

Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над \mathbb{R} , отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, тогда в некотором базисе V φ действует матрицей $Y = A_\varphi X$, где $X \in \mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем \mathbb{C} , действующий при той же матрице $A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n Z \rightarrow A_\varphi Z$, соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как \mathbb{C} алгебраически замкнуто, то \exists собственный вектор Z_0 , отвечающий выбранному λ . Это значит, что $A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0$, $Z_0 = X_0 + iY_0$, где X_0 и $Y_0 \in \mathbb{R}^n \implies A_\varphi Z_0 = A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \implies$

$$\begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases}$$
 Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \longrightarrow \text{подпространство } U = \langle x_0, y_0 \rangle \subset V \text{ является инвариантным подпространством для } \varphi.$$

Теперь докажем, что $\dim U = 2$.

Доказательство. Предположим, что $\dim U = 1$, то есть $y_0 = \mu x_0$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \implies$ если $x_0 \neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ .

$A_{\varphi_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ имеет корни $\alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ - противоречие. □

Теорема. Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное подпространство.

Доказательство. Если $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характеристического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V$, $u_i \neq 0, \implies \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.

Если $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $\exists U$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Вместо диагонализированности можно использовать следующее утверждение:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & \\ & \ddots & & & & \\ & & & & & \\ & & \alpha_m & \beta_m & & \\ & & -\beta_m & \alpha_m & & \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, \text{ а } \beta_j \neq 0, j = \overline{1, m}$$

0.1 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор над полем \mathbb{F} .

Определение. Линейный оператор $\varphi : V \rightarrow V$ такой, что $\varphi(v) = v \ \forall v \in V$, называется тождественным оператором и обозначается Id .

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \dots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ , если $f(\varphi) = a_0\text{Id} + a_1\varphi + \dots + a_m\varphi^m = 0$, то есть $f(A_\varphi) = 0$
 $\implies A_{f(\varphi)} = f \cdot A_\varphi = a_0E + a_1A_\varphi + \dots + a_mA_\varphi^m$.

Пример. $V = \mathbb{R}[t]_n$, $\varphi = \frac{d}{dt}$.
 $\varphi^n(t^n) = n!$, $\varphi^{n+1} \equiv 0 \implies$ для $\varphi = \frac{d}{dt}$ t^{n+1} - анулирующий многочлен.

Утверждение. Если $\dim V = n$, то \exists многочлен степени $\leq n^2$, анулирующий φ .

Доказательство. $\dim L(V) = n^2$, $L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \implies$ операторы Id , φ , φ^2 , \dots , φ^{n^2} линейно зависимы, так как их больше $n^2 \implies \exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{F} : a_0\text{Id} + a_1\varphi + \dots + a_{n^2}\varphi^{n^2} = 0 \implies a_0 + a_1t + \dots + a_{n^2}t^{n^2}$ - многочлен анулирующий φ \square

Определение. Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица $P = (P_{ij}(\lambda))$, где $P_{ij}(\lambda)$ - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

Пример. $P = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2$ - многочлен от λ с матричными коэффициентами.

Определение. Оператор $\varphi V \rightarrow V$ называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

Определение. Для матрицы $A = (a_{ij})$ присоединённой матрицей называется матрица $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, то есть $\hat{a}_{ij} = A_{ji}$.

Свойство. $A \cdot \hat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$.

Теорема. Гамильтона-Кэли Характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ является анулирующим многочленом для линейного оператора φ , то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$, где 0 - нулевой оператор. В матричной форме:

$\forall A \in M_n(\mathbb{F}), \chi_\varphi(A) = 0$.

Доказательство. Пусть A - данная матрица. \square