

Деревья - не только растения

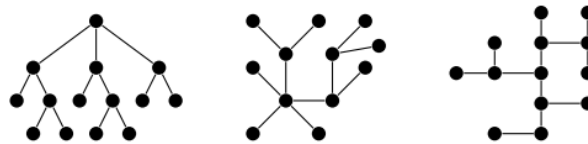
5 декабря 2024 г.

Немного определений

Дерево - связный граф без циклов.

Лес - произвольный (не обязательно связный) граф без циклов, проще говоря, это набор из нескольких деревьев.

Вершина графа называется **висячей**, если её степень равна 1.



Полезные теоремы

Теорема 1. Из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (остовное дерево);

Теорема 2. В связном графе с n вершинами содержится как минимум $n - 1$ ребро. **Теорема 3.** В дереве есть хотя бы одна висячая вершина.

Задачи

1. Упражнение: Найдите все деревья с пятью вершинами.
2. В графе все вершины имеют степень равную трём. Докажите, что в графе есть цикл.
3. Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем (то есть из каждой вершины можно добраться в любую другую по рёбрам графа только одним способом), является деревом.
4. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.
5. Докажите, что связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.
6. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый?
7. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

8. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более а) 198 перелётов; б) 196 перелётов.
9. В стране несколько городов (больше одного); некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой, проезжая по нескольким дорогам. Кроме того, дороги не образуют циклов, то есть если выйти из некоторого города по какой-то дороге и далее двигаться так, чтобы не проходить по одной дороге дважды, то невозможно возвратиться в начальный город. Докажите, что в этой стране найдутся хотя бы два города, каждый из которых соединен дорогой ровно с одним городом.
10. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?