МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра телекоммуникационных систем и вычислительных средств
(ТС и ВС)

Отчет по лабораторной работе №6
по дисциплине
Теория массового обслуживания

по теме:
СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ G/G/1. ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Студент:
Группа ИА-331 *Я.А Гмыря*

Предподаватель:
Преподаватель *А.В Андреев*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель:

Моделирование управляющих случайных последовательностей с различными функциями распределения.

Задание к лабораторной работе

Задание к лабораторной работе

1. **Задание значений λ и μ:** Задайте значения для параметров интенсивности входного потока (λ) и времени обслуживания (μ) с учетом выполнения условия стационарности системы λ<μ

2. **Определение аналитических характеристик:** Для показательного распределения вычислите математическое ожидание и дисперсию для входного потока и времени обслуживания:
    - Математическое ожидание
    - Дисперсия

3. **Определение параметров распределения общего вида**: Например, для гамма-распределения с параметрами cc и bb, задайте эти параметры согласно решению системы уравнений (6.1)

4. **Определение аналитических характеристик распределения общего вида:** Для гамма-распределения математическое ожидание и дисперсия вычисляются как:
    - Математическое ожидание: E[X]=c·bE[X] = c \cdot b
    - Дисперсия: Var(X)=c·b2\text{Var}(X) = c \cdot b^2

5. **Задание длины последовательности:** Задайте длину последовательности N≥100N \geq 100.

6. **Генерация управляющих последовательностей**: Для генерации управляющих последовательностей для системы M/M/1 используйте функции для формирования случайных чисел с экспоненциальным распределением. Это может быть сделано с помощью функции генерации экспоненциальных чисел, таких как exprnd для потока M/M/1 и gamrnd для потока общего вида.

7. **Расчет статистических характеристик**: Для каждой из последовательностей вычислите статистические характеристики, такие как математическое ожидание и дисперсия.

8. **Проверка совпадения аналитических и статистических характеристик**: Сравните вычисленные статистические характеристики с аналитическими значениями для всех последовательностей.

9. **Проверка совпадения статистических характеристик для различных распределений**: Для распределений общего вида, например для

41

гамма-распределения, также сравните статистические характеристики с аналитическими.

Рисунок 1 — Задание для лабораторной работы

ТЕОРИЯ

Модель системы массового обслуживания

В предлагаемой лабораторной работе исследуется модель системы массового обслуживания (СМО), состоящей из очереди и прибора.

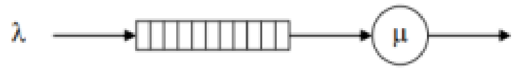

Рисунок 6.1 - Модель СМО

На вход системы поступает поток заявок с интенсивностью λ. Обслуживание осуществляется в единственном приборе с интенсивностью μ. Подразумевается, что очередь имеет неограниченную емкость (т.е. обслуживание без отказов). Любое требование, поступающее в систему, в то время, когда прибор занят, ждёт пока не обслужатся все стоящие перед ним в очереди требования. Входными параметрами для исследования СМО являются последовательности {τn} – последовательность промежутков времени между поступлениями требований и {νn} – последовательность промежутков времени обслуживания.

Задача данной лабораторной работы заключается в том, чтобы правильно сформировать управляющие последовательности в зависимости от вида СМО.

Для сравнения систем массового обслуживания различного типа необходимо, чтобы аналитические характеристики (математическое ожидание и дисперсия) распределений случайных величин ($\{\tau_n\}$ и $\{\nu_n\}$), подаваемых на вход этих СМО, совпадали. Таким образом, параметры распределений определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{E}_{exp} = \mathrm{E}_{G} \\ \mathrm{D}_{exp} = \mathrm{D}_{G} \end{cases} \qquad (6.1)$$

Решение системы уравнений

Для решения системы уравнений в MATLAB можно использовать встроенные функции для численного решения уравнений, такие как fsolve. Аналогичный процесс выполнения приведен ниже:

1. **Присвоить начальные значения всем искомым переменным:**
   Определите вектор начальных приближений для переменных, которые нужно найти.
2. **Задать систему уравнений:**

35

Рисунок 2 — Теория для лабораторной работы

Определите систему уравнений как анонимную функцию или отдельный файл-функцию.

