МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств
(ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине
Математические основы обработки сигналов

по теме:
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.А Калачиков*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель: Вспомнить, что такое преобразование Фурье. Произвести разложение в ряд Фурье на Python. Узнать, что такое ортогональность сигнала.
Задачи:

1 Вычисление коэффициентов ряда Фурье гармонического колебания

Целью практики является численное вычисление коэффициентов ряда Фурье простых сигналов. Гармоническое колебание записывается в виде

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1)$$

Для формирования отрезка колебания заданной длительности нужно задать (определить) требуемые параметры колебания и вектор отсчетов независимой переменной t. Для формирования вектора отсчетов времени используется встроенная функция модуля np.linspace() из модуля numpy. Для вывода графика используется функция plt.plot() модуля matplotlib.pyplot. Для вычисления коэффициентов ряда Фурье в синусной/косинусной форме используется интегрирование произведения сигнала x(t) на опорные колебания sin(t) и cos(t). Интегрирование выполнется на периоде колебания x(t). Частоты опорных колебаний выбираются кратными основной частоте.

```
import numpy as np
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

f=5
T=1/f
Ts=0.01
#t = np.linspace(- 0.1, 0.1, 100, endpoint=False)
t=np.arange(-0.1,0.1,Ts)
s= 2*np.cos(2*np.pi*f *t)
sc=np.cos(2*np.pi*f *t)
ss=np.sin(2*np.pi*f *t)

m1=s*sc
m2=s*ss

plt.plot(t, s,t,sc,t,m1)

plt.ylim(-2, 2)

a1=1/T*np.sum(m1)*Ts
```

Задайте гармоническое колебание x(t), выберите значение амплитуды, частоты, начальную фазу задайте равной 0.

Вычислите коэффициенты a_n и b_n для n = 0,1,2,3,4. По полученным коэффициентам вычислите и постройте графики A_n, $\phi(n)$.

Измените начальную фазу колебания и повторите вычисления.

Рисунок 1 — Задачи на практику

2 Программное вычисление коэффициентов ряда Фурье периодического прямоугольного сигнала

Сформируйте периодический прямоугольный сигнал с заданным периодом T и длительностью τ. Проведите вычисления коэффициентов ряда Фурье интегрированием произведения сигнала на опорные колебания.

По полученным коэффициентам a_n и b_n вычислить коэффициенты ряда Фурье в тригонометрической форме A_n и ϕ_n. Изобразите спектры амплитуд и фаз до 6 гармоники.

Выполните синтез временного колебания путем суммирования 2, 4, 6 коэффициентов ряда Фурье и изобразите полученные временные колебания.

3 Проверка ортогональности колебаний

Свойство ортогональности колебаний широко используется при формировании и приеме сигналов в современных системах мобильной связи.

В этом разделе проведем формирование колебаний и выполним проверку свойства ортогональности колебаний $s_k(t)$ и $s_n(t)$ на интервале времени $0 \leq t \leq T$

$$\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0 \tag{2}$$

Для проверки свойства ортогональности сформируйте сигнал $s_1(t) = sin(2\pi f_1 t)$ с частотой $f_1 = \frac{1}{T}$. Сформируйте сигнал $s_n(t) = sin(2\pi n f_1 t)$ и вычислите интеграл $\int_0^T s_1(t)s_n(t)dt$. Проверьте, что интеграл $\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0$ для всех положительных k и n.

Измените значение частоты одного из колебаний и снова проверьте выполнение свойства ортогональности.

Измените интервал интегрирования на несколько точек, проверьте выполнение свойства ортогональности.

Сформируйте сигнал $s_n(t) = e^{j(2\pi n f_1 t)}$ и вычислите интеграл $\int_0^T s_1(t)s_n(t)dt$. Проверьте, что интеграл $\int_0^T s_k(t)s_n(t)dt = 0$ для положительных и отрицательных k и n. На выбор номера n и к меняйте в пределах до 10.

Измените значение частоты одного из колебаний и снова проверьте выполнение свойства ортогональности.

Измените интервал интегрирования на несколько точек, проверьте выполнение свойства ортогональности.

4 Спектр периодического прямоугольного сигнала (письменно)

Используя выражения для расчета компонент рядя Фурье (гармоник) периодического прямоугольного сигнала вычислить и сравнить спектры последовательности прямоугольных видеоимпульсов для трех случаев

- T = 0.1 с, $\tau = 0.05c$

- T = 0.1 с, $\tau = 0.025c$
- T = 0.2 с, $\tau = 0.025c$

Рисунок 2 — Задачи на практику

ТЕОРИЯ

Ряд Фурье — это способ представить периодическую функцию в виде суммы простых гармонических колебаний (синусов и косинусов) с разными частотами, амплитудами и фазами.

Функции $\{1, cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x).\}$ являются базисом пространтсва периодических функций (как в линейной алгебре есть базис, допустим, трехмерного пространтсва, который состоит из ортов i, j и k, и все вектора в этом пространстве могут быть разложены по этим ортам, т.е представлены в виде их линеной комбинации), поэтому почти любую периодическую функцию можно представить в виде суммы функций, принадлежащих этому базису.

Еще одним примером разложения является ряд Тейлора. Базисом для пространства функций является множество функций $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$, по которому также можно разложить почти любую функцию, т.е. представить в виде линейной комбинации многочленов.

Ряд Фурье и его коэффициенты вычисляются следующим образом:

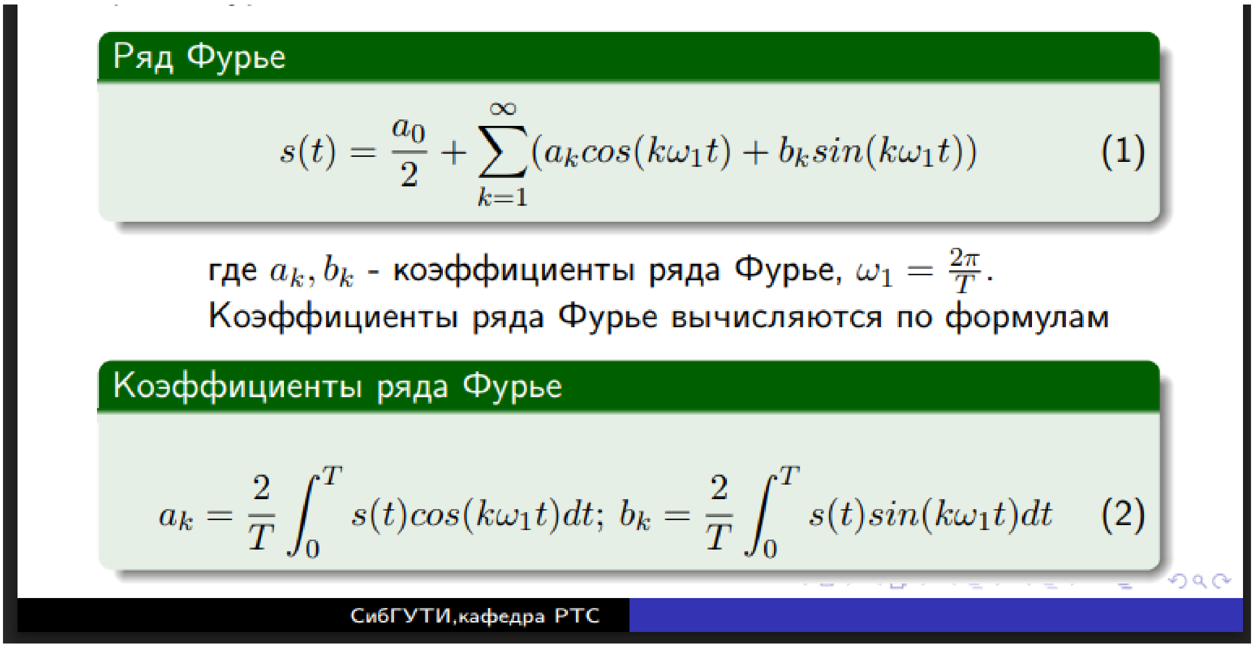

Рисунок 3 — Формула ряда Фурье и коэффициентов

где $\frac{a_0}{2}$ — постоянная составляющая (или среднее значение сигнала), a_k и b_k — коэффициенты ряда Фурье, a_k отвечает за амплитуды чётных (симметричных) составляющих функции и показывают, насколько сильно в сигнале выражена компонента вида $\cos(\omega_0 t)$, а b_k отвечает за амплитуды нечётных (асимметричных) составляющих функции и показывают, насколько сильно в сигнале выражена компонента вида $\sin(\omega_0 t)$.
k — номер гармоники ($k = 1,2,3,4,\dots$),
$\cos(k\omega_1 t)$ и $\sin(k\omega_1 t)$ — базисные функции.

Важно заметить, что сигнал, который нужно разложить в ряд Фурье, должен содержать только гармонники с частотой кратной w_1. Если такое условие не выполняется, то сигнал не будет периодическим и разложить его в классический ряд Фурье невозможно.

