МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств (ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №5
по дисциплине
Математические основы обработки сигналов

по теме:
СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.А Калачиков*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель:

Изучить свойства преобразования Фурье.

ТЕОРИЯ

Введение

На прошлом занятии мы познакомились с преобразованием Фурье - инструментом, позволяющим получить спектральную функцию непереодического сигнала. На этом занятии рассмотрим свойства преобразования Фурье.

Свойство линейности

Данное свойство говорит о том, что преобразование Фурье - линейный оператор, т.е он сохраняет линейные комбинации функции. Для нас это значит, что при сложении сигналов со спектром итогового сигнала не произойдет ничего страшного. Итоговый спектр будет являться суммой спектров каждого отдельного сигнала. Это также верно и для операции умножения. Все это работает и в обратную сторону. Если мы просуммируем спектры и выполним ОПФ, то получим сумму сигналов.

$$X(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} X(iw)$$
$$Y(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} Y(iw)$$

$$\alpha X(t) + \beta Y(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} \alpha X(iw) + \beta Y(iw)$$

Доказательство

Подставим линейную комбинацию напрямую в ПФ:

$$\alpha X(t) + \beta Y(t) \overset{\text{FT}}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha X(t) + \beta Y(t)] e^{i\omega t} dt$$

Применим свойство интеграла ”Интеграл суммы равен сумме интегралов”:

$$\alpha X(t) + \beta Y(t) \overset{\text{FT}}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha X(t) e^{i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta Y(t) e^{i\omega t} dt$$

Каждый интеграл и будет результатом ПФ, т.е

$$\alpha X(t) + \beta Y(t) \xrightarrow{\text{FT}} \alpha X(iw) + \beta Y(iw)$$

Свойство смещения или задержки по времени

Данное свойство говорит о том, что при сдвиге сигнала во времени на τ, спектр умножится на $e^{-j\omega\tau}$. Это свойство работает и в обратную сторону, т.е если нам нужно сдвинуть сигнал во времени на τ, мы можем спектр умножить на $e^{-j\omega\tau}$.

$$X(t) \leftrightarrow X(i\omega)$$

$$X(t - \tau_0) \leftrightarrow X(i\omega)e^{-i\omega\tau_0}$$

Временной сдвиг сигнала не меняет форму амплитудного спектра, а меняет только форму фазового спектра.

Доказательство

Подставим $t - \tau_0$ напрямую в ПФ:

$$X(t - \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau_0)e^{-i\omega(t)}dt$$

Пусть $T = t - \tau_0$, тогда выполним замену переменной: $t = T + \tau_0$ и $dt = dT$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(T)e^{-i\omega(T+\tau_0)}dT = e^{-i\omega\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} X(T)e^{-i\omega T}dT =$$

$$X(i\omega)e^{-i\omega\tau_0}$$

Свойство смещения по частоте (модуляции)

Данное свойство говорит о том, что если умножить сигнал на $e^{i\omega_0 t}$, то спектр этого сигнала сдвинется в область высоких частот на ω_0. Причем здесь модуляция? Модуляция это перенос низкочастотного сигнала на высокочастотный сигнал и это свойство как раз помогает сдвинуть сигнал на высокие частоты, т.е промодулировать его.

$$X(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} X(i\omega)$$

$$X(t)e^{i\omega_0 t} \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} X(i(\omega - \omega_0))$$

Доказательство

Подставим $e^{i\omega_0 t}$ напрямую в ПФ:

$$X(t)e^{i\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} X(t) e^{-i\omega t} =$$

Объединим экспоненты

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-i\omega t + i\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-it(\omega - \omega_0)} = X(i(\omega - \omega_0))$$

Свойство временного масштабирования

Это свойство говорит о том, что растяжение/сужение сигнала во времени приводит к сужение/растяжению частотного спектра. |a| $>$ 1 - сжатие сигнала, |a| < 1 - растяжение сигнала. Коэффициент $\frac{1}{|a|}$ нужен для сохранения энергии сигнала. Это как с прямоугольным сигналом: если увеличиваем длительность τ (домножаем на $|a| > 1$), то спектр расширяется, а если уменьшать τ (домножаем на $|a| < 1$), то спектр сужается.

$$X(t) \leftrightarrow X(i\omega)$$
$$X(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{i\omega}{a})$$

Доказательство

Запишем ПФ над $X(at)$

$$X(at) = \int_{-\infty}^{\infty} X(at) e^{-i\omega t} dt$$

Пусть $T = at \rightarrow t = \frac{T}{a}, dt = \frac{dT}{a}$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(T)e^{-i\omega\frac{T}{a}}\frac{dT}{a} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} X(T)e^{-iT\frac{\omega}{a}}dT = \frac{1}{|a|}X(\frac{i\omega}{a})$$

Свойство свертки

$$X(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$X(t) * y(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} X(i\omega) * y(i\omega)$$

$$X(t) * y(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\lambda)y(i(\omega-\lambda))d\lambda$$

Связь между длительностью сигнала и спектром

Если T - длительность сигнала, W - ширина спектра, то T * W = k * 1

ПФ для прямоугольного видеоимпульса

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) * e^{-i\omega t} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U * e^{-i\omega t} =$$

$$U * \frac{1}{-i\omega t}e^{i\omega t}\bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = U\frac{1}{-i\omega}[e^{-i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{i\omega\frac{\tau}{2}}]$$

