Лабрадорная работа №1

Галимова
Ярослава
M3236

Варианты: 15221

Задание 1.

- Расставим человек в порядке получения новостей. Мы хотим, чтобы вся перестановка из r человек была из неповторяющихся людей.

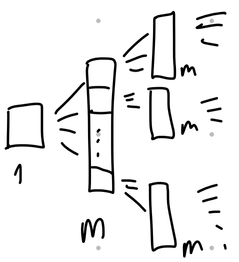
$\frac{n!}{(n-r)!}$ — число перестановок без повторений

n^r — число последовательностей всего.

$\Rightarrow$ Ответ: $\dfrac{\frac{n!}{(n-r)!}}{n^r}$

- В этом пункте новость передаётся m людям. Т.е. на 1-ом этапе новость узнали m людей, на 2-ом каждый из m людей передал ещё m людей — ещё m^2. На k-ом этапе новость узнают m^k людей. Т.е. мы хотим передать новость (не считая 1-ого, изначально знавшего новость человека):

$$m+m^2+m^3+\dots+m^r = \frac{m^{r+1}-m}{m-1} \text{ людям.}$$



На $\forall$ минуте t важно, каким людям мы передали новость, но не важно, в каком порядке

Всего способов — $\underbrace{\prod_{j=1}^{r} m^{j-1} \cdot C_n^m}$ (Каждый из людей предыдущего этапа выбирает m различных людей, причём выбранные люди двух разных "глашатаев" могут пересекаться)

$$= m^{\frac{(r+1)r}{2}} \cdot \left(C_n^m\right)^r$$

Число способов, подходящих нам — кол-во способов выбрать на j-ом этапе из оставшихся людей m^j различных человек:

$$\prod_{j=1}^{r} C^{m^j}_{n-\sum_{i=1}^{j-1} m^i} = \prod_{j=1}^{r} C^{m^j}_{n-\frac{m^j-1}{m-1}}$$

Ответ: $$P_r = \frac{\prod_{j=1}^{r} C^{m^j}_{n-\frac{m^j-1}{m-1}}}{m^{\frac{(r+1)r}{2}} \cdot \left(C_n^m\right)^r}$$

Задача 2.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{m}\underbrace{\qquad\qquad}_{m}$ p – ричная система исчисления

Рассмотрим подходящее нам $2m$-значное счастливое число.

$\underbrace{a_1 a_2 \dots a_m}\underbrace{a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{2m}}$: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=m+1}^{2m} a_j$.

Сделаем хитрую биекцию: выпишем цифры $0\ 1\ 2\ \dots\ p-1\ p$ и разобьём их на пары с равной суммой (0 и p, 1 и $p-1$ ...). Тогда в 1-ой половине счастливого билета заменим цифры на парные им. Тогда $a_i \mapsto p - a_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \mapsto pm - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = pm - \sum\limits_{j=m+1}^{2m} a_j$. Тогда сумма цифр в полученном числе стала ровно pm. Теперь, т.к. мы получили взаимно-однозначное соответствие, вместо поиска кол-ва $2m$-значных счастливых билетов можно посчитать кол-во $2m$-значных чисел с суммой цифр pm, где $\forall$ цифра от 0 до $p-1$.

Чисел с суммой цифр mp из $2m$ цифр всего $C^{2m-1}_{mp+2m-1}$ (это задача о шарах и перегородках), если бы не было условия про то, что цифра – от 0 до $p-1$. Из этого кол-ва нужно вычесть все решения, где хотя бы 1 слагаемое $\geq p$. Это похоже на номер из КР, но только здесь есть граница сверху по сумме слагаемых.

$\exists\ k$ слагаемых $x_i \geq p \Rightarrow x_i = a_i + p$ и $a_i \geq 0 \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{2m} x_j = mp \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}(a_i + p) + \sum_{j=k+1}^{2m} x_j = mp \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{j=k+1}^{2m} x_j = mp - kp = (m-k)p$$