Пример вычисления коэффициентов ряда Фурье:

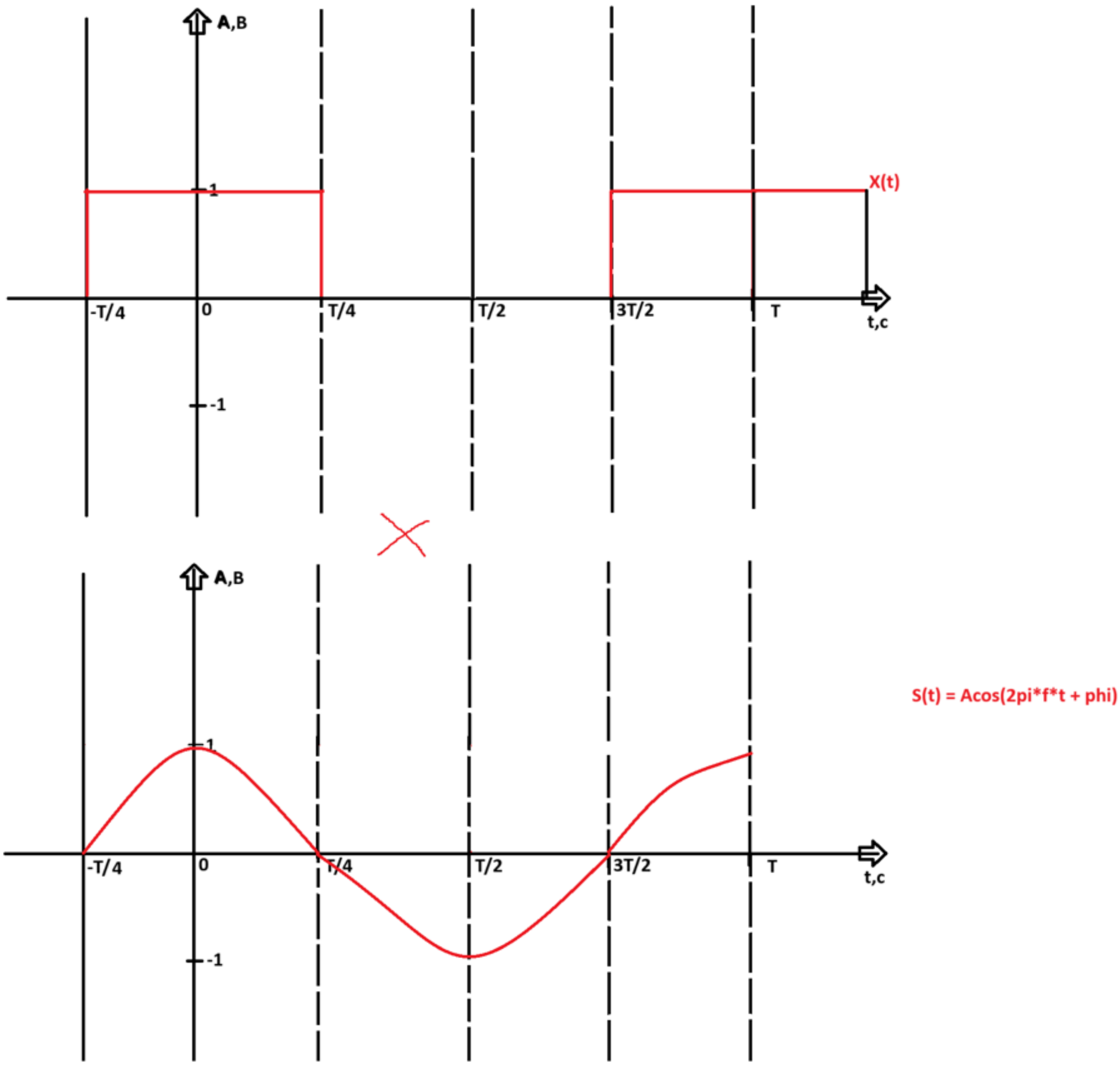

Рисунок 4 — Геометрическая интерпретация вычисления a_k

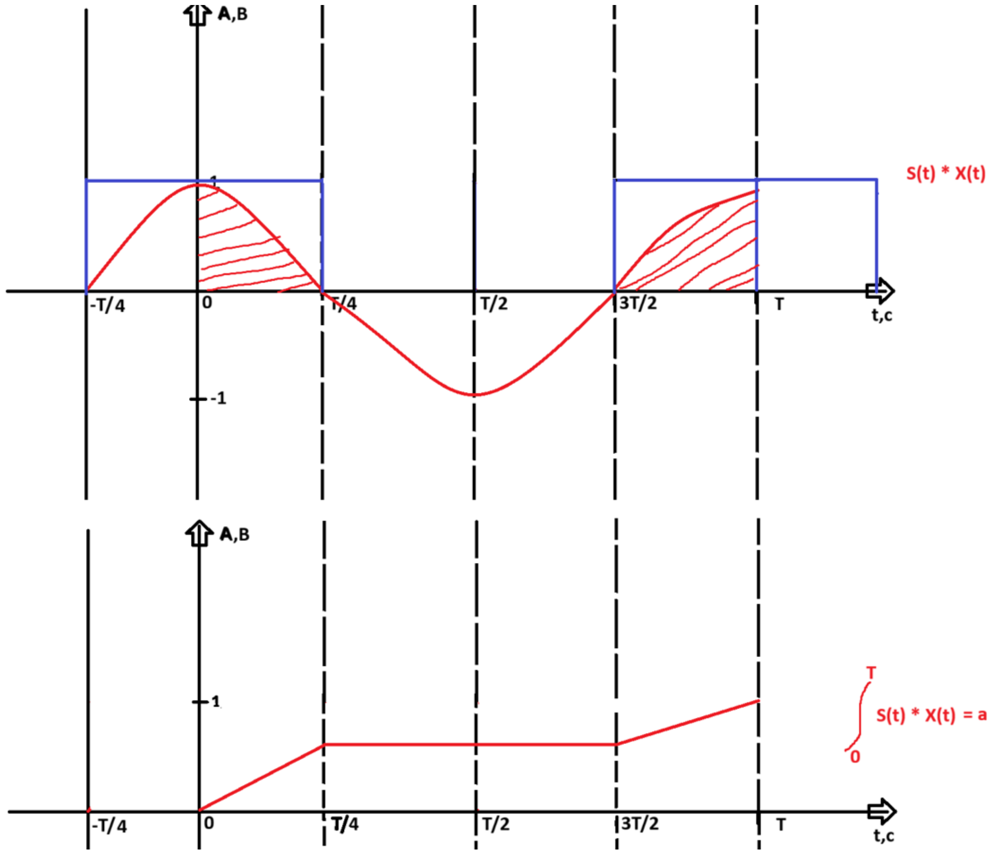

Рисунок 5 — Геометрическая интерпретация вычисления a_k

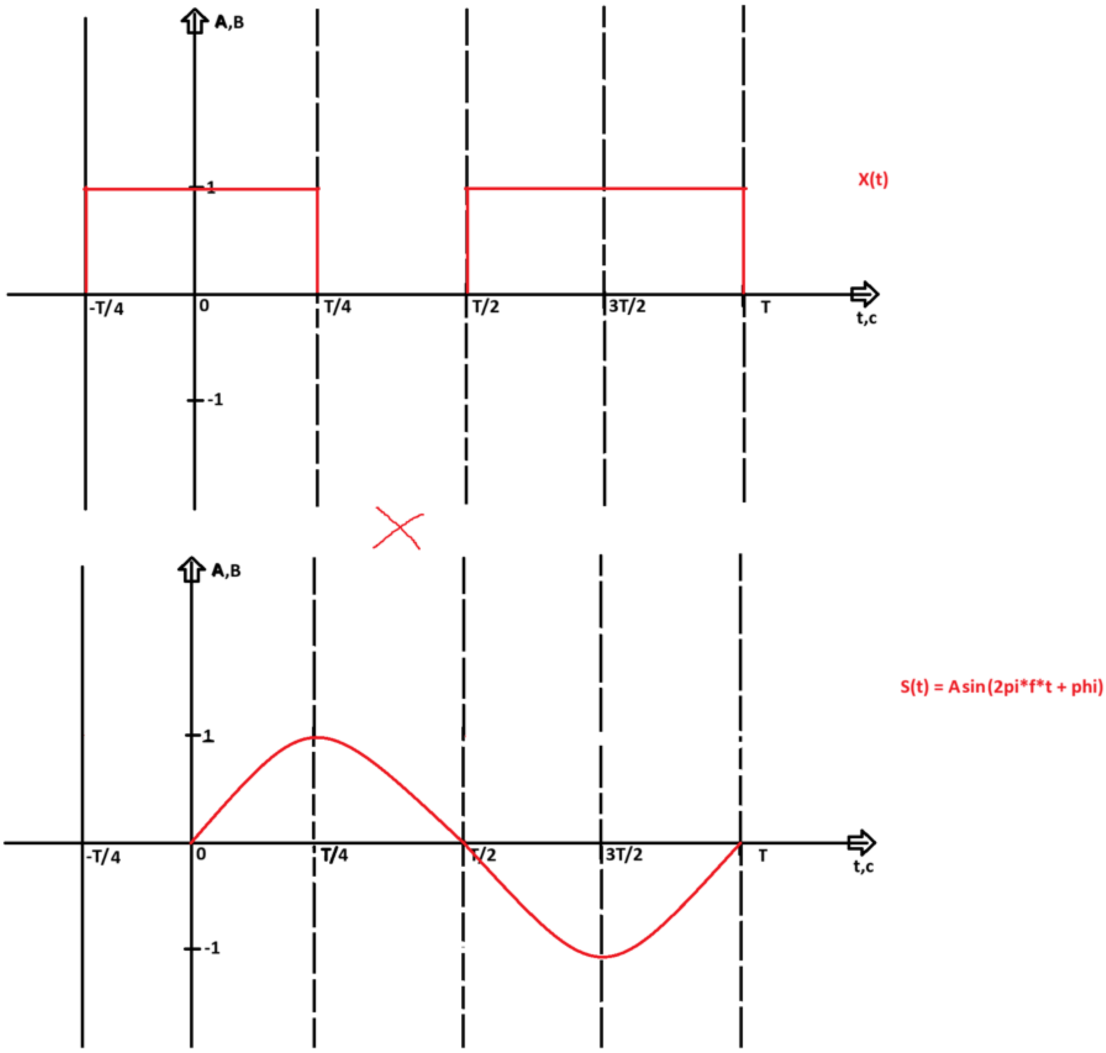

Рисунок 6 — Геометрическая интерпретация вычисления b_k

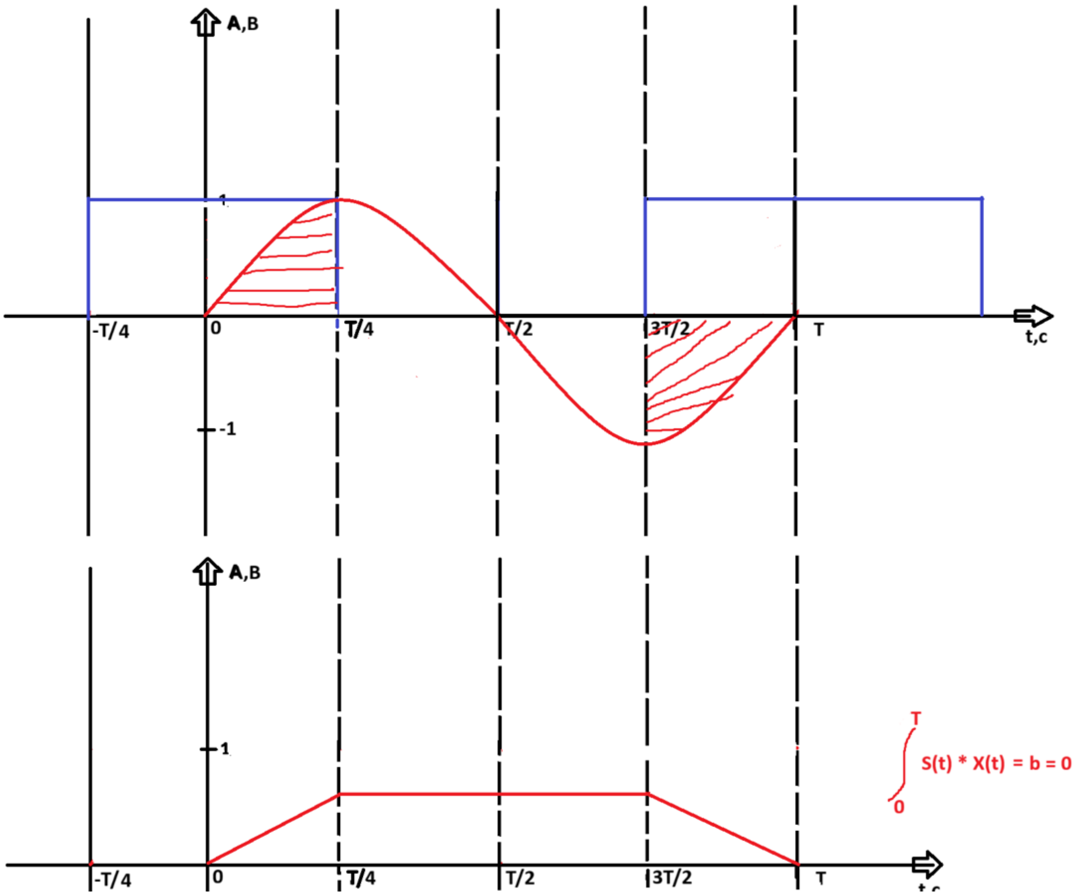

Рисунок 7 — Геометрическая интерпретация вычисления b_k

Заметим, что исходный сигнал (прямоугольный) - четный, поэтому коэффициенты b_k будут всегда равны нулю и в разложении будет участвовать только $\cos(\omega_0 t)$.

