Билет 1

Определение. Упорядоченный набор - функция, которая ставит в соответствие каждому элементому множества $\{1, \ldots, n\}$ элемент из множества $\{a_1, \ldots, a_n\} : 1 \to a_1$, ..., $n \to a_n$.

Декартовое произведение множеств $A_1 \times \ldots \times A_n = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i$.

Определение. Пусть функция f определена на $A_1 \times \ldots \times A_n$, тогда f - n-местная функция.

Определение. Множество $B_n = E_2 \times \ldots \times E_n$, где $E_i = \{0, 1\}$, называется n-мерным булевым кубом.

Определение. Функция $f : B_n \to E_2$ называется функцией алгебры логики. Множество всех таких функций обозначим P_2.

Представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде таблицы, имеющей $n + 1$ столбец:

x_1	...	x_{n-1}	x_n	f
0	...	0	0	0
0	...	0	0	1
0	...	0	1	0
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	...	1	1	1

Так как число различных первых n столбцов 2^n, так как в каждой ячейке одного столбца может быть либо 0, либо 1. $\Longrightarrow$ число функций будет 2^{2^n}, так как для каждого набора значение функции может быть либо 0, либо 1.

Определение. Переменная x_i называется существенной, если существуют наборы α_1, ..., α_{i-1}, 1, α_{i+1}, ..., α_n и α_1, ..., α_{i-1}, 0, α_{i+1}, ..., α_n, на которых функция принимает различные значения. В противном случае переменная x_i называется несущественной (фиктивной).

Определение. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1$, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., $x_n) = g(x_1$, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., $x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Определение. Функция называется симметрической, если при любых перестановках переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ значение функции не меняется.

Элементарные функции в алгебре логики:

1. константы 0, 1
2. тождественный x
3. отрицание $\overline{x}$
4. конъюнкция $x \wedge y$
5. дизъюнкция $x \vee y$
6. имплекация $x \to y$
7. штрих Шеффера $x | y$
8. стрелка Пирса $x \downarrow y$

9. сложение по модулю 2
10. эквивалентность

Билет 2

Определение. Формула - слово в некотором алфавите A.

Определение. Алфавит - конечное или бесконечное множество.

Определение. Произвольная функция, определённая на начальном отрезке натурального ряда и принимающая на нём значения из A.

Определение. Пусть F - множество функций алгебры логики, S - множество символов, обозначающих функции из F, тогда отображение $\Sigma : S \to F$ - сигнатура для F.

Определение. Пусть $X = \{x_1, \ldots\}$ - символы переменных.
База индукция: если x_i - символ переменной, то однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигнатуре Σ.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - функция от n переменных, Φ_1, …, Φ_n - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(\Phi_1$, …, $\Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ.

Определение. Пусть Φ - формула, $\tilde{x}$ - упорядоченный набор $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, содержащий все формулы Φ, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - двоичный набор.
База индукции: Φ - однобуквенное слово x_{i_j}, тогда $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \alpha_j$ - значение фолмулы на ноборе $\tilde{\alpha}$.
Пусть F - $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $f = \Sigma(s)$, причём $\Phi_1[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_1$, …, $\Phi_n[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_n$, тогда $f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ - значение функции на наборе значений переменных.

Определение. Формула, определяющая функцию алгебры логики, определённую на B_n такую, что $\forall$ набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1$, …, $\alpha_n) \in B_n$ $f(\tilde{\alpha}) = F[\tilde{x}, \tilde{\alpha}]$.

Определение. Формулы в сигнатуре, представляющие собой переменные, называются невырожденными, остальные - вырожденными. Если функция определяется вырожденной формулой в сигнатуре $\Sigma : S \to F$, то она получена суперпозициями над F, где F - множество функций.

Определение. (Другое определение суперпозиции) Если одну функцию можно получить с помощью конечного числа применений следующих трёх операций, то данная функция называется функцией, полученной суперпозициями над F.
Операции:

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1$, …, $x_n) \in P_2$, $g(x_1$, …, $x_n)$ - функция, определённая на B_n такая, что $g(x_1$, …, $x_n) = f(x_{i_1}$, …, $x_{i_n})$, где набор $(i_1$, …, $i_n)$ - набор элементов $(1$, …, $n)$ (они необязательно различны). Тогда g получена из f операцией подстановки переменных.