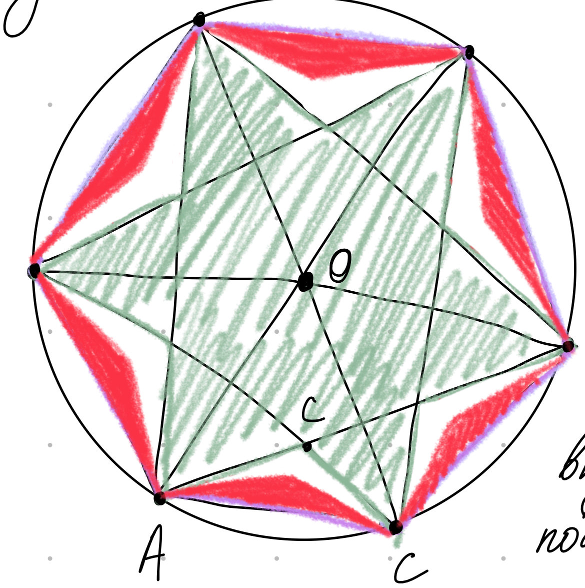
Число решений такого уравнения можно снова посчитать с помощью "шаров и перегородок" — $C_{(m-k)p+2m-1}^{2m-1}$

Теперь воспользуемся формулой включения-исключения:

$$\sum_{j=0}^{2m} (-1)^j C_{2m}^{j} \cdot C_{(m-k)p+2m-1}^{2m-1} \cdot$$ (Всего 2m-значных p-ичных чисел — p^{2m})

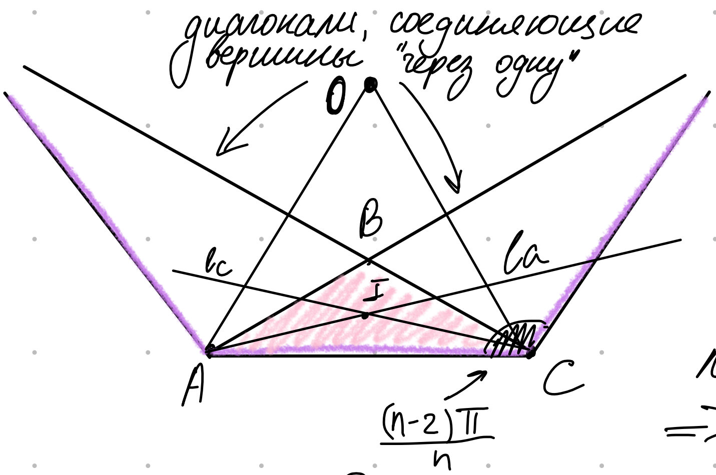
$\Rightarrow$ Ответ: $\dfrac{\sum_{j=0}^{2m} (-1)^j C_{2m}^{j} \cdot C_{(m-k)p+2m-1}^{2m-1}}{p^{2m}}$

Задача 3.



Давайте поймём, что область, удовлетворяющая условиям задачи, изображена красным цветом на чертеже.

Заметим, что всё, что лежит внутри ▩ - области никак не может подходить под условие, т.к. эта область ограничена диагоналями => любой перпендикуляр на сторону многоугольника пересечёт диагональ => расстояние до диагонали меньше, чем до стороны многоугольника. Осталось рассмотреть области, прилегающие к сторонам:



Нас интересует ▩ - треугольник (всего таких n штук) $\triangle ABC$

Проведём l_a и l_c - биссектрисы (ГМТ равноудалённых от сторон угла).

=> Подходящая нам область лежит по одну сторону l_a (и l_c), ближе к AC. Т.е. подходящая область - $\triangle AIC$. Посчитаем его площадь, приняв за R - радиус описанной вокруг правильного n-угольника окружности:

$\angle n\text{-угольника} = \frac{(n-2)\pi}{n} \Rightarrow \angle ABC = \frac{\pi - \angle C}{2}$ (т.к. n-уг. правильный)

$\Rightarrow \angle ABC = \frac{\pi - \frac{(n-2)\pi}{n}}{2} = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \angle IAC = \angle ICA = \frac{\pi}{2n}$

$AC = 2R\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ — формула стороны правильного n-уг.

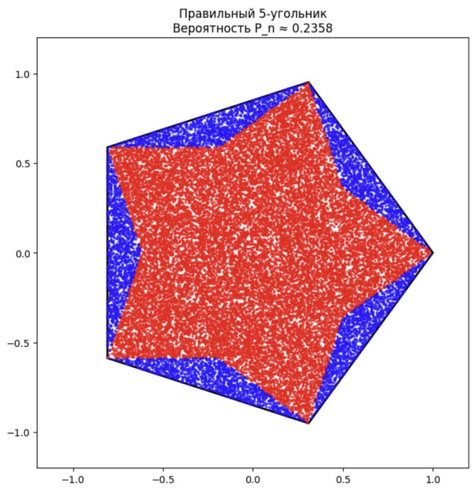
$$S_{\blacktriangle} = \frac{(AC)^2\cdot\sin\angle IAC\cdot\sin\angle ICA}{2\cdot\underbrace{\sin\angle AIC}_{=\sin\left(\pi-2\cdot\frac{\pi}{2n}\right)=\sin\frac{\pi}{n}}} = 2R^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2n}$$

