

Пусть  $U$  инвариантное подпространство  $V$  для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ .

**Определение.** Ограничением  $\varphi$  на подпространство  $U$  называется отображение  $\varphi|_U : U \rightarrow U$

такое, что  $\forall u \in U \varphi|_U(u) = \varphi(u)$

Рассмотрим фактор-пространство  $\bar{V} = V/U : \bar{v} = v+U | u \in U$

**Определение.** Оператор  $\bar{\varphi} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  называется фактор-оператором.

$\forall v' = v+U$ , где  $u \in U$ ,  $\varphi(v') = \varphi(v) + \varphi(u) \implies \varphi(\bar{v}') = \varphi(\bar{v})$  (так как  $\varphi(u) \in U \implies \bar{\varphi} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  - линейный оператор.

**Теорема.** 1. Если  $\exists U \neq 0$ ,  $U$  - подпространство  $V$ ,  $\text{Im} \varphi \subset U$ , то в подходящем базисе  $A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$  (1), где  $B_{m \times m}$  - матрица линейного оператора  $\varphi|_U$ , где  $m = \dim U$ , а  $C$  - матрица оператора  $\bar{\varphi}$ . 2. Если  $V = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$  - инвариантные подпространства относительно  $\varphi$ , то в подходящем базисе  $A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$  (2), где  $B = A_{\varphi|_U}$ ,  $C = A_{\varphi|_W}$ .

3. Верны и обратные утверждения: если в некотором базисе  $A_\varphi$  имеет вид (1), то для  $\varphi$  существует инвариантное подпространство, а если  $A_\varphi$  имеет вид (2), то  $V$  - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

**Доказательство.** 1. Обозначим  $\dim V = n$ ,  $\dim U = m$ ,  $0 < m < n$ . Выберем базис в  $U$   $e_1, \dots, e_m$  и дополним его до базиса в  $V$  произвольными векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n$ . Тогда  $\forall u \in U$   $u =$

$$\sum_{i=1}^m u_i e_i \implies \varphi(u) = \sum_{i=1}^m u_i \varphi(e_i) \text{ В частности, столбцы } \varphi(e_1) \dots \varphi(e_m) \text{ имеют вид: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{mi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{они}$$

составляют матрицу  $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$  Разбивка матрицы, составленной из столбцов образов базисных

векторов  $e_{m+1}, \dots, e_n$ , Видно, что  $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_U}$ . 2. Если  $V = U \oplus W$ , векторы

$e_{m+1}, \dots, e_n$  надо выбирать в  $W$ , а остальное аналогично предыдущему пункту. 3. В обратную сторону для второго случая: если в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрица имеет вид (2), то положим в качестве  $U = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ , а  $W = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$  Из определения матрицы  $A_{\varphi, e}$  следует, что

$U$  и  $W$  - инварианты относительно  $\varphi$ ,  $\varphi|_U$  имеет матрицу  $B$ , а  $\varphi|_W$  имеет матрицу  $C$ .

Для первого случая:  $\bar{e}_j = e_j + U$ , для  $m+1, n$ , является базисом в фактор-пространстве  $\bar{V} = V/U$   $\bar{\varphi}(\bar{e}_j) = \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i + \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k = \sum_{k=m+1}^n e_{kj} \bar{e}_k$  (так как первая сумма  $\in U$ )

$$\implies C = \begin{pmatrix} a_{m+1, m+1} & \dots & a_{n+1, n} \\ \vdots & & \\ a_{n, m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \bar{\varphi}. \quad \square$$

*Замечание.* В общем случае, если  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ , то в некотором базисе, согласно разложению,  $A_{phi} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \cdot \\ B_s \end{pmatrix}$ , где  $B_i$  - матрица  $\varphi|_{U_i} \forall i = 1, \dots, s$

**Пример.** (Естественные примеры инвариантных подпространств (доказательство - упражнение))  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор. 1.  $\text{Ker}\varphi$ ,  $\text{Im}\varphi$  и любое подпространство  $U : \text{Im}\varphi \subset U$ , тогда  $U$  является инвариантным подпространством относительно  $\varphi$ . 2. Если  $U_1$  и  $U_2$  являются инвариантными подпространствами относительно оператора  $\varphi$ , то  $U_1 + U_2$  и  $U_1 \cap U_2$  также являются инвариантными относительно оператора  $\varphi$ .

## 0.1 Действия над линейными отображениями и операторами

Пусть  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение, тогда: 1.  $\forall \lambda \in \mathbb{F} (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x), \forall x \in V_1$  2. Если  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ , то  $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \forall x \in V_1$

**Утверждение.** 1 Относительно этих операций множество  $L(V_1, V_2)$  линейных отображений из  $V_1$  в  $V_2$  является векторным пространством.

**Утверждение.** 2 Если  $\dim V_1 = n, \dim V_2 = m$ , то  $L(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$

*Доказательство.* Зафиксируем базисы в  $V_1$  и  $V_2$   $e$  и  $f$  соответственно, тогда  $\forall \varphi$  взаимоднозначно соответствует его матрица  $A_{\varphi, e, f}$  относительно базисов  $e$  и  $f$ .  $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_{\varphi} \forall \lambda \in \mathbb{F}$   $(\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \implies$  все столбцы  $A_{\varphi}$  умножаются на  $\lambda \implies A_{\varphi}$  умножается на  $\lambda$ .  $\forall j = 1, \dots, m (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j) \implies$  столбцы  $A_{\varphi+\psi}$  имеют вид  $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$ .  $\square$

Обозначение:  $L(V_1, V_2) = \kappa(V_1, V_2) = \text{Hom}(V_1, V_2)$ .  $\kappa(V)$  - множество линейных операторов на  $V$ .

**Определение.** Произведением линейных операторов  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  и  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  называется их композиция  $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ , где  $x \in V_1$ .

**Утверждение.** 3 Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.

**Утверждение.** 4 Пусть  $V_1, V_2, V_3$  - конечномерные векторные пространства, а  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  и  $\varphi : V_2 \rightarrow V_3$  - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции  $A_{\psi \circ \varphi} = A_{\psi} A_{\varphi}$ .

*Доказательство.* Утверждение 3 - упражнение. Утверждение 4: Пусть  $e$  - базис в  $V_1$ ,  $f$  - базис в  $V_2$ ,  $g$  - базис в  $V_3$ .  $A_{\varphi} = (\varphi(e_1) \uparrow \dots \varphi(e_n) \uparrow)$  в базисе  $f$ ,  $A_{\psi} = (\psi(f_1) \uparrow \dots \psi(f_m) \uparrow)$  в базисе  $g$ .  $\forall x = eX$ , обозначим  $y = \varphi(x)$ ,  $z = \psi(y)$  со столбцами координат  $Y$  и  $Z$  соответственно. Тогда  $Y = A_{\varphi}X$ ,  $Z = A_{\psi}Y = A_{\psi}(A_{\varphi}X) = (A_{\psi}A_{\varphi})X = A_{\psi \circ \varphi}X$ .  $\square$

**Теорема.** Множество  $\kappa(V)$  с операциями  $+$ ,  $\cdot \lambda$ ,  $\cdot$  является ассоциативной алгеброй с единицей, равной  $\text{Id}_V$ . Если  $\dim V = n$ , то  $\kappa(V) \cong M_n(\mathbb{F})$ .

*Доказательство.* Следует из утверждений 1 - 4.  $\square$

**Утверждение.** Если  $\varphi$  - линейный оператор на  $V$ , то  $\forall k \in \mathbb{N}$  подпространства  $\text{Ker}\varphi^k$  и  $\text{Im}\varphi^k$  - инварианты. При этом  $0 \equiv \text{Ker}\varphi \equiv \text{Ker}\varphi^2 \equiv \dots \subset V \supseteq \text{Im}\varphi \supseteq \text{Im}\varphi^2 \dots$

## 0.2 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор над полем  $\mathbb{F}$ .

**Определение.** Вектор  $x \in V$  называется собственным вектором оператора  $\varphi$ , если  $\exists \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(x) = \lambda \cdot x$  и  $x \neq 0$ .  $\lambda$  называется собственным значением оператора  $\varphi$ , соответствующим вектору  $x$ .

Пусть  $\dim V = n$ ,  $e$  - базис в  $V$ , в нём  $\forall x = e \cdot X$ , тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно  $A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0$  (2) - это СЛУ для нахождения вектора  $x$ , если известна  $\lambda$ . Система (2) имеет ненулевое решение, только если  $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$  (3). Равенство (3) называется характеристическим уравнением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

**Пример.** Пример 1.  $V = D^\infty(\mathbb{R})$  - множество бесконечно дифференцируемых функций.  $\varphi \frac{d}{dx} \forall f(x) \varphi(f) = f'(x)$ .  $\forall \lambda \in \mathbb{R} (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ .

*Доказательство.* Если  $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$ , то  $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$ , где  $C \neq 0$ . Рассмотрим  $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \implies f(x)e^{-\lambda x} = C$ .  $\square$

Пример 2.  $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ .

**Упражнение.** Какие существуют собственные векторы и собственные значения у  $\varphi$  во втором примере?