Содержание

1 Кривые

1.1 Кривые на плоскости

Здесь и далее координаты векторов обозначаем верхними индексами, производные обозначаем так: $\dot{a}$.

Определение 1.1. *Гладкая элементарная регулярная вложенная плоская кривая — множество точек γ на плоскости, задаваемое параметрическими уравнениями*

$$z^1 = u(t)$$

$$z^2 = v(t)$$

$$z(t) = (u(t), v(t))$$

причём

1. $t \in [a,\ b]$
2. $z(t) \in C^\infty[a,\ b]$ *(гладкость)*
3. $\forall t \in [a,\ b]\ \dot{z}(t) = (\dot{u}(t),\ \dot{v}(t)) \neq 0$ *(вектор скорости кривой не обращается в 0 на отрезке $[a,\ b]$ (регулярность))*
4. *если $z(t_1) = z(t_2)$, то $t_1 = t_2$*

Пример 1.

$$z^1(t) = t^3$$

$$z^2(t) = t^2$$

$$t \in [-1,\ 1]$$

Упражнение. *Пусть γ — прямой угол, необходимо задать $z = r(t)$, где $r(t) \in C^\infty$.*

Определение 1.2. *Замена параметра вида: $t(\tau)$, где $\tau \in [\alpha,\ \beta]$, $t(\tau) \in C^\infty[\alpha,\ \beta]$, $t'(\tau) \neq 0$, называется допустимой заменой.*

Определение 1.3. *Касательной к кривой γ в точке $r(t_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку в направлении вектора $\dot{r}(t_0)$. $z = r(t_0) + \tau \cdot \dot{r}(t_0)$.*

Определение 1.4. *Нормалью к кривой γ в точке $r(t_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку и ортогональная касательной.*

Определение 1.5. *Длина дуги кривой между точками t_1 и t_2 называется число*

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$$

Упражнение. *Доказать, что l не зависит от допустимой параметризации.*

Рассмотрим кривую $\gamma \ : \ z = r(t)$, рассмотрим точку t_0 на этой кривой и функцию $s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{r}(t_1)| dt_1$. Зададим параметризацию $t = t(s)$.

Определение 1.6. *Такая параметризация называется натуральной параметризацией, а s называется натуральным параметром.*

Замечание 1. *Если кривая γ задана натуральной параметризацией, то*

$$l = |s(t_2) - s(t_1)|$$

Замечание 2. $v(s) = 1$, *обозначение:* $\rho'(s) := v(s)$.

Пусть даны две кривые γ и $\tilde{\gamma}$, s_0 — их общая точка.

$$\gamma \ : \ z = \rho(s)$$

$$\tilde{\gamma} \ : \ z = \rho(\tilde{s})$$

$$\rho(s_0) = \tilde{\rho}(s_0)$$

Определение 1.7. *Кривые γ и $\tilde{\gamma}$ имеют в точке s_0 касание порядка k, если натуральные параметры можно выбрать так, что $\rho(s) - \tilde{\rho}(s) = (s - s_0)^k$.*

Утверждение 1.1. *Кривые γ и $\tilde{\gamma}$ имеют в точке s_0 касание порядка k тогда и только тогда, когда натуральные параметры можно выбрать так, что*

$$\rho(s_0) = \tilde{\rho}(s_0), \ \rho'(s_0) = \tilde{\rho}'(s_0), \ \ldots, \ \rho^{(k)}(s_0) = \tilde{\rho}^{(k)}(s_0)$$

.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\rho(s) - \tilde{\rho}(s) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\rho^{(j)}(s_0) - \tilde{\rho}^{(j)}(s_0)}{j!} \cdot (s - s_0)^j + \overline{\overline{o}}((s - s_0)^k)$$

∎

Лемма 1.1. *Пусть $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(t)$ —бесконечно дифференцируемая вектор-функция и $l = const$, тогда $\alpha \perp \dot{\alpha}$.*

Доказательство. $l^2 = (\alpha,\ \alpha) = const \Longrightarrow |\alpha|^2 = const \Longrightarrow (|\alpha|^2)' = 2(\alpha,\ \dot{\alpha}) = 0.$ ■

Следствие 1.0.1. *Если $z = \rho(s)$ — нормальная параметризация кривой γ, то $(\ddot{\rho},\ \dot{\rho}) = 0$.*

Замечание 3. *Далее вместо $\dot{\rho}$ пишем ρ', имея ввиду, что ρ — натуральная параметризация.*

Теорема 1.1. *Пусть в некоторой точке s_0 кривой γ $\rho''(s_0) \neq 0$, тогда существует единственная окружность, имеющая касание второго порядка в точке s_0, причём центр этой окружности находится на нормали к кривой γ в направлении $\rho''(s_0)$, а её радиус $R = \frac{1}{|\rho''(s_0)|}$.*

