

Полуинвариант

5 декабря 2024 г.

Что это такое?

Полуинвариантом называется величина, значение которой изменяется монотонно (не убывает или не возрастает) при заданных преобразованиях.

Задачи

1. На доске написаны три числа. Каждую минуту они изменяются по следующему правилу: если на данный момент на доске находятся числа x , y , z , то они меняются на $2x - 2y + z - 10$, $2y - 2z + x + 21$, $2z - 2x + y - 12$ соответственно. Докажите, что когда-нибудь на доске появится отрицательное число.
2. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x , то можно дописать на нее число $2x + 1$ или $3x$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2024. Докажите, что оно там было с самого начала.
3. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, а остальные — направо. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, обращенных к нему лицом? Указание: поставить сержанта первым в строй и начать двигать вправо, исследуя, сколько человек обращены к нему лицом.
4. На материке есть несколько стран, в каждой из которых правит либо партия правых, либо партия левых. Раз в месяц в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти только в случае если в большинстве стран, граничащих с этой страной, правит другая партия. Докажите, что смены партий не могут продолжаться бесконечно. Указание: рассмотреть количество стран-соседей с разными партиями.
5. В каждую клетку доски m на n записали по ненулевому целому числу. Разрешается поменять знак у всех чисел какой-то строки или какого-то столбца. Докажите, что можно такими действиями добиться неотрицательной суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце.