Билет 1

Определение. Функции f и g называются равными, если $D_f = D_g$ и $\forall x \in D_f \ f(x) = g(x)$.

Определение. Упорядоченный набор - функция, которая ставит в соответствие каждому элементому множества $\{1, \ldots, n\}$ элемент из множества $\{a_1, \ldots, a_n\} : 1 \to a_1, \ldots, n \to a_n$.

Декартовое произведение множеств $A_1 \times \ldots \times A_n = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i$.

Определение. Пусть функция f определена на $A_1 \times \ldots \times A_n$, тогда f - n-местная функция.

Определение. Множество $B_n = E_2 \times \ldots \times E_n$, где $E_i = \{0, 1\}$, называется n-мерным булевым кубом.

Определение. Функция $f : B_n \to E_2$ называется функцией алгебры логики. Множество всех таких функций обозначим P_2.

Представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде таблицы, имеющей $n+1$ столбец:

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	f
0	$\ldots$	0	0	0
0	$\ldots$	0	0	1
0	$\ldots$	0	1	0
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\ldots$	1	1	1

Так как число различных первых n столбцов 2^n, так как в каждой ячейке одного столбца может быть либо 0, либо 1. $\Longrightarrow$ число функций будет 2^{2^n}, так как для каждого набора значение функции может быть либо 0, либо 1.

Определение. Переменная x_i называется существенной, если существуют наборы α_1, ..., α_{i-1}, 1, α_{i+1}, ..., α_n и α_1, ..., α_{i-1}, 0, α_{i+1}, ..., α_n, на которых функция принимает различные значения. В противном случае переменная x_i называется несущественной (фиктивной).

Определение. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Определение. Функция называется симметрической, если при любых перестановках переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ значение функции не меняется.

Элементарные функции в алгебре логики:

1. константы 0, 1
2. тождественный x
3. отрицание $\overline{x}$
4. конъюнкция $x \wedge y$
5. дизъюнкция $x \vee y$
6. имплекация $x \to y$
7. штрих Шеффера $x|y$

8. стрелка Пирса $x \downarrow y$

9. сложение по модулю 2

10. эквивалентность

Билет 2

Определение. Формула - слово в некотором алфавите A.

Определение. Алфавит - конечное или бесконечное множество.

Определение. Произвольная функция, определённая на начальном отрезке натурального ряда и принимающая на нём значения из A.

Определение. Пусть F - множество функций алгебры логики, S - множество символов, обозначающих функции из F, тогда отображение $\Sigma : S \to F$ - сигнатура для F.

Определение. Пусть $X = \{x_1, \ldots\}$ - символы переменных.
База индукция: если x_i - символ переменной, то однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигнатуре Σ.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - функция от n переменных, $F_1, \ldots, F_n$ - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(F_1, \ldots, F_n)$ - формула в сигнатуре Σ.

Определение. Пусть F - формула, $\tilde{x}$ - упорядоченный набор $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, содержащий все формулы F, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - двоичный набор.
База индукции: F - однобуквенное слово x_{i_j}, тогда $F[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \alpha_j$ - значение фолмулы на ноборе $\tilde{\alpha}$.
Пусть F - $s(F_1, \ldots, F_n)$, $f = \Sigma(s)$, причём $F_1[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_1$, ..., $F_n[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_n$, тогда $f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ - значение функции на наборе значений переменных.

Определение. Формула, определяющая функцию алгебры логики, определённую на B_n такую, что $\forall$ набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_n$ $f(\tilde{\alpha}) = F[\tilde{x}, \tilde{\alpha}]$.

Определение. Формулы в сигнатуре, представляющие собой переменные, называются невырожденными, остальные - вырожденными. Если функция определяется вырожденной формулой в сигнатуре $\Sigma : S \to F$, то она получена суперпозициями над F, где F - множество функций.

Определение. (Другое определение суперпозиции) Если одну функцию можно получить с помощью конечного числа применений следующих трёх операций, то данная функция называется функцией, полученной суперпозициями над F.
Операции:

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ - функция, определённая на B_n такая, что $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где набор $(i_1, \ldots, i_n)$ - набор элементов $(1, \ldots, n)$ (они необязательно различны). Тогда g получена из f операцией подстановки переменных.

2. Операция подстановки функции в функцию. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$, h определена на B_{n+m-1} и $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, тогда функция h получена из функций f и g операцией подстановки одной функции в другую.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Билет 3

Определение. Формулы F_1 и F_2 называются эквивалентными, если они определяют равные функции относительно объединения их переменных. Функции называются равными, если их области определения равны и $\forall x \in D_f(x)\ f(x) = g(x)$. Слово $F_1 = F_2$, если формулы F_1 и F_2 эквивалентны, называется тождеством.

Основные тождества:

1. Ассоциативность операций: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\leftrightarrow$.
2. Дистрибутивности:
   (a) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
   (b) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
   (c) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. Тождества для отрицания:
   (a) $\overline{\overline{x}} = x$
   (b) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
   (c) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
   (d) $x \cdot \overline{x} = 0$
   (e) $x \vee \overline{x} = 1$
   (f) $\overline{x \rightarrow y} = x \cdot \overline{y}$
4. Тождества для эдентичных операндов
5. Тождества с константным операндом

Определение. Функции f и g называются двойственными, если $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$. Обозначение $g = f*$.

Определение. Если функция двойственна самой себе, то она называется самодвойственной.