

Комбинаторный счёт

5 декабря 2024 г.

Что мы будем изучать?

Комбинаторные подсчёты — это раздел математики, который изучает способы выбора и расположения объектов в конечных множествах. Одним из ключевых понятий в этой области является факториал, обозначаемый как $n!$, который представляет собой произведение всех положительных целых чисел от 1 до n .

Перестановки — это различные способы расположения n объектов. Количество перестановок n различных объектов равно $n!$.

Сочетания, с другой стороны, представляют собой выбор подмножества из n объектов без учёта порядка. Количество сочетаний из n объектов по k (обозначается как $C(n, k)$ или $\binom{n}{k}$):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Задачи

1. На танцплощадке собрались N юношей и N девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?
2. (a) Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?
(b) Сколькими способами можно выбрать команду из трех школьников в том же классе?
3. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?
4. (a) На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
(b) На плоскости отмечено n точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
5. У людоеда в подвале томятся 25 пленников.
(a) Сколькими способами он может выбрать трёх из них себе на завтрак, обед и ужин? Порядок важен.
(b) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?
6. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?
7. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

8. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по два туза?
9. У Нины 7 разных шоколадных конфет, у Коли 9 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом пятью конфетами? А если бы все конфеты Нины были одинаковыми?
10. Сколько диагоналей имеет выпуклый:
- (a) 10-угольник
 - (b) k -угольник ($k > 3$)?