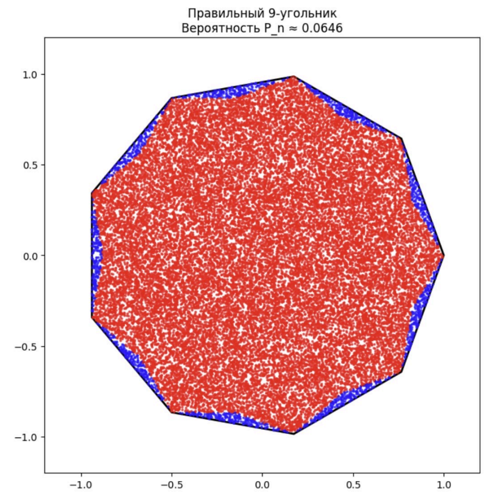
$$S_{n\text{-уг}} = n\cdot S_{\Delta AOC} = n\cdot\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot\sin\angle AOC = \frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

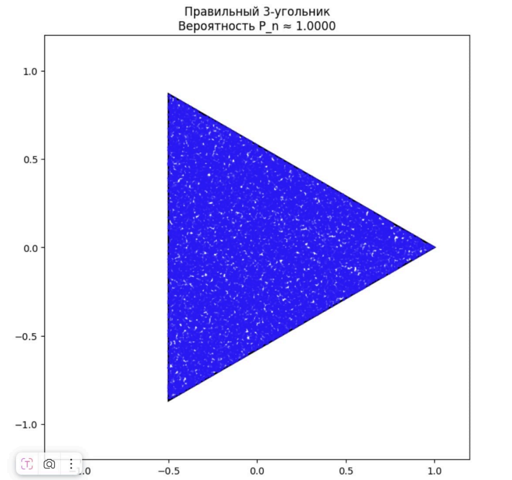
$$\Rightarrow P_n = \frac{S_{\blacktriangle}\cdot n}{S_{n\text{-уг}}} = \frac{2R^2\sin\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{2n}\cdot n}{\frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

Ответ: $P_n = \dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{n}} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$

P.S. – для проверки себя я также написала метод Монте-Карло и генерацию точек с проверкой условия. Предлагаю посмотреть на эту красоту: (просто ради интереса)







Теперь хотим найти C и a: $P_n = Cn^a(1+o(1))$ при $n\to\infty$ (т.е. $\frac{\pi}{2n}\to 0$ и $\frac{\pi}{n}\to 0$)

$$\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\underbrace{\cos\frac{\pi}{n}}_{=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2n}\right)}} = \frac{2\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)^2}{1-2\cdot\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2+o\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right)} = \frac{2\cdot\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2+o\left(\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\right)}{1-2\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+o\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right)} = \frac{2\cdot 1+o(1)}{\frac{n^2}{\pi^2}-2+o(1)} = \frac{2+o(1)}{\frac{n^2}{\pi^2}-2+o(1)} \to$$

разложим в Тейлора и сразу подставим $x=\frac{\pi}{2n}$

Поделим числитель и знаменатель на $\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$

$$\xrightarrow[\left(\frac{\pi}{n}\to 0\right)]{n\to\infty} \frac{2\pi^2}{n^2}(1+o(1)) \Rightarrow a=-2 \text{ и } C=2\pi^2$$

Задача 4. Найти $P(X=i \mid X+Y=j)$

$A_i = \{X=i\}$ $i \geq 0$ $B_i; B_j$ – независимые $\forall\, i;j \geq 0$

$B_i = \{Y=i\}$

$$P(X=i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \quad \lambda>0 \quad i \geq 0$$

$$P(Y=i) = e^{-\nu} \cdot \frac{\nu^j}{j!} \quad \nu>0 \quad j \geq 0$$

Всё это – распределение Пуассона ($Pois_\lambda(X)$ и $Pois_\nu(Y)$)

Вспомним предыдущее ДЗ... Построим производящую функцию для распределения Пуассона:

$$Pois_\lambda(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \cdot s^k = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!}}_{= e^{\lambda s}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

Как тогда будет выглядеть ПФ для $P(X+Y=j)$.

