Содержание

1 Билет 1

2 Билет 2 (Парадоксы Рассела и Берри)

Пример 1 (Парадокс Рассела). *Рассмотрим множество* $R = \{x | x \notin x\}$*, тогда с одной стороны* $R \in R$*, но в то же время* $R \notin R$ *по определению множества* R*.*

Пример 2 (Парадокс Берри). *Рассмотрим натуральное число* B*, равное наименьшему числу, которое нельзя определить предложением менее чем из 100 слов.*
С одной стороны, данной формулировкой мы определили данное число предложением менее чем из 100 слов, с другой стороны по определению оно не определяется предложением менее чем из 100 слов.

3 Билет 3 (Декартово произведение)

Определение 3.1. *Неупорядоченной парой* (a, b) *называется двуэлементное множество* $\{a, b\}$*.*

Определение 3.2. *Упорядоченной парой* (a, b) *называется двуэлементное множество* $\{a, \{a, b\}\}$*.*

Определение 3.3. *Декартовым произведением множеств* $A \times B$ *называется* $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$*.*

Определение 3.4. *Бинарным отношением на множестве* A *называется* $R \subseteq A \times A$ *такое, что* $xRy = (x, y) \in R$

4 Билет 4 (Отношения и функции)

Определение 4.1. *Отношение* R *на множестве* A *называется отношением порядка, если:*

1. $\forall x, y \in A \ xRy \vee yRx$
2. $\forall x, y \in A \ (xRy) \wedge (yRx) \to x = y$
3. $\forall x, y, z \in A \ (xRy) \wedge (yRz) \to xRz$

Определение 4.2. *Отношение* R *на множестве* A *называется отношением эквивалентности, если:*

1. $\forall x \in A \ xRx$

2. $\forall x, y \in A\ (xRy) \leftrightarrow (yRx)$

3. $\forall x, y, z \in A\ (xRy) \wedge (yRz) \rightarrow xRz$

Определение 4.3. *Функцией f из A в B называется $f \subseteq A \times B$, если $\forall x \in A \exists! y \in B\ :\ (x, y) \in f$*

Определение 4.4. *Функция $f : A \rightarrow B$ называется сюръекцией, если $\forall y \in B \exists x \in A\ :\ f(x) = y$*

Определение 4.5. *Функция $f : A \rightarrow B$ называется инъекцией, если $\forall x_1, x_2 \in A\ (x_1 = x_2) \rightarrow (f(x_1) = f(x_2))$*

Определение 4.6. *Функция $f : A \rightarrow B$ называется биекцией, если она инъективна и сюръективна.*

5 Билет 5 (Фактормножества и разбиения)

Определение 5.1. *Пусть R — отношение эквивалентности на множества X, тогда множество $R(x) = \{y | xRy\}$ называется классом эквивалентности элемента x.*

Определение 5.2. *Множество классов эквивалентности называется фактормножеством и обозначается $X/R := \{R(x) | x \in X\}$.*

Определение 5.3. *Пусть $P(A) = \{B | B \subseteq A\}$ (множество всех подмножеств множества A), тогда $\Gamma \subseteq P(A)$ такое, что:*

1. $\forall B \in \Gamma\ B \neq \varnothing$

2. $\forall x \in A\ \exists! B \in \Gamma\ :\ x \in B$

Утверждения 5.1. *1. A/R — разбиение.*

2. Γ — разбиение A, тогда $\exists! R$ такое, что $\Gamma = A/R$

Доказательство.
1. (a) $A/R \subseteq P(A)$.
   (b) Класс эквивалентности любого элемента $x \in A$ не пуст, так как xRx.
   (c) У любого элемента $x \in A\ \exists R(x) \in A/R$, а в силу транзитивности отношения эквивалентности $\exists! R(x)$.
2. В качестве отношения эквивалентности выберем такое отношение: элементы x и y эквивалентны, если $\exists! B \in \Gamma\ :\ (x \in B) \wedge (y \in B)$. Данное отношение является отношением эквивалентности.

Такое отношение эквивалентности единственно в силу пункта 2 определения разбиения, так как в противном случае у какого-то элемента было бы два различных класса эквивалентности, что противоречит пункту 2.

■

6 Билет 6 (Равномощность, вложимость)

Определение 6.1. *Множества A и B называются равномощными, если между ними существует биекция.*

Определение 6.2. *Множество A вложимо в множество B, если существует инъекция $f : A \to B$. Обозначение: $A \preceq B$.*

Свойства 1.

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \;\leftrightarrow\; B \sim A$
3. $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \to (A \sim C)$
4. $A \preceq A$
5. $(A \preceq B) \wedge (B \preceq C) \to (A \preceq C)$

Теорема 6.1 (Теорема Кантора-Бернштейна)**.** $(A \preceq B) \wedge (B \preceq A) \to A \sim B$.

7 Билет 7 (Натуральные числа и принцип индукции)

Определение 7.1 (Определение натуральных чисел по фон Нейману)**.** $0 = \{\varnothing\}$
$1 = \{0\}$
$2 = \{0, 1\}$
$\vdots$
$n + 1 = n \cup \{n\}$
$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Определение 7.2 (Принцип индукции)**.** *Пусть $X \subseteq \omega$ со следующими свойствами:*

1. $0 \in X$
2. $\forall n (n \in X) \to (n + 1 \in X)$

тогда $X = \omega$.

Определение 7.3 (Принцип наименьшего элемента)**.** *Каждое непустое подмножество ω имеет наименьший элемент.*

Теорема 7.1. *Из принципа индукции следует принцип наименьшего элемента.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \neq X \subseteq \omega$ и пусть в X нет наименьшего элемента, тогда $0 \notin X$, значит, по принципу ндукции $1 \notin X$, ...
То есть $\{0, 1, 2, \ldots\} \cap A = \varnothing$, то есть $\omega \cap A = \varnothing$, то есть $A = \varnothing$. ■

Теорема 7.2. *Из принципа наименьшего элемента следует принцип индукции.*

Доказательство. Пусть $\Phi(0) \wedge \forall n(\Phi(n) \to \Phi(n+1))$, но множемтво $X = \{n | \Phi(n) \text{ ложно}\}$ не пусто.
Тогда по принципу наименьшего элемента в X существует наименьший элемент n такой, что $\Phi(n)$ ложно. Рассмотрим $\Phi(n-1)$ оно истинно, а значит, $\Phi(n)$ тоже истинно — противоречие. ■

Утверждения 7.1 (Принцип возвратной индукции)**.** *Пусть $\Phi(n)$ — свойство натурального числа n, тогда $\forall n(\forall m(m < n \to \Phi(m)) \to \Phi(n)) \to \forall n \Phi(n)$.*

Доказательство. Рассмотрим свойство $\Psi(n) = \forall m(m < n \to \Phi(m))$ и применим принцип индукции. ■

8 Билет 8 (Конечные множества, принцип Дирихле)

Определение 8.1. *Множество называется конечным, если оно равномощно некоторому $m \in \omega$.*

Теорема 8.1 (Принцип Дирихле)**.** $\forall m, n \in \omega\ m \sim n \to m = n$.

Доказательство.

Лемма 8.1. *Если $m \in n$, то $n \setminus \{m\} \sim n - 1$.*

Доказательство. База индукции: $n = 0$ доказывать нечего.
Шаг индукции: возьмём $m \in n + 1 = n \cup \{n\}$, тогда:

1. если $m = n$, то $n + 1 \setminus \{m\} = n \cup \{n\} \setminus \{n\} = n$ ч.т.д.

2. если $m \in n$, то $(n + 1) \setminus \{m\} = n \setminus \{m\} \cup \{n\}$, по предположению индукции есть биекция $n \setminus \{m\} \to (n - 1)$, продолжим её до биекции $(n + 1) \setminus \{m\} \to n$, отобразим $n \to n - 1$.

■

База индукции: $n = 0$, $m \sim \varnothing$, тогда $m = \{\varnothing\} = 0$

Шаг индукции: $m \sim n+1$, то есть существует биекция $f : n \cup \{n\} \to m$. Пусть $k = f(n)$, сузим биекцию f до $g : n \to m \setminus \{k\}$, тогда $n \sim m \setminus \{k\}$. По лемме $m \setminus \{k\} \sim m - 1 \sim n$. Тогда по предположению индукции $\Phi(n)$ истинно $\implies n = m - 1 \implies n + 1 = m \implies \Phi(n+1)$ истинно. ∎

Определение 8.2. *Мощностью конечного множества X называется число n такое, что $n \sim X$.*

9 Билет 9 (Порядок на натуральных числах, эквивалентность его определений)

Определение 9.1. *Для $m, n \in \omega$ полагаем $m < n$, если $m \in n$. $m \leqslant n$, если $m \in n \vee m = n$.*

Свойства 2.

1. *$m < n \wedge n < k \to m < k$*
2. *$m \leqslant n \to m \subseteq n$(транзитивность)*
3. *$n \not< n$(иррефлексивность)*
4. *$n < m \leftrightarrow n + 1 \leqslant m$(дискретность в вверх)*
5. *$n < m \vee m < n \vee m = n$(линейность)*

Доказательство.

