

# Полуинвариант

5 декабря 2024 г.

## Что это такое?

Полуинвариантом называется величина, значение которой изменяется монотонно (не убывает или не возрастает) при заданных преобразованиях.

## Задачи

1. На доске написаны три числа. Каждую минуту они изменяются по следующему правилу: если на данный момент на доске находятся числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то они меняются на  $2x - 2y + z - 10$ ,  $2y - 2z + x + 21$ ,  $2z - 2x + y - 12$  соответственно. Докажите, что когда-нибудь на доске появится отрицательное число.
2. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число  $x$ , то можно дописать на нее число  $2x + 1$  или  $3x$ . В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2024. Докажите, что оно там было с самого начала.
3. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, а остальные — направо. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, обращенных к нему лицом? Указание: поставить сержанта первым в строй и начать двигать вправо, исследуя, сколько человек обращены к нему лицом.
4. На материке есть несколько стран, в каждой из которых правит либо партия правых, либо партия левых. Раз в месяц в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти только в случае если в большинстве стран, граничащих с этой страной, правит другая партия. Докажите, что смены партий не могут продолжаться бесконечно. Указание: рассмотреть количество стран-соседей с разными партиями.
5. В каждую клетку доски  $m$  на  $n$  записали по ненулевому целому числу. Разрешается поменять знак у всех чисел какой-то строки или какого-то столбца. Докажите, что можно такими действиями добиться неотрицательной суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце.