Билет 1

Определение. Упорядоченный набор - функция, которая ставит в соответствие каждому элементу множества $\{1, \ldots, n\}$ элемент из множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$: $1 \to a_1$, …, $n \to a_n$.

Декартовое произведение множеств $A_1 \times \ldots \times A_n = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i$.

Определение. Пусть функция f определена на $A_1 \times \ldots \times A_n$, тогда f - n-местная функция.

Определение. Множество $B_n = E_2 \times \ldots \times E_n$, где $E_i = \{0, 1\}$, называется n-мерным булевым кубом.

Определение. Функция $f : B_n \to E_2$ называется функцией алгебры логики. Множество всех таких функций обозначим P_2.

Представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде таблицы, имеющей $n + 1$ столбец:

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	f
0	$\ldots$	0	0	0
0	$\ldots$	0	0	1
0	$\ldots$	0	1	0
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\ldots$	1	1	1

Так как число различных первых n столбцов 2^n, так как в каждой ячейке одного столбца может быть либо 0, либо 1. $\Longrightarrow$ число функций будет 2^{2^n}, так как для каждого набора значение функции может быть либо 0, либо 1.

Определение. Переменная x_i называется существенной, если существуют наборы α_1, …, α_{i-1}, 1, α_{i+1}, …, α_n и α_1, …, α_{i-1}, 0, α_{i+1}, …, α_n, на которых функция принимает различные значения. В противном случае переменная x_i называется несущественной (фиктивной).

Определение. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Определение. Функция называется симметрической, если при любых перестановках переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ значение функции не меняется.

Элементарные функции в алгебре логики:

1. константы 0, 1
2. тождественный x
3. отрицание $\overline{x}$
4. конъюнкция $x \wedge y$
5. дизъюнкция $x \vee y$
6. имплекация $x \to y$
7. штрих Шеффера $x|y$
8. стрелка Пирса $x \downarrow y$

9. сложение по модулю 2
10. эквивалентность

Билет 2

Определение. Формула - слово в некотором алфавите A.

Определение. Алфавит - конечное или бесконечное множество.

Определение. Слово - произвольная функция, определённая на начальном отрезке натурального ряда и принимающая на нём значения из A.

Определение. Пусть F - множество функций алгебры логики, S - множество символов, обозначающих функции из F, тогда отображение $\Sigma : S \to F$ - сигнатура для F.

Определение. Пусть $X = \{x_1, \ldots\}$ - символы переменных.
База индукция: если x_i - символ переменной, то однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигнатуре Σ.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - функция от n переменных, Φ_1, ..., Φ_n - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(\Phi_1$, ..., $\Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ.

Определение. Пусть Φ - формула, $\tilde{x}$ - упорядоченный набор $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, содержащий все переменные формулы Φ, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - двоичный набор.
База индукции: Φ - однобуквенное слово x_{i_j}, тогда $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \alpha_j$ - значение формулы на наборе $\tilde{\alpha}$.
Пусть F - $s(\Phi_1, \ldots ,\Phi_n)$, $f = \Sigma(s)$, причём $\Phi_1[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_1$, ..., $\Phi_n[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_n$, тогда $f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ - значение формулы на наборе значений переменных.

Определение. Формулой, определяющей функцию f алгебры логики, определённой на B_n, называется формула Φ такая, что $\forall$ набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1$, ..., $\alpha_n) \in B_n$ $f(\tilde{\alpha})$ $=\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}]$.

Определение. Формулы в сигнатуре, представляющие собой переменные, называются вырожденными, остальные - невырожденными. Если функция определяется невырожденной формулой в сигнатуре $\Sigma : S \to F$, то она получена суперпозициями над F, где F - множество функций.

Определение. (Другое определение суперпозиции) Если одну функцию можно получить с помощью конечного числа применений следующих трёх операций, то данная функция называется функцией, полученной суперпозициями над F.
Операции:

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1$, ..., $x_n) \in P_2$, $g(x_1$, ..., $x_n)$ - функция, определённая на B_n, такая, что $g(x_1$, ..., $x_n) = f(x_{i_1}$, ..., $x_{i_n})$, где набор $(i_1$, ..., $i_n)$ - набор элементов $(1$, ..., $n)$ (они необязательно различны). Тогда g получена из f операцией подстановки переменных.

