Содержание

1 Билет 1

Определение 1.1. *Пара последовательностей* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ *называется числовым рядом.*

Определение 1.2. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется сходящимся, если существует предел последовательности* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, *то есть* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - S| < \varepsilon$. *Иначе ряд называется расходящимся.*

Теорема 1.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда:*
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N,\ m < n \Longrightarrow |\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon.$

Доказательство. По критерию Коши для последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Теорема 1.2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. По критерию Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N,\ m < n\ |\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$. Возьмём $m = n - 1$, тогда $|a_n| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

Свойства 1. *1. Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\forall c$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *тоже сходится.*

2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся, то* $\forall \alpha,\ \beta$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *тоже сходится.*

Доказательство. 1. По критерию Коши $|\sum\limits_{k=m+1}^{n} ca_k| < |c|\varepsilon \Longrightarrow$ сходится.

2. По критерию Коши $|\sum\limits_{k=m+1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k)| < |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon \Longrightarrow$ сходится.

■

Определение 1.3. *Пусть* $\forall n\ a_n > 0$ *(*$a_n < 0$*), тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется знакоположительным (знакоотрицательным).*

Теорема 1.3. *Пусть* $\forall n\ a_n < b_n$, *тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *тоже расходится, если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *тоже сходится.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда по критерию Коши $\varepsilon > |\sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k| > |\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k| < c\varepsilon$.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, но тогда по предыдущему пункту ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится - противоречие. ■

Примеры 1.

1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *расходится. По отрицанию критерия Коши* $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n > N,\ m < n\ |\sum\limits_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}| > \frac{n-m}{m}$. *Возьмём* $n = 2m$, *тогда*
$$|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}| > \frac{2m-m}{m} = 1$$
.

2. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *сходится.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

3. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *сходится.* $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \implies$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *сходится по признаку сравнения.*

2 Билет 2

Теорема 2.1 (Признак Д'Аламбера)**.** *Пусть дан знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *тогда:*

1. *если* $\exists q$ *такое, что* $0 < q < 1$ *и* $\forall n > N\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, *то ряд сходится.*

2. *если* $\exists q > 1$ *такое, что* $\forall n > N\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q$, *то ряд расходится.*

Доказательство.

1. Пусть $\exists q$ такое, что $0 < q < 1$ и $\forall n > N\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, тогда $a_{N+2} \leqslant q a_{N+1},\ a_{N+3} \leqslant q a_{N+2} \leqslant q^2 a_{N+1},\ \ldots,\ a_{N+k} \leqslant q a_{N+k-1},\ a_{N+k} \leqslant q^{k-1} a_{N+1} \implies$ по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Аналогично, пусть $\exists q > 1$ такое, что $\forall n > N\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q$, тогда $a_{N+k} \geqslant q a_{N+k-1},\ a_{N+k} \geqslant q^{k-1} a_{N+1}$, но последний ряд расходится по необходимому условию, а значит, по признаку сравнения исходный ряд тоже расходится.

■

Теорема 2.2. *Пусть дан знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *тогда*

1. *если* $\exists q$ *такое, что* $0 < q < 1$ $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2. *если* $\exists q$ *такое, что* $q \geqslant 1$ $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \geqslant q$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. 1. Пусть $\exists q$ такое, что $0 < q < 1$ и $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, тогда $a_n \leqslant q^n$, то есть по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии, исходный ряд сходится.

2. Пусть $\exists q$ такое, что $q \geqslant 1$ и $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \geqslant q$, тогда $a_n \geqslant q^n$, значит, по признаку сравнения исходный ряд расходится.

■

Следствие 2.2.1. 1. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *то ряд сходится.*

2. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *то ряд расходится.*

3. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, *то ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. 1. По предельному переходу.

2. По предельному переходу.

3. Два примера:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

■

Теорема 2.3. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на* $[1, +\infty)$ *монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна), тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$,*и несобственный интеграл* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. $f(x)$ монотонно убываеет, значит, $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [k,\ k+1]$ $f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1) \Longrightarrow f(k) \geqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x) \geqslant f(k+1)$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{N} f(k) \geqslant \int\limits_{1}^{N} f(x) \geqslant \sum\limits_{k=2}^{N} f(k)$. Значит, по признаку сравнения имеем, что интеграл и ряд сходятся или расходятся одовременно.

■

3 Билет 3

Теорема 3.1. *Пусть дан знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. *Если* $\forall n > N$ *существует последовательность* $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$ *такая, что* $\forall n > N$ $c_n > 0$ *и* $\exists \alpha > 0$ *такое, что* $c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \alpha$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ *расходится,* $c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. 1.
$$\begin{gathered} c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \alpha \\ c_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - c_{n+2} \geqslant \alpha \\ \vdots \\ c_{n+k-1} \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}} - c_{n+k} \geqslant \alpha \end{gathered}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{gathered} c_n \cdot a_n - c_{n+1}a_{n+1} \geqslant \alpha a_{n+1} \\ c_{n+1} \cdot a_{n+1} - c_{n+2}a_{n+2} \geqslant \alpha a_{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+k-1} \cdot a_{n+k-1} - c_{n+k}a_{n+k} \geqslant \alpha a_{n+k} \end{gathered}$$

Сложим все неравенства.

$$c_n a_n - c_{n+k}a_{n+k} \geqslant \alpha \sum_{l=1}^{k} a_{n+l}$$

2. $c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1} \leqslant 0 \Longrightarrow c_n a_n \leqslant c_{n+1}a_{n+1} \Longrightarrow \frac{c_n}{c_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$ Рассмотрим систему таких неравенств:

$$\begin{gathered} \frac{c_n}{c_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \frac{c_{n+1}}{c_{n+2}} \leqslant \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{c_{n+k-1}}{c_{n+k}} \leqslant \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \end{gathered}$$

Домножим каждое из неравенств, начиная со второго, на все предыдущие и сложим, таким образом получим:

$$\begin{gathered} \frac{c_n}{c_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \frac{c_n}{c_{n+2}} \leqslant \frac{a_{n+2}}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{c_n}{c_{n+k}} \leqslant \frac{a_{n+k}}{a_n} \end{gathered}$$

$$c_n \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{1}{c_i} \leqslant \frac{1}{a_n} \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i$$

Так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i}$ расходится, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится. ■

Примеры 2. *1. Признак Д'Аламбера: возьмём* $c_n = 1$

2. Признак Раабе: возьмём $c_n = n$*. Получим* $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1$

3. Признак Бертрана: возьмём $c_n = n \ln n$*. Получим* $\ln n(n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1)$

4. Признак Гаусса: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$

4 Билет 4

Определение 4.1. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется абсолютно сходящимся, иначе - условно сходящимся.*

Теорема 4.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. По критерию Коши $|\sum\limits_{n=k}^{m} a_n| \leqslant \sum\limits_{n=k}^{m} |a_n| < \varepsilon$. ■

Теорема 4.2. *Пусть сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, тогда для любой перестановки ряд сходится абсолютно к тому же значению.*

Доказательство. Пусть N - наибольшее из чисел $\sigma(1), \ldots, \sigma(k)$. $\sum\limits_{n=1}^{k} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N} |a_n| \leqslant S$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ сходится. Аналогично, поменяв местами ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma()}|$ получим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| \geqslant S$, то есть ряды сходятся к одному и тому же значению. ■

Теорема 4.3. *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_k$ *сходятся абсолютно к* A *и* B *соответственно, тогда ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m$ *сходится абсолютно к* AB*.*

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму $\sum\limits_{m=1}^{N^2} (|a_n b_k|)_m = \sum\limits_{n=1}^{N} |a_n| \sum\limits_{k=1}^{N} |b_k| \to AB$, при $N \to \infty$.
Рассмотрим $\sum\limits_{m=1}^{N^2+M} (|a_n b_k|)_m = AB + \sum\limits_{m=N^2}^{N^2+M} (|a_n b_k|)_m \leqslant AB + |a_1 + \ldots + a_n| \cdot |b_n| + |b_1 + \ldots + b_{n-1}| \cdot |a_n| < AB + A\varepsilon + B\varepsilon \to AB$. ■

5 Билет 5

Теорема 5.1 (Признак Абеля)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и последовательность* b_n *монотонна и ограничена числом* M*, тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Обозначим $A_p = \sum\limits_{k=n}^{p} a_k$, $A_{n-1} = 0$, $a_k = A_k - A_{k-1}$. Тогда

$$|\sum_{k=n}^{p}(A_k - A_{k-1})b_k| = |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(b_k - b_{k-1}) + A_p b_p| \leqslant |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(b_k - b_{k-1}) + |A_p| \cdot |b_p| <$$

$$< |\sum_{k=n}^{p-1} \varepsilon(b_k - b_{k-1})| + \varepsilon \cdot M = \varepsilon \cdot |b_{p-1} - b_n| + \varepsilon \cdot M \leqslant \varepsilon \cdot (|b_{p-1}| + |b_n|) + \varepsilon \cdot M = 2 \cdot \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M = 3M\varepsilon$$

■

Теорема 5.2. *Пусть частичные суммы* $|\sum\limits_{n=1}^{m} a_n| \leqslant M$ *и* b_n *монотонно стремятся к 0, тогда ряд* $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Обозначим $A_p = \sum\limits_{k=n}^{p} a_k$, $A_{n-1} = 0$, $a_k = A_k - A_{k-1}$. Тогда

$$|\sum_{k=n}^{p}(A_k - A_{k-1})b_k| = |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(b_k - b_{k-1}) + A_p b_p| \leqslant |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(b_k - b_{k-1}) + |A_p| \cdot |b_p| <$$

$$|\sum_{k=n}^{p-1}(\sum_{m=1}^{k} a_m - \sum_{m=1}^{n-1} a_m)(b_k - b_{k-1})| + |A_p| \cdot |b_p| \leqslant$$

$$\leqslant |\sum_{k=n}^{p-1} |\sum_{m=1}^{k} a_m|(b_k - b_{k-1}) + |\sum_{m=1}^{n-1} a_m| + (b_k - b_{k-1})| + |A_p| \cdot |b_p| < 2 \cdot M \cdot 2\varepsilon + |\sum_{m=1}^{k} a_m - \sum_{m=1}^{n-1} a_m| \cdot \varepsilon <$$

$$< 4M\varepsilon + 2M\varepsilon = 6M\varepsilon$$

. ■

6 Билет 6

Определение 6.1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется условно сходящимся.*

Теорема 6.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, обозначим* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *ряд из положительных элементов данного ряда,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *- ряд из отрицательных элементов данного ряда. Тогда ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *расходятся.*

Доказательство.