Пример

Рассмотрим простейший сигнал $cos(2\pi * t)$. Рассчитаем для него a_1 и b_1:

Перемножим наш сигнал на cos-компоненту при k = 1

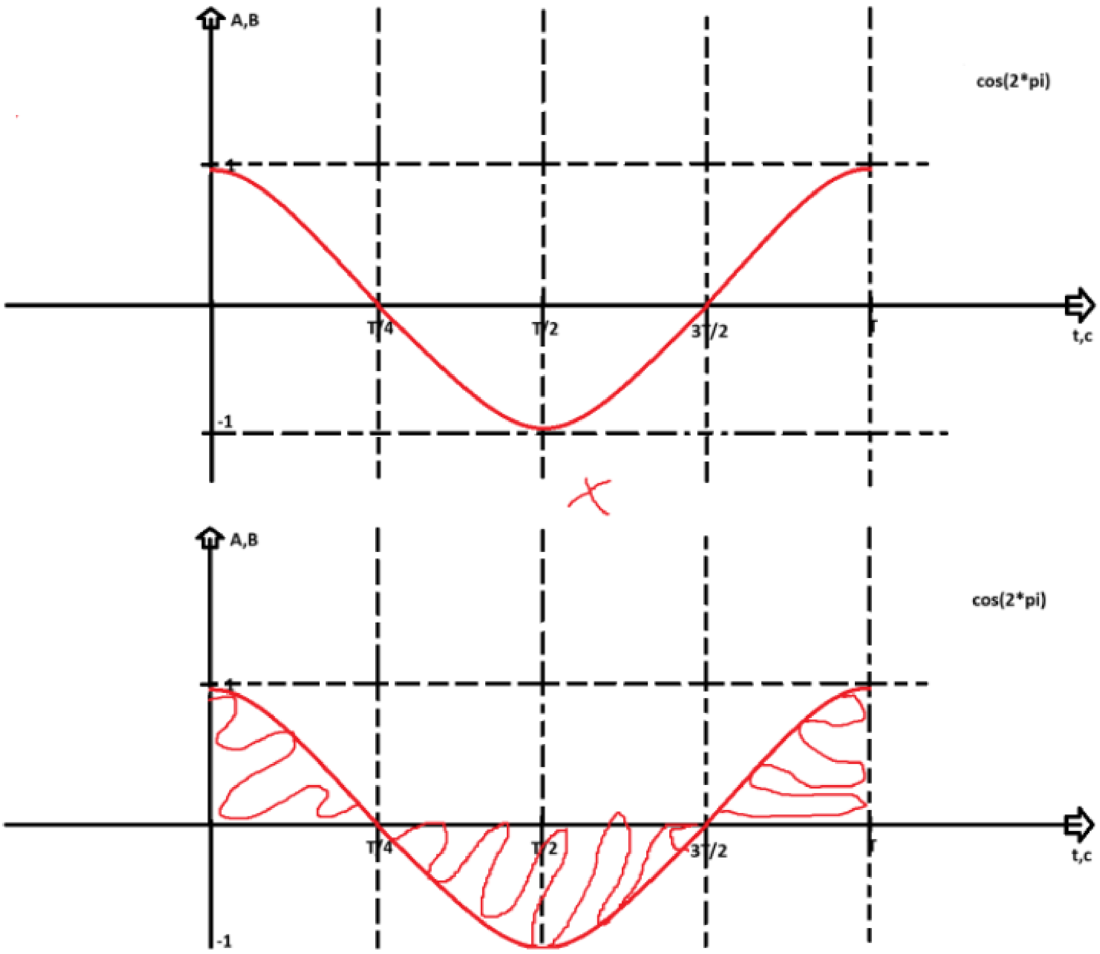

Рисунок 8 — Вычисление a_1

То, как будет изменяться интеграл от их произведения

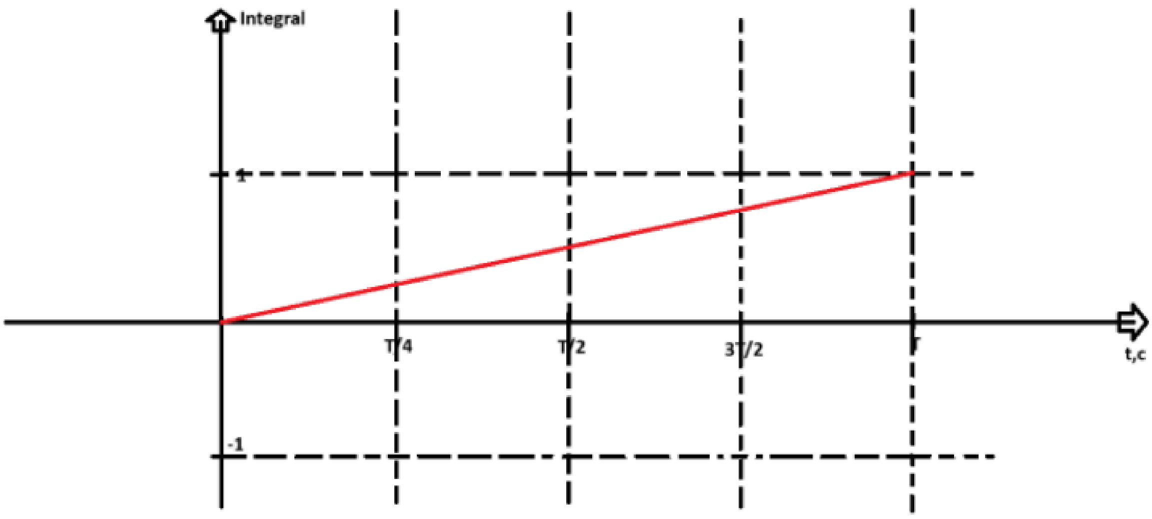

Рисунок 9 — Вычисление a_1

Значение интеграла в момент времени T будет равно π, это значит, что в нашем сигнале присутствует cos-компонента с частотой 1Гц (что логично).

Теперь рассчитаем b_1, т.е сколько в нашем сигнале содержится компоненты $sin(2\pi * t)$

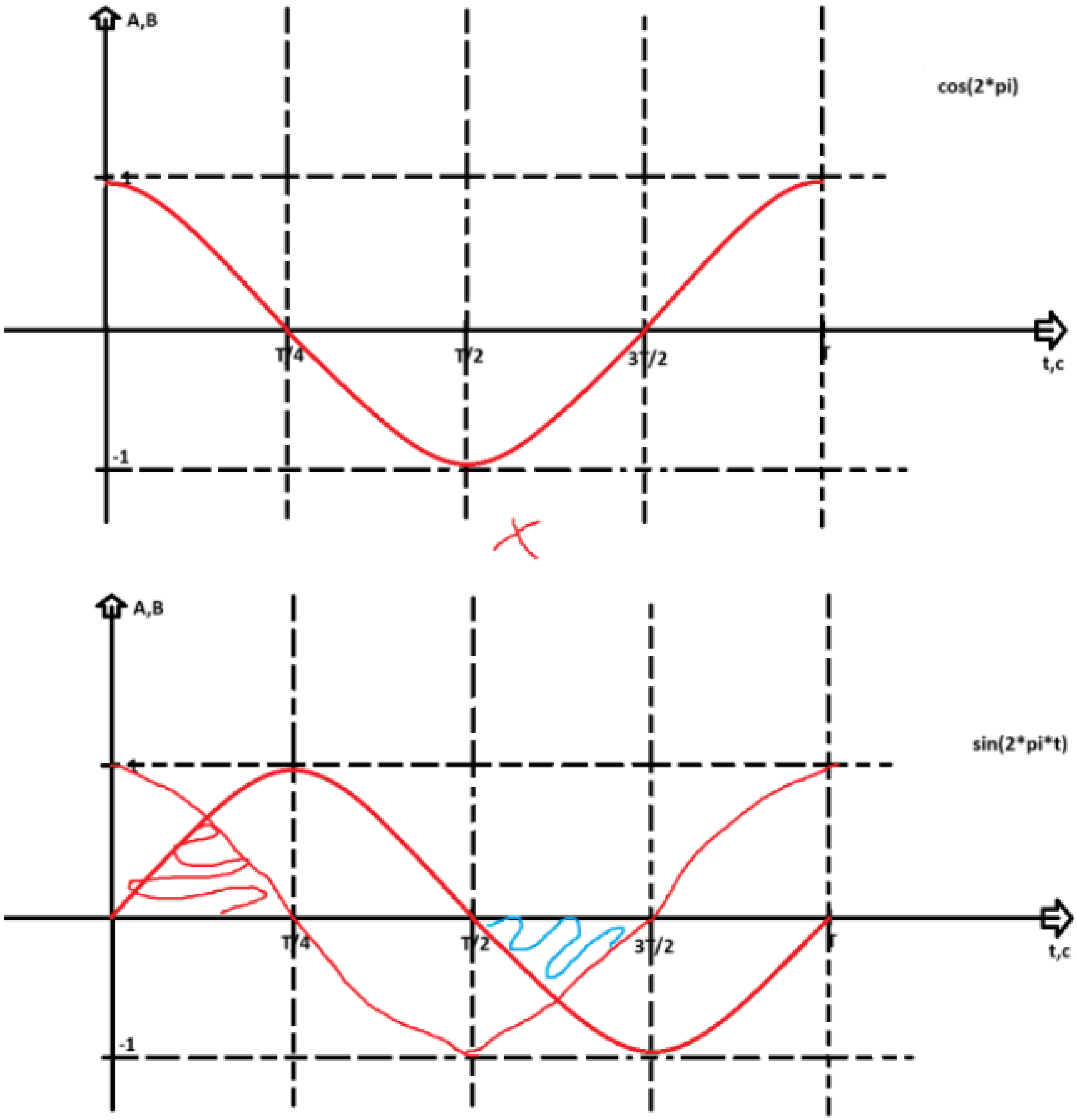

Рисунок 10 — Вычисление a_1

То, как будет изменяться интеграл от их произведения

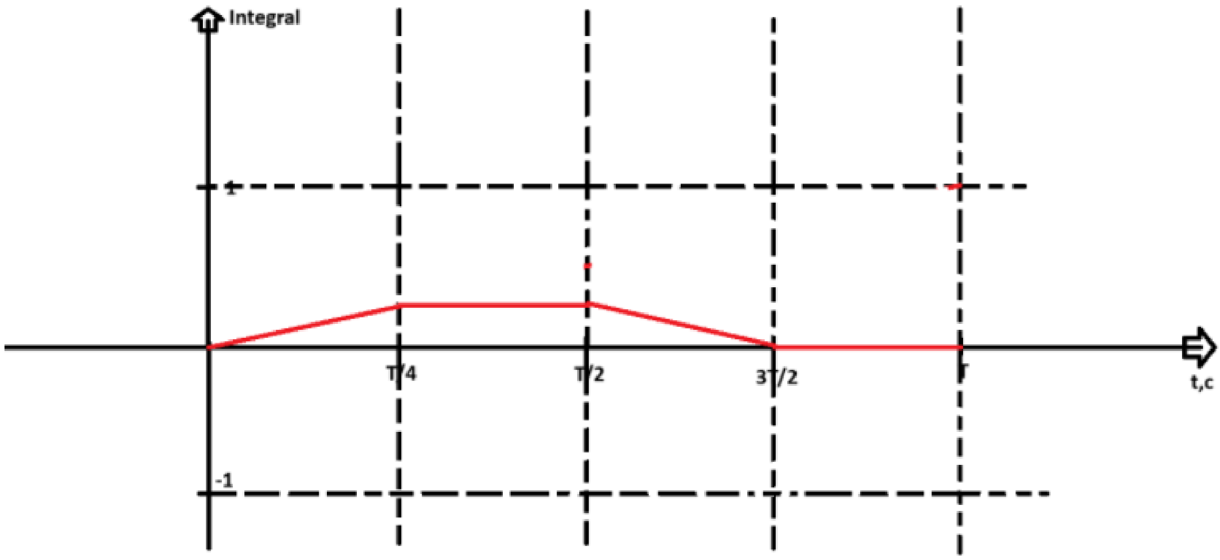

Рисунок 11 — Вычисление a_1

Значение интеграла в момент времени Т будет равно 0, это значит, что в нашем сигнале не присутствует sin-компонента с частотой 1Гц (что логично, ведь наш сигнал изначально косинус, который симметричен).

В нашем сигнале точно нет никаких sin-компонент. Может, есть компонента $cos(4\pi * t)$?

