Билет 1

Определение. Упорядоченный набор - функция, которая ставит в соответствие каждому элементому множества $\{1, \ldots, n\}$ элемент из множества $\{a_1, \ldots, a_n\} : 1 \to a_1$, …, $n \to a_n$.

Декартовое произведение множеств $A_1 \times \ldots \times A_n = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i$.

Определение. Пусть функция f определена на $A_1 \times \ldots \times A_n$, тогда f - n-местная функция.

Определение. Множество $B_n = E_2 \times \ldots \times E_n$, где $E_i = \{0, 1\}$, называется n-мерным булевым кубом.

Определение. Функция $f : B_n \to E_2$ называется функцией алгебры логики. Множество всех таких функций обозначим P_2.

Представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде таблицы, имеющей $n + 1$ столбец:

x_1	…	x_{n-1}	x_n	f
0	…	0	0	0
0	…	0	0	1
0	…	0	1	0
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	…	1	1	1

Так как число различных первых n столбцов 2^n, так как в каждой ячейке одного столбца может быть либо 0, либо 1. $\Longrightarrow$ число функций будет 2^{2^n}, так как для каждого набора значение функции может быть либо 0, либо 1.

Определение. Переменная x_i называется существенной, если существуют наборы α_1, …, α_{i-1}, 1, α_{i+1}, …, α_n и α_1, …, α_{i-1}, 0, α_{i+1}, …, α_n, на которых функция принимает различные значения. В противном случае переменная x_i называется несущественной (фиктивной).

Определение. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1$, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, $x_n) = g(x_1$, …, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, …, $x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Определение. Функция называется симметрической, если при любых перестановках переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ значение функции не меняется.

Элементарные функции в алгебре логики:

1. константы 0, 1
2. тождественный x
3. отрицание $\overline{x}$
4. конъюнкция $x \wedge y$
5. дизъюнкция $x \vee y$
6. имплекация $x \to y$
7. штрих Шеффера $x | y$
8. стрелка Пирса $x \downarrow y$

9. сложение по модулю 2

10. эквивалентность

Билет 2

Определение. Формула - слово в некотором алфавите A.

Определение. Алфавит - конечное или бесконечное множество.

Определение. Произвольная функция, определённая на начальном отрезке натурального ряда и принимающая на нём значения из A.

Определение. Пусть F - множество функций алгебры логики, S - множество символов, обозначающих функции из F, тогда отображение $\Sigma : S \to F$ - сигнатура для F.

Определение. Пусть $X = \{x_1, \ldots\}$ - символы переменных.
База индукция: если x_i - символ переменной, то однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигнатуре Σ.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - функция от n переменных, Φ_1, ..., Φ_n - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(\Phi_1$, ..., $\Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ.

Определение. Пусть Φ - формула, $\tilde{x}$ - упорядоченный набор $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, содержащий все формулы Φ, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - двоичный набор.
База индукции: Φ - однобуквенное слово x_{i_j}, тогда $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \alpha_j$ - значение фолмулы на ноборе $\tilde{\alpha}$.
Пусть F - $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $f = \Sigma(s)$, причём $\Phi_1[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_1$, ..., $\Phi_n[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_n$, тогда $f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ - значение функции на наборе значений переменных.

Определение. Формула, определяющая функцию алгебры логики, определённую на B_n такую, что $\forall$ набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_n$ $f(\tilde{\alpha}) = F[\tilde{x}, \tilde{\alpha}]$.

Определение. Формулы в сигнатуре, представляющие собой переменные, называются невырожденными, остальные - вырожденными. Если функция определяется вырожденной формулой в сигнатуре $\Sigma : S \to F$, то она получена суперпозициями над F, где F - множество функций.

Определение. (Другое определение суперпозиции) Если одну функцию можно получить с помощью конечного числа применений следующих трёх операций, то данная функция называется функцией, полученной суперпозициями над F.
Операции:

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ - функция, определённая на B_n такая, что $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где набор $(i_1, \ldots, i_n)$ - набор элементов $(1, \ldots, n)$ (они необязательно различны). Тогда g получена из f операцией подстановки переменных.

