

Штурмруем неравенства

1. Положительные числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Докажите, что

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1) \geq 2^n.$$

2. Пусть $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

3. Для положительных чисел x, y, z , таких что $x+y+z=1$, докажите неравенство

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3 \geq 18(a + b + c - ab - bc - ca).$$

6. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$(a + b + c)^5 \geq 81abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq 4.$$