1. База $k = 0$ очевидно.
   Шаг индукции:
2. $m \leqslant n$, тогда $m < n \vee m = n \implies m \in n \vee m = n \implies m \subseteq n$.
3. База индукции: $n = 0$ очевидно.
   Шаг индукции: Пусть $n \notin n$, но $(n+1) \in (n+1)$, $n + 1 = n \cup \{n\} \implies n + 1 \in n \vee n + 1 = n$
   (a) $n + 1 \in n$, $n \in n + 1$ по определению, значит, $n \in n$ по транзитивности — противоречие.
   (b) $n + 1 = n$, $n \in n + 1$ по определению $\implies n \in n$ — противоречие.
4. $\Longleftarrow$ по транзитивности.
   $\Longrightarrow$ База индукции: $m = 0$ очевидно.
   Шаг индукции: $n < m + 1$, $m + 1 = m \cup \{m\} \implies n \in m$, $n + 1 = n \cup \{n\}$, причём $n \in (m-1) \cup \{m-1\} \implies n \leqslant m - 1 \implies n + 1 \leqslant m$

5. База индукции: $n = 0$ очевидно.
Шаг индукции: $n + 1 = n \cup \{n\}$; либо $n + 1 \in m$, либо $m \in n + 1$, либо $n + 1 \sim m$. Значит, если $n+1 \sim m$, то $n+1 = m$ по теореме Кантора-Бернштейна, если $n+1 \in m$, $m \in m + 1 \implies n + 1 \in m + 1 \implies n + 1 < m + 1 \implies n < m$, если $m \in n + 1$, то по пункту 4 $m + 1 \leqslant n + 1 \implies m \leqslant n$.

Определение 9.2.

10 Билет 10 (Сохранение конечности)

Утверждения 10.1. *1. Если $A \subseteq B$ и $|B| = n \in \omega$, то $\exists m \in \omega \ : \ |A| = m$.*

2. Объединение конечных множеств конечно.

3. Декартово произведение конечных множеств конечно.

Доказательство. 1. Пусть $f : A \to n$ биекция, тогда сузим это отображение на множество B. Данное отображение инъективно, его образ является подмножеством n, значит, можно перенумеровать и получить искомую биекцию.

2. (a)

Лемма 10.1. *Если A конечно, то $A \cup \{x\}$ конечно.*

Доказательство. Если $x \in A$, то $A \cup \{x\} = A \implies |A \cup \{x\}| = |A|$.
Если $x \notin A$, то продолжим биекцию, отобразив $x \to n$. ■

(b)

Лемма 10.2. *Если A конечно и $n \in \omega$, то $A \cup n$ конечно.*

Доказательство. База индукции: очевидно.
Шаг индукции: $A \cup (n + 1) = A \cup (n \cup \{n\}) = (A \cup n) \cup \{n\}$ — конечно по предположению индукции и предыдущей лемме. ■

(c)

Лемма 10.3. *Если A и B конечны и $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B$ конечно.*

Доказательство. Пусть $f : B \to n$ — биекция, тогда рассмотрим $g : (A \cup B) \to (A \cup n)$ — тождественная на A (в силу пустого пересечения) биекция, значит, по предыдущей лемме $A \cup B$ конечно. ■

$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, тогда по последней лемме и пункту 1 имеем нужное утверждение.

3. Доказательство по индукции по мощности множества B. База индукции: очевидно. Шаг индукции: $|A'| = n$, $A = A' \cup \{a_0\}$ $|A| = n + 1$, тогда разложив в оъединение двух конечных множеств и применив утверждение предыдущего пункта получиим данное утверждение.

■

■

11 Билет 11 (Определение суммы и произведения)

Определение 11.1. *1. $m + n = |A \cup B|$, где $A \cap B = \varnothing$, $|A| = m$, $|B| = n$.*

2. $m \cdot n = |A \times B|$, где $|A| = m$, $|B| = n$.

Утверждения 11.1. *Сложение и умножение определены корректно.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $A' \sim A \wedge B' \sim B \to A \times B \sim A' \times B'$ (сложение аналогично)
$f : A' \to A$, $g : B' \to B$, тогда построим $h : (A' \times B') \to (A \times B)$ по правилу $h(a', b') = (f(a'), g(b'))$. Это отображение биективно. ■

12 Билет 12 (Множество функций, возведение в степень)

Определение 12.1. *Для множеств A и B $B^A = \{f | f : A \to B\}$.*

Лемма 12.1. *1. $B^0 \sim 1$, $B^{n+1} \sim B^n \times B$*

2. Если B конечно, то $\forall n \in \omega$ B^n конечно.

3. Если $C \sim A$, то $B^A \sim B^C$.

Доказательство. 1. Пусть $f : n \to B$, тогда построим функкцию $g : (n + 1) \to B$, совпадающую с f на n и переводящую $n \to b$. Это задаёт биекцию $B^n \times B \to B^{n+1}$.

2. База индукции: по первому пункту.
Шаг индукции: по первому пункту.

3. Пусть $g : A \to C$ — биекция, $f : C \to B$, тогда $f \circ g$ — функция из A в B. Построим функцию h, которая ставит в соответствие функции f функцию $f \circ g$. Эта функция является искомой биекцией.

■

Теорема 12.1. *Если A и B конечны, то B^A конечно.*

Доказательство. По определению конечного множества и по пунктам 2 и 3 леммы имеем данное утверждение. ■

Определение 12.2. *$m^n = |A^B|$, где $|A| = m$, $|B| = n$.*

Утверждения 12.1. *Если A конечно, то $2^A \sim P(A)$.*

Доказательство. Для каждого подмножества сопоставим каждому его элементу число 1, а всем остальным число 0, таким образом зададим для каждого подмножества функцию $f : A \to 2$. То есть мы получили искомую биекцию. ■

13 Билет 13 (Теорема Кантора)

Теорема 13.1. $|A| < |P(A)|$

Доказательство. $A \preceq P(A)$, в качестве инъекции рассмотрим такое отображение f, которое переводит a в $\{a\}$, оно инъективно.
$A \not\sim P(A)$: предположим противное, пусть существует биекция $f : A \to P(A)$, тогда рассмотрим множество $B = \{a | a \notin f(a)\}$. Если $B = f(b)$ для некоторого $b \in A$, то возникает противоречие. ■

Пример 3 (Парадокс Кантора)**.** *Пусть V — множество всех множеств, тогда $P(V) \subseteq V \implies |P(V)| \leqslant |V|$, но по теореме Кантора $|V| < |P(V)|$ — противоречие.*

14 Билет 14 (Теорема о рекурсии)

Теорема 14.1. *Даны множество Y, $y_0 \in Y$, функция $h : Y \to Y$, тогда существует единственная функция $f : \omega \to Y$ такая, что:*

1. $f(0) = y_0$
2. $\forall n\ f(n+1) = h(f(n))$

Примеры 1.

1. *$m+n$ определяется рекурсией по n: $m+0 = m$, $m+(n+1) = (m+n)+1$.*
2. *$m \cdot n$ определяется рекурсией по n: $m \cdot 0 = 0$, $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$.*
3. *$n!$ определяется по рекурсии.*

15 Билет 15 (Счётное множество)

Определение 15.1. *Множество $A \sim \omega$ называется счётным множеством.*

Свойства 3. *1. Если A конечно, B счётно, то $A \prec B$.*

2. Если A счётно, $B \subseteq A$, то B конечно или счётно.

3. Если A счётно, B конечно или счётно, то $A \cup B$ счётно.

4. Если A счётно, B конечно или счётно, то $A \times B$ счётно.

Доказательство. 1. По транзитивности $\preceq$ имеем $A \preceq B$. Предположим, что $A \sim B$, но $A \sim n$, $n+1 \preceq \omega \sim B \Longrightarrow n+1 \preceq n$ — противоречие с принципом Дирихле.

2. Пусть $A \sim \omega$, $B \subseteq A$ бесконечно. Построим биекцию $f : \omega \to B$, для этого сначала построим функцию F: $F(0) = \{\min B\}$, $F(n+1) = F(n) \cup (\min B \setminus F(n))$ $f(0) = \min B$, $f(n+1) = \min B \setminus f(n)$.

3. Докажем для случая $A \cap B = \varnothing$, $A \sim \omega \sim B$.

4. $\omega \times \omega \sim \omega$: канторовская нумерация.

■

16 Билет 16 (Конечность и бесконечность по Дедекинду)

Определение 16.1. *Множество бесконечно по Дедекинду, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству.*

Свойства 4. *1. Конечное множество D-конечно.*

2. Счётное множество D-бесконечно.

3. Если A счётно, $A \subseteq B$, то B — D-бесконечно.

4. A D-бесконечно $\Longleftrightarrow$ A содержит счётное подмножество.

5. Если A D-бесконечно, B коненчо, то $A \cup B \sim A \setminus B \sim A$.

