Определение. Билинейная функция называется симметрической, если $\forall x,\, y \in V : b(x,y) = b(y,x)$.

Определение. Билинейная функция называется кососимметрической (при $char\mathbb{F} \neq 2$), если $\forall x,\, y \in V : b(x,y) = -b(y,x)$.

Утверждение. *(1) Любая билинейная функция над полем $\mathbb{F}$: $char\mathbb{F} \neq 2$, единственным образом представляется в виде $b(x,y) = b_+(x,y) + b_-(x,y)$, где $b_+(x,y)$ - симметрическая функция, а $b_-(x,y)$ - кососимметрическая функция.*

Доказательство. Если есть равенство $\begin{cases} b(x,y) = b_+(x,y) + b_-(x,y) \\ b(y,x) = b_+(x,y) - b_-(x,y) \end{cases} \Longrightarrow$

$$b_+(x,y) = \tfrac{b(x,y)+b(y,x)}{2},\ b_-(x,y) = \tfrac{b(x,y)-b(y,x)}{2}.$$

□

Утверждение. *Билинейная функция $b(x,y)$ симметрична (кососимметрична)$\Longleftrightarrow$ в любом базисе e : $B_e^T = B_e$ ($B_e^T = -B_e$).*

Доказательство. (Докажем для симметрической, для кососимметрической аналогично) $\underline{\Longrightarrow}$ Пусть $B = (b_{ij})$, тогда $b_{ij} = b(e_i, e_j)$. Если $\forall x,\, y \in V,\, b(x,y) = b(y,x)$, то $b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$.
$\underline{\Longleftarrow}$ $b(x,y) = X^T BY$, $b(y,x) = Y^T BX = (X^T B^T Y)^T = (X^T BY)^T = b(x,y)$. □

Утверждение (1) $\Longleftrightarrow$ $\forall$ матрицы B некоторой билинейной функции верно, что $B = B_+ + B_-$, где B_+ - матрица симметрической билинейной функции, а B_- - матрица кососимметрической билинейной функции.

Определение. Квадратичная функция, порождённая билинейной функцией $b(x,y)$ - это функция на V, обозначаемая $k(x) := b(x,x)$, если $k(x) \not\equiv 0$.

Если b - кососимметрическая функция, то $b(x,x) = 0 \Longrightarrow k(x) \equiv 0$. В общем случае существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную, таких, что если $b(x,y) = b_+(x,y) + b_-(x,y)$, то $b(x,x) = b_+(x,x)$.

Теорема. *$\forall$ квадратичной функции $\exists!$ симметрическая билинейная функция, которая её порождает.*

Доказательство. Допустим, что $b(x,y) = b(y,x)$ - симметрическая билинейная функция и $k(x) = b(x,x)$. Тогда $\forall x, y \in V$
$k(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) =$
$= b(x,x) + 2b(x,y) + b(y,y) = k(x) + 2b(x,y) + k(y)$.
Так как $char\mathbb{F} \neq 2$, то
$b(x,y) = \frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$. □

Определение. Билинейная функция $b(x,y) = \frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$ называется поляризацией квадратичной функции k.

Далее будем считать матрицу квадратичной формы матрицей её полярной симметрической билинейной функции $b(x,y)$.

$b(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}x_i y_i + \sum\limits_{i<j} b_{ij}x_i y_j + \sum\limits_{i>j} b_{ij}x_i y_j,\ \forall i,\, j\ b_{ij} = b_{ji} \Longrightarrow$

$b(x,x) = k(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_{ij}x_i x_j$. (1)

Пример. Пусть $k(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 - 7x_3^2$, тогда

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Определение. Пусть $b(x, y)$ - симметрическая или кососимметрическая билинейная функция и $\emptyset \neq L \leqslant V$. Ортогональным дополнением к L относительно билинейной формы $b(x, y)$ называется $L^\perp := \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in L\}$.

Замечание. Запись $x \perp y$ означает, что $b(x, y) = 0$.

