

# Задачи с олимпиады "Высшая проба"

5 декабря 2024 г.

## Задачи

1. Карлсону на день рождения подарили большую банку малинового варенья. В течение 99 дней он ел варенье по следующему правилу: для всех  $k = 1, 2, \dots, 99$ , в  $k$ -й день Карлсон ел  $\frac{1}{k+1}$  от текущего остатка (в первый день он съел половину всего варенья, во второй - треть от остатка, и т.д.). Какая часть от изначального объёма варенья осталась у Карлсона через 99 дней?
2. Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , равное сумме двух различных натуральных делителей числа  $n+15$ .
3. Известно, что число  $a + \frac{1}{a}$  целое. Докажите, что число  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  тоже целое.
4. Сколько существует чисел от 1 до 1000000, не являющихся ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?
5. На сторонах треугольника взяты точки, делящие стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.
6. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.