6. Если A D-бесконечно, B счётно, то $A \cup B \sim A$.

Доказательство. 1. По принципу Дирихле.

2.

3. Построим отображение из A в собственное подмножество (оно существует по пункту 2) так, чтобы элементы $B \setminus A$ остались на месте.

4. $\Longleftarrow$ по пункту 2.
   $\Longrightarrow$ Пусть $f : A \to B$ — биекция, где $B \subset A$, тогда возьмём $a \in A \setminus B$ и рассмотрим $\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$. Это будет искомое счётное подмножество.

5. Если $C \subseteq A$ счётно, $B \cap A = \varnothing$, $B \sim n$, то строим биекцию $f : A \cup B \to A$. Сдвигаем все элементы C на n, а на освободившиеся n мест отображаем B.
   Заметим, $A = (A \setminus B) \cup B$, тогда $A \setminus B$ D-бесконечно, так как $C \setminus B$ счётно, значит, $A \sim A \setminus B$.

6. Пусть $C \subseteq A$ счётно, $A \cap B = \varnothing$, $B \sim \omega$. Построим биекцию $f : A \cup B \to A$. Удваиваем все номера элементов C и в нечётные номера отображаем B.

∎

17 Билет 17 (Континуальность)

Определение 17.1. $c = 2^\omega$ — *континуум.*

Множество вещественных чисел отождествляем с множеством двоичных последовательностей, кроме тех, которые, начиная с некоторого номера, равны 1.

Утверждения 17.1. *Пусть $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.*

1. *R D-бесконечно.*

2. *$R \sim c$.*

3. *$A \sim c$, $B \preceq A$, тогда $A \cup B \sim c$*

4. *$A \sim c$, $B \preceq A$, тогда $A \cup B \times c$*

Доказательство. 1. По теореме о том, что бесконечное множество D-бесконечно.

2. При добавлении счётного множества последовательностей, оканчивающихся единицами, мощность $\mathbb{R}$ не изменится.

3. В силу теоремы Кантора-Бернштейна достаточно доказать для случая A и B континуумы не пересекаются.

4. Достаточно доказать, что $c \times c \sim c$. $P(A) \times P(B) = P(A \cup B)$, значит, отображение, переводящее $(X, Y) \to X \cup Y$ — искомая биекция.

∎

Утверждения 17.2 (Континуум гипотеза Кантора)**.** *Если $\omega \prec A \preceq c$, то $A \sim c$.*

18 Билет 18 (Порядок на множестве)

Определение 18.1. *1. Частичным порядком на множеств X называетсябинарное отношение, которое рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.*

2. Линейным порядком на множеств X называетсябинарное отношение, которое рефлексивно, транзитивно, антисимметрично и $\forall x, y \in X\ (yRx) \vee (xRy)$.

3. Полным порядком на множестве X называется частичный порядок, при котором в любом подмножестве X существует наименьший элемент.

Определение 18.2. *1. Если на множестве можно задать частичный порядок, то оно называется частично упорядоченным.*

2. Если на множестве можно задать линейный порядок, то оно называется линейно упорядоченным.

3. Если на множестве можно задать полный порядок, то оно называется вполне упорядоченным.

Определение 18.3. *Изоморфизмом между двумя упорядоченными множествами $(X, \leqslant)$, $(X', \leqslant')$ называется биективное отображение $f : X \to X'$, уважающее отношение порядка.*

Свойства 5. *1. Если $x < y$, то $f(x) < f(y)$ (строгое возрастание)*

2. Если f — изоморфизм α на β, то f^{-1} — изоморфизм β на α.

3. Композиция изоморфизмов изоморфизм.

19 Билет 19 (ВУМ)

Определение 19.1. *Пусть $(X, \leqslant)$ — вполне упорядоченное множество (ВУМ). Начальным отрезком α называется — это подмножество $Y \subseteq X$, замкнутое по убыванию.*

Свойства 6. *1. Пусть Y — начальный отрезок вполне упорядоченного множества $(X, \leqslant)$, тогда $Y = \{x | x < a\}$ для некоторого $a \in X$.*

2. Пусть $(X, \leqslant)$ — вум, $f : X \to X$ — строго возрастающая функция, тогда $\forall x \in X$ $x \leqslant f(x)$.

3. Никакое вум не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку.

Доказательство. 1. Рассмотрим $a \in X \setminus Y$, $X \setminus Y$ частично упорядочено, тогда по определению собственного начального отрезка имеем, что $\forall y \in Y$, $y \leqslant a$, так как в противном случае $a \in Y$. $\forall y \in Y$ $a \neq y$, так как $a \notin Y$, значит, $\forall a \in X \setminus Y$ $\forall y \in Y$ $y < a$.

2. Рассмотрим $Y = \{x | f(x) < x\}$. Пусть $Y \neq \varnothing$, x наименьший в Y, тогда $f(f(x)) < f(x)$ (так как f строго возрастает). Так как x наименьший в Y, то $f(x) \leqslant f(f(x))$ — противоречие.

3. Пусть Y — собственный начальныйй отрезок X, X — вум, $f : X \to Y$ — изоморфизм. Тогда $f(x) \leqslant x$ — противоречие с пунктом 2.

■

20 Билет 20 (Теорема Кантора)

Теорема 20.1. *Пусть α, β — два вполне упорядоченных множества, тогда выполнено ровно одно из следующих услоивий:*

1. *α изоморфно некоторому собственному началу β*

2. *β изоморфно некоторому собственному началу α*

3. *$\alpha \simeq \beta$*

Доказательство. Пусть $\alpha = (X, \leqslant)$, $\beta = (Y, \leqslant')$. Рассмотрим $f = \{(x, y) | x \in X,\ y \in Y,\ x \downarrow \simeq y \downarrow\}$.
Докажем 3 леммы.

Лемма 20.1. *f — биекция некоторого $X_0 \subseteq X$ на $Y_0 \subseteq Y$.*

Доказательство. Так как ниодно вум не изоморфно никакому собственному начальному отрезку, то в силу изоморфности начальных отрезков для каждого $x \in X$ существует не более одного y такого, что $(x, y) \in f$. И для каждого y существует не более одного x такого, что $(x, y) \in f$. В качестве $X_0 = \{x | \exists y \in Y\ (x, y) \in f\}$, $Y_0 = \{y | \exists x \in X\ (x, y) \in f\}$. ■

Лемма 20.2. *X_0 — начальный отрезок α, Y_0 начальный отрезок β.*

Доказательство. Пусть $x \in X_0$, $y \in Y_0$, $x \downarrow \simeq y \downarrow$, h — данный изоморфизм. $\forall z < x$, сужая h, получим $z \downarrow h(z) \downarrow$, так как h сохраняет порядок, и у каждого элемента $h(z)$ есть прообраз. Значит, $z \in X_0$. Для Y_0 аналогично, только вместо h рассматриваем h^{-1}. ■

Лемма 20.3. *f сохраняет порядок.*

Доказательство. Пусть $x \in X_0$, $h : x \downarrow \to y \downarrow$ — изоморфизм и пусть $z < x$, тогда по аналогии с предыдущей леммой $z \downarrow \simeq h(z) \downarrow$, то есть $f(z) = h(z)$. $h(z) < y = f(x)$ ■

По первым двум леммам имеем, что f — изоморфизм начального отрезка α на чальный отрезок β. Если оба отрезка собственные, то по третьей лемме $X_0 = x \downarrow$, $Y_0 = y \downarrow$ для некоторых x, y. Так как $(x, y) \in f$, значит, $x \in X_0$ — противоречие. Следовательно, один из них несобственный, значит, остаётся три случая из условия теоремы. Никакой из них не совпадает в силу того, что никакое вум не изоморфно никакому собственному начальному отрезку, а изоморфность ассоциативна. ■

21 Билет 21 (Ординальные числа)

Определение 21.1. *Ординальное число — класс эквивалентности по отношению изоморфизма.*

$\alpha \leqslant \beta$, если α вложимо в β, то есть существует изоморфизм α на начальный отрезок β.