1. Пусть оба ряда сходятся, тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно - противоречие.
2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходится, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ сходится - противоречие.
3. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ расходится, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ сходится - противоречие.

Значит, оба ряда расходятся. ■

Теорема 6.2 (Теорема Рима)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, тогда:*

1. *существует подстановка* $\sigma_{+\infty}$ *такая, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{+\infty}(n)}$ *расходится к* $+\infty$
2. *существует подстановка* $\sigma_{-\infty}$ *такая, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{-\infty}(n)}$ *расходится к* $-\infty$
3. $\forall c$ *существует подстановка* σ_c *такая, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_c(n)}$ *сходится к* c

Доказательство.

1. Рассмотрим такой ряд: сначала выберем столько положительных элементов, чтобы их сумма превысила 2, как только это случится прибавим столько отрицательных элементов, чтобы сумма стала чуть меньше 2. Затем прибавим столько положительных элементов, чтобы частичная сумма ряда, была больше 3, и прибавим столько отрицательных элементов, чтобы частичная сумма стала меньше 3 и т.д.
2. Аналогично.
3. Рассмотрим такой ряд: если $c > 0$ сначала выберем столько положительных элементов, чтобы их сумма превысила c, затем прибавим столько отрицательных чисел, чтобы частичная сумма стала меньше c и т.д. Так как ряд сходится условно, и положительные, и отрицательные члены ряда стремятся к нулю, то частичная сумма будет приближаться к c.

■

7 Билет 7

Определение 7.1. *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x)$ *определены на* $A \subset \mathbb{R}$. *Если* $\forall x \in A \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *то говорят, что функциональная последовательность* $f_n(x)$ *сходится поточечно к функции* $f(x)$.

Определение 7.2. *Пусть* $\forall n : f_n(x)$ *определены на* $A \subset \mathbb{R}$. *Если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$ *и* $\forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, *то говорят, что функция последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится на множестве* A *к функции* $f(x)$. *Обозначение:* $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

Теорема 7.1 (Первый критерий равномерной сходимости)**.** *Функциональная последовательность сходится равномерно тогда и только тогда, когда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Доказательство. По определению функция последовательность сходится равномерно $\underline{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$ и $\forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Longleftrightarrow \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ (в результате предельного перехода).
$\underline{\Longleftarrow}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$ и $\forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. ∎

Теорема 7.2 (Второй критерий равномерной сходимости)**.** *Функциональная последовательность сходится равномерно тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon$ *и* $\forall x \in A \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. $\underline{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon$ и $\forall x \in A \ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$
$\underline{\Longleftarrow}$ Для каждого $x \in A$ применим критерий Коши для последовательностей, тем самым получим поточечную сходимость $f_n(x) \to f(x)$. Тогда по предельному переходу $\forall x$ $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. ∎

Теорема 7.3. *Если существуе* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $c_n \geqslant 0$, $\forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant c_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, *то* $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство. По первому критерию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon \ \forall x \in A$
$0 \leqslant \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant c_n < \varepsilon$. ∎

8 Билет 8

Теорема 8.1 (О непрерывности)**.** *Пусть* $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* $\forall n \ f_n(x) \in C(x_0)$, *тогда* $f(x) \in C(x_0)$.

Доказательство. $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \Longrightarrow$ по определению $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
$\forall n\ f_n(x) \in C(x_0) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0)\ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\delta(x_0)\ |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$. ■

Теорема 8.2 (О почленном интегрировании)**.** *Пусть* $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $\forall n\ f_n(x) \in C[a,b]$, *тогда* $\int\limits_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dt$.

Доказательство. $|\int\limits_a^x f_n(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt| \leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |b-a| < \varepsilon \cdot |b-a|$. ■

Теорема 8.3 (О почленном дифференцировании)**.** *Пусть* $f_n(x) \in C^1[a,b]$, $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$ *и* $\exists x_0 \in [a,b]$ *такое, что* $f_n(x_0) \to \alpha$ *поточечно. Тогда* $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f(x) \in C^1[a,b]$ *и* $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$, тогда по теореме о почленном интегрировании
$\int\limits_a^x f_n'(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x g(t)dt \Longrightarrow f_n(x) - f(x_0) \rightrightarrows \int\limits_a^x g(t)dt \Longrightarrow f_n(x) \rightrightarrows \int\limits_a^x g(t)dt + \alpha = f(x)$. ■

9 Билет 9

Определение 9.1. *Пусть* $\forall n\ a_n(x)$ *определены на* $A \subset \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ *- частичные суммы, тогда пара функциональных последовательностей* $(\{a_n(x)\}, \{S_n(x)\})$ *называется функциональным рядом.*

Определение 9.2. *Если последовательность* $S_n(x)$ *сходится поточечно к* $S(x)$ *на* $A \subset \mathbb{R}$, *то ряд сходится поточечно на* $A \subset \mathbb{R}$.

Определение 9.3. *Если последовательность* $S_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* $A \subset \mathbb{R}$, *то ряд сходится равномерно на* $A \subset \mathbb{R}$.

Теорема 9.1. *Функциональный ряд сходится равномерно на* $A \subset \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon$ *и* $\forall x \in A\ |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство. По второму критерию для функциональной последовательности $S_n(x)$. ■

Теорема 9.2. *Если существуе сходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *такой, что* $c_n \geqslant 0$, $\forall x \in A\ a_n(x) \leqslant c_n$, *то* $S_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$.

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n > N$ и $\forall x \in A$ $|S_n(x) - S_m(x)| = |\sum\limits_{i=n}^{m} a_i(x)| \leqslant |\sum\limits_{i=n}^{m} c_i| < \varepsilon$ (по критерию Коши). ∎

Теорема 9.3. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $A \subset \mathbb{R}$, *то* $a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство. По критерию Коши для $m = n + 1$. ∎

10 Билет 10

Теорема 10.1 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows}$, $b_n(x)$ *монотонна по номеру для каждого* $x \in A$ *и* $\exists M\ \forall x \in A\ \forall n\ |b_n(x)| < M$, *тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Обозначим $A_p(x) = \sum\limits_{k=n}^{p} a_k(x)$, $A_{n-1}(x) = 0$, $a_k(x) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$. Тогда

$$|\sum_{k=n}^{p}(A_k(x)-A_{k-1}(x))b_k(x)| = |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(x)(b_k(x)-b_{k-1}(x))+A_p(x)b_p(x)| \leqslant |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(x)(b_k(x)-b_{k-1}$$

$$< |\sum_{k=n}^{p-1} \varepsilon(b_k(x)-b_{k-1}(x))|+\varepsilon\cdot M = \varepsilon\cdot|b_{p-1}(x)-b_n(x)|+\varepsilon\cdot M \leqslant \varepsilon\cdot(|b_{p-1}(x)|+|b_n(x)|)+\varepsilon\cdot M = 2\cdot\varepsilon\cdot M$$

∎

Теорема 10.2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $\exists M\ :\ \forall N$ *и* $\forall x \in A \subset \mathbb{R}$ $|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)| < M$, $b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$, *тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Обозначим $A_p(x) = \sum\limits_{k=n}^{p} a_k(x)$, $A_{n-1}(x) = 0$, $a_k(x) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$. Тогда

$$|\sum_{k=n}^{p}(A_k(x)-A_{k-1}(x))b_k(x)| = |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(x)(b_k(x)-b_{k-1}(x))+A_p(x)b_p(x)| \leqslant |\sum_{k=n}^{p-1} A_k(x)(b_k(x)-b_{k-1}$$

$$\leqslant |\sum_{k=n}^{p-1}|\sum_{m=1}^{k} a_m(x)|(b_k(x)-b_{k-1}(x))+|\sum_{m=1}^{n-1} a_m(x)|+(b_k(x)-b_{k-1}(x))|+|A_p(x)|\cdot|b_p(x)| < 2\cdot M\cdot 2\varepsilon+|\sum$$

$$< 4M\varepsilon + 2M\varepsilon = 6M\varepsilon$$

. ∎

Теорема 10.3. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$ *и* $\forall n\ a_n(x) \in C(A)$, *тогда* $S(x) \in C(A)$.

Доказательство. По теореме о непрерывности функциональных последовательностей для последовательности $S_n(x)$. ■

Теорема 10.4. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $\forall n\ a_n(x) \in C[a,b]$, *тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\int\limits_a^x a_n(t)dt) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^x S(t)dt$.