3. **Вызвать функцию fsolve для нахождения решения:**

   Используйте функцию fsolve для решения системы. Для этого нужно передать функцию уравнений и вектор начальных приближений.

   Пример:

```
% Пример: Решение системы уравнений
% Задаем начальные приближения
x0 = [1, 1]; % начальные значения для переменных x и y

% Определяем систему уравнений как анонимную функцию
equations = @(vars) [
    vars(1)^2 + vars(2)^2 - 4;  % уравнение 1
    vars(1) - vars(2) - 1       % уравнение 2
];

% Решаем систему уравнений
solution = fsolve(equations, x0);

% Вывод результата
disp('Решение системы уравнений:');
disp(['x = ', num2str(solution(1))]);
disp(['y = ', num2str(solution(2))]);
```

Система M/M/1

Распределение времени между поступлениями требований – показательно

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda \cdot \tau} \quad (6.2)$$

со средним

$$E_{exp} = \bar{\tau} = \frac{1}{\lambda} \quad (6.3)$$

и дисперсией

$$D_{exp} = \sigma_{\tau}^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (6.4)$$

Распределение времени обслуживания – показательное

$F(\nu) = 1 - e^{-\mu \cdot \nu}$.

Среднее и дисперсия вычисляются по формулам 6.3 - 6.4 (с параметром μ). Для формирования последовательности показательно распределённых случайных чисел в MATLAB можно использовать встроенную функцию exprnd()

N – размерность последовательности.

λ – параметр распределения (интенсивность), обратный математическому ожиданию.

Рисунок 3 — Теория для лабораторной работы

Распределение времени между поступлениями – показательное (среднее и дисперсия смотри формулы 6.3 - 6.4). Распределение времени обслуживания – общего вида, в данной лабораторной работе это любое распределение из таблицы 6.1. Характеристики распределений общего вида описаны ниже.

Система G/M/1

Распределение времени между поступлениями – общего вида. Распределение времени обслуживания – показательное.

Система G/G/1

Распределение времени между поступлениями заявок и времени обслуживания – общего вида.

Распределения общего вида и их характеристики

Равномерное распределение

Функция распределения случайной величины x, равномерно распределенной на интервале (a,b) выглядит следующим образом:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \tag{6.5}$$

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \tag{6.6}$$

со средним

$$E_{unif} = \bar{x} = \frac{a-b}{2} \tag{6.7}$$

и дисперсией

$$D_{unif} = \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{6.8}$$

Формирование последовательности из **N** случайных чисел, равномерно распределённых на интервале **(a, b)**, производится с помощью встроенной функции MATLAB **rand(N,1) * (b - a) + a**. Параметры распределения (границы интервала) являются решением системы уравнений (6.1).

Гамма – распределение

Функция распределения не выражается в аналитическом виде.

Плотность вероятности

$$f(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \cdot \left(\frac{\exp\left(\frac{x}{b}\right)}{b \cdot \Gamma(c)}\right), \tag{6.9}$$

где c – параметр формы, b – параметр масштаба (иногда не используется и предполагается равным 1).

Среднее

$$E_{\Gamma} = \bar{x} = b \cdot c. \tag{6.10}$$

Дисперсия

37

Рисунок 4 — Теория для лабораторной работы

$D_Г = \sigma_x^2 = b^2 \cdot c.$ (6.11)

Для формирования последовательности случайных чисел с Гамма-распределением используется функция gamrnd(c, b, N, 1), где N — размерность последовательности, c > 0 — параметр формы, а b — параметр масштаба. Параметры распределения b и c определяются решением системы уравнений (6.1).

Необходимо учитывать, что в MATLAB функция gamrnd(c, b, N, 1) генерирует случайные числа с параметром масштаба b. Если параметр масштаба в Matlab равен 1, то для получения чисел с нужным гамма-распределением, необходимо умножить результат на требуемый параметр масштаба b.

Логнормальное распределение

Функция распределения не выражается в аналитическом виде.