Это $\sum_{k=0}^{j} P_\lambda(X=k) \cdot P_\nu(Y=j-k)$. То есть это просто j-ый коэффициент в ПФ $Pair(Pois_\lambda(s); Pois_\nu(s)) = e^{(\lambda+\nu)(s-1)} =$

$$= Pois_{\lambda+\nu}(s) \Rightarrow P(X+Y=j) = e^{-(\lambda+\nu)} \cdot \frac{(\lambda+\nu)^j}{j!}$$

(Всё это верно по модулю того, что события независимы)

По опр. условной вероятности:

$$P(X=i \mid X+Y=j) = \frac{P(X=i,\ X+Y=j)}{P(X+Y=j)}$$

$$P(X=i,\ X+Y=j) \Leftrightarrow P(X=i;\ Y=j-i)$$

$$P(X=i;\ Y=j-i) = P(X=i) \cdot P(Y=j-i)$$ – т.к. события независимы по усл.

$$\Rightarrow \quad P(X=i \mid X+Y=j) = \frac{P(X=i)\cdot P(Y=j-i)}{P(X+Y=j)} = \frac{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{i}}{i!}\cdot e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^{j-i}}{(j-i)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\lambda+\mu)^{j}}{j!}} =$$

$$= \frac{j!\cdot\lambda^{i}\cdot\mu^{j-i}}{i!\,(j-i)!\,(\lambda+\mu)^{j}}$$

Ombem: $\boxed{P(X=i \mid X+Y=j) = \frac{j!\cdot\lambda^{i}\cdot\mu^{j-i}}{i!\,(j-i)!\cdot(\lambda+\mu)^{j}}}$

Задача 5

Для решения этого номера был написан код на python, приложенный к этому файлику (probability.py), а полученные результаты — в results.txt. Давайте проанализируем их.

По материалам с лекций мы знаем, что:

- "Честный" подсчёт хорош, когда данные небольшие и на них хватает вычислительной мощности.
- Теорема Пуассона хороша, когда она выдаёт небольшую погрешность. А выдаёт она небольшую погрешность, когда n – "большое", p – "маленькое" (условно, сотые и меньше), а np – порядка единиц.
- Локально-предельная теорема Муавра-Лапласа работает, когда $k - np = O(n^{\frac{2}{3}})$ (или, как написано у меня в конспекте, «k "рядом" с np, p – "около" $\frac{1}{2}$»)

• Давайте в этом убедимся. По измерениям с небольшими значениями мы видим, что честный подсчёт справляется хорошо. Он не использует никаких приближений, поэтому его точность ограничена только лишь вычислительной мощностью и нашими желаниями. Чтобы в этом удостовериться, нужно обратить внимание на первые несколько измерений.

• Далее, действительно, при $n \geq 1000$ и $p \leq 0.01$, Пуассон выводит достаточно точный результат, но при увеличении k в функции, считающей вероятность по теореме Пуассона, происходит OverFlow Error. Впрочем, как и честный подсчёт.

- Затем, например, в измерениях, где $n=10000$ и $p=0.25$, честному подсчёту и подсчёту по теореме Пуассона уже не хватает точности и в качестве результата мы получаем 0. В таких случаях нужно смотреть на результаты теорем Муавра-Лапласа.
- Интегральная теорема Муавра-Лапласа ожидаемо возвращает 0 при $k\in[a;a]$. При p "близких к 0" теорема
- Пуассона справляется лучше, однако для $p \geq 0.25$ и промежутке из более чем 1 точки предпочтительнее выбирать теорему Муавра-Лапласа (но важно понимать, что она требует относительно большую величину np).
- И только Локальная теорема справляется с подсчётом $P(S_n=k_*)$, где k_* — наиболее вероятное кол-во успехов, т.к. при достаточно больших np честный подсчёт и теорема Пуассона теряют точность и имеют большую погрешность, а интегральной теореме нужен промежуток.

Краткий вывод:

[n - маленькое (≤ 100)] → честная формула

[n - маленькое (≤ 100)
p - маленькое (≤ 0.1)
np - порядка единиц
нет возможности считать большие факториалы] → Пуассон
(погрешность $\sim \frac{\lambda^2}{n} = np^2$)

[np - большое
$p > 0.1$
k - промежуток] → Интегральная теорема Муавра-Лапласа

[np - большое
$p > 0.1$
k - точка] → Локально-предельная теорема Муавра-Лапласа