

Граф - не только титул

5 декабря 2024 г.

Советую прочитать также статьи [тут](#) и [тут](#)

Определения

Граф - множество вершин и соединяющих их рёбер

Вершина - точка, обозначающая какой-нибудь объект

Ребро - отрезок между двумя вершинами, обозначающий какое-то отношение между ними

Степень вершины - число выходящих из вершины рёбер

Путь - последовательность вершин, где каждая вершина соединена с предыдущей ребром

Полный граф - граф, где любая пара вершин соединена ребром

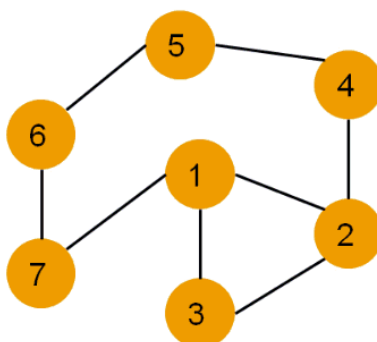


Рис. 1: Пример графа на 7 вершинах и 8 рёбрах

Упражнения

1. Волшебная страна Фарг почти вся состоит из непреодолимых гор и рек. В ней есть шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Известно, что из А проложены дороги в Б и Г, из Б — в А, Г и Д, из В — в Г и Е, из Г — в В и Д, из Д — в Б и Г, из Е — только в В. Все остальные дороги непроходимы.
 - (a) Нарисуйте карту страны Фарг.
 - (b) Нарисуйте карту так, чтобы дороги не пересекались.
 - (c) Может ли житель города А попасть в город Д, если ему нельзя проходить через Г?
 - (d) Сможет ли он при тех же условиях попасть в город Е?

2. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Полезные факты

1. **(Лемма о рукопожатиях)** Сумма степеней вершин чётна и равно удвоенному числу рёбер.
2. **(Следствие)** В любом графе число вершин нечетной степени чётно.
3. **(Число рёбер в полном графе)** Если в полном графе n вершин, то в нём $\frac{n(n-1)}{2}$ ребёр.

Задачи

1. В деревне 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?
2. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
3. В классе 27 человек. Каждая девочка дружит с 5 мальчиками, а каждый мальчик с 4 девочками. Сколько мальчиков в классе?
4. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
5. Каждое из рёбер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми – одного цвета.