2. Операция подстановки функции в функцию. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$, h определена на B_{n+m-1} и $h(x_1$, ..., $x_{n+m-1}) = f(x_1$, ..., x_{n-1}, $g(x_n$, ..., $x_{n+m-1}))$, тогда функция h получена из функций f и g операцией подстановки одной функции в другую.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1$, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., $x_n) = g(x_1$, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., $x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Билет 3

Определение. Формулы F_1 и F_2 называются эквивалентными, если они определяют равные функции относительно объединения их переменных. Функции называются равными, если их области определения равны и $\forall x \in D_f(x)\ f(x) = g(x)$. Слово $F_1 = F_2$, если формулы F_1 и F_2 эквивалентны, называется тождеством.

Основные тождества:

1. Ассоциативность операций: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\leftrightarrow$.
2. Дистрибутивности:
   (a) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
   (b) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
   (c) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. Тождества для отрицания:
   (a) $\overline{\overline{x}} = x$
   (b) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
   (c) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
   (d) $x \cdot \overline{x} = 0$
   (e) $x \vee \overline{x} = 1$
   (f) $\overline{x \to y} = x \cdot \overline{y}$
4. Тождества для эдентичных операндов
5. Тождества с константным операндом

Определение. Функция g называется двойственной к f, если $g(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$. Обозначение $g = f^*$.

Определение. Если функция двойственна к самой себе, то она называется самодвойственной.

Теорема. *(принцип двойственности) Если Φ - формула в сигнатуре $\Sigma : S \to F$, определяющая некоторую функцию g, то эта формула в сигнатуре $\Sigma^* : S \to F^*$ определяет двойственную функцию g^*.*

Доказательство. База индукции: пусть x_i - символ переменной, тогда однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигатуре Σ, определяющая одноместную функцию g. Эта формула в сигнатуре Σ^* имеет вид $\overline{x_i}$, то есть она определяет функцию, двойственную к g.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - формула от n переменных, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ. В $\Sigma^*(s) = (\Sigma(s))^* = (\Sigma(s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)))^* = f^*$, то есть данная формула определяет в двойственной сигнатуре двойственнную функцию. $\square$

Билет 4

Определение. Выражение $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n):f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$ называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой. $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, \sigma_i = 1 \\ \overline{x_i}, \sigma_i = 0 \end{cases}$.

Теорема. *Для любой функции $f(x_1,\, \ldots,\, x_n)$ алгебры логики верно равенство:*
$$f(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\in B_m} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m} \cdot f(\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_m,\, \sigma_{m+1},\, \ldots,\, \sigma_n).$$

Доказательство. Рассмотрим прозвольный набор $(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_m)$, если $(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_m) \neq (\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_m)$, то $\exists \alpha_i \neq \sigma_i \Longrightarrow \alpha_i^{\sigma_i} = 0 \Longrightarrow$ данное слагаемое будет равно нулю. Тогда единственным не нулевым членом будет $(\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_m^{\alpha_m}) \cdot f(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_m,\, \alpha_{m+1},\, \ldots,\, \alpha_n) = f(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n)$. □

Теорема. *Любую функцию алгебры логики можно представить с помощью суперпозиций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.*

Доказательство. Так как любая функция алгебры логики, кроме тождественного нуля, реализуется совершенной д.н.ф., значит она представима суперпозициями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Тождественный ноль можно представить так: $x \wedge \overline{x} = 0$. □

Теорема. *Любая функция алгебры логики, кроме тождественной единицы, представима в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы.*

Доказательство. Так как любая функция алгебры логики, кроме тождественного нуля, представима в виде совершенной д.н.ф., тогда по принципу двойственности
$$f(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n):f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} \Longrightarrow$$
$$f(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \bigwedge_{(\delta_1,\ldots,\delta_n):f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1} x_1^{\overline{\delta}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\delta}_n}.$$ □

Билет 5

Определение. Система функций называется полной в P_2, если через них выражаются все функции в P_2.

Примеры. 1. $\wedge$ и $\neg$

2. $\vee$ и $\neg$

3. $x|y$

4. $x \downarrow y$

Определение. Полиномы по модулю 2 вида: $\sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_s\}\subseteq 1,\ldots,n} a_{i_1,\ldots,i_s} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$ называются полиномами Жегалкина.