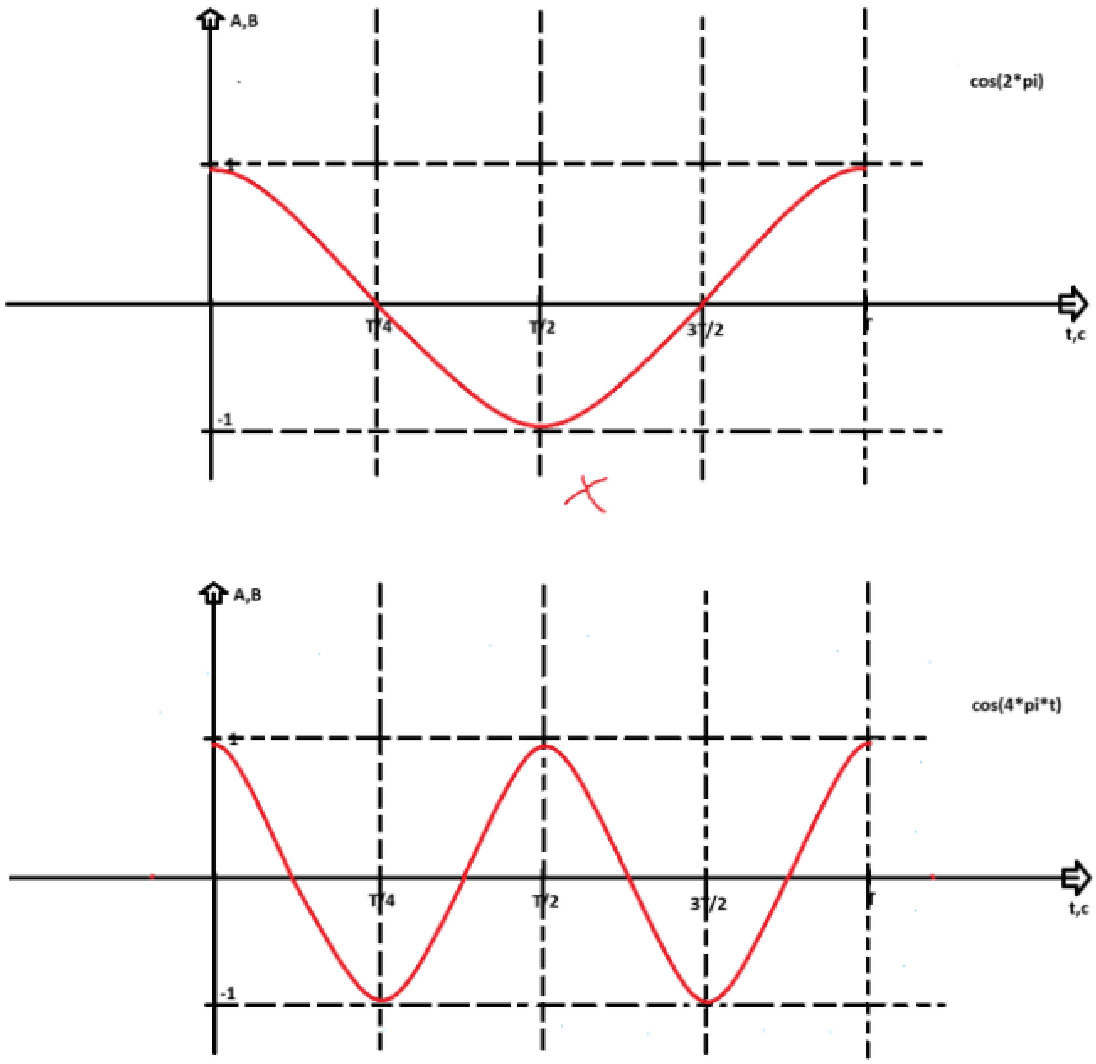

Рисунок 12 — Вычисление a_1

То, как будет изменяться интеграл от их произведения

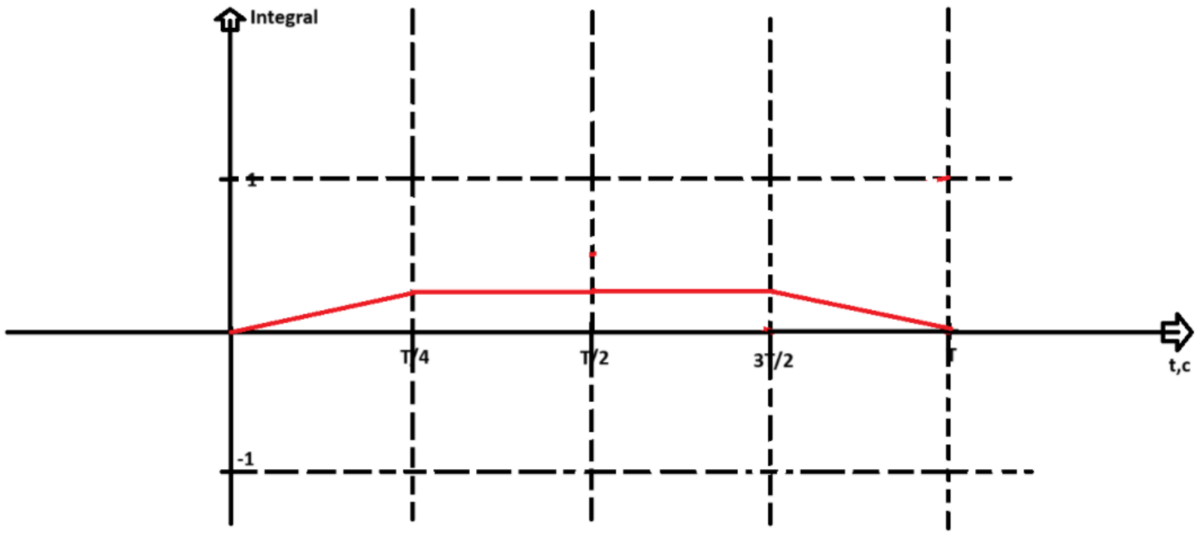

Рисунок 13 — Вычисление a_1

В графике много симметричностей, которые по итогу дают ноль. При увеличении частоты компонент ничего не поменяется: будут симетричности, которые в сумме будут сводить интеграл к нулю. Это значит, что в нашем сигнале только 1 компонента $cos(2\pi * t)$.

Иная форма записи ряда Фурье

Классическая форма ряда Фурье не очень удобна для вычисления, поэтому ее заменяют косинусной формой ряда Фурье:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\text{inf}} A_n * cos(n * \omega_1 t + \phi_n)$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, а $\phi_n = -arctg(\frac{b_n}{a_n})$

Ряд Фуре в комплексной форме

Вспомним тригонометрические тождества Эйлера:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Рисунок 14 — Тригонометрические тождества Эйлера

Теперь cos в формуле из прошлого пункта заменим соответсвующим тождеством:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{i(n\omega_1 t + \phi_n)} + e^{-i(n\omega_1 t + \phi_n)}}{2}$$

Видим у экспонент сумму в степени. Преобразуем выражение

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left(e^{i\phi_n} e^{in\omega_1 t} + e^{-i\phi_n} e^{-in\omega_1 t}\right)$$

Раскроем скобки:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n e^{i\phi_n}}{2} e^{in\omega_1 t} + \frac{A_n e^{-i\phi_n}}{2} e^{-in\omega_1 t}$$

В этой формуле $e^{in\omega_1 t}$ и $e^{-in\omega_1 t}$ - колебания.

$\frac{A_n e^{i\phi_n}}{2}$ и $\frac{A_n e^{-i\phi_n}}{2}$ - комплексные амплитуды. Обычно их заменяют на $\dot{C_n}$ и $\dot{C_{-n}}$ соответсвенно.

Чтобы не считать 2 коэффициента, можно рассматривать сумму от $-\infty$ до ∞ и записать формулу так:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_1 t}$$

Примечание: спектр сигнала будет распространяться в отрицательную и положительную сторону. Это не значит, что частота стала отрицательной, это всего лишь симметрия графика.

Вычисление C_n:
$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T S(t) * e^{-in\omega_1 t} dt$

Установим некоторую взаимосвязь между тригонометрической и комплексной формой ряда Фурье:

$A_0 = \dot{C_0}$, что логично, ведь если в формулу для их вычисления подставить 0, то получим одно и то же значение.

Теперь обратим внимание, что:

$$\frac{A_n * e^{i\phi_n}}{2} = \dot{C_n} = |\dot{C_n}| * e^{i\phi_n}$$
$$\frac{A_n * e^{-i\phi_n}}{2} = \dot{C_{-n}} = |\dot{C_n}| * e^{-i\phi_n}$$

Из двух уравнений выше следует, что:

$$|\dot{C_n}| = \frac{A_n}{2}$$

Это значит, что коэффициент A тригонометрического ряда Фурье вдвое больше коэффициента $|\dot{C_n}|$ комплексного ряда Фурье. Это связано с тем, что коэффициентов $|\dot{C_n}|$ вдвое больше (спектр в обе стороны).

Коэффициенты ряда Фурье являются комплексно сопряженными, т.е:

$$\dot{C}_{-n} = C_n^*$$

Прямоугольный сигнал и ряд Фурье для него

Прямоугольный сигнал имеет следующие характеристики:

$T(s)$ - период (время одного колебания)
$\tau(s)$ - длительность сигнала (то время, когда сигнал не равен 0)
$U(B)$ - максимальное значение сигнала
$q = \frac{T}{\tau}$ - скважность сигнала

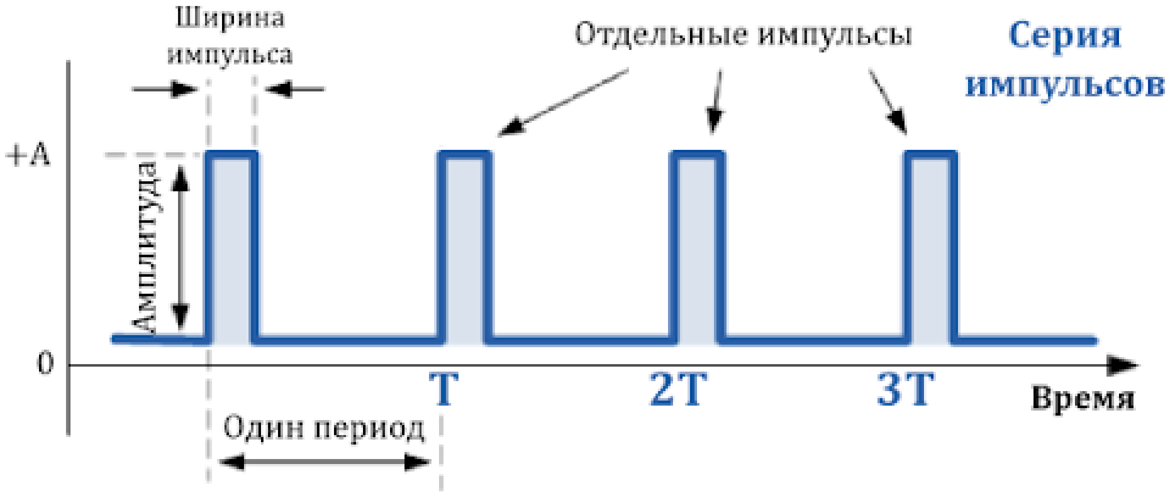

Рисунок 15 — Пример прямоугольного сигнала с обозначением характеристик

Для прямоугольного сигнала коэффициент $\dot{C}_n$ вычисляется иначе: интегрирование идет не по T, а по τ

