

# Сравнение по модулю

5 декабря 2024 г.

## Определения

Целое число  $a$  делится на число  $b$  с **остатком**  $r$  ( $r < b$ ), если существует целое число  $c$  такое, что  $a = b \cdot c + r$ .

Если  $a$  и  $b$  имеют одинаковые остатки при делении на  $n$ , то они **сравнимы по модулю  $n$** .

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Будем говорить, что числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  образуют **полную систему остатков по модулю  $n$** , если никакие два числа не сравнимы по модулю  $n$ . Чаще всего в качестве полной системы остатков выбирается множество  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  или множество  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

## Упражнения

- Если  $a \equiv b \pmod{z}$ , то
  - $a + c \equiv b + c \pmod{z}$
  - $ac \equiv bc \pmod{z}$
  - $a^k \equiv b^k \pmod{z}$
- Если  $a \equiv b \pmod{z}$  и  $b \equiv c \pmod{z}$ , то  $a \equiv c \pmod{z}$
- Если  $a \equiv b \pmod{z}$  и  $c \equiv d \pmod{z}$ , то  $a + c \equiv b + d \pmod{z}$
- Если  $a \equiv b \pmod{z}$  и  $c \equiv d \pmod{z}$ , то  $ac \equiv bd \pmod{z}$

## Задачи

- Найдите остаток от деления  $71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74$  на 70
  - Найдите остаток от деления  $71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74$  на 75
  - Найдите остаток от деления  $71^{2024}$  на 70
- Докажите, что если  $3x + 7y \equiv 1 \pmod{11}$ , то  $3x + 40y \equiv 1 \pmod{11}$
- Можно ли доску размером  $5 \times 5$  заполнить доминошками размером  $1 \times 2$ ?
- Пусть  $m$  и  $n$  — целые, но не обязательно чётные числа. Докажите, что  $mn(m+n)$  — чётное число.
- Докажите, что  $n(n-1)$  — чётное число, если  $n$  — целое.
  - Может ли произведение двух подряд идущих чисел быть простым числом, большим 2? А равным 2?
- Докажите признак делимости на 3. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.