Теорема 10.5. $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$. *Проинтегрируем:*
$\int\limits_a^x S_n(t)dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^x S(t)dt \iff \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^x \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)dt = \int\limits_a^x S(t)dt \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^x a_k(t)dt = \int\limits_a^x S(t)dt$
$\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x a_n(t)dt = \int\limits_a^x S(t)dt.$

Теорема 10.6. *Пусть* $a_n(x) \in C^1[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$ *и* $\exists x_0 \in [a,b]$ *такое, что* $S_n(x_0) \to \alpha$ *поточечно. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f(x) \in C^1[a,b]$ *и* $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. Применим теорему о почленном дифференцировании для функциональных последовательностей к последовательности $S_n(x)$. ■

11 Билет 11

Определение 11.1. *Ряды вида* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *называются степенными рядами.*

Теорема 11.1 (Первая теорема Абеля)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *- степенной ряд.*

1. *Если этот ряд сходится в точке* x_1 *как числовой ряд, то* $\forall x_2$ *такого, что* $|x_2| < |x_1|$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_2^n$ *сходится.*

2. *Если этот ряд расходится в точке* x_1 *как числовой ряд, то* $\forall x_2$ *такого, что* $|x_2| > |x_1|$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_2^n$ *расходится.*

Доказательство. 1. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке x_1, $\forall x_2$ такого, что $|x_2| < |x_1|$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n x_2^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n x_1^n| \cdot |\frac{x_2}{x_1}|^n$ а этот ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии с членом $|\frac{x_2}{x_1}|$.

2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке x_1. Предположим, что $\exists x_2$ такое, что $|x_2| > |x_1|$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_2^n$ сходится, но тогда по первому пункту ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$ сходится - противоречие.

$\blacksquare$

Утверждения 11.1. *Существует такое число R, что $\forall x$ такого, что $|x| < R$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится, $\forall x$ такого, что $|x| > R$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится.*

Доказательство. Так как любой ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x = 0$ существуют множества A и B, где A - множество точек, где ряд сходится, а B — множество точек, где данный ряд расходится. По первой теореме Абеля $\exists a \in \mathbb{R}^+$ и $b \in \mathbb{R}^+$ такие, что $A = (-a, a)$, $B = (-\infty, -b) \cup (b, +\infty)$. Пусть $a \neq b$, тогда либо $a < b$, либо $b < a$. Если $a < b$, то в силу аксиомы полноты $\exists c$ такое, что $a \leqslant c \leqslant b$, то есть $c \notin A$ и $c \notin B$ - противоречие. Если $a > b$, то $\exists c$ такое, что $b \leqslant c \leqslant a$, то есть $c \in A$ и $c \in B$ - противоречие. Значит, $a = b = R$. $\blacksquare$

Определение 11.2. *R - радиус сходимости степенного ряда.*

Теорема 11.2 (Формула Коши-Адамара)**.** *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ - степенной ряд, тогда $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$*

Доказательство. По признаку Коши для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ имеем: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = l$. Если $l < 1$, то ряд сходится, если $l > 1$, то ряд расходится. То есть ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, то есть R - радиус сходимости. $\blacksquare$

Свойства 2.

1. *$\forall \varepsilon > 0$ степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$*
2. *$S(x) \in C(-R, R)$*
3. *$\forall x \in (-R, R)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \int\limits_0^x S(t)dt$*
4. *$S(x) \in C^\infty(-R, R)$*

Доказательство.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} R^n |\frac{x}{R}|^n$, а значит, по признаку сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R^n$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$ сходится равномерно.
2. По теореме о непрерывности равномерно сходящегося ряда $S(x) \in C(-R, R)$.
3. По теореме о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$, а значит, при дифференцируемости радиус сходимости не изменяется, а значит, по теореме о почленном дифференцировании $S(x) \in C^\infty$.

■

Определение 11.3. *Ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ *называется рядом Тейлора,* x_0 *- центр разложения.*

Теорема 11.3. *Если в некоторой окрестности* 0 *выполнено равенство* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, *то* $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Доказательство. Подставим $x = 0$, тогда $a_0 = f(0)$. Продифференцируем и подставим $x = 0$, получим $a_1 = f'(0)$ и т.д. ■

Теорема 11.4. *Пусть* $f(x) \in C^\infty(-a,a)$ *и* $\forall x \in (-a,a)$ $|f^{(n)}(x)| \leqslant A^n$, $A > 0$, *тогда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$ *на* $(-a,a)$.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1}$, тогда $|f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n| = |\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1}| \leqslant |\frac{A^{N+1}}{(N+1)!}a^{N+1}| \to 0$ при $n \to \infty$. ■

12 Билет 12

Теорема 12.1 (Вторая теорема Абеля)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ *сходится, тогда* $S(x) \in C[0,R]$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to R-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n = S(R)$.

Доказательство. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n (\frac{x}{R})^n$, а этот ряд сходится равномерно на $[0,R]$ по признаку Абеля, а значит, $S(x) \in C[0,R]$ по теореме о непрерывности равномерно сходящегося ряда. ■

Лемма 12.1. *Пусть* $a_n \to A$ *при* $n \to \infty$, *тогда* $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \to A$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ :\ \forall m > N\ |\frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m} a_n - A| = \frac{1}{m}|\sum\limits_{n=1}^{m} a_n - mA| = \frac{1}{m}|\sum\limits_{n=1}^{N_1}(a_n) - AN_1 + \sum\limits_{n=N_1+1}^{m}(a_n - A)| \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{m}|\sum\limits_{n=1}^{N_1}(a_n) - AN_1| + \frac{1}{m}|\sum\limits_{n=N_1+1}^{m}(a_n - A)| < \frac{N-N_1}{N}\cdot\varepsilon + \varepsilon < 2\cdot\varepsilon$ ■

Теорема 12.2. *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится на* $(-1, 1)$ *и пусть* $\exists \lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A$. *Если* $a_n = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{n})$, *то* $\exists \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

Доказательство. $\forall x \in (0,1)$ $N_x = [\frac{1}{1-x}]$, введём функцию $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \ : \ \forall N_x > N \Longrightarrow \ |\varphi(x)| = |\sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)^n - \sum\limits_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n|$

1. $|\sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)^n| = |\sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})| \leqslant |(1-x)\sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n \cdot n| =$
   $= |\frac{1}{\frac{1}{1-x}} \sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n \cdot n| \leqslant \frac{1}{N_x} \sum\limits_{n=0}^{N_x} |a_n n| < \varepsilon$ (последний переход по вышеприведённой лемме).
2. $|\sum\limits_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n| \leqslant \sum\limits_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n x^n}{n}| \leqslant \frac{1}{N_x+1}| \sum\limits_{n=N_x+1}^{\infty} a_n n x^n| < \frac{1}{N_x+1}| \sum\limits_{n=N_x+1}^{\infty} \varepsilon_1 x^n| =$
   $= \frac{\varepsilon_1}{N_x+1}| \sum\limits_{n=N_x+1}^{\infty} x^n| < \frac{\varepsilon_1}{N_x+1} \cdot \frac{1}{1-x} < \varepsilon$

$\Longrightarrow |\sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)^n - \sum\limits_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n| < 2\varepsilon$

■

13 Билет 13

Определение 13.1. *Даны* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\prod_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k$, *тогда пара* $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\prod_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ *называется бесконечным произведением. Если* $\exists n : u_n = 0$, *то говорят, что произведение расходится к 0. Если*

Определение 13.2. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \prod_n = a \neq 0$, *то говорят, что произведение сходится, иначе расходится.*

Теорема 13.1 (Необходимое условие)**.** *Если* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, то* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 1$.

Доказательство. Пусть Пусть $\prod\limits_{k=1}^{\infty} u_k = a$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\prod_k}{\prod_{k-1}} = \frac{a}{a} = 1$. ■

Теорема 13.2. *Произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$, *где* $1 + a_n = u_n$.

Доказательство. $\underline{\Longrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \prod_n \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\prod_n) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$, то есть ряд сходится.

$\underline{\Longleftarrow}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+a_k) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)} \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \prod_n$, то есть произведение сходится.

■

Определение 13.3. *Произведение называется абсолютно (условно) сходящимся, если таковым является соответствующий ряд из логарифмов.*

Теорема 13.3. *Произведение сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *сходится.*

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1$ ■

Теорема 13.4. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *сходится или расходится одновременно с рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Доказательство. По формуле Тейлора $\ln(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \overline{\overline{o}}(a_n^2)$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n-a_n)}{a_n^2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$ если произведение сходится, то сходится соответствующий ряд из логарифмов, а по формуле Тейлора сходятся ряды из a_n и $-\frac{a_n^2}{2}$, если произведение расходится, то ряд из логарифмов то же расходится, а значит, по последней формуле ряд из a_n^2 то же расходится. ■

14 Билет 14

Теорема 14.1. $\forall x \neq \pi k \ \sin x = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2})$

Доказательство.