Определение. $V^\perp = \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in V\}$ - ядро формы.

Определение. Билинейная функция $b(x, y)$ называется невырожденной, если $Kerb = V^\perp = \{0\}$.

Упражнение. $b(x, y)$ - невырожденная функция $\Longleftrightarrow \det B \neq 0$.

0.1 Квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма в некотором базисе называется диагональной, если в этом базисе $k(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{F}$.

Теорема. *В конечномерном пространстве V ($char\mathbb{F} \neq 2$) $\exists$ базис, в котором эта форма диагональна.*

Доказательство. (Алгоритм Лагранжа (метод выделения полных квадратов)) По формуле (1) $k(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum\limits_{i<j} b_{ij}x_ix_j$.
1. Основной случай: $\exists i : b_{ii} \neq 0 \Longrightarrow$ можно перенумеровать неизвестные $x_1, \ldots, x_n$, так что $b_{11} \neq 0$. Выделим в $k(x)$ все одночлены, содержащие x_1
$k(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum\limits_{i=2}^{n} b_{1i}x_i + \widetilde{k}(x_2, \ldots, x_n)$ и дополним выражение до квадрата $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} k(x) = b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} \tfrac{b_{1i}}{b_{11}} x_i + (\sum_{i=2}^{n} \tfrac{b_{1i}}{b_{11}} x_i^2)) - \frac{(\sum\limits_{i=2}^{n} b_{1i}x_i)^2}{b_{11}} + \widetilde{k} = \\ = b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \tfrac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2 + k_2(x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Затем для формы $k_2(x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=2}^{n} b'_{ii}x_i^2 + \sum\limits_{2 \leqslant i<j \leqslant n} b'_{ij}x_ix_j$ найдём коэффициент $b'_{jj} \neq 0$ и выделим квадрат как на предыдущем шаге. На каждом шаге число переменных уменьшается на единицу, а значит, за конечное число шагов (а именно $\leqslant n-2$) форма приобретёт диагональный вид.
2. Особый случай: $\forall i\ b_{ii} = 0$, но так как $k(x) \not\equiv 0 \Longrightarrow \exists$ индексы i и j такие, что $b_{ij} \neq 0$, то есть в выражение $k(x_i, x_j)$ входит одночлен $2b_{ij}x_ix_j$.
Пусть $x_i = x'_i + x'_j$ и $x_j = x'_i - x'_j$, тогда $x_ix_j = x_i'^2 - x_j'^2$, то есть появился квадрат с коэффициентом, не равным нулю $\Longrightarrow$ можно перейти к общему случаю. $\square$

Замечание. В благоприятном случае, когда на первом шаге коэффициент при x_1 не равен нулю, на втором шаге коэффициент при x_2 не равен нулю и т.д., матрица замены будет иметь вид:

$$C^{-1}_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & \frac{b1n}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{b_{1n}}{b_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ - матрица с 1 на диагонали} \Longrightarrow |C^{-1}_{e\to e'}| = 1 \neq 0.$$

Определение. Форма $k(x_1, \dots, x_n)$ называется канонической(нормальной), если:
1. (над $\mathbb{R}$) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только такие значения: -1, 0, 1.
2. (над $\mathbb{C}$) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только такие значения: 0, 1.

1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $k(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$.
Если $rkB = r$, то $k(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 (\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0)$.
Если $\alpha_i > 0$, то введём обозначение $\widehat{x_i} = \sqrt{\alpha_i} x_i \Longrightarrow k = \widehat{x_1}^2 + \dots + \widehat{x_p}^2 - \widehat{x_{p+1}}^2 - \dots - \widehat{x_r}^2$, где p - количество коэффициентов $\alpha_i > 0$.
Если $\alpha_i < 0$, то $\widehat{x_i} = -\sqrt{\alpha_i} x_i$.
2. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, тогда $\forall i = \overline{1, r}$ $\widehat{x_i} = \sqrt{\alpha_i} x_i \Longrightarrow k = \widehat{x_1}^2 + \dots + \widehat{x_r}$.