная по среднему времени обработки заявки:
$$c^2 = \frac{\sigma^2}{\bar{x}^2}.$$

5. Средняя длина очереди - кол-во заявок, ожидающих свою обработку в очереди.

6. Среднее число заявок в СМО - кол-во заявок, которое находится в очереди и обрабатывается.

7. Среднее время ожидания - то время, которое заявка ожидает в очереди перед обработкой.

8. Среднее время пребывания требования в системе - то время, которое заявка находится в системе с момента ее поступления в нее до момента полной обработки.

9. Системы M/D/1 и M/M/1 отличаются временем обработки заявок. В M/M/1 время обработки распределено по экспоненциальному закону, а в M/D/1 время обработки - константа. Система M/D/1 - идеализированная система, где время обработки никак не зависит от нагрузки, что в реальности невозможно.

ВЫВОД

В ходе работы я рассчитал метрики для разных видов СМО и сравнил полученные результаты.