ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ ТА ЕКОНОМЕТРИКИ

МАГІСТЕРСЬКА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на тему:

Розв'язок задач оптимального керування мовою Python

студента VI курсу
групи МТЕМ-21
Войтовича Ярослава

Науковий керівник:
доцент

Завідуюча кафедри МАТЕМАТИЧНОЇ
ЕКОНОМІКИ ТА ЕКОНОМЕТРІЇ
проф. Оліскевич (підпис)

Львів — 2022

Зміст

Розділ 1

Вступ

Моделювання динамічних систем лежить в основі багатьох галузей людської життєдіяльності, які мають справу зі змінними в часі процесами. Традиційно можна виділити три задачі такого моделювання, а саме описову, предиктивну та прескриптивну. Рішення описових задач зазвичай полягає у відповіді на запитання про поточний або минулий стан розглянутої моделі, тоді як предиктивні задачі потребують пошуку можливих станів системи у майбутньому. Прескриптивні задачі включають більш глибокий аналіз системи в тому сенсі, що не лише вимагають відповіді на запитання про майбутній стан системи, а також встановлення множини рішень, що допоможуть досягнути деяких бажаних станів відповідно до контексту задачі. Задачі оптимального керування є підмножиною таких прескриптивних задач математичного моделювання. Метою задач оптимального керування є пошук контролю динамічної системи, при якому деяка задана цільова функція набуває оптимального значення. Розвитку набули підходи оптимального керування як для детермінованих так і для стохастичних динамічних систем, з неперервними та дискретними значеннями часу. Значна частина підходів базується на методах варіаційного числення, методах динамічного програмування, описаних Річардом Беллманом, та принципі максимуму Понтрягіна.

У цій роботі розглядається оптимальне керування виключно детермінованими процесами та чисельні методи з принципом Понтрягіна [] в їх основі.

1.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування, що визначається цільовою функцією, та деякою динамічною системою, яка змінюється з часом і залежить від керування. Динамічна система визначається заданою ситсемою диференційних рівнянь. Якщо задача є коректною для використання принципу максимуму Понтрягіна, можна встановити систему з необхідних умов для максимізації функціоналу та визначити множину в просторі допустимих керувань, що дозволяє знайти оптимальний розв'язок. Відносно прості системи дозволяють знайти розв'язок аналітично, проте в загальному випадку системи з багатьох рівнянь з розмірністю змінної простору понад дві координати часто необхідно використати чисельні апроксимації для знаходження розв'язку. Реалізації алгоритмів для пошуку оптимального керування є актуальними на сьогодні. Існує велика кількість програмних пакетів та бібліотек, що на різних рівнях абстракції пропонують рішення задач оптимального керування. Основною проблемою створення універсального інструмента є індивідуальні підходи для вирішення кожного класу задач оптимального керування. Часто для розвязку подібних задач достатньо поєднати методи з пакетів лінійного та нелінійного програмування, а також чисельної апроксамиції диференційних систем методи скінченних різниць, скінченних елементів або скінченних об'ємів. Так компанія-розробник популярного середовища MathWorks не пропонує окремого пакета для написання рішень оптимального керування, але надає ряд статей та рекомендацій по розробці подібних програм з використанням вже існуючих пакетів []. Також існують рішення з відкритим кодом [].

Python

NumPy

1.2 Основні поняття

Програмний пакет - Векторні обчислення - Наслідування класів -

Розділ 2

Основна частина

2.1 Визначення принципу Понтрягіна

Введемо формальне означення задачі оптимального керування для динамічної системи в загальному вигляді.

Означення 2.1.0.1 *Максимізувати функціонал*

$$\mathcal{L}\left(u, x^{u}\right)=\int_{0}^{T} G\left(t, u(t), x^{u}(t)\right) d t+\varphi\left(x^{u}(T)\right) \tag{2.1}$$

по $u \in K \subset L^{2}\left(0, T ; \mathbb{R}^{m}\right)(T>0)$, *де* x^{u} *є розв'язком наступної системи, що називається рівнянням стану системи*

$$\left\{\begin{array}{l}
x^{\prime}(t)=f(t, u(t), x(t)), \quad t \in(0, T) \\
x(0)=x_{0}
\end{array}\right. \tag{2.2}$$

Для задачі на мінімум можна переформулювати задачу наступним чином:

$$\textit{Мінімізувати}\left\{-\mathcal{L}\left(u, x^{u}\right)\right\} \text{ \textit{відносно} } u \in K \subset L^{2}\left(0, T ; \mathbb{R}^{m}\right)$$

Введемо означення принципу максимуму Понтрягіна. Для цього задамо необхідні умови для функцій задачі оптимального керування. Нехай функції задачі задовольняють наступні умови:

$$\begin{aligned}
& G:[0, T] \times \mathbb{R}^{m} \times \mathbb{R}^{N} \rightarrow \mathbb{R} \\
& \varphi: \mathbb{R}^{N} \rightarrow \mathbb{R} \\
& f:[0, T] \times \mathbb{R}^{m} \times \mathbb{R}^{N} \rightarrow \mathbb{R}^{N}
\end{aligned}$$

$$x_{0} \in \mathbb{R}^{N}, m, N \in \mathbb{N}^{*}, \text { and } K \subset L^{2}\left(0, T ; \mathbb{R}^{m}\right)$$