2. Операция подстановки функции в функцию. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$, h определена на B_{n+m-1} и $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, тогда функция h получена из функций f и g операцией подстановки одной функции в другую.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Билет 3

Определение. Формулы F_1 и F_2 называются эквивалентными, если они определяют равные функции относительно объединения их переменных. Функции называются равными, если их области определения равны и $\forall x \in D_f(x)\ f(x) = g(x)$. Слово $F_1 = F_2$, если формулы F_1 и F_2 эквивалентны, называется тождеством.

Основные тождества:

1. Ассоциативность операций: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\leftrightarrow$.
2. Дистрибутивности:
   (a) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
   (b) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
   (c) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. Тождества для отрицания:
   (a) $\overline{\overline{x}} = x$
   (b) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
   (c) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
   (d) $x \cdot \overline{x} = 0$
   (e) $x \vee \overline{x} = 1$
   (f) $\overline{x \to y} = x \cdot \overline{y}$
4. Тождества для эдентичных операндов
5. Тождества с константным операндом

Определение. Функция g называется двойственной к f, если $g(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$. Обозначение $g = f^*$.

Определение. Если функция двойственна к самой себе, то она называется самодвойственной.

Теорема. *(принцип двойственности) Если Ф - формула в сигнатуре $\Sigma : S \to F$, определяющая некоторую функцию g, то эта формула в сигнатуре $\Sigma^* : S \to F^*$ определяет двойственную функцию g^*.*

Доказательство. База индукции: пусть x_i - символ переменной, тогда однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигатуре Σ, определяющая одноместную функцию g. Эта формула в сигнатуре Σ^* имеет вид $\overline{x_i}$, то есть она определяет функцию, двойственную к g.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - формула от n переменных, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ. В $\Sigma^*(s) = (\Sigma(s))^* = (\Sigma(s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)))^* = f^*$, то есть данная формула определяет в двойственной сигнатуре двойственнную функцию. $\square$

Билет 4

Определение. Выражение $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n): f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$ называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой. $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, \sigma_i = 1 \\ \overline{x_i}, \sigma_i = 0 \end{cases}$.

Теорема. *Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры логики верно равенство:*
$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in B_m} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Доказательство. Рассмотрим прозвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, то $\exists \alpha_i \neq \sigma_i \Longrightarrow \alpha_i^{\sigma_i} = 0 \Longrightarrow$ данное слагаемое будет равно нулю. Тогда единственным не нулевым членом будет $(\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_m^{\alpha_m}) \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. □

Теорема. *Любую функцию алгебры логики можно представить с помощью суперпозиций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.*

Доказательство. Так как любая функция алгебры логики, кроме тождественного нуля, реализуется совершенной д.н.ф., значит она представима суперпозициями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Тождественный ноль можно представить так: $x \wedge \overline{x} = 0$. □

Теорема. *Любая функция алгебры логики, кроме тождественной единицы, представима в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы.*

Доказательство. Так как любая функция алгебры логики, кроме тождественного нуля, представима в виде совершенной д.н.ф., тогда по принципу двойственности
$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n): f^*(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} \Longrightarrow$
$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge\limits_{(\delta_1, \ldots, \delta_n): f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1} x_1^{\overline{\delta}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\delta}_n}$. □

Блет 5

Определение. Система функций называется полной в P_2, если через них выражаются все функции в P_2.

Примеры.

1. $\wedge$ и $\neg$
2. $\vee$ и $\neg$
3. $x|y$
4. $x \downarrow y$

Определение. Полиномы по модулю 2 вида: $\sum\limits_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq 1, \ldots, n} a_{i_1, \ldots, i_s} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$ называются полиномами Жегалкина.

Теорема. *Любая функция представима полиномами Жегалкина, причём единственным образом.*