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} U e^{-in\omega_1 t}\, dt$$

U не зависит от t, поэтому вынесем ее за интеграл. Вспомним, что $\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{x}$. Вычислим интеграл:

$$\frac{U}{T} \cdot \frac{e^{-in\omega_1 t}}{-in\omega_1}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{U}{T} \cdot \frac{1}{-in\omega_1}\left[e^{-in\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{-in\omega_1 \left(-\frac{\tau}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{U}{T} \cdot \frac{1}{-in\omega_1} \left[e^{-in\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{in\omega_1 \frac{\tau}{2}} \right]$$

Теперем заменим ω_1 на $2\pi f_1$ и внесем двойку вместе с i под знак выражения в скобках, n и πf_1 занесем в первый множитель:

$$\frac{U}{Tn\pi f_1} \cdot \frac{e^{in\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{-in\omega_1 \frac{\tau}{2}}}{2i}$$

Видим $sin(n\omega_1 \frac{\tau}{2})$ (по тригонометрическому тождеству Эйлера):

$$\frac{U}{Tn\pi f_1} \cdot \sin\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)$$

Заменим ω_1 под синусом на $2\pi f_1$ и f_1 запишем как $\frac{1}{T}$. $n\pi f_1$ из знаменателя первого множителя внесем в знаменатель второго:

$$\frac{U}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{1}{T}}$$

Теперь домножим числитель и знаменатель на τ

$$\frac{U\tau}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}}$$

Все эти преобразования нужны были для того, чтобы торой множитель превратился в один из замечательных пределов, который на бесконечности стремится к единице.

Итоговая формула для вычисления коэффициентов в комплексной форме ряда Фурье для прямоугольного периодического сигнала:

$$\boxed{\frac{U\tau}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}}}$$

Ортогональность сигнала

Два сигнала $x(t)$ и $y(t)$ называются **ортогональными** на интервале $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = 0$$

Это означает, что сигналы в радиоканале ”не мешают”друг другу, т.е не заглушают друг друга их их можно передавать вместе. Эта идея используется в таких технологиях, как CDMA и OFDM.

ПРАКТИКА

Здание 1: простой сигнал с 1 компонентой с нулевой начальной фазой

Релизация задания в файле **task1.py**

Результат:

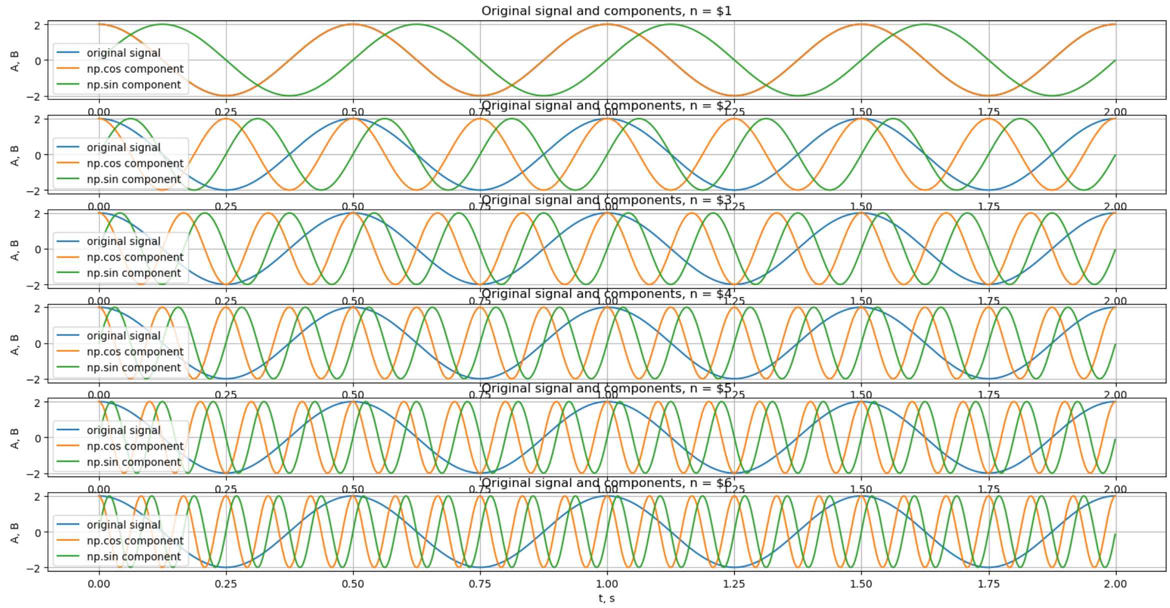

Рисунок 16 — Графики оригинального сигнала и компонент

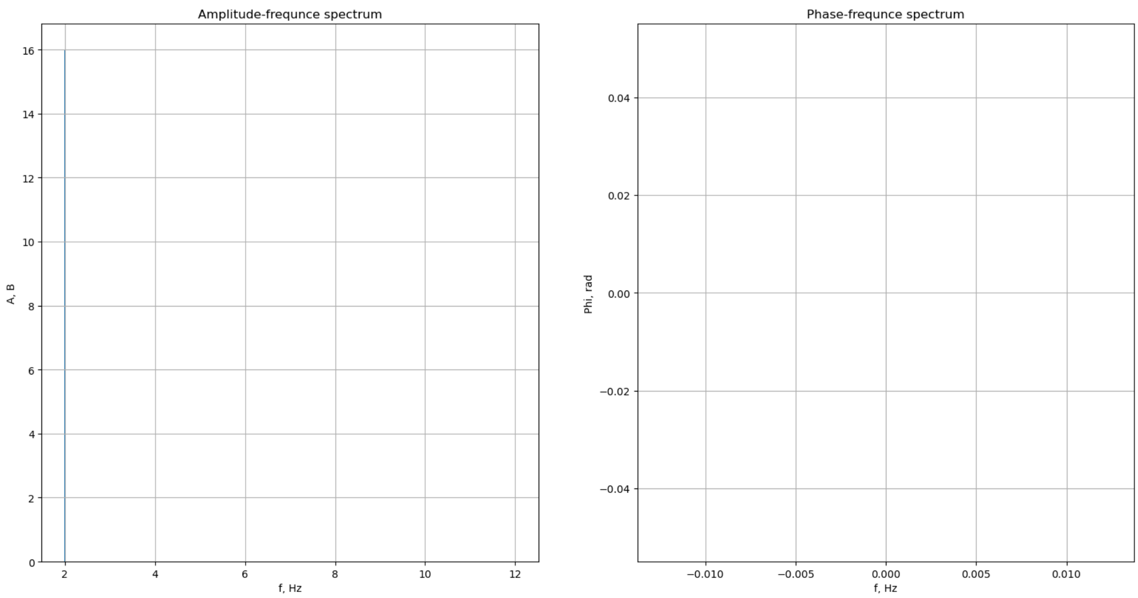

Рисунок 17 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 1 компонента с часоттой 2Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал.

Здание 2: простой сигнал с 2 компонентами с нулевой начальной фазой

Релизация задания в файле **task2.py**

Результат:

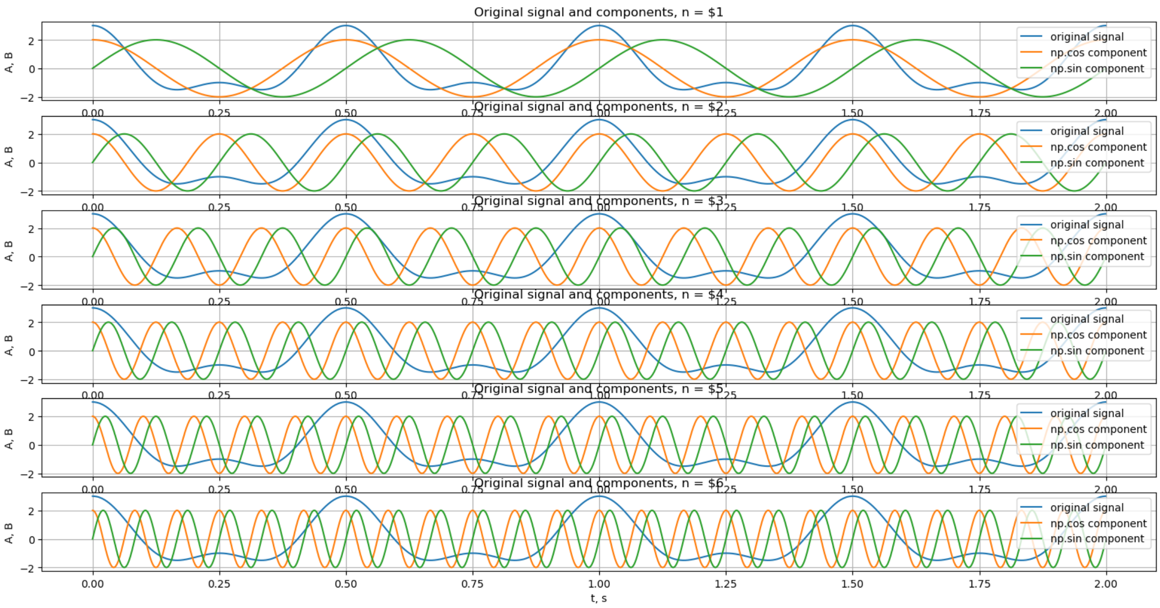

Рисунок 18 — Графики оригинального сигнала и компонент

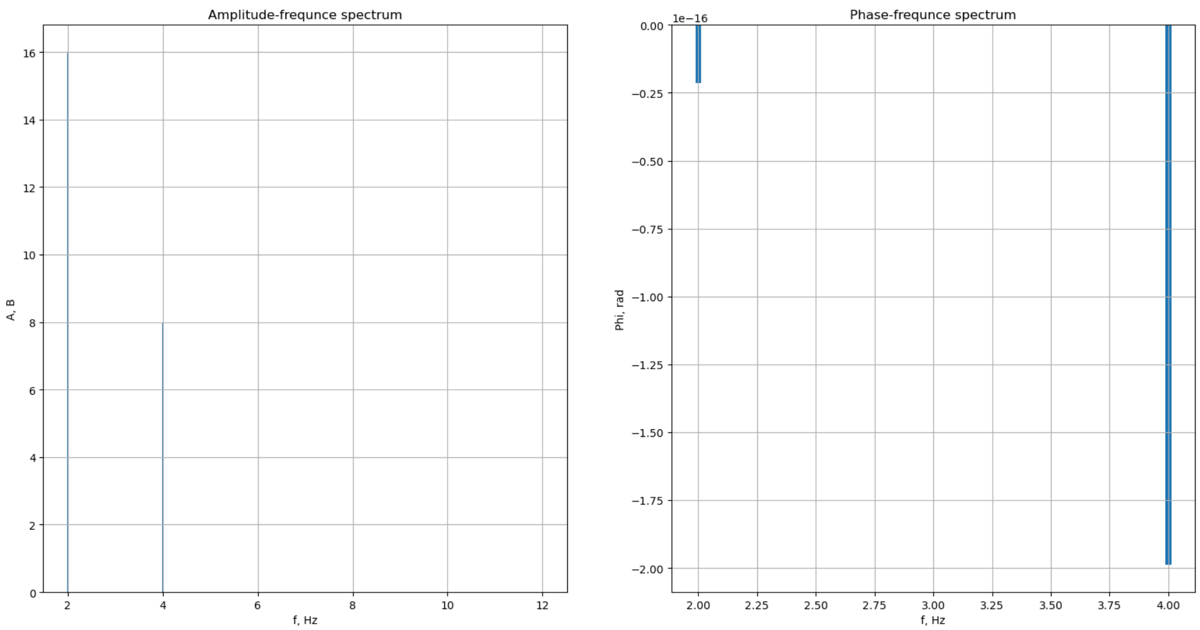

Рисунок 19 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 2 компоненты с частотой 2 и 4 Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал. На ФЧХ графике ложные фазы (это связано со свойствами acrtan).

Здание 3: простой сигнал с 2 компонентами с ненулевой начальной фазой

Релизация задания в файле **task3.py**

Результат:

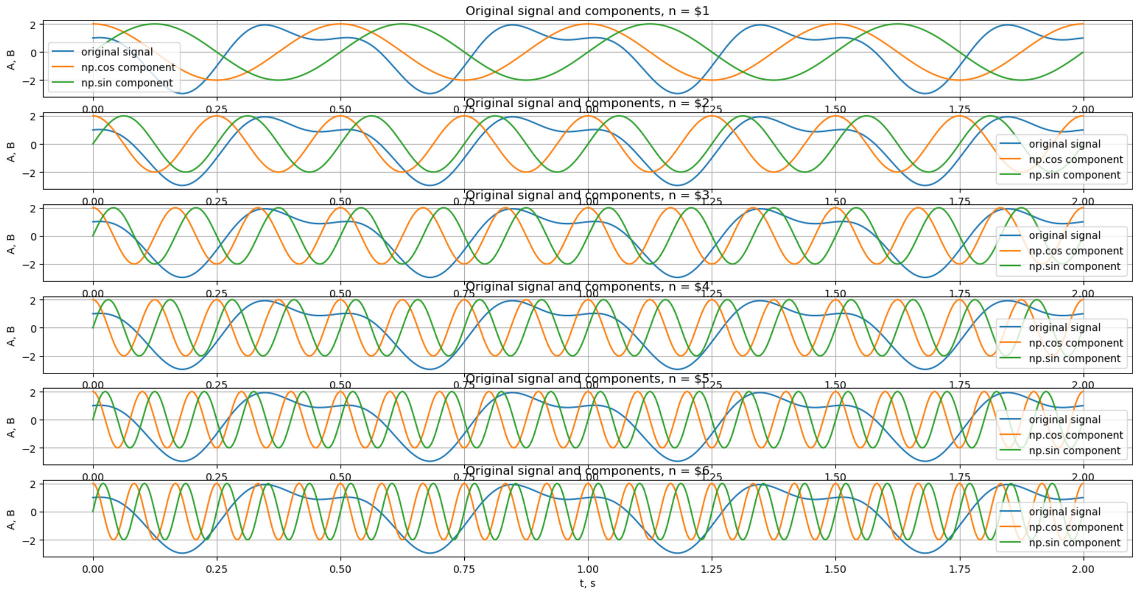

Рисунок 20 — Графики оригинального сигнала и компонент

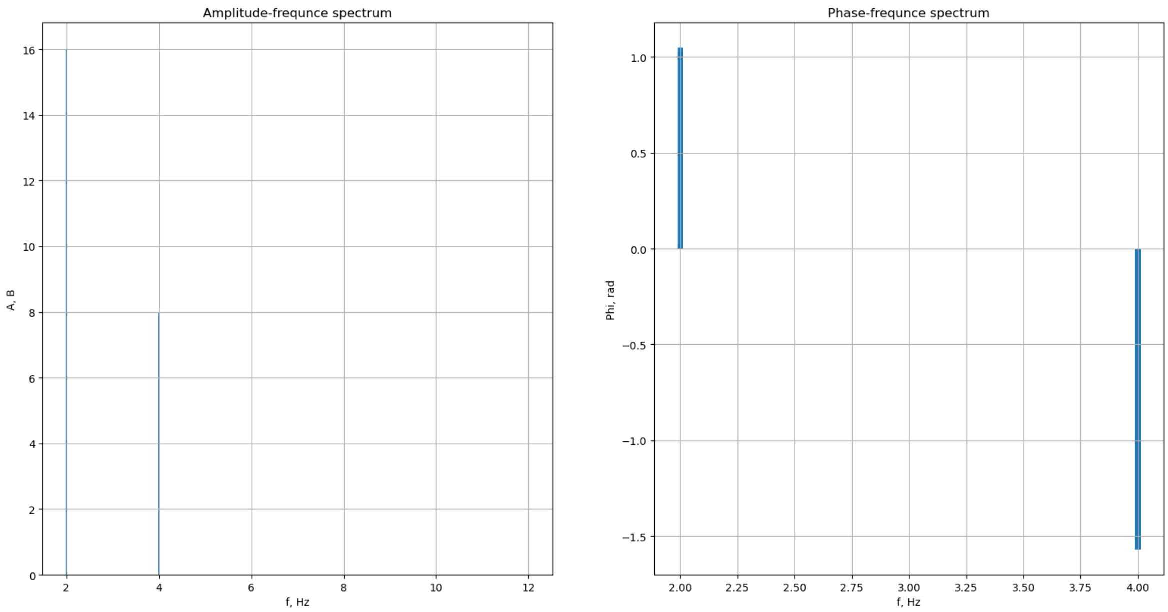

Рисунок 21 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 2 компоненты с часоттой 2 и 4 Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал. На ФЧХ видим фазу $\pi/3$ для компоненты на 2Гц и $-\pi/3$ на 4 Гц, точно такой сигнал я и задавал.

