Содержание

1 Метрические и топологические пространства и их подпространства

Определение 1.1. *Метрикой на множестве X называется функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ со свойствами:*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x,\ y \in X$
3. $d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, z)\ \forall x,\ y,\ z \in X$

Определение 1.2. *Множество с заданной на нём метрикой называется метрическим пространством. Обозначение: (X, d).*

Определение 1.3. *Расстоянием между множествами A и B называется $inf\{d(x, y)|x \in A,\ y \in B\}$. Обозначение: $d(A, B)$.*

Определение 1.4.
1. $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X|d(x, y) < \varepsilon\}$ *- ε-окрестность или открытый ε-шар с центром в точке x.*
2. $\overline{B}_d(x, \varepsilon) = \{y \in X|d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ *- замкнутый ε-шар с центром в точке x.*

Определение 1.5. *Пусть X - множество и пусть каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие семейство подмножеств $U(x)$ множества X, обладающее следующими свойствами:*

1. $\forall U \in U(x)$ *содержит точку x*
2. $\forall U$ *и* $V \in U(x)\ \exists W \in U(x)$ *такое, что* $W \subseteq (U \cap V)$
3. $\forall U \in U(x)$ *и* $y \in U\ \exists\ V \in U(y)$ *такое, что* $V \subseteq U$

Тогда $\{U(x)\}_{x \in X}$ - семейство открытых окрестностей.

Определение 1.6. *Множество X с введённой на нём системой окрестностей является топологическим пространством. Точками топологического пространства X являются точки множества X.*

Определение 1.7. *Подмножество U топологического пространства называется открытым, если $\forall x \in U\ \exists V \in U(x)$ такое, что $V \subseteq U$.*

Определение 1.8. *Подмножество U топологического пространства X называется замкнутым, если $X \setminus U$ открыто.*

Определение 1.9. *Любое открытое множество, содержащее данную точку, называется открытой окрестностью этой точки.*

Определение 1.10. *(Определение Александрова) Топологическое пространство - множество X вместе с семейством τ его подмножеств, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$
2. *если* $U \subset \tau$, *то* $\bigcup U \in \tau$
3. $\forall U, V$
   $in\tau$ $U \cap V \in \tau$

Определение 1.11. *Семейство τ из предыдущуего определения называется топологией на множестве X, его жлементы - открытыми множествами, а их дополнения - замкнутыми множествами. Множества, которые одновременно являются открыитыми и замкнутыми, называются открыто-замкнутыми.*

Определение 1.12. *Если все подмножества множества X открыты в данной топологии, то такая топология называется дискретной.*

Определение 1.13. *Если в данной топологии открыты только $\varnothing$ и X, то такая топология называется антидискретной.*

Определение 1.14. *Топология порождается всеми ε-окрестностями для каждой точки, то такая топология называется метрической.*

Определение 1.15. *Две метрики d_1 и d_2 называются эквивалентными, если они порождают одно и ту же топологию, то есть $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.*

Определение 1.16. *Пусть d_1, d_2 - метрики. Если $\exists c$, C такие, что $c \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant C \cdot d_1(x, y)$, то метрики d_1 и d_2 называются липшицево эквивалентными.*

Определение 1.17. *Топологическое пространство метризуемо, если его топология является метрической топологией, порождённой некоторой метрикой.*

Определение 1.18. *Пусть (X, d) - метрическое пространство и $Y \subset X$, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ - метрика. Метрическое пространство (Y, d_y) называется подпространством метриеского пространства (X, d), а метрика $d_y = d|Y \times Y$ называется индуцированной или относительной метрикой.*

Определение 1.19. *Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $Y \subset X$. Топологическое пространство (Y, τ_Y) является подпространством топологического пространства (X, τ), а топология $\tau_Y = \{U \cap Y | U \in \tau\}$ называется индуцированной или относительной топологией.*

2 Наследственность, базы, предбазы

Определение 2.1. *Говорят, что свойство F топологических пространств наследуется подпространствами, удовлетворяющими условию $*$, если все удовлетворяющие условию $*$ подпространства любого пространства со свойством F тоже обладают этим свойством.*

Определение 2.2. *Свойство топологического пространство называется наследственным, если оно наследуется всеми подпространствами.*

Определение 2.3. *Говорят, что торология τ_1 на множестве X сильнее (тоньше) топологии τ_2 на том же множестве, $\tau \subset \tau_1$ ($\tau_1 \subseteq \tau_2$).*

