Содержание

1 №1 **1**

2 №2 **1**

3 №3 **2**

4 №4 **2**

5 №5 **2**

6 №6 **3**

7 №7 **3**

8 №12 **3**

9 №13 **4**

1 №1

(№452) Решить дифференциальное уравнение, воспользовавшись формулой, сводящей многократное интегрирование к однократному.

$$xy'' = \sin x$$

$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$. Если $x = 0$, то $0 = 0 \Longrightarrow x = 0$ - решение. Пусть $x \neq 0$, тогда уравнение имеет вид: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin x}{x}$. Проинтегрируем полученное уравнение: $\frac{dy}{dx} = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt + C_1$.

Проинтегрируем ещё раз: $y = x\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt + \cos x + C_1x + C_2$.

2 №2

(№233) При каких n уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ (f и f'_y непрерывны) может иметь среди своих решений функции $y_1 = x$, $y_2 = x + x^4$? Рассмотрим случаи:

1. $n = 1$, $y'(0) = f(0, 0)$, $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_1''(0) = y_1'''(0) = y_1^{(4)}(0) = 0$ $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, $y_2''(0) = y_2'''(0) = 0$, $y_2^{(4)}(0) = 24$, то есть через точку $(0, 0)$ проходит два различных решения - противоречие теореме Коши о существовании и единственности.

2. $n = 2$ аналогично через точку $(0, y(0), y'(0))$ в каждом из случаев одна и та же кривая.

3. $n = 3$ аналогично через точку $(0, y(0), y'(0))$ в каждом из случаев одна и та же кривая.

4. $n = 4$ аналогично через точку $(0, y(0), y'(0))$ в каждом из случаев одна и та же кривая.

5. $n \geqslant 5$ В пространстве решений $(x, y, y', y'', y''', y^{(4)})$ кривые y_1 и y_2 не совпадают ни в одной точке.

Ответ: $n \geqslant 5$.

3 №3

(№507) Найти кривые, у которых радиус кривизны обратно пропорционален косинуса угла между касательной и осью абсцисс. $R = \frac{k}{\cos\alpha}$ $R = \frac{(1+y')^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$, $\alpha = \arctan y'$. Тогда $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = k|y''|(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$. $ky'' = 1 + y'^2 \implies \frac{y''}{1+y'^2} = \frac{1}{k}$, $\frac{1}{k} = (\arctan y')'$. $\arctan y' = \frac{x}{k} + C_1$ $\implies y' = \tan(\frac{x}{k} + C_1) \implies y = -k \ln|\cos(\frac{x}{k} + C_1)| + C_2$

4 №4

(№640) t - независимая переменная. $I = I(t)$, $RI + LI' + \frac{1}{C}q = V\sin(\omega t) \implies LCI'' + RCI' + I = VC\omega\cos(\omega t)$
Характеристическое уравнение имеет вид:

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}$$

$I_1(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$, $I_1' = a\omega\cos(\omega t) - b\omega\sin(\omega t)$
$I_1'' = -a\omega^2\sin(\omega t) - b\omega^2\cos(\omega t)$
Подставим эти уравнения в исходное дифференциальное уравнение второго порядка и по отдельности приравняем коэффициенты при $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$.
$\begin{cases} (-LC\omega^2 + 1)a + bc\omega = 0 \\ RCa + (-LC\omega^2 + 1)b = VC\omega \end{cases}$ Далее подставляем найденные a и b и приводим к виду с арктангенсом.

5 №5

(№598) Решить уравнение Эйлера: $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.
$x = e^t$, $\lambda(\lambda - 1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda = -1$ или $\lambda = 2$.

$$y''_t - y'_t - 2y_t = \sin t \begin{cases} y = A\sin t + B\cos t \\ y' = A\cos t - B\sin t \\ y'' = -A\sin t - B\cos t \end{cases}$$

$\begin{cases} -3A + B = 1 \\ -3B - A = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -\frac{3}{10} \\ B = \frac{1}{10} \end{cases}$ $\tilde{y} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \Longrightarrow y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 + 0,1\cos\ln x - 0,3\sin\ln x$

6 №6

(№665) Приведём 2 примера.

1. $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 2x$, тогда определитель Вронского тождественно равен 0 и эти функции линейно зависимы.
2. $y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, \ 0 < x \leqslant 1 \\ 0, \ 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$, $y_2(x) = \begin{cases} 0, \ 1 \leqslant x < 2 \\ (x-1)^2, \ 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

7 №7

(№677) $a = x^2 - 3x$
$b = 2x^2 + 9$
$c = 2x + 3$
$b = 2a + 3c \Longrightarrow$ решения линейно зависимы (можно было просто вычислить определитель Вронского). $\begin{vmatrix} x^2 - 3x & 2x + 3 & \text{y} \\ 2x - 3 & 2 & y' \\ 2 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0$
$y''(-2x^2 - 6x + 9) + 2y'(2x + 3) - 4y = 0$

8 №12

(№297 a)) $y = Cx^2 - C^2$ $\begin{cases} \frac{d\Phi}{dC} = -x^2 + 2C \\ y - Cx^2 + C^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = \frac{x^4}{4} = {}^2$ - дискриминантная кривая.
Тогда $\frac{d\Phi}{dx} = -2Cx = -x^3$, $\frac{d\Phi}{dy} = 1$, $(\frac{d\Phi}{dx})^2 + (\frac{d\Phi}{dy})^2 = 1 + x^6 \neq 0$. Так как $y = \frac{x^4}{4}$ не принадлежит этому уравнению, то $y = \frac{x^4}{4}$ - особое решение.

9 №13

(№299)