Теорема 21.1. *В любом не пустом множестве S ординальных чисел есть наименьшее.*

Доказательство. $\forall \alpha \in S$ рассмотрим $\{\beta \in S | \beta \leqslant \alpha\}$, тогда среди них есть наименьший. так как в непустом множестве начальных отрезков α, которым изоморфны β, есть наименьший элемент. ■

22 Билет 22 (Теорема о трансфинитной индукции)

Теорема 22.1. *Пусть дано свойство ординальных чисел $\Phi(\alpha)$, которое наследуется: $\forall \alpha (\forall \beta < \alpha \ \Phi(\alpha) \to \Phi(\beta))$. Тогда $\forall \alpha \ \Phi(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть для некоторого α_0 $\Phi(\alpha_0)$ ложно.
Рассмотрим $S = \{\beta | \beta \leqslant \alpha_0 \ \Phi(\beta) \text{ ложно}\}$. Так как S не пусто, то в S есть наименьший элемент. Обозначим его β_0, тогда $\forall \beta < \beta_0 \ \Phi(\beta)$, тогда $\Phi(\beta_0)$ — противоречие. ■

23 Билет 23 (Ограниченность сверху любого непустого множества ординальных чисел)

Теорема 23.1. *Пусть X произвольное множество ординальных чисел, тогда существует максимальное ординальное число α, что $\forall \beta \in X \ \beta < \alpha$.*

Доказательство. Будем считать, что все порядки попарно не пересекаются. Возьмём их объединение. Зададим на нём отношение эквивалентности: если $x \in \alpha$, $y \in \beta$, то $x \sim y$, если вложение α в β переводит x в y.
Упорядочим эти классы эквивалентности: $u < v$, если $\exists \alpha$ такое, что $\exists x \in u$, $\exists y \in v$ такие, что $(x \in \alpha \wedge y \in \alpha \wedge x < y)$.
Рассмотрим не пустое $U \subseteq V$. Все классы эквивалентности, меньшие данного u, пересекают все порядки, которые пересекают u. Так как порядки вполне упорядочены, то можно выбрать наименьший элемент из тех, которые находятся в пересечениях. Класс эквивалентности этого элемента наименьший в V.
Всякое $\beta \in X$ вложимо в U, так как каждый элемент принадлежит некоторому классу эквивалентности. Следовательно, U, как ординальное число, ограничивает множество всех ординалов сверху. Выберем следующее число и получим нужное утверждение. ∎

24 Билет 24 (Парадокс Бурали-Форти)

Теорема 24.1. *Все ординальные числа не образуют ординального числа.*

Доказательство. Все ординальные числа упорядочены по вложимости. Так как в любом не пустом множестве ординальных чисел есть наименьшее, то этот порядок полный. Тогда он должен задавать некоторое ординальное число α, которое, больше всех остальных, но $\alpha + 1$ тоже ординальное число, следующее за α, а значит, наибольшего ординального числа не существует. ∎

25 Билет 25 (Теорема о трансфинитной рекурсии)

Теорема 25.1. *Дано: ординальное числоα_0, функция H на ординальных числах, тогда существует единственная функция F на ординальных числах такая, что:*

1. $F(0) = \alpha_0$.
2. $F(\alpha + 1) = H(F(\alpha))$.
3. $F(\alpha) = \sup\{F(\beta) | \beta < \alpha\}$, *если α предельное.*

Примеры 2.
1. *Сложение:* $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
   $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma | \gamma < \beta\}$, *если β предельное.*
2. *Умножение:* $\alpha \cdot 0 = \alpha$, $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
   $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma | \gamma < \beta\}$, *если β предельное.*
3. *Возведение в степень:* $\alpha^0 = \alpha$, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
   $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma | \gamma < \beta\}$, *если β предельное.*

26 Билет 26 (Ординалы фон Неймана)

Определение 26.1. *Ординал фон Неймана — это множество специального вида, являющееся обобщением натуральных чисел фон Неймана, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. *это множество α транзитивно: $\forall x, y\ (x \in y) \wedge (y \in \alpha) \to x \in \alpha$*
2. *α вполне упорядочено: $x \leqslant y := x \in y \vee x = y$.*

Теорема 26.1 (Теорема счёта)**.** *Любое вум изоморфно какому-то ординалу.*

27 Билет 27 (Аксиома выбора, эквивалентные формулировки)

Определение 27.1. *Аксиома выбора: если X множество не пустых множеств, то существует функция выбора на X. Это функция $f : X \to Y$ такая, что $f(x) \in x$ для всех $x \in X$.*

Утверждения 27.1. *Эквивалентные формулировки:*

1. *Если R — отношение эквивалентности на X, то $X/R \preceq X$.*
2. *Если Γ — разбиение множества X, то $\exists Y \subseteq X$ такой, что $\forall Z \in \Gamma\ |Z \cap Y| = 1$*

Доказательство.

1. $\Longleftarrow$ Рассмотрим произвольное не пустое множество A не пустых множеств. Зададим на объединении всех этих множеств отношение эквивалентности R (элементы x и y эквивалентны, если x и y принадлежат одному одному множеству). Обозначим это множество Y. Фактор множеством является само множество A. Тогда по условию $\exists f : A \to Y$ — вложение, то есть f — искомая функция выбора.
   $\Longrightarrow$ В качестве X рассматриваем X/R и получаем данное утверждение.

2. $\Longrightarrow$ Пусть Γ — некоторое разбиение множества X, тогда по аксиоме выбора $\exists f : \Gamma \to X$ такое, что $f(A_i) \in A_i$ для каждого $A_i \in \Gamma$. Рассмотрим $Y = \{f(A_i) | A_i \in \Gamma\}$, тогда по построению $|Y \cap A_i| = 1$.
   $\Longleftarrow$ Рассмотрим отображение $f : \Gamma \to Y$, переводящее $Z \in \Gamma$ в элемент, по которому Z пересекает Y. Данное отображение является функцией выбора.

∎

Теорема 27.1 (Теорема Цермело)**.** *Всякое множество можно вполне упорядочить.*

Теорема 27.2. *Из теоремы Цермело следует аксиома выбора.*

Доказательство. Пусть X — множество, состоящее из непустых множеств. Упорядочим их объединение. В качестве функции выбора выберем $f(x) = \min x$. ∎

Теорема 27.3 (Лемма Цорна). *Пусть* $(X, \leqslant)$ *— частично упорядоченное множество, в котором каждое линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, тогда* X *имеет максимальный элемент.*

28 Билет 28 (Теорема о сравнении мощностей)

Теорема 28.1. *Всякое бесконечное множество* D*-бесконечно.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Построим функцию выбора g на множестве всех не пустых подмножеств множества A. Построим по рекурсии инъекцию $f : \omega \to A$:
$f(0) = a_0$ (a_0 существует, так как $A \neq \varnothing$)
$f(n+1) = g(A \setminus \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\})$ ∎

Теорема 28.2. *Для любых множеств* X, Y *либо* $X \preceq Y$, *либо* $Y \preceq X$.

Доказательство. По теореме Цермело их можно вполне упорядочить, а по теореме Кантора одно из них вложено в другое. ∎

29 Билет 29 (Карденалы и алефы)

Определение 29.1. *Кардинал — это ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу.*

Утверждения 29.1. *Всякий ординал равномощен некоторому кардиналу.*

Доказательство. Если α — не кардинал, то $\{\beta | \beta < \alpha,\ \beta \sim \alpha\}$. Тогда существует наименьший элемент, он и будет искомым кардиналом. ∎

Определение 29.2. *Мощностью множества называется кардинал, равномощный* X.

Определение 29.3. *По рекурсии построим* $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1}$ *— наименьший кардинал, больший* $\aleph_\alpha$, $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta | \beta < \alpha\}$, *если* α *предельное.*

Утверждения 29.2. *Последовательность алефов содержит все бесконечные кардиналы.*

Доказательство.

1. $\alpha < \aleph_\alpha$ из определения последовательности алефов по трансфинитной индукции.
2. Если k — бесконечный кардинал, то он не может быть больше всех алефов, так как иначе он больше всех ординалов, то есть они образуют вполне упорядоченное подмножество k, что противоречит тому, что все ординалы не образуют ординал.

3. Пусть k не алеф, выберем наименьшее α такое, что $k < \aleph_\alpha$.

   (a) Пусть $\alpha = \beta + 1$, тогда $\aleph_\beta \leqslant k \leqslant \aleph_{\beta+1}$. Так как $\aleph_{\beta+1}$ наименьший кардинал больший $\aleph_\beta$, то есть k — алеф.

   (b) Пусть α предельное, тогда $k < \aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta | \beta < \alpha\}$. По определению супремума $\exists \beta < \alpha$ такое, что $k < \aleph_\beta$, что противоречит выбору α.

■

30 Билет 30 (Операции над кардиналами, основная теорема кардинальной арифметики)

Примеры 3. *1.* $|A| \cdot |B| = |A \times B|$, $|A| + |B| = |A \cup B|$, *если* $A \cap B = \varnothing$.

2. $|A|^{|B|} = |A^B|$.

Утверждения 30.1 (Обобщённая континуум-гипотеза)**.** $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

Теорема 30.1 (Основная теорема кардинальной арифметики)**.**

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$$

Доказательство. (Идея доказательства) По теореме Кантора-Бернштейна достаточно доказать, что $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Это доказывается по трансфинитной рекурсии по аналогии с Канторовской нумерацией точек на целочисленной плоскости. ■

31 Билет 31 (Слова)

Определение 31.1. *Словом в алфавите A длины n называется функция $f : n \to A$. A^∞ — множество всех слов в алфавите A.*

Определение 31.2. *Язык в алфавите A — некоторое подмножество A^∞.*

Определение 31.3. *Собственным началом слова $a_1 \ldots a_n$ называется слово $a_1 \ldots a_m$, где $m < n$.*

Определение 31.4. *Конкатенацией слов α и β называется слово $\alpha\beta$.*

32 Билет 32 (Формула)

Определение 32.1. *Фиксируем счётное множество символов, которые назовём пропозициональными переменными и обозначим $Var = \{P_1, P_2, \ldots\}$. Построим множество пропозицональных формул (Fm):*

1. *Если* $A \in Var$, *то* $A \in Fm$.
2. *Если* $A \in Fm$, $B \in Fm$, *то* $(A \wedge B) \in Fm$.
3. *Если* $A \in Fm$, $B \in Fm$, *то* $(A \vee B) \in Fm$.
4. *Если* $A \in Fm$, $B \in Fm$, *то* $(A \to B) \in Fm$.
5. *Если* $A \in Fm$, *то* $\neg A \in Fm$.