Определение 2.4. *Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Семейство $B \subset \tau$ называется базой топологии τ или базой топологического пространства X, если любое открытое множество в X является объединением элементво семейства B.*

Определение 2.5. *Пусть (X, τ) - топологическое пространство, семейство $B \subset \tau$ называется предбазой топологии τ или предбазой топологического пространства X, если семейство всех конечных пересечений является базой топологии τ.*

Определение 2.6. *Семейство $B(x)$ открытых окрестностей точки x называется локальной базой топологии τ в точке x или базой окрестностей точки x, если любая окрестность точки x содержит окрестность из $B(x)$.*

Определение 2.7. *Наименьшая мощность локальной базы топологии топологического пространства X в точке x назыветсся пространства X в точке x и обозначается $\xi(x, X)$.*

Определение 2.8. *Супремум кардиналов $\xi(x, X)$ называется характером пространства X и обозначается $\xi(X)$.*

Определение 2.9. *Если характер пространства X не более чем счётен, то говорят, что X удовлетворяет первой аксиоме счётности.*

Определение 2.10. *Наименьшая мощность базы топологии топологического пространства X называется весом этого пространства и обозначается $\omega(X)$.*

Определение 2.11. *Если вес пространства не более чем счётен, то говорят, что пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности.*

3 Типы точек

Определение 3.1. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда точка $x \in A$ называется:*

1. *точкой прикосновения множества A, если всякая её окрестность пересекает A*
2. *предельной точкой множества A, если всякая её окрестность пересекает $A \setminus \{x\}$*
3. *называется изолированной в A, если у неё есть окрестность, пересечение которой с A равно $\{x\}$*
4. *внутренней точкой, если у этой точки есть окрестность полностью содержащаяся в A*
5. *граничной точкой, если она является предельной, но не является внутренней*
6. *точкой накопления, если пересечение всякой её окрестности с A бесконечно*

Определение 3.2. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех точек прикосноевения множества A называется замыканием множества A и обозначается $\overline{A}$.*

Определение 3.3. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех предельных точек множества A называется производным множеством множества A и обозначается A' или A^d.*

Определение 3.4. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью множества A и обозначается $IntA$.*

Определение 3.5. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех граничных точек множества A называется границей множества A и обозначается FrA.*

4 Операторы, плотность

Определение 4.1. *Пусть X - топологическое пространство $A \in F(X)$. Отображение $F(X) \to F(X)$ называется оператором замыкания на X, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$A \subseteq \overline{A}$ (эксктенсивность)*
2. *$A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$ (монотонность)*

3. *$\overline{\overline{A}} = A$ (идемпотентность)*

Определение 4.2. *Пусть X - топологическое пространство $A \in F(X)$. Отображение $F(X) \to F(X)$ называется оператором внутренности на X, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$IntA \subseteq A$*
2. *$A \subseteq B \Longrightarrow IntA \subseteq IntB$ (монотонность)*
3. *$Int(IntA) = A$ (идемпотентность)*

Определение 4.3. *Пусть X - топологическое пространство и $Y \subset X$. Множество $A \subseteq Y$ плотно в Y, если $Y \subseteq \overline{A}$.*

Определение 4.4. *Множество плотное во всём пространстве X называется плотным или всюду плотным.*

Определение 4.5. *Множество $Y \subset X$ называется нигде не плотным, если его замыкание не содержит никакого непустого открытого множества.*

Определение 4.6. *Наименьшая мощность плотного подмножества топологического пространства X называется плотностью этого пространства и обозначается $d(X)$.*

Определение 4.7. *Если плотность топологического пространства не более чем счётна, то говорят, что это пространство сепарабельно.*

Определение 4.8. *Семейство множеств называется дизъюнктным, если его элементы попарно не пересекаются.*

Определение 4.9. *Супремум мощностей дизъюнктных семейств не пустых открытых подмножеств топологического пространства (X, τ) называется числом Суслина или клеточностью и обозначается $c(X)$.*

Определение 4.10. *Если число Суслина топологического пространства X не более чем счётно, то говорят, что это пространство обладает свойством Суслина.*

5 Фильтры и ультрафильтры

Определение 5.1. *Фильтром на множестве X называется непустое $f \in F(X)$, удовлетворяющее трём условиям:*

1. *$\varnothing \notin f$*
2. *$\forall A,\ B \in f\ \ A \cap B \in f$*

3. $\forall A \in f$ *если* $A \subseteq B$, *то* $B \in f$

Определение 5.2. *Если* $\bigcap f = \varnothing$, *то фильтр называется свободным.*

Определение 5.3. *Семейство* $B \subset f$ *называется базой фильтра* f, *если любое множество* $A \in f$ *содержится в некотором* $C \in B$.