Теорема. *(Жегалкина)*
Любая функция алгебры логики представима полиномом Жегалкина, причём единственным образом.

Доказательство. Так как в каждом мономе полинома Жегалкина n перменных, каждая из которых может быть либо 0, либо 1, а коэффициент перед каждым мономом может принимать значение 0 или 1 $\Longrightarrow$ всего есть 2^{2^n} различных полиномов Жегалкина.
Пусть два различных полинома Жегалкина задают одну функцию, тогда мы получим ненулевой полином, задающий нулевую константу $\Longrightarrow$ противоречие $\Longrightarrow$ Любая функция алгебры логики представима полиномом Жегалкина, причём единственным образом. □

Билет 6

Определение. Множество функций, которые можно пулучить из данного множества M функций алгебры логики, называется замыканием множества M и обозначается $[M]$.

Примеры. 1. $P_2 = [P_2]$

1, $x + y$ - множество линейных функций

Свойства. *1.* $M \subseteq [M]$

2. $[[M]] = [M]$

3. Если $M_1 \subseteq M_2$, *то* $[M_1] \subseteq [M_2]$

4. $[M_1] \cup [M_2] \subseteq [M_1 \cup M_2]$

Доказательство. 1. По определению замыкания.

2. Из первого следует, что $[M] \subseteq [[M]]$, а $[[M]] \subseteq [M]$, так как в противном случае существовала бы функция, которая не выражается суперпозициями функций из M, но выражается суперпозициями функций, которые выражаются суперпозициями функций из M, а значит она выражается суперпозициями из $M \Longrightarrow$ противоречие.

3. Если функция получается суперепозициями из M_1, то её можно получить суперпозициями из M_2, так как все функции M_1 являются функциями M_2.

4. Пусть функция $f \in [M_1] \cap [M_2]$, тогда она получается суперпозициями из M_1 или из M_2, пусть для определённости она выражается суперпозициями из M_1, но тогда её можно получить суперпозициями из $M_1 \cup M_2$, то есть $f \in [M_1 \cup M_2]$

□

Определение. Класс функций M называется замкнутым, если $[M] = M$.

Примеры. 1. $P_2 = [P_2]$

2. $L = [L]$, L - множество линейных функций.

Билет 7

Определение. Функция f называется функцией, сохраняющей ноль, если на наборе из нулей она принимает значение 0.

Определение. Функция f называется функцией, сохраняющей единицу, если на наборе из единиц она принимает значение 1.

Класс функций, сохраняющих ноль, обозначим T_0, а класс функций, сохраняющих единицу, обозначим T_1.

Теорема. *Классы* T_0 *и* T_1 *замкнуты.*

Доказательство. 1. Операция подстановки переменных:
$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, если функция f сохраняла ноль, то и функция g будет сохранять ноль, если функция f сохраняла единицу, то и функция g будет сохранять единицу.

2. Операция подстановки одной функции в другую:
   $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, если функции f и h сохраняли ноль, то и функция g будет сохранять ноль, если функции f и g сохраняли единицу, то и функция h будет сохранять единицу.

3. Операция добавления или удаления фиктивной переменной, не влияет на способность функции сохранять ноль или сохранять единицу.

Следовательно суперпозициями мы не сможем получить функцию, не принадлежащую данному классу $\Longrightarrow$ классы T_0 и T_1 - замкнуты. □

Билет 8

Класс самодвойственных функций обозначим S.

Теорема. *Класс S замкнут.*

Доказательство.
1. Операция подстановки переменных:
   Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, тогда $\overline{g}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \overline{f}(\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_n}) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = g(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow g$ - самодвойственная функция.

2. Операция подстановки функции в функцию:
   Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in S$, $h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, тогда $\overline{h}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}, \ldots, \overline{x}_{m+n-1}) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, g(\overline{x}_n, \ldots, \overline{x}_{m+n-1})) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, \overline{g}(x_n, \ldots, x_{m+n-1})) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{m+n-1})) = h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{m+n-1}) \Longrightarrow h$ - самодвойственная функция.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных:
   Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, тогда $\overline{g}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, 1, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \Longrightarrow g$ - самодвойственная функция.

□

Теорема. *Если функция f не является самодвойственной, то с помощью неё и функции отрицания можно получить константу.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$, тогда существует набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n).$$

Пусть $\varphi_i = x^{\alpha_i}$, $\varphi(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$,

$$\text{тогда } \varphi(0) = f(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}) = f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(1^{\alpha_1}, \ldots, 1^{\alpha_n}) = \varphi(1) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \varphi(x)$ - константа, полученная из несамодвойственной функции и отрицания. □

Билет 9

Определение. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ - двоичные наборы, тогда $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, если $\forall i = \overline{1, n}$ $\alpha_i \leqslant \beta_i$.

Определение. Функция алгебры логики называется монотонной, если $\forall$ двоичных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$.

Теорема. *Класс M монотонных функций - замкнут.*

Доказательство. 1. Операция подстановки переменных:
$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, если функция f монотонна, то
$\forall \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) : \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta}) \Longrightarrow \alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \alpha_{i_1} \leqslant \beta_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n} \leqslant \beta_{i_n} \Longrightarrow f(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) \leqslant f(\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n}) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) \leqslant f(\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n}) = g(\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n}) \Longrightarrow g$ - монотонна.

2. Операция подстановки одной функции в другую:
$f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$ - монотонные функции, $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, так как функции f и g монотонны, $\forall \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n-1})$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{m+n-1}) : \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$ и $g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{m+n-1}) = g(\beta_n, \ldots, \alpha_{m+n-1}) \Longrightarrow$
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{m+n-1})) \leqslant (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, g(\beta_n, \ldots, \beta_{n+m-1})) \Longrightarrow h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n-1}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{m+n-1})) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, g(\beta_n, \ldots, \beta_{n+m-1})) = h(\beta_1, \ldots, \beta_{m+n-1})$.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных:
$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, так как f монотонна $\Longrightarrow$
$\forall \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) : \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$,
верно $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$.
Тогда $\tilde{\alpha}$, с добавленной фиктивной переменной, $\leqslant \tilde{\beta}$, с добавленной фиктивной переменной $\Longrightarrow g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) = g(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$.

Следовательно, суперпозициями мы не сможем получить функцию, не принадлежащую данному классу $\Longrightarrow$ класс M замкнут. □

Теорема. *Если f - немонотонная функция, то из неё и констант можно получить отрицание.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - немонотонная функция, тогда $\exists \tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta} : \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а $f(\tilde{\beta}) = 0$. Так как наборы различны, то $\exists \alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k} = 0$ и $\beta_{i_1} = \ldots = \beta_{i_k} = 1$, а $\forall j \in (1, \ldots, n) \setminus (i_1, \ldots, i_k)$ $\alpha_j = \beta_j$.
Пусть наборы $\tilde{\gamma}_0, \ldots, \tilde{\gamma}_k$ на позициях $(1, \ldots, n) \setminus (i_1, \ldots, i_k)$ совпадает со значениями набора $\tilde{\alpha}$, на позициях $i_1, \ldots, ß_j$ набор $\tilde{\gamma}_j = 1$, а на позициях $i_{j+1}, \ldots, i_k$ принимает значение 0, тогда $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\alpha}$, а $\tilde{\gamma}_k = \tilde{\beta} \Longrightarrow f(\tilde{\gamma}_0) = 1$, $f(\tilde{\gamma}_k) = 0 \Longrightarrow \exists \tilde{\gamma}_j : f(\tilde{\gamma}_j) = 0$, а $f(\gamma_{\tilde{j-1}}) = 1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \tilde{\gamma}_{j-1} = (\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 0, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n)$, $\tilde{\gamma}_j = (\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 1, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n)$.
Тогда функция $\varphi(f(\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, x, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n))$, при $x = 0$ функция равна 1, а при $x = 1$, функция равна 0, то есть $\varphi = \overline{x}$, а так как она получена с помощью функции f и констант, значит, это искомая функция. □

Билет 10

Определение. Функция f называется линейной, если она представима полиномом Жегалкина степени 1.

Теорема. *Класс L линейных функций замкнут.*

Доказательство. 1. Операция подстановки переменных:
$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, если функция f линейна, то $\forall \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $f(\tilde{\alpha}) = c_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n$, тогда
$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_0 + c_1\alpha_{i_1} + \ldots + c_n\alpha_{i_n} \Longrightarrow g$ - линейная функция.