Назвемо $u^{*} \in K$ назвемо оптимальним розв'язком задачі оптимального контролю, якщо $\mathcal{L}\left(u^{*}, x^{u^{*}}\right) \geq \mathcal{L}\left(u, x^{u}\right)$, для усіх $u \in K$. Пара $\left(u^{*}, x^{u^{*}}\right)$ називається оптимальною парою і $\mathcal{L}\left(u^{*}, x^{u^{*}}\right)$ називається оптимальним значенням функції вартості. Ми також називаємо (u^*, x^*) оптимальною парою якщо u^* є оптимальним керуванням і $x^* = x^{u^*}$. Нехай $u^* \in K$ є оптимальним задачі оптимального керування, тоді:

$$\int_0^T G\left(t, u^*(t), x^{u^*}(t)\right) dt + \varphi\left(x^{u^*}(T)\right) \geq \int_0^T G\left(t, u(t), x^u(t)\right) dt + \varphi\left(x^u(T)\right) \tag{2.3}$$

для усіх $u \in K$. Далі вважатимемо, що для функцій задачі виконуються наступні умови:

$$\begin{cases} f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \\ G_u = \frac{\partial G}{\partial u}, \quad G_x = \frac{\partial G}{\partial x} \\ \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$$

Розглянемо множину V.

$$V = \left\{v \in L^2\left(0, T; \mathbb{R}^m\right); u^* + \varepsilon v \in K \text{ для усіх достатньо малих } \varepsilon > 0\right\}$$

Введемо функцію z як диференціал від x по v: $z = dx^{u^*}(v)$. Оскільки за визначенням повного диференціалу:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

функція z є розв'язком наступної системи:

$$\begin{cases} z'(t) = f_u\left(t, u^*(t), x^{u^*}(t)\right) v(t) + f_x\left(t, u^*(t), x^{u^*}(t)\right) z(t), \quad t \in (0, T) \\ z(0) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

З умови оптимальності 2.3 випливає нерівність:

$$\begin{aligned} \int_0^T G\left(t, u^*(t), x^{u^*}(t)\right) dt + \varphi\left(x^{u^*}(T)\right) \geq \int_0^T G\left(t, u^*(t) + \varepsilon v(t), x^{u^*+\varepsilon v}(t)\right) dt \\ +\varphi\left(x^{u^*+\varepsilon v}(T)\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

Перегрупуємо нерівність 2.5 та поділом на ε:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\left[G\left(t, u^*(t) + \varepsilon v(t), x^{u^*+\varepsilon v}(t)\right) - G\left(t, u^*(t), x^{u^*}(t)\right)\right] dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi\left(x^{u^*+\varepsilon v}(T)\right) - \varphi\left(x^{u^*}(T)\right)\right] \leq 0 \end{aligned}$$

Оскільки можемо обирати ε як завгодно малим, то перейдемо до диференціалів. Формула повного диференціала функції G:

$$dG = G'_u du + G'_x dx$$

Враховуючи значення диференціалів описані вище, перейдемо до наступного вигляду:

$$\int_0^T \left[v(t)\cdot G_u\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)+z(t)\cdot G_x\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)\right]dt$$
$$+\,z(T)\cdot\varphi_x\left(x^{u^*}(T)\right)\le 0$$

Далі розглянемо так звану спряжену проблему. p - це спряжений стан. Це необхідна умова першого порядку у визначенні принципу Понтрягіна.

$$\begin{cases} p'(t)=-f_x^*\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)p(t)-G_x\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right), \quad t\in(0,T) \\ p(T)=\varphi_x\left(x^{u^*}(T)\right)\end{cases} \tag{2.6}$$

Якщо помножити рівняння 2.4 на p та проінтегрувати частинами, то отримаємо рівність:

$$z(T)\cdot p(T)-\int_0^T z(t)\cdot p'(t)dt$$
$$=\int_0^T \left[f_u\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)v(t)+f_x\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)z(t)\right]\cdot p(t)dt$$

Далі підставляємо p, за визначенням зі спряженої задачі:

$$\begin{aligned} &z(T)\cdot\varphi_x\left(x^{u^*}(T)\right)\\ &+\int_0^T z(t)\cdot\left[f_x^*\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)p(t)+G_x\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)\right]dt\\ &=\int_0^T \left[v(t)\cdot f_u^*\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)p(t)+z(t)\cdot f_x^*\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)p(t)\right]dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

Можна звести 2.7 до вигляду:

$$\int_0^T z(t)\cdot G_x\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)dt+z(T)\cdot\varphi_x\left(x^{u^*}(T)\right)$$
$$=\int_0^T v(t)\cdot f_u^*\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)p(t)dt$$

$$\int_0^T v(t)\cdot\left[G_u\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)+f_u^*\left(t,u^*(t),x^{u^*}(t)\right)p(t)\right]dt\le 0$$

$$G_u\left(\cdot,u^*,x^{u^*}\right)+f_u^*\left(\cdot,u^*,x^{u^*}\right)p\in N_K\left(u^*\right)$$

Це також необхідна умова першого порядку у визначенні принципу Понтрягіна. Ця множина є нормальним конусом ([[0001b. Нормальний конус]]). Далі розглянемо схему доведення існування оптимального за Понтрягіним контролю ([[0001c. Схема доведення існування оптмального контролю]]). Також визначимо принцип Понтрягіна через гамільтоніан ([[0001d. Визначення принципу Понтрягіна через гамільтоніан]]) Умови трансверсальності для принципу максимуму Понтрягіна ([[0001e. Умови трансверсальності]])

2.1.1 Схема довдення існування оптимального керування

`![Alt Text](https://media.giphy.com/media/vFKqnCdLPNOKc/giphy.gif)`

Нехай

$$d = \sup_{u \in K} \mathcal{L}(u, x^u) \in \mathbb{R}.$$

Для усіх $n \in \mathbb{N}^*$, існує $u_n \in K$ такий, що:

$$d - \frac{1}{n} < \mathcal{L}(u_n, x^{u_n}) \leq d$$

Крок 1. Довести, що існує підпослідовність $\{u_{n_k}\}$, така що:

$$u_{n_k} \longrightarrow u^* \text{ слабко збігається в } L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$$

Визначення слабкої збіжності ([[0001c1. Слабка збіжність послідовності]]).