В [] видим sin. Умножим выражение на $\frac{\tau}{\tau}$

$$\boxed{U\tau * \frac{sin(\frac{\omega t}{2})}{\frac{\omega t}{2}}}$$

Спектр данной функции будет следующим:

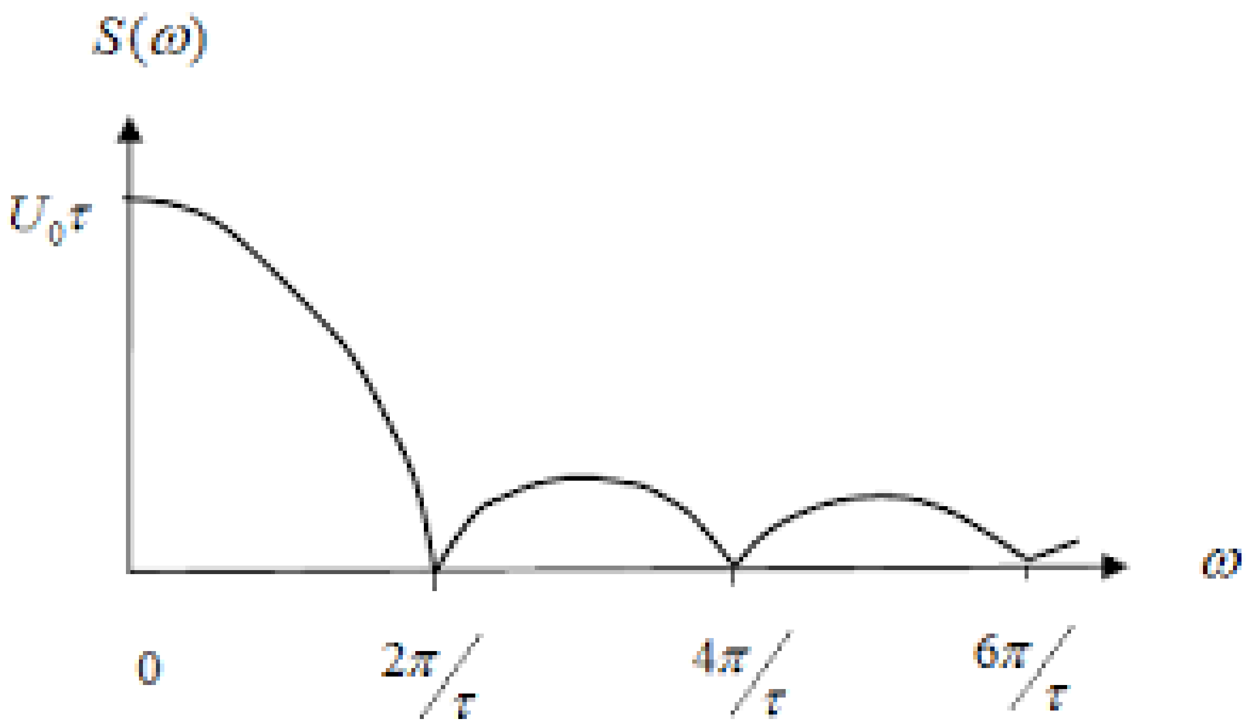


Рисунок 1 — Спектр прямоугольного видеоимпульса

Найдем точки, в которых спектральная функция будет обращаться в ноль. Если посомотреть на функцию выше, то можно заметить, что функция обращается в ноль только при $sin(\frac{\omega t}{2}) = 0$, т.е когда $\frac{\omega t}{2} = \pi n \rightarrow \omega = \frac{2\pi n}{\tau}$

ПФ для прямоугольного несимметричного сигнала

Прямоугольный несимметричный сигнал отличается от предыдущего сдвигом на $\frac{\tau}{2}$. Формула выводится аналогично, но пределы интегрирования будут $[0; \tau]$.

$$\boxed{U\tau * \frac{sin(\omega t)}{\omega t}}$$

Изменение спектра при умножении сигналов разной формы

Допустим, мы перемножили прямоугольный сигнал и обычный косинус. Какой спектр при этом получится? Спектр будет похож на нечто среднее между спектрами исходных сигналов.