Доказательство. Рассмотрим окружность $\tilde{\gamma}$ с центром в точке z_0 и радиуса $R = \frac{1}{|\rho''(s_0)|}$. Зададим эту окружность так:

$$\tilde{\gamma}\ :\ z = z_0 + \begin{pmatrix} a\cos(\frac{s}{a}) \\ a\sin(\frac{s}{a}) \end{pmatrix}$$

Тогда $\tilde{\rho}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{a}) \\ \cos(\frac{s}{a}) \end{pmatrix}$

$$\tilde{\rho}''(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}\cos(\frac{s}{a}) \\ -\frac{1}{a}\sin(\frac{s}{a}) \end{pmatrix}$$

Значит, $|\tilde{\rho}''(s)| = \frac{1}{a}$. ■

Определение 1.8. *Построенная окружность называется соприкасающейся окружностью. Её центр называется центром кривизны, её радиус R — радиусом кривизны, а величина $k = \frac{1}{R}$ — кривизной кривой.*

Замечание 4. *Пусть $\ddot{a}(s_0) \neq 0$, тогда пара $\{v(s_0),\ n(s_0) = \frac{\ddot{a}(s_0)}{|\ddot{a}(s_0)|}\}$ — ортонормированный репер с центром в точке s_0, $n(s_0)$ — вектор нормали.*

Определение 1.9. *Такой репер называется репером Френе.*

Утверждение 1.2 (Плоские формулы Френе)**.**

1. $v' = \frac{1}{R} \cdot n$
2. $n' = -\frac{1}{R} \cdot v$

Доказательство.

1. $n = \frac{\rho''}{|\rho''|} = \frac{v'}{\frac{1}{R}}$, то есть $v' = \frac{1}{R} \cdot n$.

2. По лемме 1.1 $n' \perp n$, тогда $n' \parallel v \Longrightarrow n' = \lambda v$. Так как $(v,\ n) = 0$, то $(v,\ n') + (v',\ n) = 0$. По пункту 1. $v' = \frac{1}{R} \cdot n$, тогда $\frac{1}{R}(n,\ n) + \lambda(v,\ v) = 0$. Векторы $\vec{n}$ и $\vec{v}$ имеют единичную длину, значит, $\lambda = -\frac{1}{R}$, то есть $n' = -\frac{1}{R} \cdot v$.

■

Замечание 5. *Пусть плоскость ориентирована и* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, *тогда рассмотрим* $\tilde{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

В таком случае можно не требовать, что вектор скорости нигде не обращается в ноль. При этом $\tilde{k} = \begin{cases} k, \text{ при } \tilde{n} = n \\ -k, \text{ при } \tilde{n} = -n \\ 0, \text{ при } \ddot{a} = 0 \end{cases}$

Утверждение 1.3.

1. *Формулы Френе остаются верными при замене n на $\tilde{n}$ и k на $\tilde{k}$.*

2. $\tilde{k} \in C^\infty$

Доказательство.

1. Так как $\tilde{n} = n$ либо $\tilde{n} = -n$, и знаки $\tilde{n}$ и $\tilde{k}$ совпадают, и $|k| = |\tilde{k}|$, то $kn = \tilde{k}\tilde{n}$.

2. $|\tilde{n}| = 1$, рассмотрим $(v',\ \tilde{n})$. По первой плоской формуле Френе $(v',\ \tilde{n}) = \tilde{k} \cdot (\tilde{n},\ \tilde{n}) = \tilde{k} = v_1 \cdot v_2' - v_2 \cdot v_1'$. Так как v — бесконечно непрерывно дифференцируемая функция, то $\tilde{k}$ тоже.

■

Теорема 1.2 (о восстановлении кривой по функции кривизны)**.**

1. *Пусть $k_0 \in C^\infty[0,\ l]$, тогда существует кривая γ такая, что k_0 — её функция кривизны.*

2. *Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые такие, что $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2$, тогда существует движение f плоскости, переводящее γ_1 в γ_2, то есть $f(\gamma_1) = \gamma_2$.*

Доказательство.

1. Рассмотрим $\alpha(s) = \int\limits_0^s k_0(s_1)ds_1 + \alpha_0$, тогда $\alpha' = k_0$. Рассмотрим $v(s) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s)) \\ \sin(\alpha(s)) \end{pmatrix}$, тогда $r(s) = \int\limits_0^s v(s_1)ds_1$. Рассмотрим кривую $\gamma\ :\ z = r(s)$. Эта кривая гладкая, так как $v(s)$ — гладкая функция. Так как $v(s)$ — бесконечно непрерывно дифференцируемая функция, то $r(s)$ тоже. Из того что $|v(s)| = 1 \neq 0$, следует, что γ регулярна, а так же $r'' = v' = \alpha' \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = k_0 \cdot \tilde{n}$, то есть k_0 — кривизна кривой γ.