Плотность вероятности

$$f(x) = \left(\frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \cdot \exp\left(\frac{-\left[\ln\left(\frac{x}{m}\right)\right]^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad (6.12)$$

где $\sigma > 0$ – параметр формы (стандартное отклонение случайной величины), m – параметр масштаба (медиана), m = exp(x) . Параметры m и σ выражаются через характеристики показательного распределения следующим образом

$$m = \frac{E_{exp}}{\sqrt{\omega}}, \quad (6.13)$$

$$\sigma = \sqrt{\ln(\omega)}, \quad (6.14)$$

где $\omega = \frac{D_{exp} + E^2{}_{exp}}{E^2{}_{exp}}$ – вспомогательная переменная, E_{exp} – математическое ожидание показательного распределения, D_{exp} – дисперсия показательного распределения.

Математическое ожидание

$$E_{LN} = m \cdot \sqrt{\omega}. \quad (6.15)$$

Дисперсия

$$D_{LN} = m^2 \cdot \omega \cdot (\omega - 1) \quad (6.16)$$

Для формирования последовательности случайных чисел с логнормальным распределением используется функция lognrnd(μ, σ, N, 1), где N — размерность последовательности, μ = ln(m) — параметр расположения, и σ — параметр масштаба. Параметр μ определяется как логарифм от m.

Таким образом, чтобы получить случайные числа с логнормальным распределением с параметрами μ и σ, необходимо использовать функцию lognrnd, где μ = ln(m) и σ передаются в качестве аргументов. Параметры

38

Рисунок 5 — Теория для лабораторной работы

распределения смотри выше.

Распределение хи – квадрат

Функция распределения:

$$F(x) = \left(\frac{1}{2^{d/2}\cdot\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\right)\cdot\int_0^y u^{\frac{d}{2}-1}\cdot exp\left(-\frac{u}{2}\right)\cdot du. \qquad (6.17)$$

Плотность вероятности:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{d}{2}-1}\cdot\left(\frac{exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{b\cdot\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\right), \qquad (6.18)$$

где d > 0 – параметр формы (число степеней свободы).

Среднее:

$$E_{\chi^2} = \bar{x} = d. \qquad (6.19)$$

Дисперсия:

$$D_{\chi^2} = \sigma_x^2 = 2\cdot d. \qquad (6.20)$$

Для формирования последовательности случайных чисел с распределением хи-квадрат используется функция chi2rnd(d, N, 1), где d — количество степеней свободы, а N — размерность последовательности.

Параметр d определяется в зависимости от задачи или решается системой уравнений, как указано в уравнении (6.1).

Функция chi2rnd(d, N, 1) генерирует N случайных чисел, распределённых по закону хи-квадрат с d степенями свободы.

Распределение Эрланга

Распределение Эрланга – это гамма - распределение с целым параметром c.

Функция распределения

$$F(x) = 1 - exp\left(\frac{x}{b}\right)\cdot\left[\sum_{i=1}^{c-1}\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{i}}{i!}\right]. \qquad (6.21)$$

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1}\cdot exp\left(-\frac{x}{b}\right)}{b\cdot[(c-1)\,!]} \qquad (6.22)$$

где c > 0 – параметр формы (целое число), b > 0 – параметр масштаба.

Среднее

$$E_E = \bar{x} = b\cdot c. \qquad (6.23)$$

Дисперсия

$$D_E = \sigma_x^2 = b^2\cdot c. \qquad (6.24)$$

Для формирования последовательности случайных чисел с распределением Эрланга используется функция gamrnd(c, b, N, 1) где:

c — параметр формы (также известен как количество этапов в

Рисунок 6 — Теория для лабораторной работы

распределении Эрланга),

b — параметр масштаба (период времени или масштаб, с которым нужно масштабировать результат),

N — размерность вектора.

Обратите внимание, что MATLAB генерирует случайные числа для гамма-распределения с параметром масштаба b, поэтому если вам нужно именно распределение Эрланга с параметром масштаба b, вам не нужно дополнительно умножать полученные значения на b, так как эта функция уже учитывает параметр масштаба при генерации чисел.

Для задачи, когда вам нужно применить масштабирование, то вам достаточно умножить все элементы полученной последовательности на нужный параметр масштаба.