1. Докажем утверждение: $\forall n \sin((2n+1)x) = (2n+1)\sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$.
   База индукции: $n = 1$ $\sin(3x) = \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x = \sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x + 2\cos^2 x) = \sin x(3 - 4\sin^2 x) = 3\sin x(1 - \frac{4}{3}\sin^2 x)$
   Шаг индукции: $\sin((2n+1)x) = \sin((2n-1)x)\cos 2x + \cos((2n-1)x)\sin 2x = \sin x((2n-1)P_n(\sin^2 x)\cos 2x + 2\cos x \cos((2n-1)x)) =$
   $= \sin x((2n-1)P_n(\sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x) + (\cos((2n-1)x) + \cos((2n+1)x))) =$
2. Докажем утверждение: $\forall \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R} \ |\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - 1$.
   База индукции: $1 + a_k - 1 \leqslant 1 + |a_k| - 1 \Longleftrightarrow a_k \leqslant |a_k|$

Шаг индукции: $|\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)-1| = |\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\cdot(1+a_n)-1| \leqslant |\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+a_k)-1| + |a_n\cdot\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+a_k)| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|)-1+|a_n|\cdot(\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|)-1)+|a_n| = \prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)-1$

3. $\sin((2n+1)x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{\pi k}{2n+1},\ k\in\mathbb{Z}$
   $P_n(\sin^2 x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{\pi k}{2n+1}\ k=\overline{1,n}$
   $P_n(\omega)=0 \Longleftrightarrow \omega=\sin^2(\frac{\pi k}{2n+1})\ k=\overline{1,n},\ P_n(\sin^2 x)=\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x},\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}=1$

$$P_n(\omega)=\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\omega}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})=\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}$$

$$P_n(\sin^2 x)=\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})=\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}$$

   Сделаем замену $t=(2n+1)x \Longrightarrow \prod\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})=\frac{\sin t}{(2n+1)\sin(\frac{t}{2n+1})}$.
   $\forall t\in\mathbb{R}$ выберем $n>|t|,\ m<n$. $\frac{\sin t}{(2n+1)\sin(\frac{t}{2n+1})}=\prod\limits_{k=1}^{m}(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})\cdot R_{n,m}(t)$

4. $|R_{n,m}(t)|=|\prod\limits_{k=m+1}^{n}(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})| \leqslant \prod\limits_{k=m+1}^{n}(1+\frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})-1 \leqslant \prod\limits_{k=m+1}^{n}(1+\frac{t^2}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})-1 \leqslant \prod\limits_{k=m+1}^{n}(1+\frac{t^2}{\pi^2 k^2})-1 < \prod\limits_{k=m+1}^{n}(1+\frac{t^2}{2^2k^2})-1 \to 0$ при $n\to\infty$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin t}{(2n+1)\sin(\frac{t}{2n+1})}=\frac{\sin t}{t}=\lim\limits_{m,n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{m}(1-\frac{t^2}{\pi^2k^2})\cdot R_{n,m}(t)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{t^2}{\pi^2k^2}) \Longrightarrow$

$$\sin t = t\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{t^2}{\pi^2k^2})$$

.

■

Следствие 14.1.1 (Формула Валлиса)**.** $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4k^2})=\frac{2}{\pi}$

Доказательство. Подставим в формулу разложения синуса в бесконечное произведение $x=\frac{\pi}{2}$. ■

15 Билет 15

Определение 15.1. *Пусть* $\varphi(y),\ \psi(y)\in C[a,b],\ \forall y\in[a,b]\ \varphi(y)\leqslant\psi(y)$. *Обозначим* $G=\{(x,y): y\in[a,b],\ \varphi(y)\leqslant x\leqslant\psi(y)\}$. *Пусть* $f(x,y)\in\mathcal{R}[\varphi(y),\psi(y)]$, *тогда интеграл* $F(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx$ *называется собственным интегралом с параметром.*

Теорема 15.1. *Пусть $\varphi(y)$, $\psi(y) \in C[a,b]$, $f(x,y) \in C(G)$, тогда $F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \in C[a,b]$.*

Доказательство. $\forall y \in [a,b]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon : \forall \Delta y : |\Delta y| < \delta\, |F(y+\Delta y) - F(y)| = |\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx| = |\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx| \leqslant |\int\limits_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x,y)dx| + |\int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y)dx| + |\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx| \leqslant |\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)| \cdot \max\limits_{[a,b]} |f(x,y+\Delta y)| + |\psi(y+\Delta y) - \psi(y)| \cdot \max\limits_{[a,b]} |f(x,y+\Delta y)| \leqslant \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot \max|\psi(y) - \varphi(y)|$ ■

Теорема 15.2. *Пусть $\varphi(y)$, $\psi(y) \in C^1[a,b]$, $f(x,y) \in C(G)$, $\exists f'_y(x,y) \in C[a,b]$, тогда $F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \in C^1[a,b]$ и $F'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx + \psi'(y) \cdot f(\psi(y),y) - \varphi'(y) \cdot f(\varphi(y),y)$*

Доказательство. $\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}(F(y+\Delta y) - F(y)) = \frac{1}{\Delta y}(\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx) = \frac{1}{\Delta y}(\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx) = -\frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x,y)dx + \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y)dx + \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx = (\psi(y+\Delta y) - \psi(y)) \cdot f(\psi(y+\theta_1 \Delta y)) - (\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)) \cdot f(\psi(y+\theta_2\Delta y)) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y+\theta_3\Delta y)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx + \psi'(y) \cdot f(\psi(y),y) - \varphi'(y) \cdot f(\varphi(y),y)$.

Последний переход проведён с использованием второй теоремы о среднем и теоремы Лагранжа. ■

Теорема 15.3. *Пусть $f(x,y) \in \mathcal{R}[a,b] \times [c,d]$, тогда $\int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx$.*

Доказательство. Пусть $F(t) = \int\limits_c^t (\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy$, $G(t) = \int\limits_a^b (\int\limits_c^t f(x,y)dy)dx$.

$$F'(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$$

, $G'(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx \Longrightarrow F(t) - G(t) = \tilde{C}$, причём $F(c) = G(c) = 0 \Longrightarrow F(t) = G(t) \Longrightarrow$ $F(d) = G(d)$. ■

16 Билет 16

Определение 16.1. *Рассмотрим несобственный интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x,y)dx$. *Тогда на* $Y \subset \mathbb{R}$ *введём функцию* $F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)dx$.

Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A : \forall a' > A : \forall y \in Y \Longrightarrow |\int\limits_a^{a'} f(x,y)dx - F(y)| < \varepsilon$, *то* $\int\limits_a^\omega f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y)$.

Теорема 16.1 (Критерий Коши)**.** $\int\limits_a^\omega f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A : \forall a',\ a'' > A :$ $\forall y \in Y\ |\int\limits_{a'}^{a''} f(x,y)dx| < \varepsilon$

Доказательство. $\underline{\Longleftarrow}$ $\forall a',\ a''\ |\int\limits_{a'}^{a''} f(x,y)dx| < \varepsilon$, тогда устремим $a'' \to +\infty$ и получим по предельному переходу $|\int\limits_{a'}^{+\infty} f(x,y)dx| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow |\int\limits_a^{a'} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx| = |\int\limits_a^{a'} f(x,y)dx - F(y)| \leqslant \varepsilon$.

$\underline{\Longrightarrow}$ $|\int\limits_{a'}^{a''} f(x,y)dx| = |\int\limits_a^{a''} f(x,y)dx - \int\limits_a^{a'} f(x,y)dx| < 2\varepsilon$. ■

Теорема 16.2 (Признак Вейерштрасса)**.** *Если* $\exists g(x)$ *такая, что* $|f(x,y)| \leqslant g(x)\ \forall y \in Y$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. По критерию Коши $|\int\limits_{a'}^{a''} f(x,y)dx| \leqslant \int\limits_{a'}^{a''} |f(x,y)|dx \leqslant \int\limits_{a'}^{a''} g(x)dx < \varepsilon$ (по критерию Коши для обычных несобственных интегралов). ■

17 Билет 17

Теорема 17.1 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $|f(x,y)| < M$, $|g(x,y)| < M$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$ $F(y)$ *и* $g(x,y)$ *монотонна по* x *для любого* y, *тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists A : \forall a_1,\ a_2 > A$ и $\forall y \in Y$

$$|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx| = |g(a_1,y)\cdot\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)dx + g(a_2,y)\cdot\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)dx| \leqslant |\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx| =$$

$$= |g(a_1,y)|\cdot|\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)dx| + |g(a_2,y)|\cdot|\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)dx| < M\cdot\varepsilon + M\cdot\varepsilon$$

■

Теорема 17.2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $|f(x,y)| < M$, $|g(x,y)| < M$, $\forall A > a$

$$\int\limits_{a}^{A} f(x,y)dx| < M$$

, $g(x,y)$ *монотонна по* x *для любого* $y \in Y$ *и* $g(y) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0$, *тогда* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0\ \exists A : \forall a_1,\ a_2 > A$ и $\forall y \in Y$ $|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx| = |g(a_1,y)\cdot \int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)dx + g(a_2,y)\cdot\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)dx| \leqslant |\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx| = |g(a_1,y)|\cdot|\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)dx| + |g(a_2,y)|\cdot|\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)dx| < \varepsilon\cdot|\int\limits_{a}^{c} f(x,y)dx - \int\limits_{a}^{a_1} f(x,y)dx| + \varepsilon\cdot|\int\limits_{a}^{a_2} f(x,y)dx - \int\limits_{a}^{c} f(x,y)dx| < \varepsilon\cdot 2M + \varepsilon\cdot 2M$ ■

Теорема 17.3. *Пусть* $f(x,y) \in C[a,+\infty)\times[c,d]$ *и* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y)$, *тогда* $F(y) \in C[c,d]$.