2. Соединим начала данных кривых при помощи сдвига. Затем, применим поворот, чтобы их векторы скорости в начальной точке совпали. Так как $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2$, то $v_1' = v_2'$, значит, $v_1 = v_2 + const$. Так как вектора скорости в начальной точке совпадают, то $const = 0$. Аналогично $r_1(s) = r_2(s)$. Композиция использованных сдвига и поворота является искомым движением.

■

Замечание 6. *Возможны точки самопересечения, в таких случаях эти точки считаем различными.*

1.2 Кривые в трёхмерном пространстве

Определение 1.10. *Гладкая элементарная регулярная вложенная кривая — множество точек $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, задаваемое параметрическими уравнениями*

$$z^1 = z^1(t)$$

$$z^2 = z^2(t)$$

$$z^3 = z^3(t)$$

$$z(t) = (z^1(t),\ z^2(t),\ z^3(t))$$

причём

1. $t \in [a,\ b]$
2. $z(t) \in C^\infty[a,\ b]$ *(гладкость)*
3. $\forall t \in [a,\ b]\ \dot{z}(t) = (\dot{z}_1(t),\ \dot{z}_2(t),\ \dot{z}_3(t)) \neq 0$ *(вектор скорости кривой не обращается в 0 на отрезке $[a,\ b]$ (регулярность))*
4. *если $z(t_1) = z(t_2)$, то $t_1 = t_2$*

Определение 1.11. *Касательной к кривой γ в точке $r(t_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку в направлении вектора $\dot{r}(t_0)$. $z = r(t_0) + \tau \cdot \dot{r}(t_0)$.*

Определение 1.12. *Нормальная плоскость к кривой γ в точке $r(t_0)$ — прямая, проходящая через эту точку и ортогональная касательной.* $(z - r(t_0),\ \dot{r}(t_0)) = 0$.

Замечание 7. *Длина дуги, натуральная параметризация, порядок касания, соприкасающиеся окружности, центр и радиус кривизны и кривизна определяются аналогично плоскому случаю.*

Пусть $z = r(s)$ и $r(s_0) \neq 0$ для некоторого s_0, тогда определены $v = r'(s_0)$ и $n = r''(s_0)$

Определение 1.13. *Вектор n — вектор главной нормали к кривой.*

Рассмотрим вектор $b = [v,\ n]$.

Определение 1.14. *Вектор b называется вектором бинормали. Тройка векторов $\{v,\ n,\ b\}$ является ортонормированным репером с центром в точке s_0.*

Лемма 1.2. *Пусть $A(t)$ и $B(t)$ — это $n \times n$ гладкие матричные функции, заданные на отрезке $[a,\ b]$, причём $\dot{Q} = A \cdot Q$, тогда*

1. *если $\forall t \in [a,\ b]$ $Q(t) \cdot Q^T(t) = E$, то $\forall t \in [a,\ b]$ $A^T(t) = -A(t)$.*
2. *если $\forall t \in [a,\ b]$ $A(t)^T = -A(t)$ — ортогональная матрица и $Q(t)$ — ортогональная матрица хотя бы в одной точке, тогда $\forall t \in [a,\ b]$ $Q(t)$ — ортогональная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим

$$(Q^T \cdot Q)' = \dot{Q}^T \cdot Q + Q^T \cdot \dot{Q} = (A \cdot Q)^T \cdot Q + Q^T \cdot A \cdot Q = Q^T(A^T + A)Q$$

$Q^T(A^T + A)Q = 0 \iff A^T + A = 0$, то есть $Q^T \cdot Q = const \iff A^T + A = 0$.

1. Из условия и равносильности выше следует, что $A^T = -A$.
2. Так как для некоторого $t \in [a,\ b]$ $Q^T(t) \cdot Q(t) = E$, то из равносильности выше это равенство верно для любого t.

■

Теорема 1.3 (Пространственные формулы Френе)**.** *Пусть $\forall s$ $r''(s) \neq 0$, тогда существует бесконечно непрерывно дифференцируемая функция $\kappa(s)$ такая, что:*

1. $v' = k \cdot n$
2. $n' = -k \cdot v - \kappa \cdot b$
3. $b' = \kappa \cdot n$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $Q(s) = \begin{pmatrix} v\uparrow & n\uparrow & b\uparrow \end{pmatrix}$, тогда

$$Q'(s) = \begin{pmatrix} v'\uparrow & n'\uparrow & b'\uparrow \end{pmatrix} = A \cdot Q$$

По первому пункту леммы 1.2 A — кососимметрическая матрица.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$. $n = \frac{r''}{|r''|} = \frac{v'}{k}$, то есть $v' = k \cdot n$. Тогда $a_{12} = k$ и $a_{13} = 0$.