Крок 2. Довести, що існує підпослідовність $\{x^{u_{n_r}}\}$ послідовності $\{x^{u_{n_k}}\}$, що збігається до x^{u^*} на $C\left([0, T]; IR^N\right)$.

Крок 3. З нерівності:

$$d - \frac{1}{n_r} < \mathcal{L}(u_{n_r}, x^{u_{n_r}}) \leq d$$

Переходимо границі і отрмаємо:

$$\mathcal{L}\left(u^*, x^{u^*}\right) = d$$

u^* - оптимальне керування задачі.

2.2 Градієнтний метод для оптмального керування

Розглянемо задачу оптимального керування [[0001. Визначення принципу Понтрягіна]]:

$$\text{Максимізувати } \Phi(u) = \mathcal{L}(u, x^u) = \int_0^T G(t, u(t), x^u(t))\, dt$$

відносно $u \in K \subset U = L^2(0, T; \mathbb{R}^m)\,(T > 0)$, де x^u є розв'язком рівняння стану:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, u(t), x(t)), & t \in (0, T) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Переформулюємо як задачу пошуку мінімуму:

$$\text{iii}\, \Psi(u) = -\mathcal{L}(u, x^u)$$

$$\Psi(u) = -\Phi(u)$$

Використаємо метод проекції градієнта для пошуку мінімуму. Крок 1. Обираємо довільний вектор керування $u^{(0)} \in K$, присвоюємо $k := 0$. Крок 2. Шукаємо розвязок $x^{(k)}$ з рівняння стану:

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(t, u^{(k)}(t), x(t)\right), \quad t \in (0,T) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Крок 3. Шукаємо спряжений стан $p^{(k)}$ зі спряженої системи:

$$\begin{cases} p'(t) = -f_x^*\left(t, u^{(k)}(t), x^{(k)}(t)\right) p(t) - G_x\left(t, u^{(k)}(t), x^{(k)}(t)\right), \quad t \in (0,T) \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

Крок 4. Обчислюємо градієнт функції втрат:

$$w^{(k)} := \Phi_u\left(u^{(k)}\right) = G_u\left(\cdot, u^{(k)}, x^{(k)}\right) + f_u^*\left(\cdot, u^{(k)}, x^{(k)}\right) p^{(k)}.$$

Крок 5. Визначаємо розмір кроку градієнтного спуску $\rho_k \geq 0$:

$$\Phi\left(P_K\left(u^{(k)} + \rho_k w^{(k)}\right)\right) = \max_{\rho \geq 0} \Phi\left(P_K\left(u^{(k)} + \rho w^{(k)}\right)\right)$$

Крок 6.

$$u^{(k+1)} := P_K\left(u^{(k)} + \rho_k w^{(k)}\right)$$

Критерії зупинки.

$$\text{Якщо } \left\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\right\| < \varepsilon$$

$u^{(k+1)}$ є шуканаю апроксимацією оптимального керування . В іншому разі виконуємо присвоєння $k := k+1$ і повертаємось до кроку 2.

P_K - оператор проекції градієнта на опуклу множину K. Метод проекції градієнта враховує можливість додаткових обмежень на множині допустимого оптимального керування U.

$$P_K : U \to K$$

Якщо оптимальне керування не є обмеженим на U, то крок 5 набуває вигляду:

$$\Phi\left(u^{(k)} + \rho_k w^{(k)}\right) = \max_{\rho \geq 0} \left\{\Phi\left(u^{(k)} + \rho w^{(k)}\right)\right\}$$

2.3 Оптимальне споживання

Максимізація споживання

Посилання. Anita S.,Arnautu V.,Capasso V.-An intr.to opt.cont.probl.in life sciences and economics Формулювання задачі для пошуку оптимального керування

Нехай маємо задачу

$$x(t) = I(t) + C(t), \quad t \geq 0$$

Метод Арміджіо

while Евклідова норма вектора градієнта строго перевищує ε або крок градієнта строго перевищує ρ_j **do**
  Розв'язати рівняння стану відповідно до поточних значень функції керування $currentU$;
  Розв'язати рівняння стану відповідно до поточних значень функції керування $currentU$ та стану x;
  Обчислити градієнт функції втрат з урахуванням обчислених функцій $currentU$, x та p;
  if Евклідова норма градієнта менша ε **then**
    break
  end if
  Встановити початкове значення кроку градієнта $currentGradientStep = initGradientStep$;
  for $gradientIteration = 1, 2, \ldots, MaxGradientIteration$ **do**
    Оновити функцію керування $newU = prevU - currentGradientStep * currentGradient$
    Розв'язати рівняння стану відповідно до поточних значень функції керування $newU$;
    Розв'язати рівняння стану відповідно до поточних значень функції керування $newU$ та стану x;
    Обчислити значення функції втрат $newCost$
    if $newCost >= prevCost$ **then**
      Поправка кроку $currentGradientStap = currentGradientStap * gradientAdjustment$
    else
      $break$
    end if
  end for
end while

Де $x(t)$ - це кількість виробництва, $I(t)$ - кількість інвестицій, $C(t)$ - кількість споживання. Введемо керування $u(t) \in [0, 1]$, що позначає частку виробництва, що переходить у інвестиції.