Доказательство. $\forall y \in Y\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon : \forall\ \Delta y : |\Delta y| < \delta$ $|F(y+\Delta y) - F(y)| = |\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx| = |\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y+\Delta y)dx + \int\limits_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx + \int\limits_{a}^{A} f(x,y)dx - \int\limits_{a}^{A} f(x,y)dx - \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx| \leqslant |\int\limits_{A}^{+\infty} f(x,y+\Delta y)dx| + |\int\limits_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{a}^{A} f(x,y)dx| + |\int\limits_{A}^{+\infty} f(x,y)dx| < \varepsilon_1 + (A-a)\varepsilon_2 + \varepsilon_1 < 3\varepsilon$ ■

Теорема 17.4. *Пусть* $f(x,y) \in C[a,+\infty)\times[c,d]$, $f'_y(x,y) \in C[a,+\infty)\times[c,d]$ *и* $\int\limits_{a}^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} G(y)$, *тогда* $\exists F'(y) = G(y)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to +\infty$, и интеграл $F_n(y) = \int\limits_{a}^{x_n} f(x,y)dx$. По теореме о дифференцировании собственных интегралов для интеграла $\int\limits_{a}^{x_n} f(x,y)dx$, а также в силу равномерной сходимости $\int\limits_{a}^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} G(y)$ имеем $F'_n(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} G(y) \Longrightarrow$ по теореме о дифференцируемости функциональной последовательности $F'(y) = G(y)$. ■

Теорема 17.5. *Пусть* $f(x,y) \in C[a,+\infty)\times[c,d]$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y)$, *тогда* $\int\limits_c^d (\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx)$ $\int\limits_a^{+\infty} (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to +\infty$, и интеграл $F_n(y) = \int\limits_a^{x_n} f(x,y)dx$. Тогда по теореме об интегрировании собственных интегралов с параметром $\int\limits_c^d (\int\limits_a^{x_n} f(x,y)dx)dy = \int\limits_a^{x_n} (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^d F_n(y)dy = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^d (\int\limits_a^{x_n} f(x,y)dx)dy = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{x_n} (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx = \int\limits_a^{+\infty} (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx$. По теореме об интегрировании функциональных последовательностей получаем $\int\limits_c^d F_n(y)dy \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} \int\limits_c^d F(y)dy$, а так как $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y)$, то $\int\limits_c^d (\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx)dy = \int\limits_a^{+\infty} (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx$ ■

18 Билет 18

Теорема 18.1 (Признак Дини равномерной сходимости функциональной последовательности)**.** *Пусть* $\forall n \ f_n(x) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b] \ f_n(x)$ *монотонна по* n *и* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C[a,b]$. *Тогда* $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C[a,b] \Longrightarrow \forall x_0 \in [a,b] \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{x_0,\varepsilon} : \forall n > N_{x_0,\varepsilon}$ $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.
$\forall x_0 \in [a,b] \ \forall n \ |f_n(x_0) - f(x_0)| \geqslant |f_{n+1}(x_0) - f(x_0)|$, тогда $\exists \delta_\varepsilon : \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \ |f_{N_{x_0,\varepsilon}}(x) - f(x)| = |f_{N_{x_0,\varepsilon}}(x) - f_{N_{x_0,\varepsilon}}(x_0) + f_{N_{x_0,\varepsilon}}(x_0) - f(x_0) + f(x_0) - f(x)| \leqslant |f_{N_{x_0,\varepsilon}}(x) - f_{N_{x_0,\varepsilon}}(x_0)| + |f_{N_{x_0,\varepsilon}}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$, а по монотонности это верно для всех намеров $n > N_{x_0,\varepsilon}$.

Так как отрезок компакт рассмотрим конечное подпокрытие $[a,b] \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$, где $x_i \in [a,b]$, а $[a,b] \subset \bigcup\limits_{x_i \in [a,b]} B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$.
Возьмём $N_\varepsilon = \max\limits_{i=\overline{1,k}} N_{\varepsilon,x_i}$, тогда $\forall x \in [a,b] \ \forall n > N_\varepsilon \ |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon \Longrightarrow$ по определению $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$. ■

Теорема 18.2. *Пусть* $f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [b,+\infty))$, $f(x,y) \geqslant 0$. *Пусть* $\exists F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \in C[b,+\infty)$ *и* $G(x) = \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dy \in C[a,+\infty)$. *Тогда если* $\exists \int\limits_b^{+\infty} F(y)dy = I$, *то* $\exists \int\limits_a^{+\infty} G(x)dx = I$.

Доказательство. Введём монотонные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_k\}$, $a_n \to +\infty$, $b_k \to +\infty$. Рассмотрим $F_n(y) = \int\limits_a^{a_n} f(x,y)dx$ и $G_k(x) = \int\limits_b^{b_k} f(x,y)dy$. Тогда по признаку Дини $F_n(y) \overset{[b,+\infty)}{\rightrightarrows} F(y)$ и $G_n(y) \overset{[a,+\infty)}{\rightrightarrows} G(x)$, тогда по теореме об интегрировании собственных интегралов $\int\limits_b^{b_k}(\int\limits_a^{a_n} f(x,y)dx)dy = \int\limits_a^{a_n}(\int\limits_b^{b_k} f(x,y)dy)dx$.

$$\int\limits_b^{b_k} F_n(y)dy = \int\limits_a^{a_n} G_k(x)dx$$

$$\int\limits_b^{b_k} F_n(y)dy \leqslant \int\limits_b^{b_k} F(y)dy \leqslant \int\limits_b^{+\infty} F(y)dy = I$$

$$\int\limits_b^{b_k} F_n(y)dy = \int\limits_a^{a_n} G_k(x)dx \leqslant \int\limits_a^{a_n} G(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_a^{+\infty} G(x)dx = I' \leqslant I$$

то есть $\exists \int\limits_a^{+\infty} G(x)dx = I'$.

Воспользуемся этим и повторим рассуждения, поменяв местами F_n и G_k, тогда получим $I \leqslant I'$, то есть $I' = I$. ■

Следствие 18.2.1. *Пусть* $f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [b,+\infty))$ *и существуют* $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$. *Пусть существуют* $G(x) = \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dy$ *и* $\int\limits_b^{+\infty} |f(x,y)|dy$. *Тогда если существуют* $\int\limits_b^{+\infty} F(y)dy = I$ *и* $\int\limits_b^{+\infty} |F(y)|dy$, *то существуют* $\int\limits_a^{+\infty} G(x)dx = I$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} |G(x)|dx$.

Доказательство. $|f(x,y)| - f(x,y) \geqslant 0$ и $|f(x,y)| \geqslant 0$, значит, по доказанной теореме получаем нужное утверждение. ■

19 Билет 19

Теорема 19.1 (Интеграл Дирихле)**.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a$.

Доказательство. $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x}dx$, $I(-a) = -I(a)$, $I(0) = 0$, значит, будем рассматривать случай $a > 0$.

Рассмотрим $I(a,\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-\varepsilon x} dx$, $\varepsilon \geqslant 0$

Пусть $a \geqslant a_0 > 0$, $\forall A > 0$ $|\int\limits_1^A \sin(ax)dx| < 2$, $\forall a \in [a_0, +\infty)$ $\frac{1}{x}$ монотонна по x и равномерно стремится к 0, значит, по признаку Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$ сходится равномерно на $[a_0, +\infty)$, $e^{-\varepsilon x}$ монотонна по x при фиксированном $\varepsilon \Longrightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-\varepsilon x} dx$ сходится равномерно на $[a_0, +\infty)$ при фиксированном ε.

Пусть $a \leqslant a_1$, тогда $\frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} \leqslant \frac{ax}{xe^{\varepsilon x}} \leqslant \frac{a_1}{e^{\varepsilon x}}$, а $\int\limits_0^1 \frac{a_1}{e^{\varepsilon x}} dx = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a_1}{e^{\varepsilon x}}\Big|_0^1 = \frac{a_1}{\varepsilon} - \frac{a_1}{\varepsilon e^{\varepsilon}} \Longrightarrow \int\limits_0^1 \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса на $[a_0, a_1]$. Значит, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[a_0, a_1]$, то есть сходится равномерно на $(0, +\infty)$. Значит, по теореме о непрерывности несобственного интеграла с параметром $I(a,\varepsilon) \in C(0, +\infty)$ по a.

Рассмотрим $I'_a(a,\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \cos(ax) e^{-\varepsilon x} = -\frac{1}{\varepsilon} \cos(ax) e^{-\varepsilon x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{a}{\varepsilon} \int\limits_0^{+\infty} \sin(ax) e^{-\varepsilon x} dx = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{a}{\varepsilon^2} \sin(ax) e^{-\varepsilon x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{a^2}{\varepsilon^2} \int\limits_0^{+\infty} \cos(ax) e^{-\varepsilon x} dx \Longrightarrow (1 + \frac{a^2}{\varepsilon^2}) \int\limits_0^{+\infty} \cos(ax) e^{-\varepsilon x} dx = \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow$
$\int\limits_0^{+\infty} \cos(ax) e^{-\varepsilon x} dx = \frac{\varepsilon}{a^2 + \varepsilon^2} = I'_a(a,\varepsilon) \Longrightarrow I(a,\varepsilon) = \int \frac{\varepsilon}{a^2+\varepsilon^2} da = \arctan(\frac{a}{\varepsilon}) + C(\varepsilon)$

$$I(0,\varepsilon) = 0 = C(\varepsilon)$$

Покажем непрерывность по ε при фиксированном a. $I(a,\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx =$
$= \int\limits_0^1 \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx$. Пусть $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0 > 0$, тогда $\frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} \leqslant \frac{1}{e^{\varepsilon_0 x}}$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\varepsilon_0 x}} dx = \frac{1}{\varepsilon_0 e^{\varepsilon_0}}$, значит, по признаку Вейерштрасса $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx$ сходится равномерно на $[\varepsilon_0, +\infty)$ при фиксированном a. $\frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} \leqslant \frac{1}{e^{\varepsilon_0 x}}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^{\varepsilon_0 x}} dx = \frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0 e^{\varepsilon_0}}$, значит, по признаку Вейерштрасса $\int\limits_0^1 \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx$ сходится равномерно на $[\varepsilon_0, +\infty)$ при фиксированном a. Значит, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-\varepsilon x} dx$ сходится равномерно на всём интервале $(0, +\infty) \Longrightarrow$ по теореме о непрерывности несобственного интеграла с параметром $I(a,\varepsilon) \in C(0, +\infty)$ по ε.