Таким образом, матрица A имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим $-a_{23} = \kappa$. Тогда из равенства $Q' = A \cdot Q$ следуют пункты 2 и 3.

Рассмотрим $-(n',\ b) = k \cdot (v,\ b) + \kappa \cdot (b,\ b) = \kappa$, значит, $\kappa(s)$ — гладкая функция. ■

Определение 1.15. *Функция $\kappa(s)$ называется фуннкцией кручения кривой γ.*

Упражнение. *Доказать, что существует вектор $\omega(s)$ такой, что $v' = [\omega,\ v]$, $n' = [\omega,\ n]$, $b' = [\omega,\ b]$.*

Доказательство. Рассмотрим вектор $\omega = -\kappa \cdot v - k \cdot b$ и проверим, что он удовлетворяет нужным условиям.

1. $[\omega,\ v] = [(-\kappa \cdot v - k \cdot b),\ v] = -\kappa[v,\ v] - k[b,\ v] = -k[[v,\ n],\ v]$ (из определения вектора b), тогда $[\omega,\ v] = -k(v \cdot (n,\ v) - n \cdot (v,\ v)) = k \cdot n = v'$.

2. $[\omega,\ n] = [(-\kappa \cdot v - k \cdot b),\ n] = -\kappa[v,\ n] - k[b,\ n] = -\kappa \cdot b - k[[v,\ n],\ n]$ (из определения вектора b), тогда $[\omega,\ n] = -\kappa \cdot b - k(v \cdot (n,\ n) - n \cdot (v,\ n)) = -\kappa \cdot b - k \cdot v = n'$.

3. $[\omega,\ b] = [(-\kappa \cdot v - k \cdot b),\ v] = -\kappa[v,\ b] - k[b,\ b] = -\kappa[v, [v,\ n]]$ (из определения вектора b), тогда $[\omega,\ b] = -\kappa(v \cdot (v,\ n) - n \cdot (v,\ v)) = \kappa \cdot n = b'$.

■

Определение 1.16. *Кривая γ бирегулярна, если $\forall s\ r''(s) \neq 0$.*

Утверждение 1.4. *Пусть кривая γ бирегулярна, тогда она плоская тогда и только тогда, когда $\kappa \equiv 0$.*

Доказательство. По третьему пункту теоремы 1.3 $b' = \kappa n$. Рассмотрим $(b',\ n) = \kappa$.

$\underline{\Longrightarrow}$ Так как $b = b_0 = const$, то $b' \equiv 0 \Longrightarrow \kappa \equiv 0$.

$\underline{\Longleftarrow}$ Так как $\kappa \equiv 0$, то $b' \equiv 0 \Longrightarrow b = b_0 = const$. По определению $(b,\ v) = 0$, тогда $0 = (b_0,\ r') = (b_0,\ r)' \Longrightarrow (b_0,\ r) = const = c_0$. Последнее уравнение является уравнением плоскости, значит кривая γ плоская. ■

Теорема 1.4 (о восстановлении пространственной кривой по кривизне и кручению)**.**

1. *Пусть $k_0(s)$ и $\varkappa_0(s)$ — две бесконечно непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0,\ l]$, причём $\varkappa(s) > 0$, тогда существует бирегулярная кривая γ такая, что $k = k_0$ и $\varkappa = \varkappa_0$.*

2. *Пусть γ и $\tilde{\gamma}$ — две бирегулярные кривые такие, что $k(s) = \tilde{k}(s)$ и $\varkappa(s) = \tilde{\varkappa}(s)$, тогда существует движение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, переводящее γ в $\tilde{\gamma}$.*

Доказательство.

1. Из доказательства пространственных формул Френе $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix}$, рассмотрим матрицу $Q(s)$ такую, что $\dot{Q}(s) = A(s) \cdot Q(s)$ и $Q(0) = \begin{pmatrix} v_0 \uparrow & n_0 \uparrow & b_0 \uparrow \end{pmatrix}$. Последнее уравнение является системой линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями, тогда по теореме Коши существования и единственности решения существует единственное решение $Q(s) = \begin{pmatrix} v(s) \uparrow & n(s) \uparrow & b(s) \uparrow \end{pmatrix}$. Рассмотрим $r(s) = \int\limits_0^s v(s_1) ds_1 + r_0$ и рассмотрим кривую $\gamma\ :\ z = r(s)$. $r'(s) = v(s)$, значит, эта кривая γ является гладкой и регулярной, причём s — нормальный параметр. Так как $r'' = v' = k_0 \cdot n$, то $|v'| = k_0$, то есть k_0 — кривизна кривой γ. По второй пространственной формуле Френе $n' = -k_0 v - \varkappa_0 b \Longrightarrow -\varkappa_0 = (n',\ b)$.

■