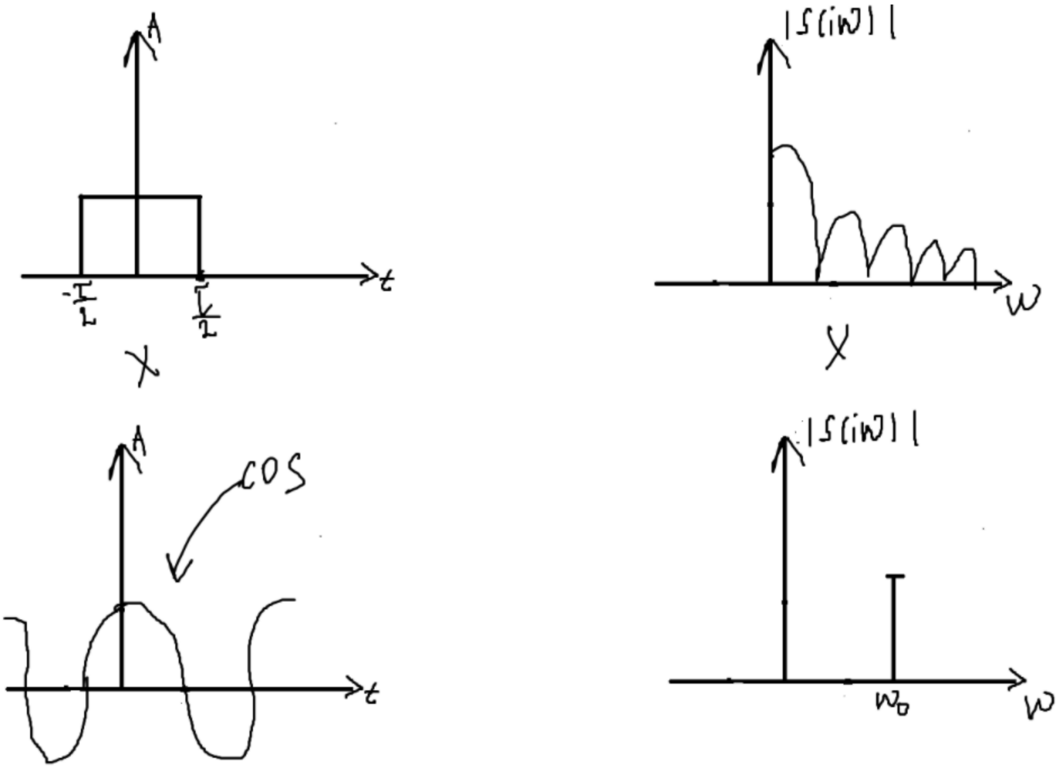


Рисунок 2 — Сигналы разной формы и их спектральные функции

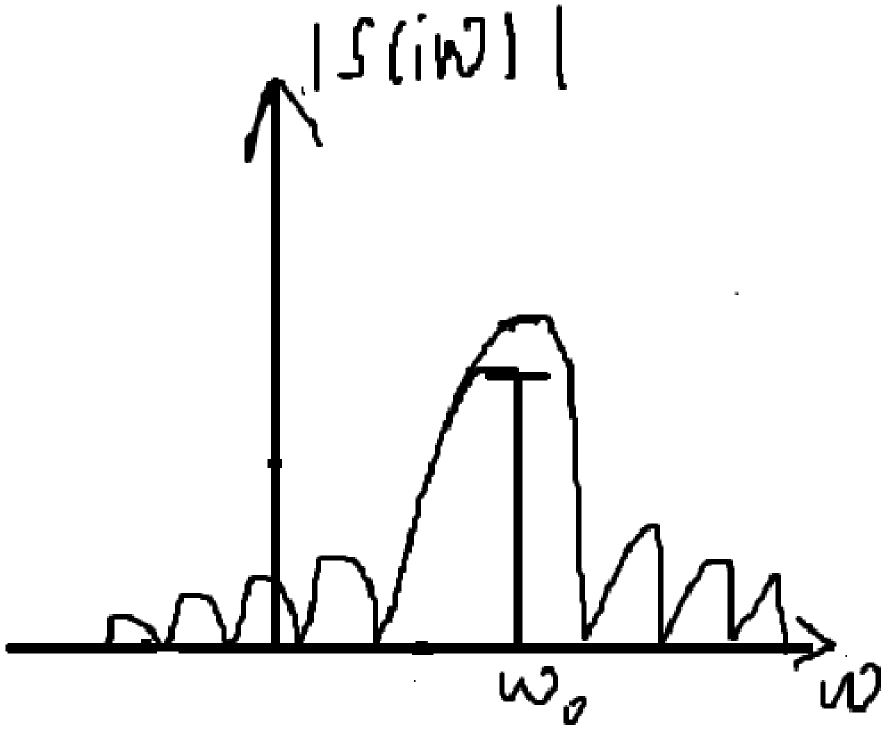
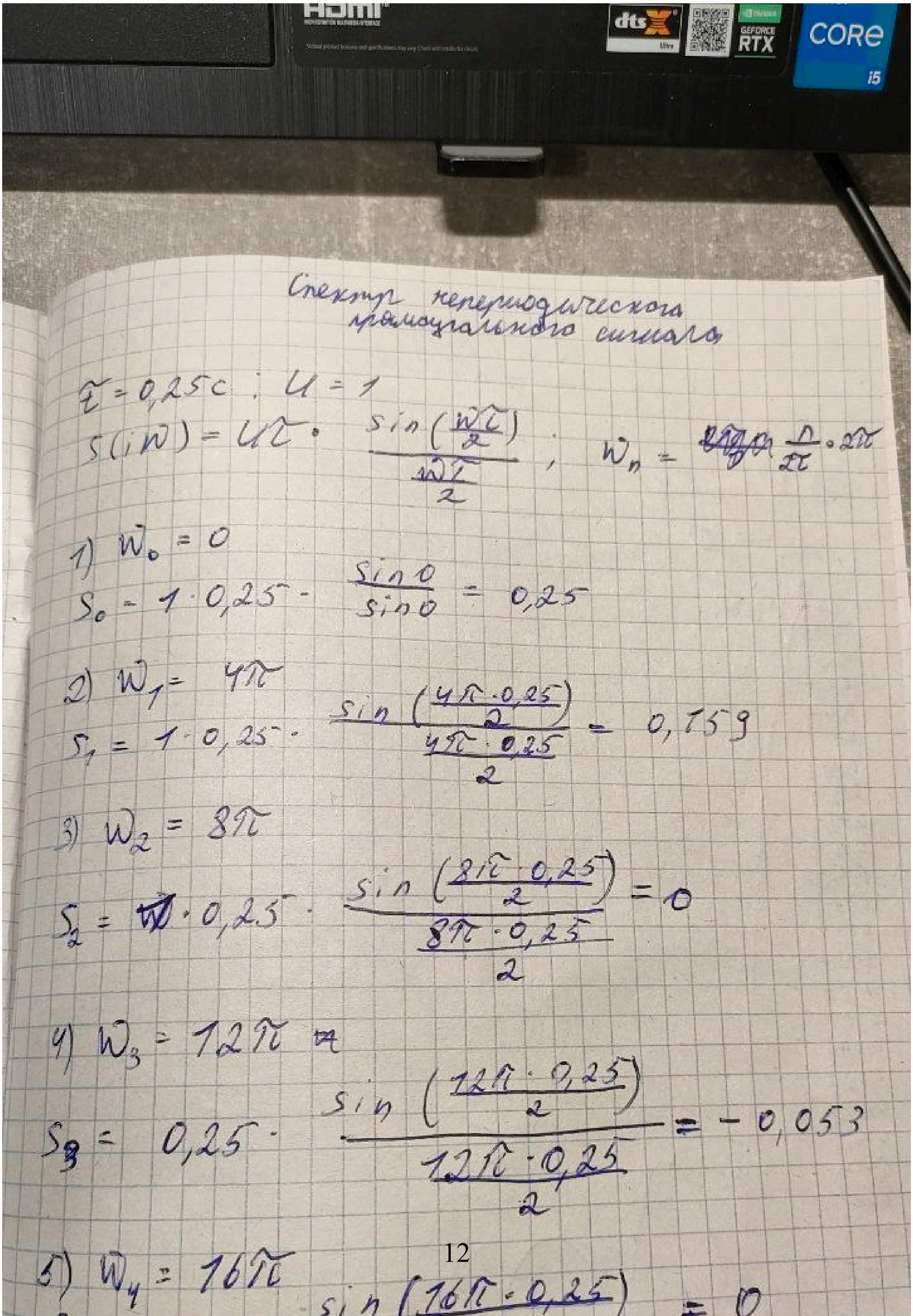