Определение 5.4. *Центрированное семейство множеств - это любое семейство* b *множеств с тем свойством, что любое пересечение конечного числа множеств из данного семейства не пусто.*

Определение 5.5. *Счётно центрированное семейство - это семейство, у которого пересечение любого счётного множества элементов не пусто.*

Определение 5.6. *Максимальный (по включению) фильтр называется ултрафильтром.*

Определение 5.7. *Ультрафильтр называется главным, если* $\bigcap(U \in f) \neq \varnothing$.

Определение 5.8. *Фильтр* f *на топологическом пространстве* X *сходится к некоторой точке* $x \in X$, *если любая окрестность этой точки принадлежит фильтру. Обозначение:* $f \to x$.

Определение 5.9. *Говорят, что фильтр сходится или является сходящимся, если он сходится к некоторой точке.*

6 Непрерывные отображения

Определение 6.1. *Отображение* f *метрического пространства* (X, d) *в метрическое пространство* (Y, ρ) *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ $f(x) \in B_\rho(f(x_0), \varepsilon)\ \forall x \in B_d(x_0, \delta)$.

Определение 6.2. *Отображение* $f : X \to Y$ *метрческих пространств непрерывно, если оно непрерывно во всех точках пространства* X.

Определение 6.3. *Отображение* $f : X \to Y$ *топологических пространств называется непрерывным, если прообраз при этом отображении любого открытого в* Y *множества открыт в* X.

Определение 6.4. *Гомеоморфизмом или топологическим отображением между топологическими пространствами* X *и* Y *называется непрерывное взаимнооднозначное отображение* $f : X \to Y$ *с таким свойством, что обратное отображение* $f^{-1} : Y \to X$ *тоже непрерывно.*

Определение 6.5. *Топологическими свойствами или топологическими инвариантами называются те свойства топологического пространства, которые сохраняются гомеоморфизмами.*

Определение 6.6. *Если пространство X гомеоморфно некоторому подпространству Z пространства Y, то говорят, что X гомеоморфно вложено, или вложено, или вкладывается в пространство Y, а гомеоморфизм между X и Z называется вложением.*

Определение 6.7. *Такие войства как мощность, вес, характер и т.д. называются кардинальными инвариантами.*

Определение 6.8. *Подпространство Y топологического пространства X называется ретрактом этого пространства, если сущетствует непрерывное отображение $r : X \to Y$, тождественное на Y. Такое отображение называется ретрактом.*

7 Аксиомы отделимости

Определение 7.1. *Аксиома T_0: Какого бы ни были две различные точки, хотя бы одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Определение 7.2. *Аксиома T_1: Какого бы ни были две различные точки, каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку. Эквиваленты:*

1. *все одноточечные множества замкнуты*
2. *все предельные точки любого множества являются точками накопления этого множества*

Определение 7.3. *Аксиома T_2: Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности. Эквиваленты:*

1. *пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$*
2. *для любой точки x и любой локалтной базы $B(x)$ в этой точке $\bigcap\{\overline{U}|U \in B(x)\} = \{x\}$*

Определение 7.4. *Аксиома T_3: У любой точки и любого замкнутого множества, не содержащего данную точку, есть непересекающиеся окрестности. Эквиваленты:*

1. *для любой точки x и любой её окрестности U найдётся такая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subseteq U$*

Определение 7.5. *Аксиома T_4: У любых двух непересекающихся замкнутых множеств есть не пересекающиеся окрестности. Эквивалентны:*

1. *для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U найдётся такая окрестность V множества F, что $\overline{V} \subseteq U$*

2. *F и G - любые замкнутые непересекающиеся множества, тогда у F найдётся такая окрестность V, что $G \subseteq X \setminus \overline{V}$*

Определение 7.6. *Топологическое пространство удовлетворяющее аксиоме 2 называется хаусдорфовым.*

Определение 7.7. *Пространство, удовлетворяющее аксиомам 1 и 3, называется регулярным.*

Определение 7.8. *Пространство, удовлетворяющее аксиомама 1 и 4, называется нормальным.*

Определение 7.9. *Пространтсво X удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \notin F$ существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, принимающая значение 0 в точке x и тождественно равная 1 на всём множестве F.*