$$I(t) = u(t)x(t)$$

Тоді

$$C(t) = (1 - u(t))x(t), \quad t \geq 0$$

Введемо рівняння стану, як простий випадок коли, приріст виробництва пропорційний інветиціям:

$$x'(t) = \gamma u(t)x(t)$$

де $\gamma \in (0, +\infty)$. Введемо функцію корисності $F(C)$ і інтеграл "добробуту":

$$\int_0^T e^{-\delta t} F(C(t))dt$$

Розглянемо простий випадок моделі, коли $F(C) = C$ і $\delta = 0$. Тоді інтеграл добробуту

$$\int_0^T C(t)dt = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt.$$

Сформулюємо задачу оптимального керування

$$\text{Максимізувати } \int_0^T (1 - u(t))x^u(t)dt$$

Де $u \in L^2(0, T), 0 \leq u(t) \leq 1$, $t \in (0, T)$, $x^u(t)$ є розв'язком рівняння стану:

$$\begin{cases} x'(t) = \gamma u(t)x(t), \quad t \in (0, T) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

Аналітичний розв'язок рівняння стану має вигляд:

$$x^u(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \gamma u(s)ds\right), \quad t \in [0, T].$$

У позначеннях з означення принципу Понтрягіна ([[0001. Визначення принципу Понтрягіна]]):

$$G(t, u, x) = (1 - u)x$$
$$\varphi(x) = 0$$
$$f(t, u, x) = \gamma ux$$

$$K = \left\{w \in L^2(0, T); 0 \leq w(t) \leq 1 \text{ a.e. } t \in (0, T)\right\}$$

Існування оптимальної пари Доведемо існування оптимальної пари (за [[0001c. Схема доведення існування оптмального контролю]]): Позначимо

$$\Phi(u)=\int_0^T (1-u(t))x^u(t)dt, \quad u\in K$$

Введемо супремум

$$d=\sup_{u\in K}\Phi(u)$$

Оскільки $u\in K$, то

$$0<x^u(t)\leq x_0e^{\gamma t}, \quad t\in[0,T]$$

Далі отримуємо, що

$$0\leq\Phi(u)=\int_0^T (1-u(t))x^u(t)dt\leq x_0Te^{\gamma T}$$

Отже $d\in[0,+\infty)$.

Для усіх $n\in\mathbb{N}^*$ існує $u_n\in K$ таке, що

$$d-\frac{1}{n}<\Phi\left(u_n\right)\leq d$$

K є обмеженою підмножиною на $L^2(0,T)$. Отже існує підпослідовність $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, така що

$$u_{n_k}\longrightarrow u^* \quad \text{слабо збігається на } L^2(0,T)$$

$$d-\frac{1}{n_k}<\int_0^T\left(1-u_{n_k}(t)\right)x^{u_{n_k}}(t)dt\leq d \quad \text{for any } k\in\mathbb{N}^*$$

Перейдемо до границі по d

$$d=\int_0^T\left(1-u^*(t)\right)x^{u^*}(t)dt$$

Отже, існує оптимальна пара для задачі.

Принцип максимум для задачі максимізації споживання Для будь якого фіксованого $v\in V=\{w\in L^2(0,T);u^*+\varepsilon w\in K$ для будь-якого достатньо малого $\varepsilon>0\}$ позначимо як z розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} z'(t)=\gamma u^*(t)z(t)+\gamma v(t)x^*(t), \quad t\in(0,T)\\ z(0)=0\end{cases}$$

Можемо отримати аналітичний розв'язок задачі:

$$z(t)=\int_0^t\exp\left\{\int_s^t\gamma u^*(\tau)d\tau\right\}\gamma v(s)x^*(s)ds, \quad t\in[0,T].$$

За визначенням оптимальної пари:

$$\int_0^T\left(1-u^*(t)\right)x^*(t)dt\geq\int_0^T\left(1-u^*(t)-\varepsilon v(t)\right)x^{u^*+\varepsilon v}(t)dt$$

для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$, маємо що:

$$\int_0^T \left[(1 - u^*(t)) \, \frac{x^{u^*+\varepsilon v}(t) - x^*(t)}{\varepsilon} - v(t) x^{u^*+\varepsilon v}(t) \right] dt \leq 0$$

Доведемо, що

$$x^{u^*+\varepsilon v} \longrightarrow x^* \quad \text{на } C([0,T])$$

та

$$\frac{x^{u^*+\varepsilon v} - x^*}{\varepsilon} \longrightarrow z \quad \text{in}\, C([0,T])$$

Для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$, маємо що:

$$x^{u^*+\varepsilon v}(t) = x_0 \exp \left\{ \gamma \int_0^t (u^*(s) + \varepsilon v(s)) \, ds \right\} = x^{u^*}(t) \exp \left\{ \varepsilon\gamma \int_0^t v(s) ds \right\}, \quad t \in [0,T],$$

Отже,

$$\left| x^{u^*+\varepsilon v}(t) - x^{u^*}(t) \right| = \left| x^{u^*}(t) \right| \cdot \left| \exp \left\{ \varepsilon\gamma \int_0^t v(s) ds \right\} - 1 \right|, \quad t \in [0,T].$$

Оскільки,

$$\left| \exp \left\{ \varepsilon\gamma \int_0^t v(s) ds \right\} - 1 \right| \longrightarrow 0$$

можна заключити, що

$$x^{u^*+\varepsilon v} \longrightarrow x^* \quad \text{на } C([0,T])$$

Для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$, маємо що:

$$w_\varepsilon(t) = \frac{x^{u^*+\varepsilon v} - x^*}{\varepsilon} - z(t), \quad t \in [0,T].$$

є розв'язком для задачі

$$\begin{cases} w'(t) = \gamma u^*(t) w(t) + \gamma v(t) \left[x^{u^*+\varepsilon v}(t) - x^{u^*}(t) \right], \quad t \in (0,T) \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