Рисунок 3 — Спектральная функция после перемножения

Можем видеть, что спектральная функция прямоугольного сигнала как-бы сместилась на частоту ω_0. Такое перемножение сигналов может происходить при формировании сигнала, если формирующий фильтр имеет прямоугольную импульсную характеристику.

ПРАКТИКА

Задание 1: выполнить ППФ над прямоугольным сигналом (на бумаге)



Спектр непериодического прямоугольного сигнала

$\tau = 0{,}25c$; $U = 1$

$S(iw) = U\tau \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{\frac{w\tau}{2}}$; $w_n = \dfrac{n}{2\tau} \cdot 2\pi$

1) $w_0 = 0$

$S_0 = 1 \cdot 0{,}25 \cdot \dfrac{\sin 0}{\sin 0} = 0{,}25$

2) $w_1 = 4\pi$

$S_1 = 1 \cdot 0{,}25 \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{4\pi \cdot 0{,}25}{2}\right)}{\frac{4\pi \cdot 0{,}25}{2}} = 0{,}159$

3) $w_2 = 8\pi$

$S_2 = 1 \cdot 0{,}25 \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{8\pi \cdot 0{,}25}{2}\right)}{\frac{8\pi \cdot 0{,}25}{2}} = 0$

4) $w_3 = 12\pi$

$S_3 = 0{,}25 \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{12\pi \cdot 0{,}25}{2}\right)}{\frac{12\pi \cdot 0{,}25}{2}} = -0{,}053$

