т. е. множество всех тех y, в каждый из которых при отображении f отображается хотя бы один элемент из подмножества A множества X, называют *образом подмножества* A и пишут $S = f(A)$. В частности, всегда имеем $Y_f = f(X)$.

Для образов множеств $A \subset X$ и $B \subset X$ справедливы следующие легко проверяемые соотношения:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$
$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B),$$

а если $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$.

Если $f : X \to Y$ и $B \subset Y$, то множество

$$A = \{x : x \in X,\ f(x) \in B\}$$

называют *прообразом множества* B и пишут $A = f^{-1}(B)$. Таким образом, прообраз множества B состоит из всех тех элементов $x \in X$, которые при отображении f отображаются в элементы из B или, что то же самое, он состоит из всех прообразов точек $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Для прообразов множеств $A \subset Y$ и $B \subset Y$ справедливы следующие также легко доказываемые соотношения:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B),$$

а если $A \subset B$, то $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Если $A \subset X$, то функция $f : X \to Y$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A, ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. Эту функцию называют *сужением функции* f на множество A и иногда обозначают через $f|_A$ или просто через f_A. Таким образом, f_A отображает A в Y и для любого $x \in A$ имеет место $f_A : x \mapsto f(x)$. Если множество A не совпадает с множеством X, т. е. является собственным подмножеством множества X, то сужение f_A функции f на множество A имеет другую область определения, чем функция f, и, следовательно, является другой, чем f, функцией. Нередко сужение функции $f : X \to$

$\to Y$ на множество $A \subset X$ обозначают тем же символом f и называют «функцией f на множестве A».

Если две функции f и g рассматриваются на одном и том же множестве X, точнее, если рассматриваются сужения функций f и g на одно и то же множество X, то запись $f \equiv g$ на X означает, что $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in X$. В этом случае говорят, что функция f тождественно равна функции g на множестве X.

Иногда знак «$\equiv$» будет употребляться между символами, обозначающими один и тот же объект (обычно один из употребленных в этом случае символов содержит более подробное описание объекта, чем другой символ), например запись $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ означает, что $x = (x_1, \dots, x_n)$, и тем самым запись $f(x)$ и $f(x_1, \dots, x_n)$ обозначает одну и ту же функцию.

Отметим, что функции, у которых всем элементам некоторого множества соответствует один и тот же элемент, т. е. функции, у которых при изменении значения аргумента значение функции не меняется, называются *постоянными* (на данном множестве) или *константами*.

Итак, если при изменении одной переменной (аргумента функции) другая переменная, являющаяся функцией первой, не меняется (т. е. «не зависит» от первой переменной), то это частный и в определенном смысле простейший случай функциональной зависимости.

Если $f : X \to Y$ и каждый элемент $y \in Y_f$ представляет собой множество каких-то элементов $y = \{z\}$, причем среди этих множеств $\{z\}$ имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая функция f называется *многозначной функцией*. При этом элементы z множества $f(x) = \{z\}$ часто также называют значениями функции f в точке x.

Если каждое множество $f(x)$ состоит только из одного элемента, то функцию f называют также *однозначной функцией*.

Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то функция $F : X \to Z$, определенная для каждого $x \in X$ равенством $F(x) = g(f(x))$, называется *композицией* (иногда *суперпозицией*) функций f и g или *сложной функцией* и обозначается через $g \circ f$.

Таким образом, по определению для каждого $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$