Тогда из непрерывности при $\varepsilon \to 0 + 0$ имеем $I(a,\varepsilon) = \arctan(\frac{a}{\varepsilon}) \to \frac{\pi}{2}$. ■

20 Билет 21

Определение 20.1. *Рассмотрим* $\Gamma_n(x) = \frac{(n-1)!\cdot n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}$, $x \neq 0, -1, \ldots$. *Тогда* $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ *называется гамма-функцией Эйлера.*

Утверждения 20.1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \Gamma(x)$.

Доказательство. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k) = \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\cdot(x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)) =$

$= (n-1)!\cdot(x\cdot\dfrac{x+1}{1}\cdot\dfrac{x+2}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{x+n-1}{n-1} = (n-1)!\cdot x\cdot(1+x)(1+\dfrac{x}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\dfrac{x}{n-1})$

$n^x = \dfrac{n^x}{(n-1)^x}\cdot\dfrac{(n-1)^x}{(n-2)^x}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3^x}{2^x}\cdot 2^x = (1+\dfrac{1}{n-1})^x\cdot(1+\dfrac{1}{n-2})^x\cdot\ldots\cdot(1+\dfrac{1}{2})^x\cdot(1+\dfrac{1}{1})^x = \prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\dfrac{1}{k})^x$

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^x}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^x}{(n-1)!\cdot x\cdot(1+x)\cdot(1+\frac{x}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{x}{n-1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^x}{x\cdot(1+x)\cdot(1+\frac{x}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{x}{n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^x\cdot(1+\frac{x}{k})^{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{1}{k}) - \ln(1+\frac{x}{k}))$$

Заменим по эквивалентности $\ln(1+\frac{1}{k}) \sim \frac{1}{k}$, $\ln(1+\frac{x}{k}) \sim \frac{x}{k}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(x\cdot\frac{1}{k} - \frac{x}{k}) = 0$$

$\Longrightarrow \prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{k})^x\cdot(1+\frac{x}{k})^{-1}$ сходится. ■

Теорема 20.1 (Основное функциональное соотношение)**.** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)!\cdot n^{x+1}}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k+1)}}{\frac{(n-1)!\cdot n^{x}}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n}=x$$

■

Теорема 20.2. $\forall x>0\ \Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt=\frac{1}{x}\int\limits_0^1(1-t)^n dt^x=\frac{n}{x}\int\limits_0^1 t^x(1-t)^{n-1}dt=\ldots=\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{k+1}{x+k})\cdot\int\limits_0^1 t^{x+n-1}dt=$$

$$=\prod_{k=0}^{n}(\frac{k}{x+k})=\frac{\Gamma_{n+1}(x)}{(n+1)^x}$$

$\Longrightarrow \Gamma_{n+1}(x)=(n+1)^x\cdot\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt$, сделаем замену $t=\frac{\tau}{n}$, тогда

$$\frac{(n+1)^x}{n}\cdot\int\limits_0^n(\frac{\tau}{n})^{x-1}(1-\frac{\tau}{n})^n d\tau=\frac{(n+1)^x}{n^x}\cdot\int\limits_0^n\tau^{x-1}(1-\frac{\tau}{n})^n d\tau$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^x}{n^x}=1$, то

$$\exists\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n\tau^{x-1}(1-\frac{\tau}{n})^n d\tau=\Gamma(x)$$

Значит, достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^n\tau^{x-1}(e^{-\tau}-(1-\frac{\tau}{n})^n)d\tau=0$

$e^{-\alpha}\geqslant 1-\alpha\Longrightarrow e^{-\frac{\tau}{n}}\geqslant 1-\frac{\tau}{n}\Longrightarrow e^{-\tau}\geqslant(1-\frac{\tau}{n})^n\Longrightarrow 0\leqslant\int\limits_0^n\tau^{x-1}(e^{-\tau}-(1-\frac{\tau}{n})^n)d\tau$

$e^{\alpha}\geqslant 1+\alpha\Longrightarrow e^{\frac{\tau}{n}}\geqslant 1+\frac{\tau}{n}\Longrightarrow e^{\tau}\geqslant(1+\frac{\tau}{n})^n\Longrightarrow$

$$\int\limits_0^n\tau^{x-1}(e^{-\tau}-(1-\frac{\tau}{n})^n)d\tau=\int\limits_0^n\tau^{x-1}e^{-\tau}(1-e^{\tau}(1-\frac{\tau}{n})^n)d\tau\leqslant\int\limits_0^n\tau^{x-1}e^{-\tau}(1-(1+\frac{\tau}{n})^n(1-\frac{\tau}{n})^n)d\tau=$$

$$=\int\limits_0^n\tau^{x-1}e^{-\tau}(1-(1-\frac{\tau^2}{n^2})^n)d\tau\leqslant\int\limits_0^n\tau^{x-1}e^{-\tau}(1-(1-\frac{\tau^2}{n}))d\tau=\frac{1}{n}\int\limits_0^n\tau^{x+1}e^{-\tau}d\tau\leqslant\frac{C}{n}\to 0$$

■

21 Билет 22

Теорема 21.1 (Формула дополнения)**.** $\forall x \notin \mathbb{Z}\ \Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Доказательство. $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \Gamma(x)\cdot(-x)\cdot\Gamma(-x) = \frac{1}{x}\cdot\prod\limits_{k=1}^{\infty}((1+\frac{1}{k})^x\cdot(1+\frac{x}{k})^{-1})\cdot(-x)\cdot(-\frac{1}{x})\cdot\prod\limits_{k=1}^{\infty}((1+\frac{1}{k})^{-x}\cdot(1-\frac{x}{k})^{-1}) = \frac{1}{x}\cdot\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})^{-1}$, $\sin(\pi x) = \pi x\cdot\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2}) \Longrightarrow$

$$\frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})^{-1} = \frac{1}{x}\cdot(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

■

Теорема 21.2 (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

Доказательство.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{-\frac{1}{2}}dt = \Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$$

$$\Longrightarrow\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\ \Longrightarrow\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

■

22 Билет 23

Утверждения 22.1. $\forall n \in \mathbb{Z}_+\ \Gamma(n+1) = n!$

Доказательство.

$$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = \ldots = n!\cdot\Gamma(1) = n!\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{(m-1)!\cdot m}{\prod\limits_{k=0}^{m-1}(1+k)} = n!\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{m!}{m!} = n!$$

■

Теорема 22.1 (Формула Стирлинга)**.** *Для* $|\alpha_n| \leqslant 2\ n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}(1+\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}})$

Доказательство.

$$n! = \Gamma(n+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-t} dt$$

Исследуем подынтегральную функцию на максимум:

$$(t^n \cdot e^{-t})' = nt^{n-1} \cdot e^{-t} - t^n \cdot e^{-t} = 0 \implies t = n \implies \max = n^n \cdot e^{-n}$$

$$\implies n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \int\limits_0^{+\infty} (\frac{t}{n})^n \cdot e^{n-t} dt$$

$$\int\limits_0^{+\infty} (\frac{t}{n})^n \cdot e^{n-t} dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{n \cdot \ln(\frac{t}{n}) + n - t} dt$$

Сделаем замену $-x^2 = n \cdot \ln(\frac{t}{n}) + n - t = n \cdot \ln(1 + \frac{t-n}{n}) + n - t$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\ln(1+\tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{1}{(1+\theta\tau)^2},\ |\theta| < 1$$

$$-x^2 = n \cdot (\frac{t-n}{n} - \frac{(\frac{t-n}{n})^2}{2} \cdot \frac{1}{(1+\theta \cdot \frac{t-n}{n})^2}) + n - t = -n \cdot (\frac{(t-n)^2}{2 \cdot (n + \theta \cdot (t-n))^2})$$

$$x = \frac{(t-n)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n + \theta \cdot (t-n)} \implies nx + x\theta \cdot (t-n) = (t-n)\sqrt{\frac{n}{2}} \implies nx(1-\theta) + n\sqrt{\frac{n}{2}} = t(\sqrt{\frac{n}{2}} - x\theta)$$

$$t = \frac{nx(1-\theta) + n\sqrt{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2}} - x\theta}$$

Вычислим дифференциал dt из уравнения $-x^2 = n\ln(\frac{t}{n}) + n - t$

$$-2xdx = n \cdot \frac{n}{t} \cdot \frac{1}{n} dt - dt \implies dt = -\frac{2x}{\frac{n}{t} - 1} dx = -\frac{2xt}{n-t} dx$$

Подставим выражение для t в формулу дифференциала

$$dt = -\frac{2x \cdot \frac{nx(1-\theta)+n\sqrt{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2}} - x\theta}}{n - \frac{nx(1-\theta)+n\sqrt{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2}} - x\theta}} dx = -\frac{2x(x(1-\theta) + \sqrt{\frac{n}{2}})}{-x} dx = 2(x(1-\theta) + \sqrt{\frac{n}{2}})dx$$

Подставим выражения $-x^2$ и dt в исходный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{n \cdot \ln(\frac{t}{n}) + n - t} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot 2(x(1-\theta) + \sqrt{\frac{n}{2}})dx =$$

$$= \sqrt{2n} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx + (1-\theta) \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = \sqrt{2\pi n} + (1-\theta)$$

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot (\sqrt{2\pi n} + (1-\theta)) = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1-\theta}{\sqrt{2\pi n}})$$

Так как $|\theta| < 1$, то $1 - \theta < 2 \Longrightarrow \frac{1-\theta}{\sqrt{2\pi}} < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1-\theta}{\sqrt{2\pi}}$ ■