5) $w_4 = 16\pi$

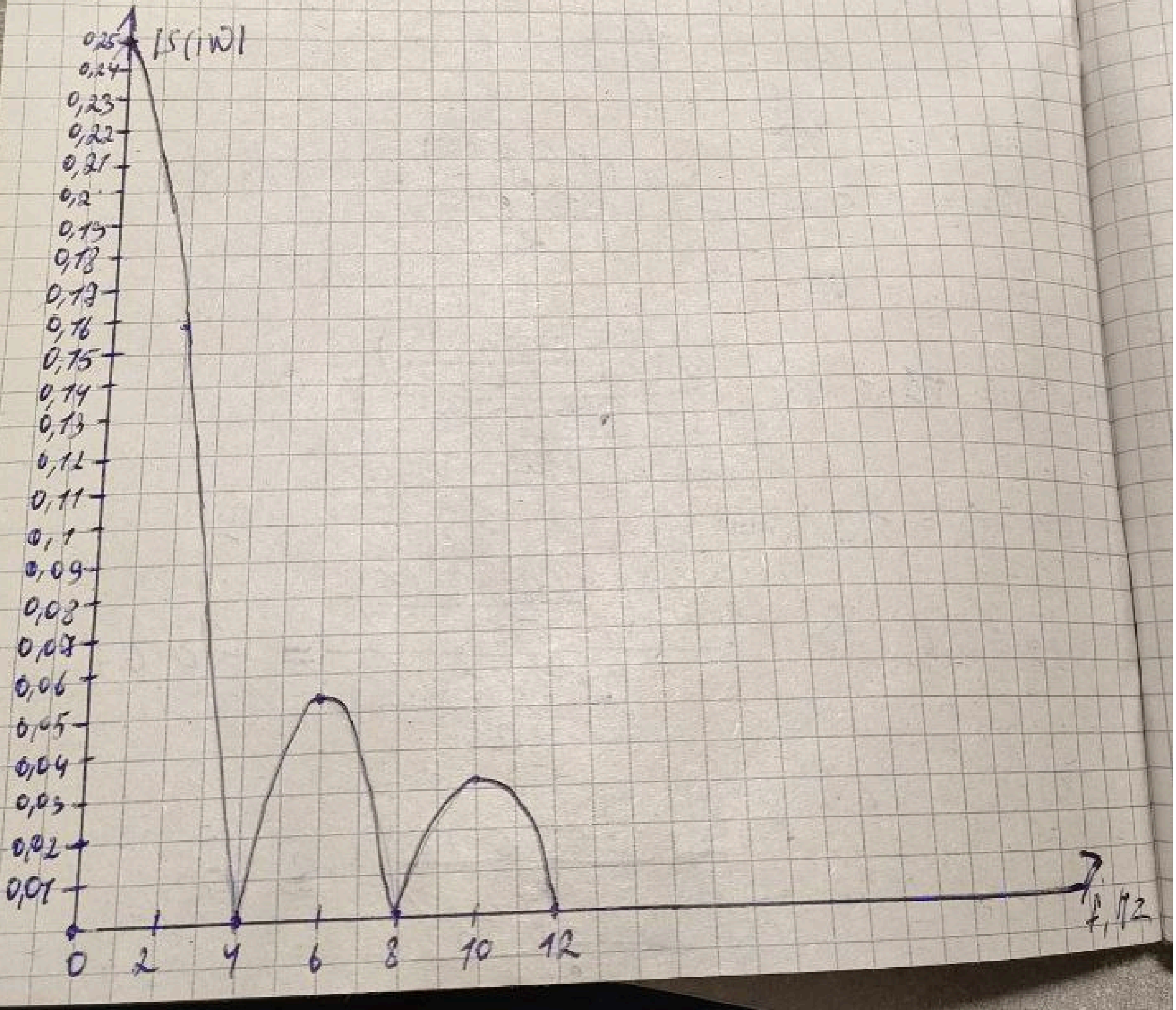
$\sin\left(\frac{16\pi \cdot 0{,}25}{2}\right) = 0$

6) $W_5 = 20\pi$

$$S_5 = 0,25 \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{\frac{5\pi}{2}} = 0,0318$$

7) $W_6 = 24\pi$

$$S_6 = 0$$



Задание 2: выполнить ППФ над прямоугольным сигналом

Выполним ППФ по формуле $S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{i\omega\tau}d\tau$. Пределы интеграла изменятся на $[-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}]$. Интегрировать будем численно: суммируем подынтегральную функцию $S(t)e^{i\omega\tau}$ в каждый момент времени t, а потом умножаем на dt. Для графика ниже $\tau = 0.25$

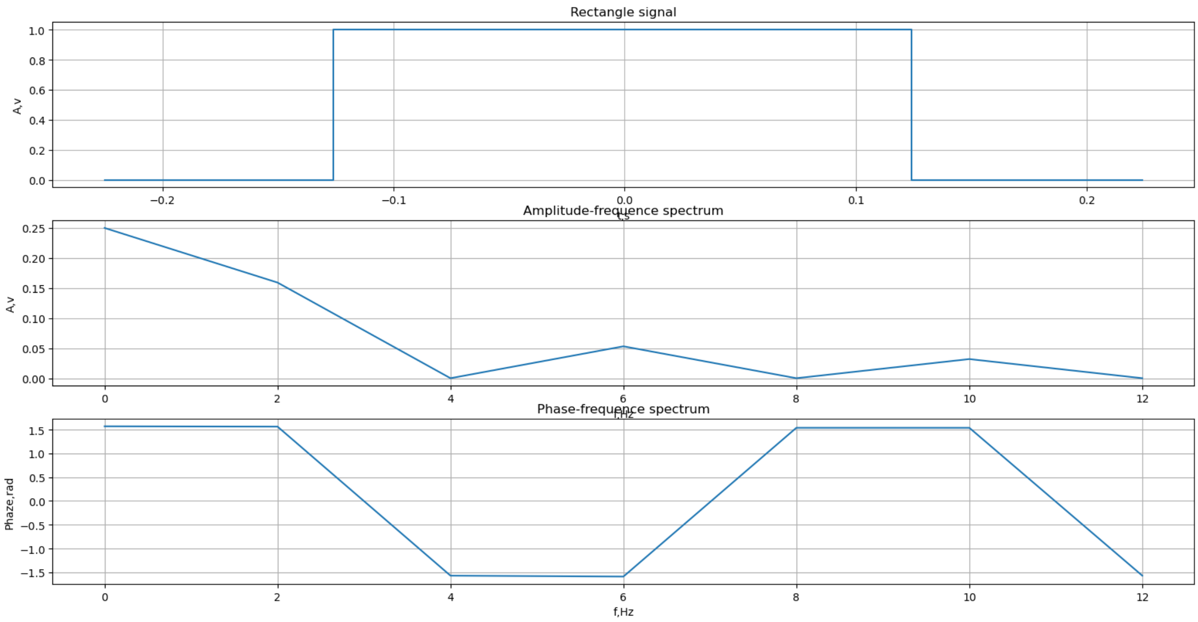


Рисунок 6 — Моудль и аргумент спектральной функции прямоугольного сигнала

График такой же, как и на прошлом шаге, когда вычисления происходили вручную. График имеет вид функции $\frac{sin(x)}{x}$.