Аналітичний розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$w_\varepsilon(t) = \gamma \int_0^t \exp \left\{ \gamma \int_s^t u^*(\tau) d\tau \right\} v(s) \left[x^{u^*+\varepsilon v}(s) - x^{u^*}(s) \right] ds, \quad t \in [0,T]$$

Можна побачити, що

$$w_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{на } C([0,T])$$

а отже

$$\frac{x^{u^*+\varepsilon v} - x^*}{\varepsilon} \longrightarrow z \quad \text{на } C([0,T])$$

Тому отримуємо, що

$$\int_0^T \left[(1 - u^*(t)) \, z(t) - v(t) x^*(t) \right] dt \leq 0$$

Розглянемо спряжену задачу

$$\begin{cases} p'(t) = -\gamma u^*(t)p(t) + u^*(t) - 1, \quad t \in (0,T) \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

Аналітичний розв'язок:

$$p(t) = -\int_t^T \exp\left\{\int_t^s \gamma u^*(\tau)d\tau\right\}(u^*(s) - 1)\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Використовуючи рівняння вище, можемо прийти до:

$$\int_0^T (1 - u^*(t))\, z(t)dt = \int_0^T \gamma v(t)x^*(t)p(t)dt$$

Отже

$$\int_0^T x^*(t)(\gamma p(t) - 1)v(t)dt \leq 0$$

для усіх $v \in V$. Це еквівалентно

$$(\gamma p - 1)x^* \in N_K(u^*)$$

Отже

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ if } \gamma p(t) - 1 < 0 \\ 1 \text{ if } \gamma p(t) - 1 > 0 \end{cases}$$

2.4 Керування запасами

Керування запасами Посилання. Anita S.,Arnautu V.,Capasso V.-An intr.to opt.cont.probl.in life sciences and economics Постановка задачі

Розглянемо наступну задачу. Нехай $x(t)$ - запас деякого ресурсу компанії. $u(t)$ - виробництво ресурсу, в моменту часу, $g(t)$ - частка ресурсу, що має бути продана за контрактом.

$$\begin{cases} x'(t) = u(t) - g(t), \quad t \in (0,T) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тоді запас ресурсу визначається наступним інтегралом:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [u(s) - g(s)]ds.$$

Можливі наступні випадки: Якщо $x(t) \geq 0$ то немає затримки виходу на ринок товару в момент t. Якщо $x(t) > 0$ то компанія має надлишкові запаси ресурсу. Якщо $x(t) < 0$ є затримка постачання ресурсу компанією в момент t. Команія повинна випустити $|x(t)|$ продукту. Введемо витрати пов'язані з цими випадками:

$$\psi(x)=\begin{cases}c_1x^2, & x\geq 0\\ c_2x^2, & x<0\end{cases}$$

Введемо витрати компанії на виробництво товару:

$$\Phi(u)=\int_0^T\left[au(t)+\psi\left(x^u(t)\right)\right]dt$$

$a>0$ - вартість виробництва одиниці товару. Задача очевидно наступна:

$$\text{Мінімізувати } \Phi(u)$$

відносно $u\in K=\{w\in L^2(0,T); u_1\leq u(t)\leq u_2 \text{ на усій множині } t\in(0,T)\}$ З очевидних міркувань:

$$u_1\leq g(t)\leq u_2,\quad t\in[0,T]$$

Принцип Понтрягіна

Запишемо рівняння спряженого стану системи:

$$\begin{cases} p'(t)=-\psi'\left(x^u(t)\right), & t\in(0,T)\\ p(T)=0\end{cases}$$

Для довільних $u,V\in U$ і $\varepsilon\in\mathbb{R}^*$ маємо

$$\frac{1}{\varepsilon}[\Phi(u+\varepsilon v)-\Phi(u)]=\int_0^T\frac{1}{\varepsilon}\left[\psi\left(x^{u+\varepsilon v}(t)\right)-\psi\left(x^u(t)\right)\right]dt+a\int_0^T v(t)dt.$$

Розглянемо рівняння:

$$\begin{cases} z'(t)=v(t), & t\in(0,T)\\ z(0)=0\end{cases}$$

Можна показати, що

$$x^{u+\varepsilon v}\longrightarrow x^u\quad \text{in}\, C([0,T])$$

і

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(x^{u+\varepsilon v}-x^u\right)\longrightarrow z\quad \text{in } C([0,T])$$

$$(v,\Phi_u(u))_{L^2(0,T)}=a\int_0^T v(t)dt+\int_0^T\psi'\left(x^u(t)\right)z(t)dt$$

$$\int_0^T\left(p^u\right)'(t)z(t)dt=-\int_0^T\psi'\left(x^u(t)\right)z(t)dt$$

$$\int_0^T\psi'\left(x^u(t)\right)z(t)dt=\int_0^T p^u(t)v(t)dt$$

В результаті отримуємо рівність:

$$(v, \Phi_u(u))_{L^2(0,T)} = \int_0^T v(t) \left[p^u(t) + a\right] dt$$

Можемо зробити висновок, що

$$\Phi_u(u) = p^u + a$$

Алгоритм проекції градієнта За методом проекції градієнта описаного в [[0003. Градієнтні методи для оптимального керування диференціальними системами]], запишемо алгоритм для задачі вище: Крок 1. Оберемо $u^{(0)} \in K$ як початкове припущення про оптимальне керування. Виконаємо присвоєння j := 0. Крок 2. Обчислимо $x(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = u^{(j)}(t) - g(t), & t \in (0, T) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Крок 3. Обчислимо $p(t)$

$$\begin{cases} p'(t) = -\psi'\left(x^{(j)}(t)\right), & t \in (0, T) \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