Утверждения 32.1. *Никакая пропозициональная формула не является сосбственным началом другой пропозициональной формулы.*

Доказательство. 1. Если A — пропозициональная переменная, то очевидно.

2. Пусть $A = \neg A_1 \sqsubset B$, тогда B начинается с $\neg$, то есть $B = \neg B_1 \Longrightarrow A_1 \sqsubset B_1$. По предположению индукции такого B_1 не существует.

3. Пусть $A = (A_1 \circ B_1)$, $B \sqsubset A$, тогда B начинается с левой скобки, значит, $B = (B_1 \circ' B_2)$.
   Одна из формул A_1, B_1 является началом другой или они равны. Значит, $A_1 = B_1$, так как другие случаи не возможны в силу предположения индукции. Следовательно, $\circ = \circ'$, значит, $A_2 \sqsubset B_2$, что противоречит предположению индукции, значит, $A_2 = B_2$.

■

Лемма 32.1 (Об однозначном анализе формул)**.** *Для любой пропозициональной формулы* C *выполнено ровно одно из условий:*

1. $C \in Var$.
2. $C = (A \wedge B)$.
3. $C = (A \vee B)$.
4. $C = (A \to B)$.
5. $C = \neg A$.

Доказательство. 1. Если C начинается с $\neg$, то очевидно.

2. Пусть C начинается с левой скобки, $C = (A \circ B) = (A' \circ' B')$. Тогда A и A' являются началом одного слова, значит, одно из них является собственным началом другого или они равны. Первое невозможно по утверждению выше, значит, $A = A'$, $\circ = \circ'$, $B = B'$.

■

В записи часто опускают скобки, такая запись называется бесскобочной. Для этого уставим приоритеты операций от самой сильной до самой слабой в таком порядке: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.

33 Билет 33 (Оценки переменных и формул)

Определение 33.1. *Оценкой пропозицональных переменных называется отображение $f : Var \to \mathbb{B}$, где $\mathbb{B} = \{0, 1\} = 2$.*

Лемма 33.1 (О продолжении оценок на формулы)**.** *Для любой оценки $f : Var \to \mathbb{B}$ существует единственное продолжение $\overline{f} : Fm \to \mathbb{B}$ такое, что $\forall A, B \in Fm$:*

1. *Если $A \in Var$, то $\overline{f}(A) = f(A)$.*
2. *$\overline{f}(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 1$ и $\overline{f}(B) = 1$.*
3. *$\overline{f}(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 1$ или $\overline{f}(B) = 1$.*
4. *$\overline{f}(A \to B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 0$ или $\overline{f}(B) = 1$.*
5. *$\overline{f}(\neg A) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 0$.*

Доказательство. Определим по индукции. Если C — переменная, то $\overline{f}(C) = f(C)$. Пусть есть оценки для всех формул, длина которых меньших n. Любая формула имеет один из видов $2 - 5$. Пусть $C = (A \wedge B)$, тогда $\overline{f}(C) = \min(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$. Пусть $C = (A \vee B)$, тогда $\overline{f}(C) = \max(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$. Пусть $C = \neg A$, тогда $\overline{f}(C) = \neg\overline{f}(A)$. Пусть $C = (A \to B)$, тогда $\overline{f}(C) = \max(\overline{f}(\neg A), \overline{f}(B))$. ∎

34 Билет 34 (Булевы функции и таблицы истинности)

Определение 34.1. *n-местной булевой функцией назовём $\varphi_A^n : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.*

Эта функция задаёт значение формулы A, состоящей из переменных P_1, …, P_n, при всевозможных оценках.

Определение 34.2. *Таблица значений φ_A называется таблицей истинности.*

Определение 34.3. *Оценкой двоичного вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ назовём функцию $f_{\vec{x}} : Var \to \mathbb{B}$ такую, что $f_{\vec{x}}(P_i) = x_i$ при $i \leqslant n$ и 0 при $i > n$. Положим $\varphi_A^n(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A)$.*

Определение 34.4. *Формула называется тавтологией, если она принимает значение 1 при любой оценке.*

Определение 34.5. *Формула называется выполнимой, если существует оценка, при которой она принимает значение 1.*

Определение 34.6. *Формулы называются равносильными, если при всех оценках их значения совпадают.*

35 Билет 35 (Теорема о функциональной полноте булевых функций)

Теорема 35.1. *Любая булева функция отвечает некоторой формуле логики высказываний, то есть для любой n-местной булевой функции α существует формула $A(P_1, \ldots, P_n)$ такая, что $\varphi_A \equiv \alpha$.*

Доказательство. ■

36 Билет 36 (Элементарные конъюнкции и СДНФ)

Определение 36.1. *Литерал — переменная или её отрицание.*

Определение 36.2. *Элементарная конъюнкция от переменных P_1, …, P_n называется конъюнкция литералов, построенных из этих переменных, в которой каждая переменная встречается ровно 1 раз.*

Определение 36.3. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) от переменных P_1, …, P_n — дизъюнкция элементарных конъюнкций от этих переменных.*

Теорема 36.1. *Каждая формула, построенная из переменных P_1, …, P_n, соответствует некоторой СДНФ от этих переменных.*

Доказательство. По теореме из билета 35 имеем, что любой функции от n переменных соответствует n-местная булева функция. По теореме из курса теории дискретных функций имеем, что любая функция обладает СДНФ, а значит, любая n-местная функция обладает СДНФ. ■

37 Билет 37 (Сигнатура, термы, атомарные формулы)

Определение 37.1. *Сигнатура — четвёрка вида ($Pred_\Omega$, $Const_\Omega$, Fun_Ω, ν), где:*

1. *Множества $Pred_\Omega$, $Const_\Omega$, Fun_Ω попарно не пересекаются.*
2. $Pred_\Omega \neq \varnothing$

3. $\nu : Fun_\Omega \cup Const_\Omega \to \{1, 2, \ldots\}$.

Множество $Pred_\Omega$ *— множество предикатных символов, множество* Fun_Ω *— множество функциональных символов,* $Const_\Omega$ *— множество константных символов. Функция* ν *называется функцией валентности.*

Определение 37.2. *Алфавит данный сигнатуры* Ω *состоит из следующих элементов:*

1. *Все предикатные, константные и функциональные символы* Ω.

2. *Счётное множество* $FVar_\Omega$ *всех свободных переменных.*

3. *Счётное множество* $BVar_\Omega$ *связанных переменных.*

4. *Логические связки* $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$.

5. *Кванторы* $\forall$, $\exists$.

6. *Скобки и запятая.*

Определение 37.3. *Множество термов сигнатуры* Ω *— наименьшее множество* $X \subseteq \Omega$, *содержащее:*

1. *Все константные символы.*

2. *Все свободные переменные.*

3. *Если* $f^k \in Fun_\Omega$, t_1, …, t_k *— термы, то* $f(t_1, \ldots, t_k)$ *— терм.*

Определение 37.4. *Атомарная формула — слово вида* $P(t_1, \ldots, t_k)$, *где* t_1, …, t_k *— термы сигнатуры* Ω, $P^k \in Pred_\Omega$.

Определение 37.5.

1. *Все атомарные формулы — формулы.*

2. *Если* A, B *— формулы, то* $A \vee B$ *— формула.*

3. *Если* A, B *— формулы, то* AB *— формула.*

4. *Если* A, B *— формулы, то* $A \to B$ *— формула.*

5. *Если* A *— формула, то* $\neg A$ *— формула.*

6. *Если* A *— формула,* $x \in BVar$ *(связанная переменная),* $a \in FVar$ *(свободная переменная) и* $x \notin A$, *то* $\exists x[x/a]A$.

7. *Если* A *— формула,* $x \in BVar$ *(связанная переменная),* $a \in FVar$ *(свободная переменная) и* $x \notin A$, *то* $\forall x[x/a]A$.

Пример 4 (Сигнатура арифметики)**.** *Сигнатура состоит из констант* 0, 1, *предикатного символа* $=^2$, *функциональных символов* $+^2$, $\cdot^2$.

38 Билет 38 (Собственное начало терма и атомарной формулы)

Утверждения 38.1. *Терм не может быть началом другого терма.*

Доказательство. 1. Если терм — константный символ, то очевидно.

2. Если терм — свободная переменная, то очевидно.