Задание 3: проверка свойства ППФ прямоугольного сигнала с измением длительности сигнала

В этом задании увеличим, а потом уменьшим длительность сигнала τ и посмотрим на результат.

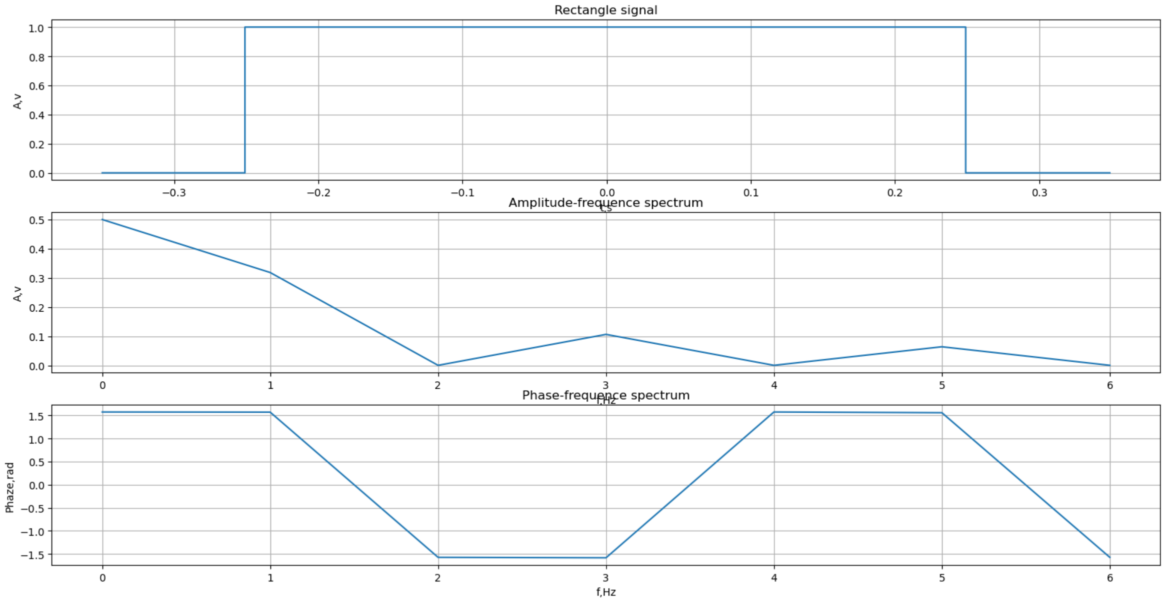


Рисунок 7 — $\tau = 0.5$

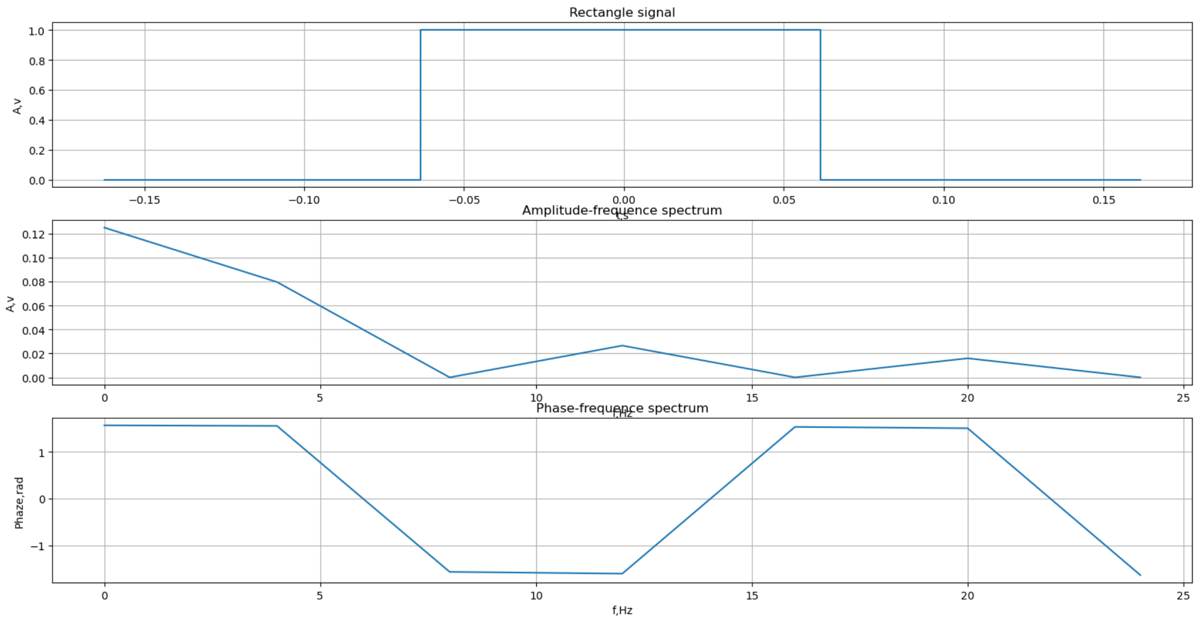


Рисунок 8 — $\tau = 0.125$

Можем заметить, что при уменьшении τ вдвое, спектр становится шире в два раза. Если увеличиваем длительность вдвое, то спектр сужается вдвое. Это следует из формулы $\triangle\omega = \frac{n}{2\tau}$. При увеличении длительности сигнала знаменатель дроби растет, поэтому шаг становится меньше и при одинаковом интервале частот график сузится. При уменьшении τ шаг растет и график растягивается. Точки, в которых спектральная функция принимает значение 0 (на частотах кратных $\frac{1}{\tau}$) тоже смещаются.