23 Билет 24

Определение 23.1. *Функция* $B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $x > 0$, $y > 0$, *называется бета-функцией Эйлера.*

Свойства 3. *1.* $B(x,y) = B(y,x)$

2. $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} \cdot B(x,y)$

3. $B(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$

Доказательство. 1. Сделаем замену $t = 1 - s$, тогда

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int\limits_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds = B(y,x)$$

2.

$$B(x+1,y) = \int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = -\frac{1}{y} \cdot \int\limits_0^1 t^x d(1-t)^y = \frac{x}{y} \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt =$$

$$= \frac{x}{y} \cdot \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t) \cdot (1-t)^{y-1} dt =$$

$$= \frac{x}{y} \cdot (\int\limits_0^1 t^{x-1} \cdot 1 \cdot (1-t)^{y-1}dt - \int\limits_0^1 t^{x-1} \cdot t \cdot (1-t)^{y-1}dt) = \frac{x}{y} \cdot (B(x+1,y) - B(x,y))$$

$$B(x+1,y) \cdot (1 + \frac{x}{y}) = \frac{x}{y} \cdot B(x,y) \implies B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} \cdot B(x,y)$$

3. Сделаем замену $t = \frac{1}{1+s}$

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = B(x,y) = -\int\limits_0^{+\infty} (\frac{1}{s+1})^{x-1}(1 - \frac{1}{1+s})^{y-1} d(\frac{1}{1+s}) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^{y-1}}{(1+s)^{x+y-2}} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}} ds$$

■

Теорема 23.1 (Связь гамма и бета функции)**.**

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Доказательство.

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \Gamma(\alpha+\beta))dx$$

Сделаем замену $t = (1+x)y$, тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} (\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} (t^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-t})dt)dx = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} (((1+x)y)^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y(1+x)})dy)dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1} \cdot (\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha+\beta-1}}{1+x} \cdot e^{-y-xy} \cdot (1+x)dy)dx = \int\limits_0^{+\infty} (\int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1} \cdot y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y-xy} dx)dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-y} \cdot y^{\alpha} \cdot (\int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1} \cdot y^{\beta-1} \cdot e^{-xy} dx)dy = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y} \cdot y^{\alpha-1} \cdot (\int\limits_0^{+\infty} s^{\beta-1} \cdot e^{-s} ds)dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-y} \cdot y^{\alpha-1} \cdot \Gamma(\beta)dy = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$$

■

24 Билет 25

Определение 24.1. *Выражение вида* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *называется тригонометрическим полином.*

Определение 24.2. *Система функций* $\{1, \ \{\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}, \ \{\sin(nx)\}_{n=0}^{\infty}\}$ *называется тригонометриической системой.*

Определение 24.3. *Ряды вида* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *называются тригонометрическими рядами.*

Свойства 4. *1.* $\int\limits_0^\pi 1dx = \pi$

2. $\forall n \geqslant 1$ $\int\limits_0^\pi \cos^2(nx)dx = \int\limits_0^\pi \sin^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}$

3. $\forall n,\ m \geqslant 1,\ m \neq n$ $\int\limits_0^\pi \sin(nx)\cdot\sin(mx)dx = \int\limits_0^\pi \cos(nx)\cdot\cos(mx)dx = 0$

4. $\forall n \geqslant 0,\ m \geqslant 1,\ m \neq n$ $\int\limits_0^\pi \cos(nx)\cdot\sin(mx)dx = 0$

Теорема 24.1. *Пусть дан тригонометрический ряд* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$, *тогда*

1. $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

2. $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$

Доказательство. $\forall k$

$$\frac{a_0}{2}\cdot\sin(kx)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin(kx)\cos(nx)+b_n\sin(kx)\sin(nx)) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} \sin(kx)f(x)$$

По теореме о почленном интегрировании и свойствам выше имеем:

$$b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \implies b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

Аналогично, домножив на $\cos(kx)$, получим:

$$a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \implies b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

■

25 Билет 26

Определение 25.1. *Пусть существуют интегралы* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ *и* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$, *тогда* $a_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$, $a_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ *называются коэффициентами Фурье, а ряд* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)dx+b_n\sin(nx))dx$ *называется рядом Фурье функции* $f(x)$.

Теорема 25.1. *Пусть существуют интегралы* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ *и* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx)dx + b_n\sin(nx))dx$$

Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_N(x))^2dx = \min\limits_{T}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_N(x))^2dx$, *где* $T_N(x)$ *- тригонометрический многочлен степени не выше* N.

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_N(x))^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{N}(A_n\cos(nx)dx + B_n\sin(nx))dx)^2dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} A_0\cdot f(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos(nx)dx + B_n\sin(nx)))dx+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{A_0}{2})^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos(nx)dx + B_n\sin(nx)))^2dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - A_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - 2\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)(A_n\cos(nx)dx + B_n\sin(nx)))dx + \pi\cdot\frac{A_0^2}{2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}(A_n\cos(nx)dx + B_n\sin(nx))^2dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - A_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - 2\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)(A_n\cos(nx)dx + B_n\sin(nx)))dx+$$

$$+\pi\cdot\frac{A_0^2}{2} + \pi\cdot\sum_{n=1}^{N}(A_n^2 + B_n^2) + 2\sum_{n=1}^{N}(\int_{-\pi}^{\pi}(A_n\cdot B_n\cdot\frac{\sin(2nx)}{2})dx) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - A_0\cdot\pi\cdot\frac{a_0}{2} - 2\pi\cdot\sum_{n=1}^{N}(A_na_n + B_nb_n) + \pi\cdot\frac{A_0^2}{2} + \pi\cdot\sum_{n=1}^{N}(A_n^2 + B_n^2) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 4\pi\cdot\frac{A_0}{2}\cdot\frac{a_0}{2} - 2\pi\cdot\sum_{n=1}^{N}(A_na_n + B_nb_n) + 2\pi\cdot\frac{A_0^2}{4} + \pi\cdot\sum_{n=1}^{N}(A_n^2 + B_n^2) + 2\pi\cdot\frac{a_0^2}{4} - 2\pi\cdot\frac{a_0^2}{4}+$$

$$+\pi\cdot\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) - \pi\cdot\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{\pi}{2}(A_0 - a_0)^2 + \pi\sum_{n=1}^{N}(A_n - a_n)^2 + \pi\sum_{n=1}^{N}(B_n - b_n)^2 -$$

$$-2\pi \cdot \frac{a_0^2}{4} - \pi \cdot \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)$$

Первое слагаемое - константаб последние 2 не зависят от T. Значит, минимум достигается тогда и только тогда, когда $A_n = a_n$, $B_n = b_n$, а это означает, что $T_N = F_N$. ■

Следствие 25.1.1 (Неравенство Бесселя)**.**

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)$$

Доказательство. Так как изнвчально в левой части был интеграл от квадрата, то слева было неотрицательное число, а значит, и при $T_N = F_N$ оно тоже не отрицательно, а значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - (\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)) \geqslant 0$$

$$\implies \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geqslant (\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2))$$

■

Следствие 25.1.2. *При $N \to \infty$ $a_N \to 0$, $b_N \to 0$.*

Доказательство. Так как $0 \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)$ сходится, а значит, по необходимому условию $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. ■

26 Билет 27

Определение 26.1. *N-м ядром Дирихле называется $D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N} \cos(nx)$*

Свойства 5. *1. D_N — непрерывная, чётная, 2π-периодическая функция*

2.

$$D_N(0) = \frac{1}{2}$$

3.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$$

4.

$$D_N(x) = \frac{\sin(\frac{(2N+1)x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

Утверждения 26.1.

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}((f(x-t)+f(x+t))D_N(t))dt$$

Доказательство.

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

Подставим выражения для a_n и b_n:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}(\cos(nx)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt + \sin(nx)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n(x-t))dt) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{N}(f(t)\cos(n(x-t)))dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=1}^{N}(\cos(n(x-t)))dt$$

Подставим выражение для $D_N(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot D_N(x-t)dt$$

Сделаем замену $x - t = \tau$.

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-\tau)\cdot D_N(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-\tau)\cdot D_N(\tau)d\tau$$

Сдвигаем в силу симметрии пределы интегрирования и делаем замену $-\tau = \tau$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-\tau)\cdot D_N(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\cdot D_N(\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x-\tau)+f(x+\tau))\cdot D_N(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x-\tau)+f(x+\tau))\cdot D_N(\tau)d\tau$$

$\blacksquare$

Теорема 26.1 (Принцип локализации Римана)**.** *Пусть существуют интегралы* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ *и* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.