2. Операция подстановки функции в функцию. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$, h определена на B_{n+m-1} и $h(x_1$, …, $x_{n+m-1}) = f(x_1$, …, x_{n-1}, $g(x_n$, …, $x_{n+m-1}))$, тогда функция h получена из функций f и g операцией подстановки одной функции в другую.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных. Пусть x_i - фиктивная переменная, тогда если функция $f(x_1$, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, $x_n) = g(x_1$, …, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, …, $x_n)$, то функция g называется полученной из f добавлением фиктивной переменной. Функция удаления фиктивной переменной определяется аналогично.

Билет 3

Определение. Формулы F_1 и F_2 называются эквивалентными, если они определяют равные функции относительно объединения их переменных. Функции называются равными, если их области определения равны и $\forall x \in D_f(x)\ f(x) = g(x)$. Слово $F_1 = F_2$, если формулы F_1 и F_2 эквивалентны, называется тождеством.

Основные тождества:

1. Ассоциативность операций: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\leftrightarrow$.
2. Дистрибутивности:
   (a) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
   (b) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
   (c) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. Тождества для отрицания:
   (a) $\overline{\overline{x}} = x$
   (b) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
   (c) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
   (d) $x \cdot \overline{x} = 0$
   (e) $x \vee \overline{x} = 1$
   (f) $\overline{x \to y} = x \cdot \overline{y}$
4. Тождества для эдентичных операндов
5. Тождества с константным операндом

Определение. Функция g называется двойственной к f, если $g(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$. Обозначение $g = f^*$.

Определение. Если функция двойственна к самой себе, то она называется самодвойственной.

Теорема. *(принцип двойственности) Если Φ - формула в сигнатуре $\Sigma : S \to F$, определяющая некоторую функцию g, то эта формула в сигнатуре $\Sigma^* : S \to F^*$ определяет двойственную функцию g^*.*

Доказательство. База индукции: пусть x_i - символ переменной, тогда однобуквенное слово, состоящее из x_i - формула в сигатуре Σ, определяющая одноместную функцию g. Эта формула в сигнатуре Σ^* имеет вид $\overline{x_i}$, то есть она определяет функцию, двойственную к g.
Пусть $s \in S$, $f = \Sigma(s)$ - формула от n переменных, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - формулы в сигнатуре Σ, тогда слово $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ. В $\Sigma^*(s) = (\Sigma(s))^* = (\Sigma(s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)))^* = f^*$, то есть данная формула определяет в двойственной сигнатуре двойственнную функцию. $\square$

Билет 4

Определение. Выражение $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) : f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$ называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой. $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, \sigma_i = 1 \\ \overline{x_i}, \sigma_i = 0 \end{cases}$.

Теорема. *Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры логики верно равенство:*
$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in B_m} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Доказательство. Рассмотрим прозвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, то $\exists \alpha_i \neq \sigma_i \Longrightarrow \alpha_i^{\sigma_i} = 0 \Longrightarrow$ данное слагаемое будет равно нулю. Тогда единственным не нулевым членом будет $(\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_m^{\alpha_m}) \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. $\square$

Теорема. *Любую функцию алгебры логики можно представить с помощью суперпозиций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.*

Доказательство. Так как любая функция алгебры логики, кроме тождественного нуля, реализуется совершенной д.н.ф., значит она представима суперпозициями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Тождественный ноль можно представить так: $x \wedge \overline{x} = 0$. $\square$

Теорема. *Любая функция алгебры логики, кроме тождественной единицы, представима в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы.*

Доказательство. Так как любая функция алгебры логики, кроме тождественного нуля, представима в виде совершенной д.н.ф., тогда по принципу двойственности
$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n): f^*(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} \Longrightarrow$
$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge\limits_{(\delta_1, \ldots, \delta_n): f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1} x_1^{\overline{\delta}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\delta}_n}$. $\square$

Билет 5

Определение. Система функций называется полной в P_2, если через них выражаются все функции в P_2.

Примеры.

1. $\wedge$ и $\neg$
2. $\vee$ и $\neg$
3. $x|y$
4. $x \downarrow y$

Определение. Полиномы по модулю 2 вида: $\sum\limits_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq 1, \ldots, n} a_{i_1, \ldots, i_s} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$ называются полиномами Жегалкина.

Теорема. *(Жегалкина)*
Любая функция алгебры логики представима полиномом Жегалкина, причём единственным образом.