Задание 4: проверка свойства ППФ задержанного прямоугольного сигнала

Для проверки свойства введем переменную, которая будет отвечать за двиг сигнала во времени. В моем случае сдвиг будет на 0.1 секунды.

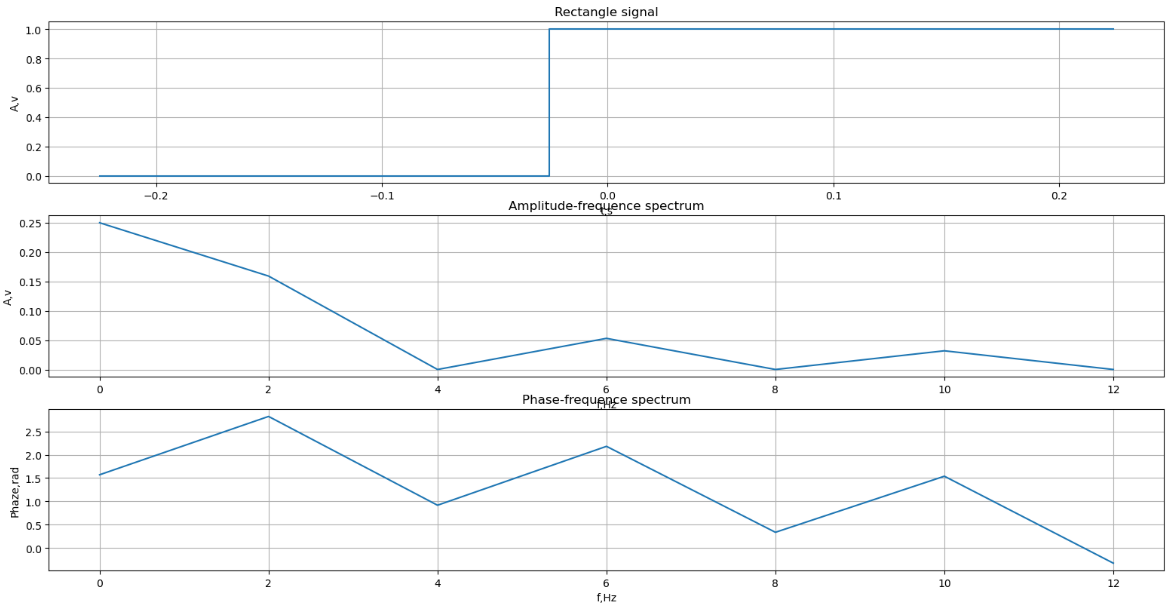


Рисунок 9 — Прямоугольный сигнал, сдвинутый во времени

Видим, что амплитудный спектр никак не изменился, а изменился только фазовый спектр. Эти изменения вносит множитель $e^{-i\omega t_0}$, где t_0 - время сдвига. Теоретически, если я разделю получившуюся спектральную функцию на $e^{-i\omega t_0}$, то спектр должен вернуться к исходному виду (первый скриншот, где $\tau = 0.25$).

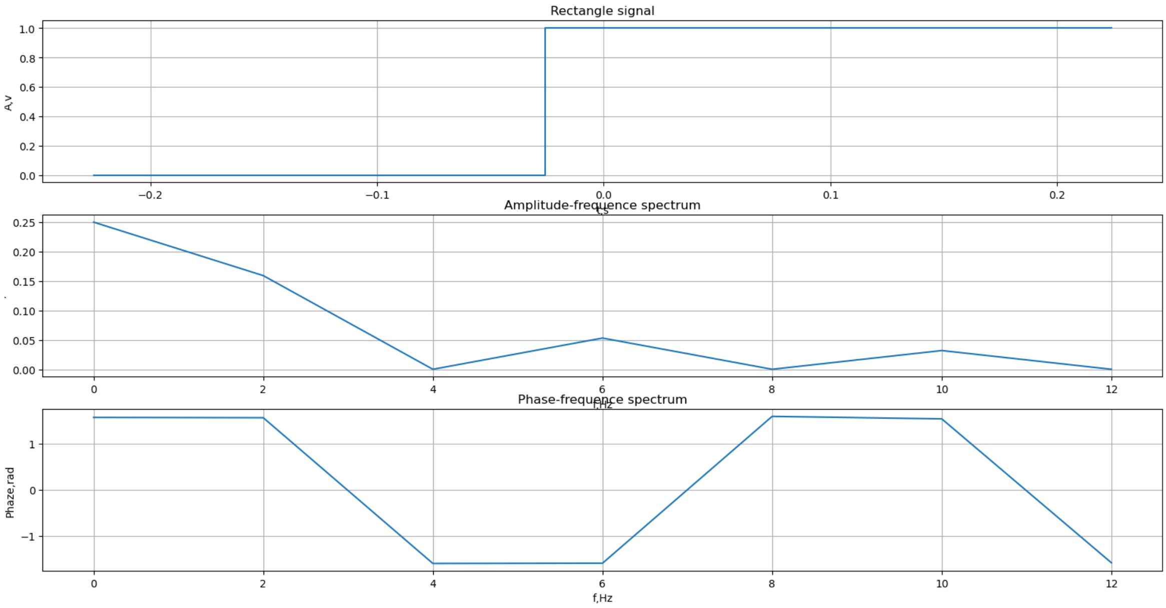


Рисунок 10 — Демонстрация свойства задержанного сигнала

Можем видеть, что спектр вернулся в исходное состояние.