3. Пусть терм имеет вид $f(t_1, \ldots, t_k)$ и пусть существует терм $f(t_1, \ldots, t_k)\alpha$, тогда если в α есть ещё термы, то получаем противоречие с определением терма, так как он должен иметь вид $(\ldots)$.

■

Утверждения 38.2. *Любой терм является либо константным символом, либо свободной переменной, либо имеет вид $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $f^n \in Fun$ и термы t_1, …, t_n определены однозначно.*

Доказательство. Из определения имеем, что любой терм является одним из приведённых в условии типов. Осталось доказать единственность для последнего случая. Перрвые два случая очевидны. Они будут являться базой индукции. По предположению индукции термы $t_1, \ldots t_k$ определены однозначно. Значит, терм f^k определён однозначно.

■

Утверждения 38.3. *Каждая атомарная формула сигнатуры имеет вид $P(t_1, \ldots, t_k)$ для единственного $P^k \in Pred$ и термов t_1, …, t_k.*

Доказательство. Аналогично с предыдущим утверждением. ■

39 Билет 39 (Леммы об анализе формул)

Лемма 39.1. *Для любой формулы верно ровно одно из следующих условий:*

1. *C — атомарная формула.*
2. *Существует единственная пара формул A и B такие, что $C = (A \vee B)$.*
3. *Существует единственная пара формул A и B такие, что $C = (A \wedge B)$.*
4. *Существует единственная пара формул A и B такие, что $C = (A \to B)$.*
5. *Существует единственная формула A такая, что $C = \neg A$.*

6. $C = \exists x[x/a]A$ *для некоторой формулы* A*, зависимой переменной* x *и свободной переменной* a*.*

7. $C = \forall x[x/a]A$ *для некоторой формулы* A*, зависимой переменной* x *и свободной переменной* a*.*

Доказательство. 1. Для случаев 2, 3, 4 $C = (A \circ B)$. Так как никакая формула не является началом другой функции, то A и B определены однозначно. Значит, C определено однозначно.

2. Для $C = \neg A$ аналогично с предыдущим.

■

Лемма 39.2. $K[x/a]A = Kx[x/b]B$*, где* $B = [b/a]A$*.*

Доказательство. $[x/a]A = [x/b]B \Longrightarrow B = [b/x][x/b]B = [b/x][x/a]A = [b/a]A$. ■

40 Билет 40 (Модель сигнатуры, значения замкнутых термов)

Определение 40.1. *Моделью сигнатуры* Ω *или* Ω*-структурой называется пара* $(\underline{M}, \mathcal{I})$*, где*

1. $\underline{M}$ *— непустое множество, называемое носителем модели.*

2. $\mathcal{I}$ *— функция, определённая на множестве* $Const_\Omega$*,* $Pred_\Omega$*,* Fun_Ω *причём*

   (a) *если* $C \in Const_\Omega$*, то* $\mathcal{I}(c) \in \underline{M}$

   (b) *если* $c^n \in Pred_\Omega$*, то* $\mathcal{I}(c) : \underline{M}^n \to \mathbb{B}$

   (c) *если* $c^n \in Fun_\Omega$*, то* $\mathcal{I}(c) : \underline{M}^n \to \underline{M}$

Определение 40.2. *Терм называется замкнутым, если он не содержит переменные, то есть построен только из константных и функциональных символов. Множество замкнутых термов обозначается* CTm_Ω*.*

Определение 40.3. *Значение замкнутого терма в модели* M *определяется по рекурсии:*

1. *если* $c \in Const_\Omega$*, то* $|c|_{_M} = c_{_M}$*.*

2. *если* $f^n \in Fun_\Omega$*,* $f(t_1, \ldots, t_n)$*, то* $|f(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = f(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$*, где* t_1*, …,* $t_n \in CTm_\Omega$ *(замкнутые термы).*

Определение 40.4. *Значением замкнутой атомарной формулы* $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ *в сигнатуре* Ω *называется* $|P(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = P(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$*.*

Утверждения 40.1. *Значения замкнутых термов и замкнутых атомарных формул определены корректно, то есть существует единственное отображение $t \to |t|_{_M}$, удовлетворяющее условиям:*

1. $|c|_{_M} = c_{_M}$, *если* c *— константа.*
2. $|f(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = f_{_M}(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.
База индукции: если t — константа, то очевидно.
Шаг индукции: Пусть $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, причём по лемме из билета 39 имеем, что f и t_1, …, t_n определены однозначно. По предположению индукции $|t_1|_{_M}$, …, $|t_n|_{_M}$ определены однозначно, а значит, $|t|_{_M}$ определено однозначно.
Так как каждая атомарная формула имеет вид $P(t_1, \ldots, t_n)$, где P, t_1, …, t_n определены однозначно, то по доказанному выше имеем, что $|P(t_1, \ldots, t_n)|_{_M}$ определено однозначно.
■

Определение 40.5. *Модель сигнатуры, которая содержит двуместный предикатный символ равенства (=), называется нормальной моделью, если для любых* m_1, $m_2 \in M$

$$=_{_M}(m_1, m_2) = \begin{cases} \text{и, если } m_1 \text{ и } m_2 \text{ совпадают} \\ \text{л, иначе} \end{cases}$$

41 Билет 41 (Оценённые термы и формулы и их значения)

Определение 41.1. *Пусть M — модель сигнатуры Ω. Расширенной сигнатурой модели M называется сигнатура, полученная добавлением к Ω всех элементов $\underline{M}$ в качестве константных символов.*

Определение 41.2. *Терм, оценённый в модели M — это замкнутый терм сигнатуры $\Omega \cup M$.*

Определение 41.3. *Значение терма, оценённого в модели M определяется рекурсивно:*

1. $|c|_{_M} = c_{_M}$, *если* c *— константа.*
2. $|m|_{_M} = m$, *если* $m \in \underline{M}$
3. $|f(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = f_{_M}(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$

Утверждения 41.1. *Значение термов определено корректно, то есть каждому терму соответствует единственное значение.*

Доказательство. База индукции: если c — константа, то очевидно. Шаг индукции: так как для $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ f, t_1, …, t_n определены однозначно и по предположению индукции значения термов определены однозначно, то и значение терма t определено однозначно. ■

Определение 41.4. *Формула, не содержащая свободных переменных, называется замкнутой или предложением.*

Определение 41.5. *Формула, оценённая в модели M — предложение (замкнутая формула) в сигнатуре $\Omega \cup M$.*

Определение 41.6. *Логической длиной формулы называется число вхождений в неё логических связок и кванторов.*

Определение 41.7. *Значение формулы, оценённой в модели M, определяется по рекурсии по логической длине формулы:*

1. $|P(t_1, \ldots, t_n)|_{M} = P_{M}(|t_1|_{M}, \ldots, |t_n|_{M})$, *если* $P^n \in Fun_\Omega$, t_1, …, t_n — *термы.*

2. $|c|_{M} = c_{M}$, *если* $c \in Const_\Omega$.

3. *Если* $C = (A \vee B)$, *то* $|C|_{M} = |(A \vee B)|_{M} = \max(|A|_{M}, |B|_{M})$.

4. *Если* $C = (A \wedge B)$, *то* $|C|_{M} = |(A \wedge B)|_{M} = \min(|A|_{M}, |B|_{M})$.

5. *Если* $C = (A \to B)$, *то* $|C|_{M} = |(A \to B)|_{M} = \max(1 - |A|_{M}, |B|_{M})$.

6. *Если* $C = \neg A$, *то* $|C|_{M} = |\neg A|_{M} = 1 - |A|_{M}$.

7. *Если* $C = \exists x[x/a]A$, *то* $|C|_{M} = 1 \iff$ *существует* $m \in \underline{M}$ *такое, что* $|[m/a]A|_{M} = 1$.

8. *Если* $C = \forall x[x/a]A$, *то* $|C|_{M} = 1 \iff$ *для любого* $m \in \underline{M}$ *такое, что* $|[m/a]A|_{M} = 1$.

Утверждения 41.2. *Значение формулы, оценённой в модели M, определено корректно.*

Доказательство. База индукции: если c — константа, то очевидно. Шаг индукции: Каждая формула определена однозначно (последние 2 пункта с точностью до $B = [b/a]A$), а по предположению индукции все значения всех составляющих определены однозначно, а значит, значение самой формулы определено однозначно. ■

42 Билет 42 (Истинность и общезначимость атомарных формул)

Определение 42.1. *Пусть M — модель сигнатуры Ω, A — замкнутая формула сигнатуры Ω. Формула истинна в модели M, если $|A|_M = 1$. Так же говорят, что M — модель A и пишут $M \models A$.*

Определение 42.2. *Формула выполнима, если она имеет модель, то есть существует модель данной сигнатуры, в которой она истинна.*

Определение 42.3. *Формула называется общезначимой, если она истинна во всех моделях данной сигнатуры.*

Определение 42.4. *Замкнутые формулы A и B называются равносильными, если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима. Обозначение: $A \sim B$.*

43 Билет 43 (Универсальное замыкание, его равносильные варианты)

Введём обозначение. Пусть $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — множество свободных переменных, $A(\vec{b})$ — формула, в которую входят только эти переменные, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — множество связанных переменных, не входящих в A. Тогда обозначим $\forall \vec{x} A(\vec{x}) = \forall x_1 [x_1/b_1] \ldots \forall x_n [x_n/b_n] A(\vec{b})$.