Доказательство. Так как в каждом мономе полинома Жегалкина n перменных, каждая из которых может быть либо 0, либо 1, а коэффициент перед каждым мономом может принимать значение 0 или 1 $\Longrightarrow$ всего есть 2^{2^n} различных полиномов Жегалкина.
Пусть два различных полинома Жегалкина задают одну функцию, тогда мы получим ненулевой полином, задающий нулевую константу $\Longrightarrow$ противоречие $\Longrightarrow$ Любая функция алгебры логики представима полиномом Жегалкина, причём единственным образом. $\square$

Билет 6

Определение. Множество функций, кторые можно пулучить из данного множества M функций алгебры логики, называется замыканием множества M и обозначается $[M]$.

Примеры. 1. $P_2 = [P_2]$

1, $x + y$ - множество линейных функций

Свойства. *1.* $M \subseteq [M]$

2. $[[M]] = [M]$

3. Если $M_1 \subseteq M_2$, *то* $[M_1] \subseteq [M_2]$

4. $[M_1] \cup [M_2] \subseteq [M_1 \cup M_2]$

Доказательство. 1. По определению замыкания.

2. Из первого следует, что $[M] \subseteq [[M]]$, а $[[M]] \subseteq [M]$, так как в противном случае существовала бы функция, которая не выражается суперпозициями функций из M, но выражается суперпозициями функций, которые выражаются суперпозициями функций из M, а значит она выражается суерпозициями из $M \implies$ противоречие.

3. Если функция получается суперепозициями из M_1, то её можно получить суперпозициями из M_2, так как все функции M_1 являются функциями M_2.

4. Пусть функция $f \in [M_1] \cap [M_2]$, тогда она получается суперпозициями из M_1 или из M_2, пусть для определённости она выражается суперпозициями из M_1, но тогда её можно получить суперпозициями из $M_1 \cap M_2$, то есть $f \in [M_1 \cap M_2]$

□

Определение. Класс функций M называется замкнутым, если $[M] = M$.

Примеры. 1. $P_2 = [P_2]$

2. $L = [L]$, L - множество линейных функций.

Билет 7

Определение. Функция f называется функцией, сохраняющей ноль, если на наборе из нулей она принимает значение 0.

Определение. Функция f называется функцией, сохраняющей единицу, если на наборе из единиц она принимает значение 1.

Класс функций, сохраняющих ноль, обозначим T_0, а класс функций, сохраняющих единицу, обозначим T_1.

Теорема. *Классы* T_0 *и* T_1 *замкнуты.*

Доказательство. 1. Операция подстановки переменных:
$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, если функция f сохраняла ноль, то и функция g будет сохранять ноль, если функция f сохраняла единицу, то и функция g будет сохранять единицу.

2. Операция подстановки одной функции в другую:
   $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, если функции f и h сохраняли ноль, то и функция g будет сохранять ноль, если функции f и h сохраняли единицу, то и функция g будет сохранять единицу.

3. Операция добавления или удаления фиктивной переменной, не влияют на способность функции сохранять ноль или сохранять единицу.

Следовательно суперпозициями мы не сможем получить функцию, не пренадлежащую данному классу $\longrightarrow$ классы T_0 и T_1 - замкнуты. $\square$

Билет 8

Класс самодвойственных функций обозначим S.

Теорема. *Класс S замкнут.*

Доказательство. 1. Операция подстановки переменных:
   Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, тогда $\overline{g}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \overline{f}(\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_n}) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = g(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow g$ - самодвойственная функция.

2. Операция подстановки функции в функцию:
   Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in S$, $h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, тогда $\overline{h}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}, \ldots, \overline{x}_{m+n-1}) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, g(\overline{x}_n, \ldots, \overline{x}_{m+n-1})) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, \overline{g}(x_n, \ldots, x_{m+n-1})) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{m+n-1})) = h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{m+n-1}) \Longrightarrow h$ - самодвойственная функция.

3. Операция добавления или удаления фиктивных переменных:
   Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, тогда $\overline{g}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, 1, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \Longrightarrow g$ - самодвойственная функция.

$\square$

Теорема. *Если функция f не является самодвойственной, то с помощью неё и функции отрицания можно получить константу.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$, тогда существует набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$. Пусть $\varphi_i = x^{\alpha_i}$, $\varphi(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ $\square$