Распределение Вейбулла

Функция распределения

$$F(x) = 1 - exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right). \tag{6.25}$$

Плотность вероятности

$$f(x) = \left(\frac{c \cdot x^{c-1}}{b^{c}}\right) \cdot exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right), \tag{6.26}$$

где c > 0 – параметр формы, b > 0 – параметр масштаба (характерное время жизни).

Среднее

$$E_W = \bar{x} = b \cdot \Gamma\left(\frac{c+1}{c}\right). \tag{6.27}$$

Дисперсия

$$D_W = \sigma_x^2 = b^2 \cdot \left[\Gamma\left(\frac{c+2}{c}\right) - \left\{\Gamma\left(\frac{c+1}{c}\right)\right\}^2\right] \tag{6.28}$$

Для формирования последовательности случайных чисел с распределением Вейбулла используется функция wblrnd(c, b, N, 1), где:

c — параметр формы (shape parameter),

b — параметр масштаба (scale parameter),

N — размерность последовательности (или количество генерируемых чисел).

Функция wblrnd(c, b, N, 1) генерирует случайные числа с распределением Вейбулла с заданными параметрами c и b.

В MATLAB функция wblrnd уже учитывает параметр масштаба b, поэтому вам не нужно дополнительно умножать полученные числа на b.

Если же требуется изменение масштаба, то можно дополнительно умножить результат на нужный масштаб b.

Статистические характеристики

40

Рисунок 7 — Теория для лабораторной работы

Среднее

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}. \quad (6.29)$$

Дисперсия

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - M^2. \quad (6.30)$$

Рисунок 8 — Теория для лабораторной работы

ХОД РАБОТЫ

Система массового обслуживания

Математическая модель, описывающая процессы, в которых объекты (клиенты, заявки, задачи) поступают в систему для обслуживания ограниченными ресурсами (каналами обслуживания, операторами, устройствами).

Базовые характеристики

λ - средняя интенсивность заявок, т.е то кол-во заявок, которое в среднем поступает в СМО в единицу времени, u - средняя интенсивность обслуживания, т.е то кол-во заявок, которое в среднем СМО обрабатывает в единицу времени.

t_n - набор чисел, каждое чсило указывает на время поступления n-ой заявки в СМО, v_n - интервалы между поступлениями, т.е разница между t_n и t_{n-1}.

Наименования СМО

Часто СМО могут называться следующим образом: M/M/1, M/G/1, G/G/2 и т.д. Здесь первый символ - распределение времени между поступлениями, второй - распределение времени обслуживания, число в конце - число обслуживающих устройств.

Причем здесь распределения

Очень часто хотелось бы иметь возможность прогназировать нагрузку, которая будет приходиться на СМО, чтобы уметь с этой нагрузкой справляться. Для этого СМО первое время собирает статистические данные о времени поступления заявок и их интесивности. Далее в этих данных ищутся закономерности, если удается найти закономерность (нашли какой нибудь закон распределения), то можно на будущее прогнозировать нагрузку. Если закономерности не выявлено (заявки поступают рандомно), то очень часто используют экспоненциальное распределение.

Пример

В магазинах часто много касс, но работают из них в лучшем случае только две. За пару дней до Нового Года, нагрузка резко возрастает, и в магазинах зачастую начинают работать все кассы. Работники магазинов на основе статистических данных за прошлые года выявили следующую закономерность: перед Новым Годом большое кол-во покупателей, поэтому они увеличивают кол-во устройств обслуживания (касс). Логично, что весь год держать все кассы открытыми экономически невыгодно, т.к большинство из них будут простаивать, но вместо этого можно отправить кассиров делать работу в зале.

Про сравнение разных СМО

Допустим, мы собрали статистические данные и выявили какую-то закономерность, но вопрос в том, является ли распределение, которое мы вывели самым эффективным? Здесь и нужно сравнение СМО. Чтобы сравнение было корректным, необходимо, чтобы совпадали мат.ожидание и дисперсия t_n и v_n совпадали. Если они не будут совпадать, то мы начнем сравнивать разные СМО с РАЗНОЙ нагрузкой. Для сравнения необходимо, чтобы нагрузка была одинаковой, тогда точно можно будет сказать, какая СМО лучше.

