МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств (ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине
Математические основы обработки сигналов

по теме:
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.А Калачиков*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель:

Узнать метод, позволяющий получить спектральную функцию для непериодического сигнала.

ТЕОРИЯ

Введение

На прошлых занятиях мы рассматривали ряд Фурье и разные варианты его записи: тригонометрическая, косинусная, комплексная формы. Но все эти варианты записи объединяло то, что они работали только с периодическими сигналами. На этом занятии рассмотрим преобразование Фурье, которое приминимо к непериодическим сигналам.

Ряд Фурье в комплексной форме

Периодический сигнал можно представить в виде ряда Фурье. Совокупность гармоник ряда Фурье - спектр сигнала. Спектр сигнала дискретный (линейчатый), состоит из спектральных линий частот, кратных ω_0.

Для непериодического сигнала $T \to \infty$. При увеличении периода сигнала интервалы между спектр. линиями уменьшаются. Пусть $T \to \infty$, тогда спектр линий сливается, образуя сплошной непрерывный спектр - спектральную функцию.

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_0 nt}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-i\omega_0 nt}\, dt$$

Подставим C_n и заменим $\frac{1}{T}$ на $\frac{\omega_0}{2\pi}$:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-i\omega_0 nt}\, dt \right] e^{in\omega_0 t}$$

Какой сигнал можно назвать непериодическим? Тот, у которого период бесконечно большой, т.е T->∞. При $T \to \infty$ частота первой гармоники $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ уменьшается и гармоники располагаются чаще, спектр вместо дискретного становится сплошным, непрерывным. Амплитуды отдельных гармоник становятся бесконесно малыми.

Пусть $T \to \infty$, тогда $\omega_0 \to \delta\omega \to 0$, $n\omega_0 \to \omega$

Тогда ряд Фурье запишем как:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} \, dt \right] e^{i\omega t} \delta\omega$$

Сумма переходит в пределе в интеграл.

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-i\omega t} \, dt \right] e^{i\omega t} \, d\omega$$

Преобразование Фурье:

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega_0 t} \, dt \quad \to \text{ПФ}$$

Обратное ПФ:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(i\omega) e^{i\omega_0 t} \, d\omega \quad - \text{ОПФ}$$

$S(i\omega)$ соответствует комплексному коэффициенту ряда Фурье.

Прямое преобразование Фурье преобразует сигнал из временной области в частотную область, т.к $T \to \infty$, то коэффициент C_n соответствует конечной амплитуде в узкой полосе частот $d\omega$. $S(i\omega)$ - комплексная функция, т.е $S(i\omega) = |S(i\omega)| e^{i\phi\omega}$.

$|S(i\omega)| = \sqrt{Re[S(i\omega)]^2 + Im[S(i\omega)]^2}$ - амплитудный спектр

$\phi(w) = -arctg\frac{Im[S(i\omega)]}{Re[S(i\omega)]}$ - фазовый спектр.