Определение 43.1. *Формула вида $\forall \vec{x} A(\vec{x})$ называется универсальным замыканием формулы $A(\vec{b})$. Обозначение: $\overline{\forall} A$.*

Утверждения 43.1. *$M \models \forall \vec{x} A(\vec{x}) \iff$ для всех $\vec{m}$ $M \models A(\vec{m})$.*

Доказательство. Очевидно из определения. ■

Утверждения 43.2. *Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$ — два списка связанных переменных, не входящих в $A(\vec{b})$, тогда $\forall \vec{x} A(\vec{x}) \sim \forall \vec{y} A(\vec{y})$.*

Доказательство. ■

44 Билет 44 (Подстановочные примеры тавтологий и их общезначимость)

Определение 44.1. *Пусть $F(P_1, \ldots, P_n)$ — пропозициональная формула, P_1, …, P_n — пропозициональные переменные, B_1, …, B_n — формулы сигнатуры Ω. Формула $F(B_1, \ldots, B_n)$ называется подстановочным примером формулы F.*

Лемма 44.1. *Подстановочные примеры тавтологий общезначимы.*

Доказательство. Пусть $F(B_1, \dots, B_n)$ — подстановочный пример тавтологии, то есть при любых оценках значение формулы F равно 1, то есть при любых значениях переменных формула F истинна, а значит, при замене переменных формула останется тождественно истинной, то есть формула $F(B_1, \dots, B_n)$ общезначима. ■

45 Билет 45 (Предварённая нормальная форма (ПНФ))

Определение 45.1. *Предварённая нормальная форма — формула вида $K_1x_1 \dots K_nx_n[x_1/a_1] \dots$ где K_1, …, K_n — кванторы, A — формула без кванторов, a_1, …, a_n — различные свободные переменные, x_1, …, x_n — различные связанные переменные, не входящие в A.*

Утверждения 45.1 (Основные раносильности). *1. Если $F_1(P_1, \dots, P_n) \sim F_2(P_1, \dots, P_n)$, где F_1 и F_2 — пропозициональные формулы, то $F_1(B_1, \dots, B_n) \sim F_2(B_1, \dots, B_n)$.*

2. $\neg\exists x[x/a]A \sim \forall x[x/a]\neg A$.
3. $\neg\forall x[x/a]A \sim \exists x[x/a]\neg A$.
4. *$Kx[x/a](A \circ B) \sim Kx[x/a]A \circ B$, если $a \notin B$ и $x \notin A \wedge x \notin B$, здесь $\circ$ — $\vee$ или $\wedge$.*
5. *Если $A \sim B$, то $\neg A \sim \neg B$.*
6. *Если $A \sim A'$ и $B \sim B'$, то $(A \circ B) \sim (A' \circ B')$.*
7. *Если $A \sim B$, то $Kx[x/a]A \sim Kx[x/b]B$ $(x \notin A \wedge x \notin B)$.*
8. *$Kx[x/a]A \sim Ky[y/a]A$, если x, $y \notin A$.*

Доказательство. 1. Так как $F_1 \sim F_2$ при любых значениях переменных, то при подстанвке ничего не изменится.

2. $|\neg\exists x[x/a]A|_M \equiv |\forall x\neg[x/a]A|_M \equiv |\forall x[x/a]\neg A|_M$.
3. $|\neg\forall x[x/a]A|_M \equiv |\exists x\neg[x/a]A|_M \equiv |\exists x[x/a]\neg A|_M$.
4. Очевидно, так как подстановка a не влияет на B, а значит, значение B не изменится.
5. $A \sim B \iff$ формула $(A \to B) \wedge (B \to A)$ общезначима. По таблице истинности $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$. Аналогично для $B \to A$, то есть $\neg A \leftrightarrow \neg B$ общезначима.
6. Для каждой из операций: конъюнкции, дизъюнкции и имплекации — достаточно проверить, что значения формулы $A' \circ B'$ совпадает со значением формулы $A \circ B$.
7. Так как при любой оценке формулы A и B истинны или ложны одновременно, то при замене $[x/a]$ формулы останутся эквивалентными, так как логическая структура не изменится.

8. Аналогично с предыдущим пунктом.

■

46 Билет 46 (ТО формулы)

Определение 46.1. *Формула с тесными отрицаниями (ТО) — формула, построенная только из литералов (то есть атомарных формул и их отрицаний) с помощью конъюнкции, дизъюнкции и кванторов.*

Утверждения 46.1. *Любая формула равносильна некоторой ТО-формуле.*

Доказательство. Имплекацию можно представить с помощью дизъюнкции и отрицания ($A \to B \sim \neg A \vee B$, а по равносильностям из билета 45 любое отрицание можно поменять местами с квантором. ■

47 Билет 47 (Приведение формул к ПНФ)

Теорема 47.1. *Всякая формула равносильна некоторой ПНФ.*

Доказательство. Так как любая формула равносильна некоторой ТО-формуле (по утверждению из билета 46), то достаточно доказать данное утверждение для ТО-формулы. Индукция по числу связок и кванторов.
База индукции: если A — литерал, то A — ПНФ.
Шаг индукции:

1. пусть $A = (B \circ C)$. По предположению индукции $B \sim B'$, $C \sim C'$, где B' и C' — ПНФ. Тогда по равносильностям из билета 45 имеем, что $A = (B \circ C) \sim (B' \circ C')$. Значит, достаточно доказать для случая, когда B и C — ПНФ. Проведём индукцию по числу кванторов
   База внутренней индукции: если кванторов нет, то имеем ПНФ. Шаг внутренней индукции: пусть $A = Kx[x/a]A_1$ (если в A нет квантора, то поменяем местами A и B).
   (a) Пусть $a \notin B$ и $x \notin B$. По равносильностям из билета 45 имеем, что $(A \circ B) \sim (Kx[x/a]A_1 \circ B) \sim Kx[x/a](A_1 \circ B)$. Число кванторов в $(A_1 \circ B)$ меньше чем в A, а значит, по предположению индукции $(A_1 \circ B) \sim C$, где C — ПНФ.
      i. Если $x \notin C$, то по равносильностям из билета 45 $Kx[x/a](A_1 \circ B) \sim Kx[x/a]C$. Тогда $(A \circ B) \sim Kx[x/a]C$ — искомая ПНФ.

ii. Если $x \in C$, то выберем связанную переменную y такую, что $y \notin A_1$, $y \notin B$ и $y \notin C$. Тогда по последнему пункту из билета 45 имеем $Kx[x/a]A_1 \sim Ky[y/a]A_1$. Тогда по аналогии с предыдущим пунктом $Ky[y/a]C$ — искомая ПНФ.

(b) Пусть $a \in B$ или $x \in B$. Тогда выбрем новую свободную переменную b и связанную переменную y такие, что $b \notin B$ и $y \notin B$. По равносильностям из билета 45 имеем, что $Kx[x/a]A_1 \sim Ky[y/a]A_1$, а по лемме из билета 39 имеем $Kx[x/a]A_1 = Kx[x/b][b/a]A_1$. По первому пункту для $A_1 = [b/a]A_1$ существует равносильная ПНФ.

2. Пусть $A = Kx[x/a]B$, тогда по предположению индукции существует ПНФ $B' \sim B$. Выберем связанную переменную y такую, что $y \notin B$ и $y \notin B'$, тогда по равносильностям из билета 45 имеем $A = Kx[x/a]B \sim Ky[y/a]B \sim Ky[y/a]B'$.