Тогда $\exists \lim\limits_{N\to\infty}(\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx_0)+b_n\sin(nx_0))) \Longleftrightarrow \forall\delta>0$

$$\exists \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\cdot D_N(\tau)d\tau)=A$$

Доказательство. Из утверждения:

$$F_N(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x-\tau)+f(x+\tau))\cdot D_N(\tau)d\tau$$

Значит, формулировка теоремы равносильна тому, что $\forall\delta>0$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau))\cdot D_N(\tau)d\tau=0$$

Подставим выражение для D_N из свойства 4 ядер Дирихле:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau))\cdot(\frac{\sin(\frac{(2N+1)\tau}{2})}{2\sin(\frac{\tau}{2})})d\tau=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau))\cdot(\frac{\sin(N\tau)\cos\frac{\tau}{2}+\sin(\frac{\tau}{2})\cos(N\tau))}{2\sin(\frac{\tau}{2})})d\tau=$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau))\cdot(\sin(N\tau)\cdot\frac{\cos(\frac{\tau}{2})}{2\sin(\frac{\tau}{2})}+\sin(\frac{\tau}{2})\cdot\frac{\cos(N\tau)}{2\sin(\frac{\tau}{2})})d\tau=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau))\cdot(\sin(N\tau)\cdot\frac{\cos(\frac{\tau}{2})}{2\sin(\frac{\tau}{2})})d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau))\cdot(\sin(\frac{\tau}{2})\cdot\frac{\cos(N\tau)}{2\sin(\frac{\tau}{2})})d\tau=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(\frac{f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau)}{2})\cdot(\sin(N\tau)\cdot\cot(\frac{\tau}{2}))d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(\frac{f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau)}{2})\cdot\cos(N\tau)d\tau = \lim_{N\to\infty} I_1 + I_2$$

Пусть $h(\tau) = \begin{cases} \frac{f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau)}{2},\ \tau\in[\delta,\pi] \\ 0,\ \tau\in[-\pi,\delta) \end{cases}$
тогда $I_1 = a_N(h)\to 0$ при $N\to\infty$.
Аналогично, $g(\tau) = \begin{cases} \frac{f(x_0-\tau)+f(x_0+\tau)}{2}\cdot\cot(\frac{\tau}{2}),\ \tau\in[\delta,\pi] \\ 0,\ \tau\in[-\pi,\delta) \end{cases}$
тогда $I_2 = b_N(g)\to 0$ при $N\to\infty$. ■

27 Билет 28

Теорема 27.1 (Признак Дини поточечной сходимости ряда Фурье)**.** *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция и пусть существуют $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.*
Пусть $\forall x_0\in[-\pi,\pi]$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f_-(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f_+(x_0)$. Тогда если $\forall\delta>0$ интеграл $\int\limits_0^{\delta}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{t}dt$ сходится, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}$

Доказательство.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_N(t)dt - \frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_N(t)dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0))D_N(t)dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0))D_N(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0))D_N(t)dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0))\cdot\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0))\cdot D_N(t)dt = |I_1|+|I_2|$$

Отценим первый так:

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0))\cdot\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}dt < \varepsilon$$

$|I_2| < \varepsilon$ по принципу локализации Римана.
Значит, $|I_1|+|I_2| < 2\varepsilon$, то есть ряд Фурье сходится в точке x_0 к $\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}$ ■

Определение 27.1. *Функция $f(x)$ называется односторонне Гёльдеровой в точке x_0, если $|f(x_0)-f(y)| \leqslant C|x_0-y|^{\alpha}$.*

Следствие 27.1.1. *Если $f(x)$ в точке x_0 односторонне Гёльдерова, то выполняется признак Дини.*

Примеры 3. *1. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ на $(0,\pi)$, продолжим её периодически нечётным образом.*

$$\forall n\ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin(nx)dx=\frac{1}{n}-\frac{\cos(\pi n)}{n}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{\cos(\pi n)}{n}+\frac{\cos(\pi n)}{n}-\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\cos(nx)dx=\frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

2. $f(x)=|x|$

$$\forall n\ b_n=0,\ a_0=\pi,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\sin(nx)dx=-\frac{2(\cos(\pi n)-1)}{\pi n^2}=-\frac{2((-1}{\pi}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^{n+1}+1)\cos(nx)}{\pi n^2}$$

28 Билет 29

Теорема 28.1. *Пусть $f(x)\in C(\mathbb{R})$, везде, кроме, возможно, конечного числа точек на периоде, $\exists f'(x)$ и $f'(x)\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$, тогда*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$$

Доказательство. По условию теоремы $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx$.

Поставим функции $f'(x)$ в соответствие ряд Фурье $\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$.

$a_n = \frac{\alpha_n}{n}$, $b_n = \frac{\beta_n}{n}$. Так как $\frac{|\alpha|}{n} \leqslant \alpha^2 + \frac{1}{n^2}$, $\frac{|\beta|}{n} \leqslant \beta^2 + \frac{1}{n^2}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ряд сходится, а значит, по признаку Вейерштрасса ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$$

■

Теорема 28.2. *Если $f'(x) \in C(\mathbb{R})$ и Гёльдерова во всех точках, то соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье можно почленно дифференцировать.*

Доказательство. Очевидно из предыдущей теоремы и теоремы о дифференцировании функциональных рядов. ■

Теорема 28.3. *Пусть $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.*

Пусть функции $f(x)$ поставлен в соответствие ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, тогда $\int\limits_{0}^{x} (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$ сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$ и может быть получен интегрированием ряда Фурье исходной функции $f(x)$.

Доказательство.

$$\int\limits_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2})dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n \sin(nx)}{n} - \frac{b_n(\cos(nx) - 1)}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n \sin(nx)}{n} - \frac{b_n \cos(nx)}{n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

Так как $\frac{|a_n|}{n} \leqslant a_n^2 + \frac{1}{n^2}$ и $\frac{|b_n|}{n} \leqslant b_n^2 + \frac{1}{n^2}$, то полученный ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к $\int\limits_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$. ■

29 Билет 30

Определение 29.1. *Пусть функции $f(x)$ поставлен в соответствие ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.*

Суммами Фейера называются функции $\Phi_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum\limits_{n=0}^{N} F_n(x)$.

Ядрами Фейера называются функции $\Psi_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum\limits_{n=0}^{N} D_n(x)$.

Свойства 6. *1. $\Psi_N(x)$ — чётная, непрерывная, 2π-периодическая функция.*

2. $\Psi_N(x) = \frac{\sin^2((\frac{N+1}{2})x)}{2(N+1)\sin^2(\frac{x}{2})}$

3. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(x)dx = 1$

4. $\forall\delta > 0 \ \int\limits_{\delta}^{\pi} \Psi_N(x)dx \xrightarrow{N\to\infty} 0$

5. $\Psi_N(x) \geqslant 0$

Доказательство. 1. очевидно

2.

$$\Psi_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(nx)\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})\cos(nx)}{2\sin(\frac{x}{2})} =$$

$$= \frac{\cos(\frac{x}{2})(\cos(\frac{x}{2})-\cos((N+\frac{1}{2})x))+\sin(\frac{x}{2})(\sin((N+\frac{1}{2})x)-\sin(\frac{x}{2}))+2\sin^2(\frac{x}{2})}{4\sin^2(\frac{x}{2})} =$$

$$= \frac{-\cos(\frac{x}{2})\cos((N+\frac{1}{2})x)+\sin(\frac{x}{2})\sin((N+\frac{1}{2})x)+cos(x)+2\sin^2(\frac{x}{2})}{4(N+1)\sin^2(\frac{x}{2})} =$$

$$= \frac{-\cos((N+1)x)+cos(x)+2\sin^2(\frac{x}{2})}{4(N+1)\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{-\cos((N+1)x)+1}{4(N+1)\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{\sin^2((\frac{N+1}{2})x)}{2(N+1)\sin^2(\frac{x}{2})}$$

3.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_N(x)dx = \frac{1}{\pi(N+1)}\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n(x)dx = 1$$

4. $\forall\delta > 0$

$$0 \leqslant \int\limits_{\delta}^{\pi}\Psi_N(x)dx = \int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2((\frac{N+1}{2})x)}{2(N+1)\sin^2(\frac{x}{2})}dx \leqslant \int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{1}{2(N+1)\sin^2(\frac{x}{2})}dx \leqslant \frac{C}{2(N+1)} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

5. Следует из пункта 2.

■

Теорема 29.1 (Фейера)**.** *Если $f(x) \in C(\mathbb{R})$ и $f(x)$ — 2π-периодическая функция, то $\Phi_N(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$*

Доказательство.

$$F_N(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)dt \implies$$

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} F_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\Psi_N(t)dt$$

$$|\Phi_N(x) - f(x)| = |\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)\cdot\Psi_N(t)dt - f(x))| = |\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Psi_N(t)(f(x+t)-f(x)))dt| \leqslant$$

$$\leqslant |\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}(\Psi_N(t)(f(x+t)-f(x)))dt|+|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}(\Psi_N(t)(f(x+t)-f(x)))dt|+|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(\Psi_N(t)(f(x+t)-f(x)))$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}|\Psi_N(t)(f(x+t)-f(x))|dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|\Psi_N(t)(f(x+t)-f(x))|dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}|\Psi_N(t)(f(x+t)-f(x))|dt$$

В первом интеграле сдвинем пределы интегрирования на 2π и применим свойство 4 ядра Фейера и определение непрерывности, тем самым ограничим первый интеграл $\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\pi}$. Второй интеграл отценим $\frac{2M\varepsilon_2}{\pi}$, а третий — аналогично с первым — $\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\pi}$. ■

Теорема 29.2 (Вейерштрасса)**.** *Пусть* $f(x) \in C[a,b]$, *тогда* $\exists\{P_n(x)\}$ *многочленов таких, что* $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ *такой, что* $\forall x \in [a,b]$ $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. С помощью замены $t = \pi\cdot\frac{x-a}{b-x}$ перейдём к отрезку $[0,\pi]$ непрерывно продолжаем функцию до отрезка $[-\pi,\pi]$. Тогда по теореме Фейера существует тригонометрический многочлен, равномерно приближающий функцию. Разложим синусы и косинусы тригонометрического многочлена по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Полученный многочлен будет искомым многочленом. ■

Теорема 29.3 (Равенства Парсеваля)**.**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_N(x))^2dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx+\sum_{n=1}^{N}((A_n-a_n)^2+(B_n-b_n)^2)+2(\frac{a_0}{2}-\frac{A_0}{2})-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists T_N(x)$ такой, что

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx \geqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\implies \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

$\blacksquare$