2. Операция подстановки одной функции в другую:
$f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$ - линейные функции, $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, так как функции f и g линейны, $\forall \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n-1})$ $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n$, $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = c'_0 + c'_1\alpha_1 + \ldots + c'_n\alpha_n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}) = c_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_{n-1}\alpha_{n-1} + c_n g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{m+n-1}) =$
$= c_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_{n-1}\alpha_{n-1} + c_n(c'_1\alpha_n + \ldots + c'_m\alpha_{m+n-1}) \Longrightarrow$ функция h является линейной.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных:
$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, так как f линейна $\Longrightarrow$ $\forall \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ $f(\tilde{\alpha}) = c_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_{i-1}\alpha_{i-1} + c_{i+1}\alpha_{i+1} + \ldots + c_n\alpha_n$, тогда очевидно, что $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ тоже линейная функция.

Следовательно, суперпозициями мы не сможем получить функцию, не принадлежащую данному классу $\Longrightarrow$ класс L замкнут. □

Теорема. *Если функция f нелинейна, то из неё, констант и отрицания можно получить конъюнкцию.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - нелинейная функция, тогда полином Жегалкина без ограничения общности имеет вид: $x_1x_2f_1(x_3, \ldots, x_n) + x_1f_2(x_3, \ldots, x_n) + x_2f_3(x_3, \ldots, x_n) + f_4(x_3, \ldots, x_n)$. Так как $f1$ не является тождественно нулевой функцией, существует набор $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) : f_1(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$, тогда $f = x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f(x_1 + \alpha, x_2 + \beta) = (x_1 + \alpha)(x_2 + \beta) + \alpha(x_1 + \alpha) + \beta(x_2 + \beta) + \gamma = x_1x_2 + \alpha\beta\gamma$, если $\alpha\beta\gamma = 1$, то возьмём $\overline{f}(x_1 + \alpha, x_2 + \beta) = x_1x_2$, так как данная функция получена из f с помощью констант и отрцания, значит это искомая функция. □

Билет 11

Теорема. *Система функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.*

Доказательство. $\underline{\Longrightarrow}$ Если ситсема F функций алгебры логики полна, то $[F] = P_2$. Предположим, что $F \subseteq K$, где K - один из этих классов, тогда $[F] \subseteq [K] \neq P_2$ - противоречие.
$\underline{\Longleftarrow}$ Пусть F не лежит ни в одном из этих классов, тогда $\exists f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 : f_1 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin S$, $f_4 \notin M$, $f_5 \notin L$.
Рассмотрим $f_1 \notin T_0$, тогда $f_1(0, \ldots, 0) = 1$. Есть два случая:

1. Пусть $f_1 \notin T_1$, тогда $\varphi(x) = f_1(x, \ldots, x) = \overline{x}$, то есть мы получили из f_1 функцию отрицания. Тогда по лемме о несамодвойственной функции из f_3 и $\overline{x}$ можно получить константы.

2. Пусть $f_1 \in T_1$, тогда $\varphi(x) = f_1(x, \ldots, x) = 1$, то есть $\varphi(x)$ - константа 1. Рассмотрим $f_2 \notin T_1$, тогда $f_2(f_1(x, \ldots, x)) = 0$, то есть мы получили константу 0.

Тогда по лемме о немонотонной функции из f_4 и констант можно получить $\overline{x}$, а по лемме о нелинейной функции из f_5, $\overline{x}$ и констант можно получить $x \wedge y$, то есть мы получим полную систему $x \wedge y$, $\overline{x}$. □

Билет 12

Определение. Класс K функций алгебры логики называется предполным, если $[K] \neq P_2$ и если $f \in P_2 \setminus K$, то $[\{f\} \cup K] = P_2$.