Задание 5: проверка свойства ППФ прямоугольного сигнала (свойство модуляции, смещения спектра)

Для проверки свойства умножим исходный сигнал на $e^{i\omega_0 t}$, таким образом спектр сигнала сдвинется на ω_0 и это можно будет увидеть на графике.

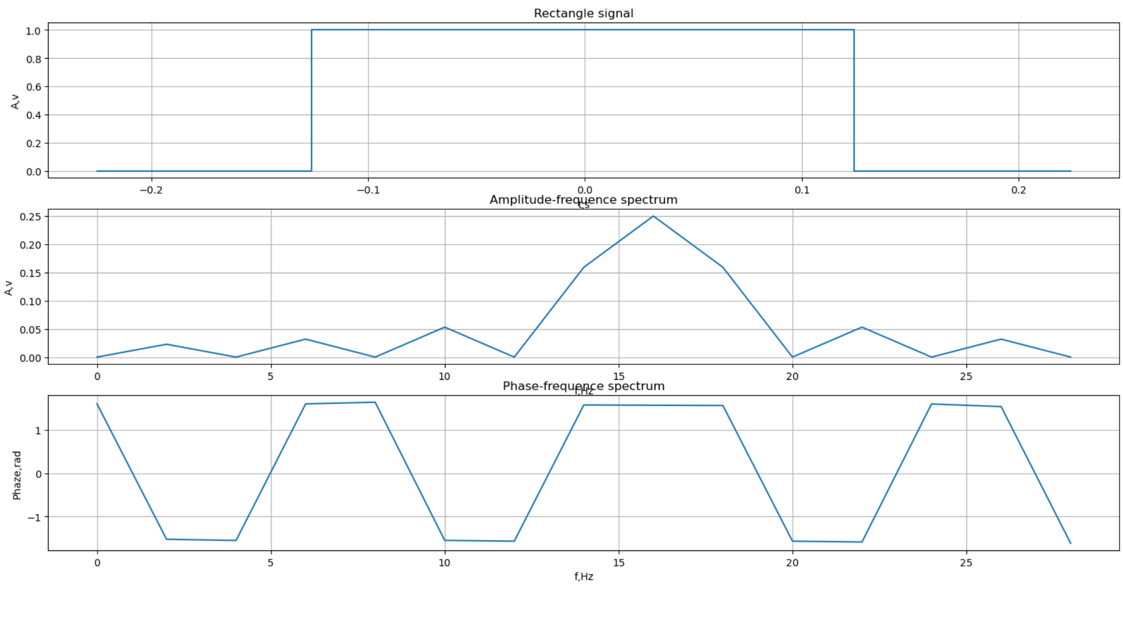


Рисунок 11 — Демонстрация свойства модуляции сигнала

Можем видеть, что сигнал действительно сдвинулся вправо на 16 Hz, именно 16 Hz я и задавал для сдвига. Также можно заметить, что фазовый спектр тоже изменился.

Приложение

Листинг кода:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# define rect signal param

# set time shift
t0 = 0

tau = 0.25
dt = 0.001
ofset = 0.1

# define rect signal

start = -tau/2 - ofset
end = tau/2 + ofset

timeline = np.arange(start,end,dt)

signal = [1 if i <= tau/2 + t0 and i >= -tau/2 + t0  else 0  for
   i in timeline]


plt.subplot(3, 1, 1)
plt.step(timeline, signal)
plt.xlabel("t,s")
plt.ylabel("A,v")
plt.title("Rectangle signal")
plt.grid()

# FT on [0, 3/tau]
N = 15
ft_result = []
```

```
f_ax = []

w_0 = 0

# uncomment if you want shift signal
#w_0 = 16 * 2 * np.pi

for i in range(0, N):

    w = i*1/(2 *tau) * 2 * np.pi

    f_ax.append(w / (2 * np.pi))

    e = np.exp(-1j * w * timeline)

    e_shift = np.exp(1j * w_0 * timeline)

    # S(t) * e^(-iwt)
    integral_func = signal * e * e_shift

    # numerical integration

    ft_result.append(np.sum(integral_func) * dt)


plt.subplot(3, 1, 2)
plt.plot(f_ax, list(map(abs, ft_result)))
plt.xlabel("f,Hz")
plt.ylabel("A,v")
plt.title("Amplitude-frequence spectrum")
plt.grid()

plt.subplot(3, 1, 3)
plt.plot(f_ax, list(map(np.arctan2, [x.real for x in ft_result],
   [x.imag for x in ft_result])))
plt.xlabel("f,Hz")
plt.ylabel("Phaze,rad")
plt.title("Phase-frequence spectrum")
plt.grid()
plt.show()
```

ВЫВОД

В ходе работы я изучил свойства преобразования Фурье и проверил их на практике.