Крок 4. Обчислимо градієнт:

$$w^{(j)} := \Phi_u\left(u^{(j)}\right) = p^{(j)} + a$$

Якщо $\left\|\Phi_u\left(u^{(j)}\right)\right\| < \varepsilon$, то $u^{(j)}$ є шуканою апроксимацією оптимального керування. В іншому випадку перейти до кроку 5. Крок 5. Обчислити значення кроку градієнтного спуску з рівності:

$$\Phi\left(P_K\left(u^{(j)} - \rho_j w^{(j)}\right)\right) = \min_{\rho \geq 0}\left\{\Phi\left(P_K\left(u^{(j)} - \rho w^{(j)}\right)\right)\right\}$$

Крок 6. Обчислити нове значення оптимального керування.

$$u^{(j+1)} := P_K\left(u^{(j)} - \rho_j w^{(j)}\right)$$

Виконати присвоєння $j := j + 1$ і перейти до кроку 2. Оператор проекції $P_K : L^2(0, T) \to K$ визначаємо як функцію:

$$P_K(u)(t) = \mathrm{Proj}(u(t)) \text{ для усіх } t \in (0, T)$$

$$\mathrm{Proj}(w) = \begin{cases} w & \text{якщо } u_1 \leq w \leq u_2 \\ u_1 & \text{якщо } w < u_1 \\ u_2 & \text{якщо } w > u_2 \end{cases}$$

Розв'язок задачі

$$g(t) = \begin{cases} g_1 t + g_2, & t \in [0, T/2] \\ g_3 - g_4 t, & t \in (T/2, T] \end{cases}$$

$$g_1 = g_4 = \frac{2}{T}\left(u_2 - u_1\right), \quad g_2 = u_1, \quad g_3 = 2u_2 - u_1$$

2.5 Логістична модель Фішера

Логістичне рівняння Фішера Посилання. https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440
Визначення і основні параметри Модель має вигляд рівняння дифузії-реакції.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma \Delta y = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) - m(x)u(x,t)y(x,t), & (x,t) \in Q_T \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(x,t) = 0, & (x,t) \in \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

У загальному випадку задача розглядається в багатовимірному просторі. У конкретному випадку вважаємо, що потік на краях рівний нулю, функція розподілу популяції по простору задана як $y_0(x)$. Візьмемо $k = 1$ - "пропускна здатність"середовища в сенсі можливості проживання певної кількості виду на одиниці площі. Природній приріст $r > 0$ будемо розглядати в діапазоні $[0;1]$. Коефіцієнт γ будемо вважати рівним 1.

$$m(x)u(x,t) = \begin{cases} u(x,t), x \in \omega, & t \in (0,T) \\ 0, \quad x \in \Omega \backslash \bar{\omega}, & t \in (0,T) \end{cases}$$

2.6 Оптимальний контроль для рівняння дифузії-реакції на прикладі логістичної моделі Фішера

Задача оптимального керування для моделі Фішера Формулювання задачі

Розглянемо задачу [[0004f. Логістичне рівняння Фішера]] на ареалі Ω, обмеженому квадратом:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \Omega : 0 \leq x_1 \leq L; 0 \leq x_2 \leq L\}$$

Нехай ареал застосування керування визначається підпростором ω. У прикладі чисельної апроксимації на двовимірному просторі будемо розглядати цей підпростір як коло із заданими параметрами.

$$\omega = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega : (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = R^2\right\}$$

Використаємо [[0001. Визначення принципу Понтрягіна]] та [[0003. Градієнтні методи для оптимального керування диференціальними системами]]

2.7 Оптимальне вирощування

Оптимальне вирощування і модель дифузії-реакції Формулювання задачі

Наступна модель Фішера описує динаміку популяції, що може переміщатись у деякому ареалі проживання Ω.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma \Delta y = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) - m(x)u(x,t)y(x,t), & (x,t) \in Q_T \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(x,t) = 0, & (x,t) \in \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Де $\Omega \in \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N}^*)$; T, γ, r, k - додатні константи; $Q_T = \Omega \times (0,T), \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$ і $y_0 \in L^\infty(\Omega), y_0(x) > 0$ для усіх $x \in \Omega$ - початковий розподіл популяції в просторі.

u - зусилля по вирощуванню, що застосовуються до деякої не порожньої множини популяції $\omega \subset \Omega$. m - характеристична функція для ω, така що:

$$m(x)u(x,t) = \begin{cases} u(x,t), x \in \omega, & t \in (0,T) \\ 0, \quad x \in \Omega \backslash \bar{\omega}, & t \in (0,T) \end{cases}$$

Загальна корисність від вирощування на $[0,T]$ визначається інтегралом:

$$\int_0^T \int_\omega u(x,t) y^u(x,t) dxdt$$

Отримуємо задачу оптимального керування [[0001. Визначення принципу Понтрягіна]]:

$$\text{Максимізувати } \int_0^T \int_\omega u(x,t) y^u(x,t) dxdt$$

відносно $u \in K = \{w \in L^2(\omega \times (0,T)); 0 \leq w(x,t) \leq L \text{ a.e. } \}$ $(L > 0)$ Існування оптимального керування

Введемо позначення

$$\Phi(u) = \int_0^T \int_\omega u(x,t) y^u(x,t) dxdt, \quad u \in K$$

Нехай

$$d = \sup_{u \in K} \Phi(u)$$

Comparison principle for parabolic differential equations: (???)

$$0 < y^u(x,t) \leq y^0(x,t) \text{ a.e. } (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

а отже

$$0 \leq \int_0^T \int_\omega u(x,t) y^u(x,t) dxdt \leq L \int_0^T \int_\omega y^0(x,t) dxdt$$