Здание 4: прямоугольный сигнал

Релизация задания в файле **task4.py**

Результат:

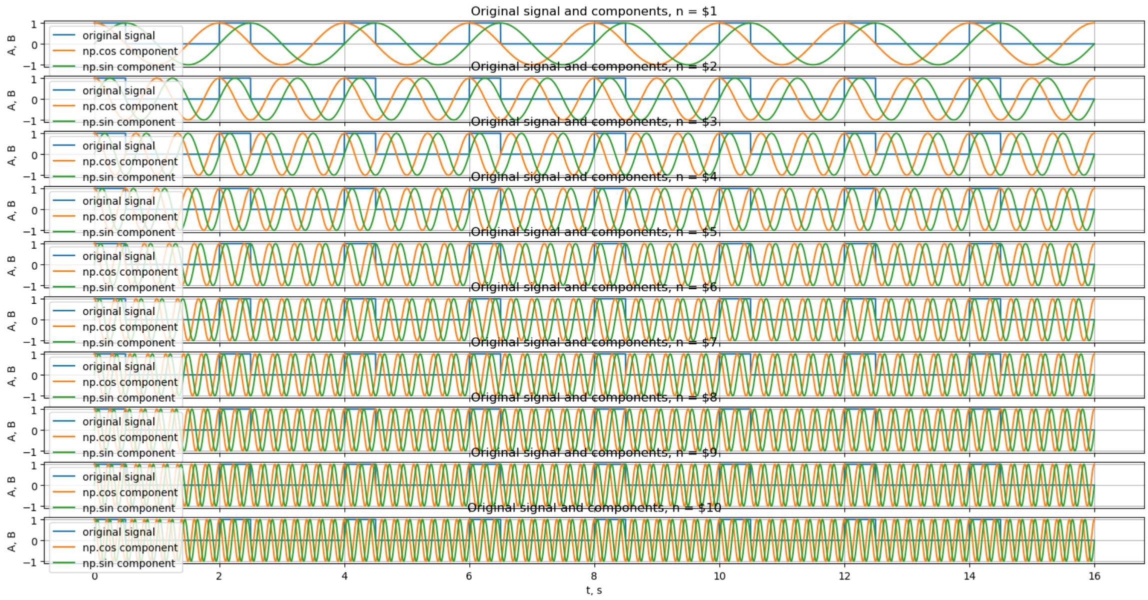

Рисунок 22 — Графики оригинального сигнала и компонент

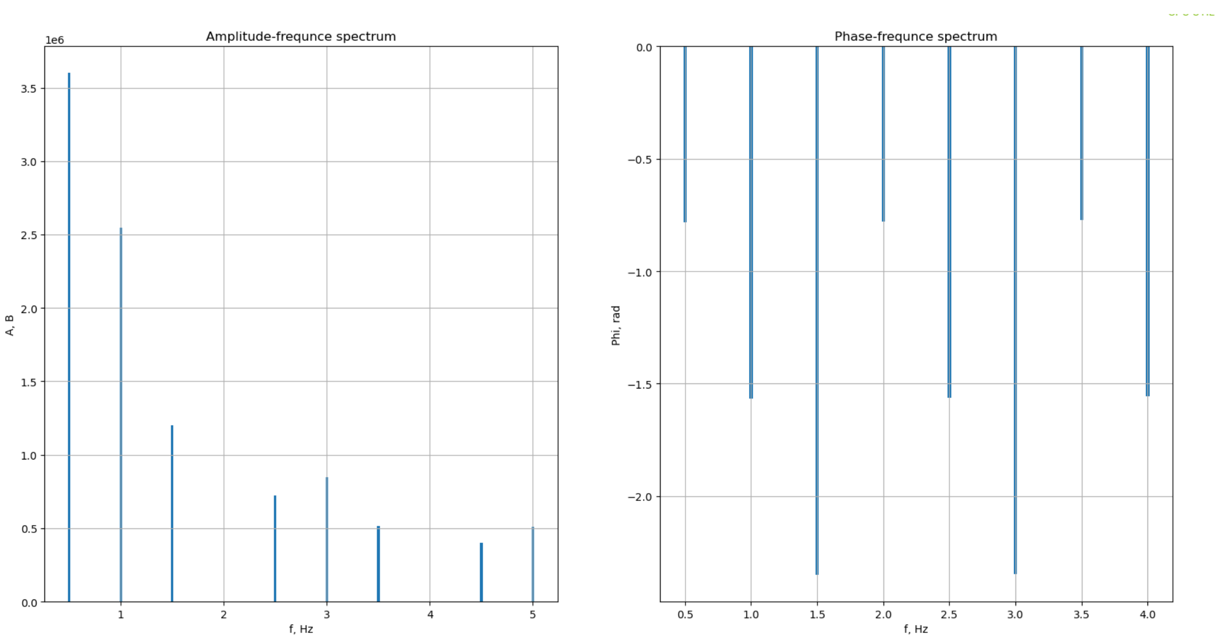

Рисунок 23 — АЧХ и ФЧХ сигнала

По АЧХ можем наблюдать, что в сигнале есть 2 компоненты с часоттой 2 и 4 Гц, именно такой сигнал я изначально и задавал. На ФЧХ видим фазу $\pi/3$ для компоненты на 2Гц и $-\pi/3$ на 4 Гц, точно такой сигнал я и задавал.

Теперь по полученным фазам и амплитудам попытаемся восстановить сигнал:

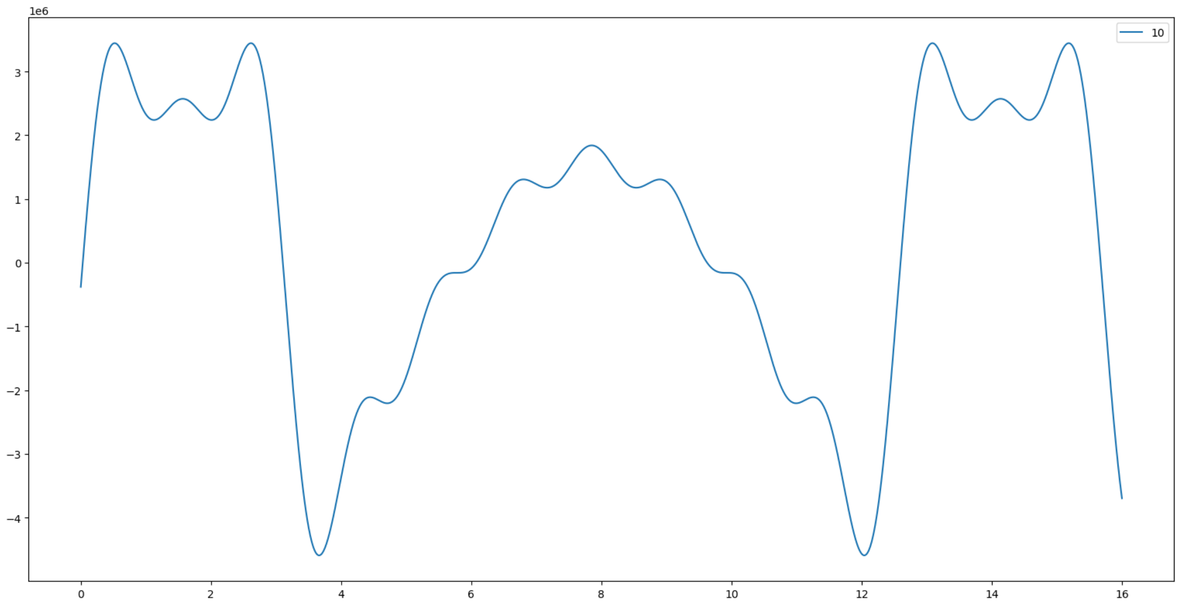

Рисунок 24 — Пример восстановленного сигнала

Сигнал не очень похож на прямоугольный, но можно заметить, что по бокам он начинает приобретать прямоугольную форму.

Здание 5: проверка ортогональности сигнала

Релизация задания в файле **task5.py**

Результат:

```
k = -6, n = 6    Integral = -0.125
k = 4, n = 4     Integral = 0.12500000000000006
k = -2, n = -3   Integral = 3.0531133177191803e-19
k = 3, n = -5    Integral = -3.4305891460917337e-17
k = 5, n = 2     Integral = -2.1593837828959295e-17
k = 7, n = 5     Integral = 1.7763568394002505e-18
```

Рисунок 25 — Проверка ортогональности при интегрировании по периоду

k и n - коэффициенты при частотах sin сигналов, у которых проверяется ортогональнось.

Заметим, что интеграл не равен нулю, когда n и k равны по модулю. Из этого можно сделать вывод о том, что 2 sin сигнала ортогональны, если их частоты по модулю не равны.

Теперь сменим границы интегрирования. До этого интеграл был от 0 от T, теперь будет от 0 до T+0.3:

```
k = -6, n = 6     Integral = -0.2735806752965467
k = 4, n = 4      Integral = 0.2760045202181489
k = -2, n = -3    Integral = 0.019092418012882736
k = 3, n = -5     Integral = -0.007302351384024718
k = 5, n = 2      Integral = -0.005562230921944577
k = 7, n = 5      Integral = 0.004878506462422633
```

Рисунок 26 — Проверка ортогональности при интегрировании не по периоду

Можем заметить, что интегралы ненулевые. Из этого следует, что ортогональность соблюдается только при рассмотрении сигналов на периоде.

Примечание: целых нулевых значений не получилось из-за ошибок округления и прочего. Числа с e^{-n} - машинный 0.

ВЫВОД

В ходе работы я познакомился с удобным и полезным инстурментом, используемый в ЦОС и связи, который называется ряд Фурье, реализовал алгоритм преобразования Фурье на Python, построил по полученным рассчетам АЧХ и ФЧХ сигнала. Изучил ортогональность сигналов, произвел рассчеты, узнал, в каких случаях сигналы будут ортогональны, а в каких нет. Познакомился с разложением Фурье для периодических прямоугольных сигналов.