Выполнение лабораторной работы

Зададим данные для СМО, которая будет иметь экспоненциальное распределение времени поступления заявок. Высчитаем мат.ожидание и дисперсию:

```
%define params for exp distr

lambda = 5;
u = 15;

%compute E and D for exp distr
```

```
E = 1/lambda;
D = 1/lambda^2;
```

Предположим, что мы хотим сравнить эту СМО с другой СМО, которая имеет хи-квадрат распределение времени поступления заявок. В таком случае необходимо решить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} d = E \\ 2d = D \end{cases}$$

Такая система не имеет решения, с одной стороны $d = E$, а с другой $d = \frac{D}{2}$. Я взял решение первого уравнения и сложил с решением второго и поделил пополам (нашел усредненное значение), которое равно 0.11.

Теперь зададим 2 выборки: экспоненциальную и хи-квадрат, расчитаем для каждой мат.ожидание и дисперсию:

```
N = 250;

chi_seq = chi2rnd(d, N, 1);
exp_seq = exprnd(E, N, 1);

chi_E = sum(chi_seq)/N;
chi_D = sum(chi_seq .^ 2)/N - chi_E^2;

exp_E = sum(exp_seq)/N;
exp_D = sum(exp_seq.^2)/N - exp_E^2;
```

Сравним показатели:

```
fprintf("Theory stats: \n");
fprintf("Exp disrt: E = %f  D = %f\n", E, D);
fprintf("Chi^2 disrt: E = %f  D = %f\n", d, 2*d);

fprintf("Real stata: \n");
fprintf("Exp disrt: E = %f  D = %f\n", exp_E, exp_D);
fprintf("Chi^2 disrt: E = %f  D = %f\n", chi_E, chi_D);
```

Результат:

```
Theory stats:
Exp disrt: E = 0.200000   D = 0.040000
Chi^2 disrt: E = 0.110000   D = 0.220000
Real stata:
Exp disrt: E = 0.184799   D = 0.045808
Chi^2 disrt: E = 0.137428   D = 0.422198
```

Рисунок 9 — Результаты вычислений

Можем заметить, что для каждого распределения статистические мат.ожидание и дисперсия совпадают с теоеретическими с некоторой допустимой погрешностью. Также можно заметить, что у разных распределений совпадает мат.ожидание (тоже с некоторой допустимой погрешностью). Как раз это и необходимо для сравнения СМО.

Конртольные вопросы

1. Обозначение СМО.
2. Классификация СМО.
3. Функции распределения.
4. Математическое ожидание и дисперсия.
5. Формирование случайных чисел.
6. Аналитические и статистические характеристики.
7. Решение систем линейных уравнений.

Рисунок 10 — Контрольные вопросы

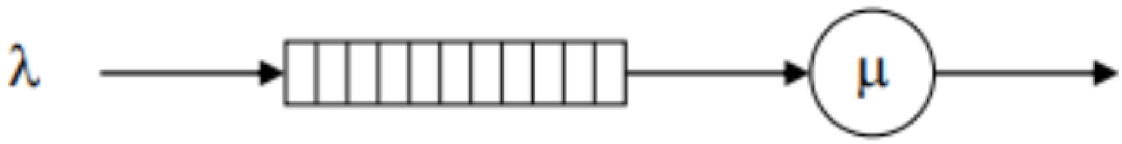

Рисунок 6.1 - Модель СМО

Рисунок 11 — Обозначение СМО

1.

2. СМО классифицируются по распределению времени между поступлениями, распределению времени обслуживания, кол-ву обслуживающих устройств.
3. Способ описаниия случайной величины. Она возвращает вероятность "попасть"в определенный диапазон.
4. Математическое ожидание - среднее значение, дисперсия - отклонение от мат.ожидания. Могут быть расчитаны теоретически и эксперементально.
5. В MATLAB много встроенных функций для генерации выборки из разных распределений (гамма, экспоненциальное, хи-квадрат и т.д).
6. Аналитическая характеристика - теоретическая, статистическая - полученная на практике.
7. Для систем решения линейных уравнений применяются методы Гаусса, Крамера, Якоби, Зейделя.

ВЫВОД

В ходе работы я промоделировал управляющие случайные последовательности с различными функциями распределения. Проанализировал полученные результаты.