Тоді отримуємо, що

$$d \in \mathbb{R}^+$$

Нехай $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset K$ - посліжовність контроллерів , що задовільняють умову:

$$d - \frac{1}{n} < \Phi\left(u_n\right) \leq d$$

(1) Оскільки $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є обмеженою на $L^2(\omega \times (0,T))$, тоді існує підпослідовність така , що

$$u_n \longrightarrow u^* \text{ слабо на } L^2(\omega \times (0,T))$$

і

$$mu_n \longrightarrow mu^* \text{ слабо на} L^2(\omega \times (0,T))$$

Позначимо

$$a_n(x,t) = ry^{u_n}(x,t)\left(1 - \frac{y^{u_n}(x,t)}{k}\right) - m(x)u_n(x,t)y^{u_n}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T$$

Тоді початкова задача має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\Delta y = a_n(x,t), & (x,t) \in Q_T \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(x,t) = 0, & (x,t) \in \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n_k} \longrightarrow a^* & \text{weakly in } L^2\left(Q_T\right) \\ y^{u_{n_k}} \longrightarrow y^* & \text{a.e. in } Q_T \end{cases}$$

y^* - розв'язок наступної задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\Delta y = a^*(x,t), & (x,t) \in Q_T \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(x,t) = 0, & (x,t) \in \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

$$a_{n_k} \longrightarrow ry^*\left(1 - \frac{y^*}{k}\right) - mu^*y^* \text{ in } L^2\left(Q_T\right)$$

оскільки $\{y^{u_n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ обмежена на $L^\infty\left(Q_T\right)$ Отже

$$a^* = ry^*\left(1 - \frac{y^*}{k}\right) - mu^*y^* \text{ in } L^2\left(Q_T\right)$$

Якщо перейти до границі в (1) то отримуємо:

$$d = \Phi\left(u^*\right)$$

Принцип максимуму для задачі дифузіїї реакції Задачу можна переписати у формі початкової задачі:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, u(t), y(t)), \quad t \in (0, T) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

де

$$f(t, u, y) = Ay + ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) - muy$$

A - необмежений лінійний оператор, що визначається наступним чином:

$$D(A) = \left\{ w \in H^2(\Omega); \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

$$Ay = \gamma \Delta y, \quad y \in D(A).$$

Рівняння спряженого стану для задачі буде мати вигляд:

$$p'(t) = -A^* p - rp + \frac{2r}{k} y^u p + mu(1 + p), \quad t \in (0, T)$$

За теоремою доведеною в книжці маємо, що якщо - оптимальна пара і p - спряжений стан, то:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma \Delta p = -rp + \frac{2r}{k} y^{u^*} p + mu^*(1 + p), & (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial p}{\partial \nu}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma_T \\ p(x, T) = 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

$$u^*(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 1 + p(x, t) < 0 \\ L, & \text{if } 1 + p(x, t) > 0 \end{cases}$$

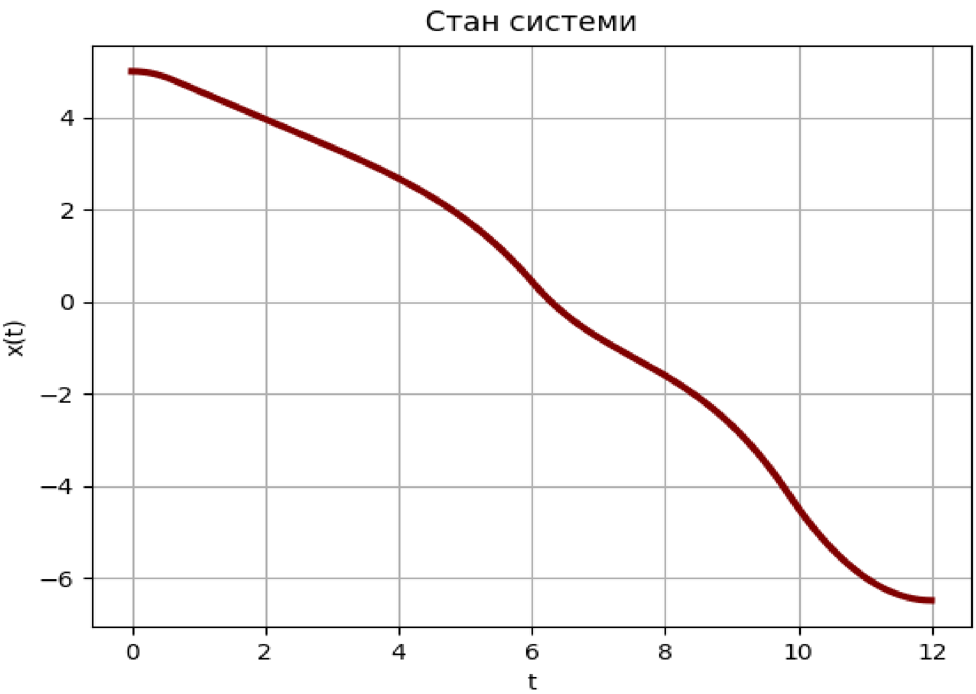
для усіх $(x, t) \in \omega \times (0, T)$ Рівняння спряженого стану можна звести до:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma \Delta p = -rp + mL(1 + p)^+, & (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial p}{\partial \nu}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma_T \\ p(x, T) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