Теорема. *В P_2 нет предполных классов, отличных от T_0, T_1, S, M, L.*

Доказательство. Пусть класс K - предполный класс, отличный от данных пяти классов. Этот класс замкнут, так как в противном случае можно было бы выбрать функцию f : $f \in [K]$ и $f \notin K$, тогда $[\{f\} \cup K] = [K]$, но так как класс K является предполным, то $[K] = P_2 \Longrightarrow$ противоречие с тем, что класс K не является полным.
Так как класс K замкнут, то он содержится в одном из классов T_0, T_1, S, M, L (обозначим этот класс Q), иначе по теореме Поста он был бы полным, а он по условию таким не является. Пусть класс K не совпадает с классом Q, тогда $\exists f \in Q \setminus K \Longrightarrow [\{f\} \cup K] \subseteq [Q] \neq P_2$ - противоречие.
Пусть $f \in P_2 \setminus Q$, тогда если $[Q \cup \{f\}] = [Q'] \neq P_2$, то Q' содержится в одном из оставшихся классов, что невозможно, а значит, класс Q является предполным. □

Билет 13

Теорема. *В любой полной системе алгебры логики можно выделить полную подсистему, состоящую из 4 функций.*

Доказательство. Пусть система F полна, выберем в ней функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 : $f_1 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin S$, $f_4 \notin M$, $f_5 \notin L$, по теореме Поста система из этих функций полна. Если $f_1 \in T_1$, тогда $f_1 \notin S$, тогда функцию f_3 можно выбрать равной f_1, а если $f_1(1, \ldots, 1) = 0$, то $f_1 \notin M$, то есть f_4 можно выбрать равной $f_1 \Longrightarrow$ в обоих случаях мы получаем полную систему из четырёх функций. □

Билет 14

Определение. Пусть K - замкнутый класс, F - система функций данного класса, тогда F называется полной, если $[F] = K$.

Определение. Система функций некоторого класса K называется базисом, если она полна в K, но каждая её собствееная подсистема неполна в K.

Примеры. $\{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2\}$ - базис в M

Теорема. *Каждый замкнутый класс функций алгебры логики имеет конечный базис. (Без доказательства)*

Теорема. *Число замкнутых классов в P_2 счётно. (Без доказательства)*

Билет 15

Определение. Отображение $f : E_k \times \ldots \times E_k \to E_k$ - функция k-значной логики.

Элементарные функции:

1. $\overline{x} = x + 1 (mod\ k)$
2. $\sim x = k - 1 - x$
3. $J_i(x) = \begin{matrix} k-1, \text{ если} x = i \\ 0, \text{ если} x \neq i \end{matrix}$
4. $j_i(x) = \begin{matrix} 1, \text{ если} x = i \\ 0, \text{ если} x \neq i \end{matrix}$
5. $min(x_1, x_2)$

6. $max(x_1,\, x_2)$

7. $x_1 \cdot x_2 (mod\ k)$

8. $x_1 + x_2 (mod\ k)$

Определение. Отображение $\Sigma : S \to F$, где S - множество символов, обозначующих функции из P_k, а F - множество функций в P_k называется сигнатурой.

Определение. База индукции: пусть x_i - символ переменной, тогда однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигнатуре.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - функция от n переменных, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ.

Определение. Пусть Φ - формула, $\tilde{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ - упорядоченный набор, содержащий все переменные формулы Φ, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - двоичный набор.
База индукции: Φ - однобуквенное слово x_{i_j}, тогда $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \alpha_j$ - значение формулы на наборе.
Пусть $\in S$, $f = \Sigma(s)$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - формулы в сигнатуре. Обозначим $\Phi_1[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_1, \ldots, \Phi_n[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_n$, тогда $f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ - значение формулы на наборе $\tilde{\alpha}$.

Определение. Операции:

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ - функция, определённая на B_n такая, что $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где набор $(i_1, \ldots, i_n)$ - набор элементов $(1, \ldots, n)$ (они необязательно различны). Тогда g получена из f операцией подстановки переменных.

2. Операция подстановки функции в функцию. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$, h определена на B_{n+m-1} и $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, тогда функция h получена из функций f и g операцией подстановки одной функции в другую.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Билет 16

Тождества для функций в P_k:

1. операции $min(x_1,\, x_2)$, $max(x_1,\, x_2)$, $x_1 \cdot x_2 (mod\ k)$, $x_1 + x_2 (mod\ k)$ ассоциативны и коммутативны

2. $min(max(x_1,\, x_2),\, x_3) = max(min(x_1,\, x_3),\, min(x_2,\, x_3))$

3. $(x_1 + x_2) \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3)$

4. $\sim (\sim x) = x$

5. $\sim min(x_1,\, x_2) = max(\sim x_1, \sim x_2)$

Определение. Выражение $\bigvee\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in (E_k)^n} min(J_{\sigma_1}(x_1), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$ - аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы для P_k.