■

48 Билет 48 (Изоморфизм моделей)

Определение 48.1. *Модели M и M' сигнатуры Ω называются изоморфными, если существует изоморфизм — отображение $\alpha : \underline{M} \to \underline{M'}$ которое удовлетворяет следующим условиям:*

1. *α — биекция.*
2. *$\alpha(c_{_M}) = c_{_{M'}}$ для $c \in Const_\Omega$*
3. *$\alpha(f_{_M}(m_1, \ldots, m_k)) = f_{_{M'}}(m_1, \ldots, m_k)$ для $f_{_M} \in Fun_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$.*
4. *$\alpha(P_{_M}(m_1, \ldots, m_k) = P_{_{M'}}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k))$ для $P_{_M} \in Pred_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$.*

Теорема 48.1. *Пусть $\alpha : \underline{M} \cong \underline{M'}$ — изоморфизм моделей.*

1. *Пусть t — терм, оценённый в модели M, тогда $|\alpha \cdot t|_{_{M'}} = \alpha(|t|_{_M})$.*
2. *Пусть A — формула, оценённа в модели M, тогда $|\alpha \cdot A|_{_{M'}} = |A|_{_M}$.*

Доказательство. 1. Индукция по длине терма.
База: если t — константа, то $\alpha \cdot t = t = c$, значит, $|\alpha \cdot t|_{_{M'}} = \alpha(|t|_{_M})$. Если $t = m \in \underline{M}$, то $|\alpha(m)|_{_{M'}} = \alpha(m) = \alpha(|m|_{_M})$
Шаг индукции: $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, тогда $\alpha(t) = f(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n))$.

$$|\alpha(t)|_{_{M'}} = f_{_{M'}}(|\alpha(t_1)|_{_{M'}}, \ldots, |\alpha(t_n)|_{_{M'}}) = f_{_{M'}}(\alpha(|t_1|_{_M}), \ldots, \alpha(|t_n|_{_M}))$$

По определению изоморфизма

$$f_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \ldots, \alpha(|t_n|_M)) = \alpha(f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)) = \alpha(|t|_M)$$

2. Проведём индукцию по числу логических связок и кванторов.
База индукции: если $A = P^n(t_1, \ldots, t_n)$, то по аналогии с шагом индукции для термов имеем

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = P_{M'}(|\alpha(t_1)|_{M'}, \ldots, |\alpha(t_n)|_{M'}) = P_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \ldots, \alpha(|t_n|_M))$$

По определению изоморфизма

$$P_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \ldots, \alpha(|t_n|_M)) = P_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M) = |A|_M$$

Шаг индукции: для следующих случаев $\alpha(|B|_M) = |\alpha(B)|_{M'}$, $\alpha(|C|_M) = |\alpha(C)|_{M'}$ по предположению индукции: $A = (B \vee C)$, $A = (B \wedge C)$, $A = (B \to C)$, $A = \neg B$.
Например, для случая $A = (B \wedge C)$ $|\alpha \cdot A|_{M'} = \min(|\alpha \cdot B|_{M'}, |\alpha \cdot C|_{M'}) = \min(|B|_M, |C|_M) = |A|_M$. Для остальных аналогично.

(a) Пусть $A = \exists x [x/a] B$, тогда по определению истинности

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = |\exists x [x/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \max_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

По определению истинности и предположению индукции для $[m/a]B$ имеем

$$|A|_M = \max_{m \in M} |[m/a]B|_M = \max_{m \in M} |\alpha \cdot [m/a](B)|_{M'}$$

В силу того что $\alpha \cdot [m/a]B = [\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)$ имеем

$$\max_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \max_{m \in M} |[\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

(b) Пусть $A = \forall x [x/a] B$, тогда по определению истинности

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = |\forall x [x/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \min_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

По определению истинности и предположению индукции для $[m/a]B$ имеем

$$|A|_M = \min_{m \in M} |[m/a]B|_M = \min_{m \in M} |\alpha \cdot [m/a](B)|_{M'}$$

В силу того что $\alpha \cdot [m/a]B = [\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)$ имеем

$$\min_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \min_{m \in M} |[\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

■

49 Билет 49 (Элементарная теория модели)

Определение 49.1. *$Th(M) = \{A \in CFm_\Omega | \ M \models A\}$ — элементарная теория модели M (CFm_Ω — множество замкнутых формул в сигнатуре Ω).*

Определение 49.2. *Модели M и M' называются элементарно эквивалентными, если $Th(M) = Th(M')$. Обозначение: $M \equiv M'$.*

Теорема 49.1. *Если модели изоморфны, то они элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\alpha : M \cong M'$ — изоморфизм моделей. Если A — замкнутая формула, то в ней нет констант из M, то есть $\alpha \cdot A = A$, тогда по теореме из билета 48 имеем $\alpha(|A|_{_M}) = |\alpha \cdot A|_{_{M'}} = |A|_{_{M'}} = |A|_{_M}$, значит, $M \models A \Leftrightarrow M' \models A$. А значит, это верно для любой замкнутой формулы. Тогда по определению $Th(M) = Th(M')$. ∎

50 Билет 50 (Определимые в модели предикаты и отношения, их инвариантность)

Определение 50.1. *Рассмотрим формулу $A(\vec{b})$, где $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$. k-местный предикат, определимый формулой $A(\vec{b})$ в модели M — это $A_M : \underline{M}^k \to \{0,1\}$ такой, что для всех m_1, ..., m_k $A_M(m_1, \ldots, m_k) = |[m_1, \ldots, m_k/b_1, \ldots, b_k]|_{_M}$.*

Теорема 50.1. *Пусть α — автоморфизм модели M сигнатуры Ω, $A(a_1, \ldots, a_k)$ — формула данной сигнатуры, тогда для любых m_1, ..., $m_k \in M$ $A_M(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \ldots, m_k)$. Сокращённо, $A_M(\alpha\vec{m}) = A_M(\vec{m})$.*

Доказательство. По теореме из билета 48 имеем $|\alpha \cdot A(\vec{m})|_{_{M'}} = |A(\vec{m})|_{_M}$. Так как α — автоморфизм, то $M = M'$. ∎

Замечание 1. *k-местный предикат, определимый формулой в модели M, инвариантен относительно автоморфизма модели.*

Определение 50.2. *k-местное отношение R определимо в M формулой $A(\vec{b})$, если определим соответствующий предикат, то есть $\forall \vec{m} \in M^k$ $M \models A(\vec{m}) \iff \vec{m} \in R$.*

Из теоеремы следует, что автоморфизм — инвариант для этого отношения.

Определение 50.3. *Подмножества $\mathbb{N}$, определимые в сигнатуре арифметики $\{=, +, \cdot, 0, 1\}$, называются арифметическими множествами.*

51 Билет 51 (Стандартные теории равенства, теоерма о нормальности)

Определение 51.1. *Пусть Ω — сигнатура, содержащая предикатный символ равенства. Стандартная теория равенства в сигнатуре Ω — теория, содержащая следующие формулы:*

1. $\forall x(x = x)$
2. $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \to x = z)$
4. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(x_i = y_i) \to (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n)))\ \forall P \in Pred_\Omega$
5. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(x_i = y_i) \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))\ \forall f \in Fun_\Omega$

Обозначение: Eq_Ω.

Лемма 51.1. *Пусть $M \models Eq_\Omega$. Тогда предикат $=_{{}_M}$ в силу первых трёх условий (аксиом) задаёт отношение эквивалентности на $\underline{M}$. Обозначим его $\approx$ и рассмотрим фактормножество $\underline{M}/\approx$. Зададим модель $\tilde{M}$ в сигнатуре Ω на этом фактормножестве.*

1. $c_{{}_{\tilde{M}}} = (c_{{}_M})\tilde{}$
2. $f_{{}_{\tilde{M}}}(\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_k) = (f_{{}_M}(m_1, \ldots, m_k))\tilde{}$
3. $P_{{}_{\tilde{M}}}(\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_k) = P_{{}_M}(m_1, \ldots, m_k)$

Модель $\tilde{M}$ — нормальная модель.

Доказательство. Для этого достаточно проверить, что при замене m_i на эквивалентные элементы правые части в последних двух пунктах не изменятся.

Пусть $m_1 \approx m_1'$, …, $m_k \approx m_k'$, тогда $M \models (m_i = m_i')$, а значит, $M \models \bigwedge\limits_{i=1}^{k}(m_1 = m_1')$ Из условия 2 имеем

$$\forall m_1 \ldots \forall m_k \forall m_1' \ldots \forall m_k'(\bigwedge_{i=1}^{k}(m_1 = m_1') \to (f(m_1, \ldots, m_k) = f(m_1', \ldots, m_k')))$$

то есть $M \models (f(\vec{m}) = f(\vec{m}'))$. Значит, $=_{{}_M}(|f(\vec{m})|_{{}_M}, f(\vec{m}')|_{{}_M}) = 1$. По определению значения терма $|f(\vec{m})|_{{}_M} = f_{{}_M}(\vec{m})$, то есть $(f_{{}_M}(\vec{m}))\tilde{} = (f_{{}_M}(\vec{m}'))\tilde{}$. ■

Таким образом имеем, что $\tilde{M}$ — нормальная модель в $\underline{M}/\approx$.

Теорема 51.1 (О нормализации)**.** *Если* $M \models Eq_\Omega$*, то* $M \equiv \tilde{M}$*.*

Доказательство. Имеется сюръекция $\alpha : \underline{M} \to \underline{M}/\approx$ такая, что $\alpha(m) = \tilde{m}$. По построению:

1. $\alpha(c_{M}) = c_{\tilde{M}}$
2. $\alpha(f_{M}(\vec{m})) = f_{\tilde{M}}(\alpha \cdot \vec{m})$
3. $P_{M}(\vec{m}) = P_{\tilde{M}}(\alpha \cdot \vec{m})$

Так как в доказательстве теоремы из билета 48 нам была нужна только сюръективность, то, применив её, получим $|A|_{M} = |\alpha \cdot A|_{\tilde{M}}$. Таким образом, по определению $M \equiv \tilde{M}$ ■