

Пусть U инвариантное подпространство V для линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V$.

Определение. Ограничением φ на подпространство U называется отображение $\varphi|_U : U \rightarrow U$

такое, что $\forall u \in U \varphi|_U(u) = \varphi(u)$

Рассмотрим фактор-пространство $\bar{V} = V/U : \bar{v} = v+U, v \in V$

Определение. Оператор $\bar{\varphi} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ называется фактор-оператором.

$\forall v' = v+U$, где $u \in U$, $\varphi(v') = \varphi(v) + \varphi(u) \implies \varphi(\bar{v}') = \varphi(\bar{v})$ (так как $\varphi(u) \in U \implies \bar{\varphi} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ - линейный оператор.

Теорема. 1. Если $\exists U \neq 0$, U - подпространство V , $\text{Im} \varphi \subset U$, то в подходящем базисе $A_\varphi = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (1), где $B_{m \times m}$ - матрица линейного оператора $\varphi|_U$, где $m = \dim U$, а C - матрица оператора $\bar{\varphi}$.

2. Если $V = U \oplus W$, где U и W - инвариантные подпространства относительно φ , то в подходящем базисе $A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (2), где $B = A_{\varphi|_U}$, $C = A_{\varphi|_W}$. 3. Верны и обратные

утверждения: если в некотором базисе A_φ имеет вид (1), то для φ существует инвариантное подпространство, а если A_φ имеет вид (2), то V - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

Доказательство. 1. Обозначим $\dim V = n$, $\dim U = m$, $0 < m < n$. Выберем базис в U e_1, \dots, e_m и дополним его до базиса в V произвольными векторами e_{m+1}, \dots, e_n . Тогда $\forall u \in U$ $u =$

$$\sum_{i=1}^m u_i e_i \implies \varphi(u) = \sum_{i=1}^m u_i \varphi(e_i) \text{ В частности, столбцы } \varphi(e_1) \dots \varphi(e_m) \text{ имеют вид: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{они}$$

составляют матрицу $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ Разбивка матрицы, составленной из столбцов образов базисных

векторов e_{m+1}, \dots, e_n , Видно, что $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_U}$. 2. Если $V = U \oplus W$, векторы

e_{m+1}, \dots, e_n надо выбирать в W , а остальное аналогично предыдущему пункту. 3. В обратную сторону для второго случая: если в базисе e_1, \dots, e_n матрица имеет вид (2), то положим в качестве $U = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$, а $W = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$ Из определения матрицы $A_{\varphi, e}$ следует, что

U и W - инварианты относительно φ , $\varphi|_U$ имеет матрицу B , а $\varphi|_W$ имеет матрицу C .

Для первого случая: $\bar{e}_j = e_j + U$, для $m+1, n$, является базисом в фактор-пространстве $\bar{V} = V/U$ $\bar{\varphi}(\bar{e}_j) = \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i + \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k = \sum_{k=m+1}^n e_k \bar{e}_k$ (так как первая сумма $\in U$)

$$\implies C = \begin{pmatrix} a_{m+1, m+1} & \dots & a_{m+1, n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n, m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \bar{\varphi}. \quad \square$$

Замечание. В общем случае, если $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$, то в некотором базисе, согласно разложению, $A_\varphi = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}$, где B_i - матрица $\varphi|_{U_i} \forall i = 1, \dots, s$

Пример. (Естественные примеры инвариантных подпространств (доказательство - упражнение)) $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор. 1. $\text{Ker} \varphi$, $\text{Im} \varphi$ и любое подпространство $U : \text{Im} \varphi \subset U$, тогда U является инвариантным подпространством относительно φ . 2. Если U_1 и U_2 являются инвариантными подпространствами относительно оператора φ , то $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$ также являются инвариантными относительно оператора φ .

