

т. е. множество всех тех y , в каждый из которых при отображении f отображается хотя бы один элемент из подмножества A множества X , называют *образом подмножества* A и пишут $S = f(A)$. В частности, всегда имеем $Y_f = f(X)$.

Для образов множеств $A \subset X$ и $B \subset X$ справедливы следующие легко проверяемые соотношения:

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), \\ f(A)/f(B) &\subset f(A/B), \end{aligned}$$

а если $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$.

Если $f : X \rightarrow Y$ и $B \subset Y$, то множество

$$A = \{x : x \in X, f(x) \in B\}$$

называют *прообразом множества* B и пишут $A = f^{-1}(B)$. Таким образом, прообраз множества B состоит из всех тех элементов $x \in X$, которые при отображении f отображаются в элементы из B или, что то же самое, он состоит из всех прообразов точек $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Для прообразов множеств $A \subset Y$ и $B \subset Y$ справедливы следующие также легко доказываемые соотношения:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \\ f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \\ f^{-1}(A/B) &= f^{-1}(A)/f^{-1}(B), \end{aligned}$$

а если $A \subset B$, то $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Если $A \subset X$, то функция $f : X \rightarrow Y$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A , ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. эту функцию называют *суждением функции* f на множество A и иногда обозначают через $f|_A$ или просто через f_A . Таким образом, f_A отображает A в Y и для любого $x \in A$ имеет место $f_A : x \mapsto f(x)$. Если множество A не совпадает с множеством X , т. е. является собственным подмножеством множества X , то сужение f_A функции f на множество A имеет другую область определения, чем функция f , и, следовательно, является другой, чем f , функцией. Нередко сужение функции $f : X \rightarrow$

$\rightarrow Y$ на множество $A \subset X$ обозначают тем же символом f и называют «функцией f на множестве A ».

Если две функции f и g рассматриваются на одном и том же множестве X , точнее, если рассматриваются сужения функций f и g на одно и то же множество X , то запись $f \equiv g$ на X означает, что $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in X$. В этом случае говорят, что функция f тождественно равна функции g на множестве X .

Иногда знак « \equiv » будет употребляться между символами, обозначающими один и тот же объект (обычно один из употребленных в этом случае символов содержит более подробное описание объекта, чем другой символ), например запись $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ означает, что $x = (x_1, \dots, x_n)$, и тем самым запись $f(x)$ и $f(x_1, \dots, x_n)$ обозначает одну и ту же функцию.

Отметим, что функции, у которых всем элементам некоторого множества соответствует один и тот же элемент, т. е. функции, у которых при изменении значения аргумента значение функции не меняется, называются постоянными (на данном множестве) или константами.

Итак, если при изменении одной переменной (аргумента функции) другая переменная, являющаяся функцией первой, не меняется (т. е. «не зависит» от первой переменной), то это частный и в определенном смысле простейший случай функциональной зависимости.

Если $f : X \rightarrow Y$ и каждый элемент $y \in Y_f$ представляет собой множество каких-то элементов $y = x$, причем среди этих множеств x имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая функция f называется *многозначной функцией*. При этом элементы x множества $f(x) = y$ часто также называют значениями функции f в точке x .

Если каждое множество $f(x)$ состоит только из одного элемента, то функцию f называют также *однозначной функцией*.

Если $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$, то функция $F : X \rightarrow Z$, определенная для каждого $x \in X$ равенством $F(x) = g(f(x))$, называется *композицией* (иногда *суперпозицией*) функций f и g или *сложной функцией* и обозначается через $g \circ f$.

Таким образом, по определению для каждого $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$