Определение 7.10. *Пространство X, удовлетворяющее аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называется вполне регулярным или тихоновским.*

8 Операции над топологическими пространствами

Определение 8.1. *Пусть $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ - семейство попарно непересекающихся топологических пространств. Обозначим $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A}$, τ - семейство всех подмножеств $\{U \subset X \ : \ \forall \alpha \in A \ U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha\}$. Множество X с топологией τ называется суммой топологических пространств X_α и обозначается $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Определение 8.2. *Пусть $\sim$ - отношение эквивалентности на множестве X, тогда множество $X/\sim$ классов эквивалентности называется фактормножеством.*

Определение 8.3. *Пусть $X/\sim$ фактор множество. Фактор-топологией на топологическом пространстве X называется семейство $\{U \subset X/\sim\}$, для которых объединение всех подмножеств пространства X, которые являются классами эквивалентности, принадлежащими U, открыто в X.*

Определение 8.4. *Пусть X - топологическое пространство, $X/\sim$ - фактормножество с фактор-топологией, тогда непрерывное отображение $q : X \to X/\sim$ называется естественным факторным отображением.*

Определение 8.5. *Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется факторным, если оносюръективно и $\forall U \subset Y$, которое открыто в топологии пространства Y, его прообраз открыт в X.*

9 Произведение топологических пространств

Определение 9.1. *Произведением топологических пространств X и Y называется их декартово произведение как множеств с топологией, порождённой базой:*
$\mathcal{B} = \{U \times V : U$ *открыто в* X, *а* V *открыто в* $Y\}$.

Определение 9.2. *Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство топологических пространств, $\{U_\alpha \subseteq X_\alpha\}$, где U_α открыто в X_α и заисключением конечного числа индексов $U_\alpha = X_\alpha$. Тогда $\prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ образует базу топологии произведения, которая называется канонической базой, а её элементы - каноническими открытыми множествами.*

Определение 9.3. *Говорят топологическое свойство $\mathcal{J}$ мультипликативно (счётно мультипликативно, конечно мультипликативно, к-мультипликативно для некоторого кардинала κ), если для любого индексного множества A (счётного множества A, конечного множества A, множества A мощности, не большей κ) и любых топологических пространств X_α, где $\alpha \in A$, со свойством $\mathcal{J}$, $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ удовлетворяет свойству $\mathcal{J}$.*

Определение 9.4. *Пусть X - множество, $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ - семейство множеств и $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$ - семейство отображений. Говорят, что $\mathcal{F}$ разделяет точки множества X, если для каждой пары различных точек $x, y \in X$ найдётся $\alpha \in A$, для которого $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.*

Определение 9.5. *Пусть X - множество, $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ - семейство множеств и $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$ - семейство отображений. Если X и Y_α - топологические пространства и $\forall x \in X$ и для любого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего x, существует $\alpha \in A$, для которого $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}^{Y_\alpha}$, то говорят, что семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки и замкнутые множества в пространстве X.*

Определение 9.6. *Тихоновским кубом называется произведение вида: $[0, 1]^\kappa$, где κ любой бесконечный кардинал.*

Определение 9.7. *Пусть χ - класс топологических пространств. Пространство X называется универсальным для пространств из класса χ, если $X \in \chi$ и любое пространство из χ вкладывается в X.*

10 Компактификация

Определение 10.1. *Пара* (K, c), *где* K *- компакт, а* $c : X \to K$ *- гомеоморфное вложение топологического пространства* X *в* K *с тем свойством, что* $\overline{c(X)} = K$, *называется компактификацией или компактным хаусдорфовым расширением пространства* X. $K \setminus c(X)$ *называется наростом расширения.*

Определение 10.2. *Компактификации* $c_1(X)$ *и* $c_2(X)$ *называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм* $\varphi : c_1(X) \to c_2(X)$, *для которого* $c_2 = \varphi \circ c_1$.

Определение 10.3. *Топологическое пространство* X *называется локально компактным, если каждая точка имеет компактную (не обязательно открытую) окрестность.*

Определение 10.4. *Компактификация локально компактного не компактного хаусдорфова пространства* X *называется александровской компактификацией или одноточечной компактификацией этого пространства.*

Определение 10.5. *Компактификация тихоновского пространства* X, *наибольшая относительно* $\leqslant$, *называется компактификацией Стоуна-Чеха или стоун-чеховской компактификацией.*