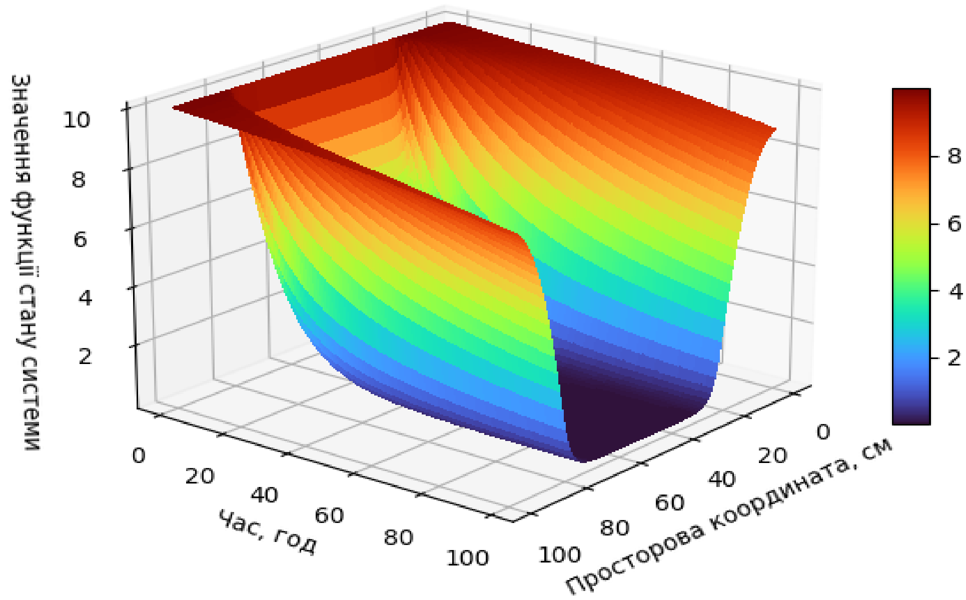
Отже p не залежить від u, y і його можна апроксимувати окремо, а далі обчислити оптимальний контроль.

2.8 Чисельні результати

2.8.1 Задача керування запасами



2.8.2 Задача оптимального вирощування



Розділ 3

Висновок

У даній роботі розглянуто ряд класичних задач оптимального керування динамічними система з чисельною реалізацією на мові Python з використанням пакетів з відкритим кодом NumPy та SciPy.

Бібліоґрафія

[1] An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics, Sebastian Anita,Viorel Arnautu, Vincenzo Capasso

Додатки

Метод Рунге-Кутта

Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases}$$

де $y_0 \in \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, де

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\right\} \quad (a, b > 0)$$

Тоді розв'язок шукається за наступною рекурентною формулою:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) h \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$

де h - крок дискретизації,

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right). \end{aligned}$$

для усіх $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$, де $N = [T/h], T$ - верхня межа інтегрування по часу.

Приклад коду мовою Python:

```
import numpy as np


def runge_kutta_4order(t_prev, func_value_prev, func, h):
    k1 = func(t_prev, func_value_prev)
    k2 = func(t_prev + h/2, func_value_prev + k1*h/2)
    k3 = func(t_prev + h/2, func_value_prev + k2*h/2)
    k4 = func(t_prev + h, func_value_prev + k3*h)
    return func_value_prev + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*h/6


def solve_ivp(right_side_function, initial_state, terminate_argument,
                                        discrete_param, backward=False):
    if backward:
        adjusted_right_side_function = lambda argument, state: -
                                                right_side_function(argument,
                                                state)
    else:
        adjusted_right_side_function = right_side_function
    states = [initial_state, ]
    state_prev = states[0]
    arg_prev = 0
    arg_space = np.arange(discrete_param, terminate_argument, discrete_param) if
                                            not backward else \
        np.arange(terminate_argument-2*discrete_param, -discrete_param, -
                                                discrete_param)

    for arg in arg_space:
        state_new = runge_kutta_4order(arg_prev, state_prev,
                        adjusted_right_side_function,
                        discrete_param)
        states.append(state_new)
        arg_prev = arg
        state_prev = state_new
    if backward:
        states = states[::-1]
    return np.array(states)
```

Код оформлено з урахуванням можливості розв'язку зворотного ходу в задачі Коші.

Апроксимація оператора Лапласа для одно- та двовимірної задачі

Приклад коду мовою Python:

```
def laplacian_operator_approximation_2d(state_t, h):
    transformed_state = np.zeros_like(state_t)
    for x_1 in range(transformed_state.shape[0]):
        for x_2 in range(transformed_state.shape[1]):
            left = (state_t[x_1 - 1, x_2] if x_1 != 0 else state_t[x_1, x_2])
            right = (state_t[x_1 + 1, x_2] if x_1 != state_t.shape[0]-1 else
                                        state_t[x_1, x_2])
            bottom = (state_t[x_1, x_2 - 1] if x_2 != 0 else state_t[x_1, x_2])
            top = (state_t[x_1, x_2 + 1] if x_2 != state_t.shape[1]-1 else
                                        state_t[x_1, x_2])
            current = state_t[x_1, x_2]
            transformed_state[x_1, x_2] = (left + right + bottom + top - 4 *
                                        current)/(h ** 2)
    return transformed_state


def laplacian_operator_approximation_1d(state_t, h):
    transformed_state = np.zeros_like(state_t)
    for x_1 in range(transformed_state.shape[0]):
        if x_1 == 0:
            transformed_state[x_1] = (state_t[x_1] + state_t[x_1 + 1] - 2 *
                                        state_t[x_1]) / (h ** 2)
        elif x_1 == transformed_state.shape[0] - 1:
            transformed_state[x_1] = (state_t[x_1 - 1] + state_t[x_1] - 2 *
                                        state_t[x_1]) / (h ** 2)
        else:
             transformed_state[x_1] = (state_t[x_1 - 1] + state_t[x_1 + 1] - 2 *
                                         state_t[x_1]) / (h ** 2)
    return transformed_state
```