0.1 Действия над линейными отображениями и операторами

Пусть $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - линейное отображение, тогда: 1. $\forall \lambda \in \mathbb{F} (\lambda \varphi)(x) = \lambda \varphi(x), \forall x \in V_1$ 2. Если $\psi : V_1 \rightarrow V_2$, то $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \forall x \in V_1$

Утверждение. 1 Относительно этих операций множество $L(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 является векторным пространством.

Утверждение. 2 Если $\dim V_1 = n, \dim V_2 = m$, то $L(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$

Доказательство. Зафиксируем базисы в V_1 и V_2 e и f соответственно, тогда $\forall \varphi$ взаимоднозначно соответствует его матрица $A_{\varphi, e, f}$ относительно базисов e и f . $A_{\lambda \varphi} = \lambda A_\varphi \forall \lambda \in \mathbb{F}$ $(\lambda \varphi)(e_j) = \lambda \varphi(e_j) \implies$ все столбцы A_φ умножаются на $\lambda \implies A_\varphi$ умножается на λ . $\forall j = 1, \dots, m (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j) \implies$ столбцы $A_{\varphi + \psi}$ имеют вид $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$. \square

Обозначение: $L(V_1, V_2) = \kappa(V_1, V_2) = \text{Hom}(V_1, V_2)$. $\mathfrak{K}(V)$ - множество линейных операторов на V .

Определение. Произведением линейных операторов $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ и $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ называется их композиция $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$, где $x \in V_1$.

Утверждение. 3 Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.

Утверждение. 4 Пусть V_1, V_2, V_3 - конечномерные векторные пространства, а $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ и $\varphi : V_2 \rightarrow V_3$ - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции $A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi A_\psi$.

Доказательство. Утверждение 3 - упражнение. Утверждение 4: Пусть e - базис в V_1 , f - базис в V_2 , g - базис в V_3 . $A_\varphi = (\varphi(e_1) \uparrow \dots \varphi(e_n) \uparrow)$ в базисе f , $A_\psi = (\psi(f_1) \uparrow \dots \psi(f_m) \uparrow)$ в базисе g . $\forall x = eX$, обозначим $y = \varphi(x)$, $z = \psi(y)$ со столбцами координат Y и Z соответственно. Тогда $Y = A_\varphi X$, $Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi \circ \varphi} X$. \square

Теорема. Множество $\kappa(V)$ с операциями $+$, $\cdot \lambda$, \cdot является ассоциативной алгеброй с единицей, равной Id_V . Если $\dim V = n$, то $\kappa(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Следует из утверждений 1 - 4. \square

Утверждение. Если φ - линейный оператор на V , то $\forall k \in \mathbb{N}$ подпространства $\text{Ker} \varphi^k$ и $\text{Im} \varphi^k$ - инварианты.

При этом $0 \equiv \text{Ker} \varphi \equiv \text{Ker} \varphi^2 \equiv \dots$
 $V \supseteq \text{Im} \varphi \supseteq \text{Im} \varphi^2 \dots$

0.2 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор над полем \mathbb{F} .

Определение. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ , если $\exists \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(x) = \lambda \cdot x$ и $x \neq 0$. λ называется собственным значением оператора φ , соответствующим вектору x .

Пусть $\dim V = n$, e - базис в V , в нём $\forall x = e \cdot X$, тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно $A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0$ (2) - это СЛУ для нахождения вектора x , если известна λ . Система (2) имеет ненулевое решение, только если $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$ (3). Равенство (3) называется характеристическим уравнением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

Пример. Пример 1. $V = D^\infty(\mathbb{R})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций. $\varphi \frac{d}{dx} \forall f(x) \varphi(f) = f'(x)$. $\forall \lambda \in \mathbb{R} (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$.

Доказательство. Если $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$, то $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, где $C \neq 0$. Рассмотрим $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \implies f(x)e^{-\lambda x} = C$. \square

Пример 2. $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Упражнение. Какие существуют собственные векторы и собственные значения у φ во втором примере?