Теорема. *Любая функция, не являющаяся тождественно нулевой, имеет аналог совершенной д.н.ф.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, так как $J_{\sigma_i}(\alpha_j) = 0 \ \forall j \neq i$, а для $j = i$ $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = k-1$, значит, все члены, кроме $\alpha_1 = \sigma_1, \ldots, \alpha_n = \sigma_n$, будут равны нулю, а значит, останется тольго $min(J_{\sigma_1}(\alpha_1), \ldots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. □

Билет 17

Определение. Система F функций в P_k называется полной, если любая функция из P_k получается суперпозициями из F.

Примеры.

1. P_k
2. $\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), \ldots, J_{k-1}(x), min(x_1, x_2), max(x_1, x_2)\}$
3. $max(x_1, x_2), \overline{x}$
4. $min(x_1, x_2), \overline{x}$
5. $\{0, 1, \ldots, k-1, j_0(x), \ldots, j_{k-1}(x), x_1 + x_2\}$
6. $V_k(x_1, x_2) = max(x_1, x_2) + 1(mod\ k)$

Докажем полноту каждой из систем.

Доказательство.

1. Так как в системе есть отрицание Поста, то из $\forall x$ можно получить $\{x, x+1, \ldots, x+k-1\}$ все эти числа различны по $(mod\ k) \Longrightarrow max(x, \ldots, x+k-1) = k-1$, тогда из константы $k-1$ можно получить все остальные константы, используя отрицание Поста.
   Рассмотрим набор $\{x, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k\}$, тогда функция $\varphi_j(x) = max(x, \ldots, x+j-1, x+j+1, \ldots, x+k-1) = \begin{matrix} k-1, \text{при} x+j \neq k-1 \\ k-2, \text{при} x+j = k-1 \end{matrix}$. Тогда функция $\psi_j(x) = max(x, \ldots, x+j-1, x+j+1, \ldots, x+k-1)+1$ (это ожно сделать благодаря отрицанию Поста) $\Longrightarrow$ $\psi_j(x) = \begin{matrix} 0, \text{при} x+j \neq k-1 \\ k-1, \text{при} x+j = k-1 \end{matrix}$. То есть мы получили все константы, $J_i(x)$ $\forall i$, а значит, получили полную систему из примера 2.

2. Аналогично с предыдущим пунктом, с помощью отрицания Поста можно получить все константы, а значит, можем получить отрицание Лукашевича, а по одному из тождеств, $\sim min(x_1, x_2) = max(\sim x_1, \sim x_2)$, то есть мы получили поную систему из предыдущего пункта.

3. Из $V_k(x_1, x_2)$ получим отрицание Поста: $V_k(x, x) = x+1 = \overline{x} \Longrightarrow$ можно получить $x+i$ $\forall i$, тогда $max(x_1, x_2) = V_k(x_1, x_2)+k-1$, то есть мы получили полную систему $\{max(x_1, x_2), \overline{x}\}$.

□

Билет 18

Определение. Замыканием множества F в P_k называется множество всех функций, которые можно получить суперпозициями из F.

Определение. Если $[F] = F$, то множество M называется замкнутым.

Определение. Пусть $Q \subseteq E_k$. Множество функций $T_Q : \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Q \; f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Q$, называется функцией, сохраняющей множество Q.

Примеры.

1. P_k
2. T_Q

Теорема. *Класс T_Q замкнут.*

Доказательство.

1. Операция подстановки переменных:
   Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет множество Q, тогда $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ тоже будет сохранять множество Q, так как при перестановке одинаковых переменных ничего не поменяется.

2. Операция подстановки функции в функцию:
   Пксть функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$ сохраняют множесво Q, тогда $h(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{m+n-1}))$, так как функция g сохраняет множество Q $\Longrightarrow$ все переменные f принимают одно и то же значение, а значит, и функция h будет сохранять множество Q.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных:
   Очевидно.

$\square$