Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над $\mathbb{R}$, отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.
Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, тогда в некотором базисе V φ действует ма матрицей $Y = A_\varphi X$, где $X \in \mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ - корень характеристического многочлена.
Рассмотрим линейный оператор над полем $\mathbb{C}$, действующий при той же матрице $A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n Z \to A_\varphi Z$, соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то $\exists$ собственный вектор Z_0, отвечающий выбранному λ. Это значит, что $A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0$, $Z_0 = X_0 + iY_0$, где X_0 и $Y_0 \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow A_\varphi Z_0 = A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \Longrightarrow$
$\begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases}$ Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда
$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \longrightarrow$ подпространство $U = \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$ является инвариантным подпространством для φ.
Теперь докажем, что $\dim U = 2$.

Доказательство. Предположим, что $\dim U = 1$, то есть $y_0 = \mu x_0$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \Longrightarrow$ если $x_0 \neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ.
$A_{\varphi_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ имеет корни $\alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ - противоречие. □

Теорема. *Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторным пространстве имеет одномерное или двумерное подпространство.*

Доказательство. Если $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характерического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V$, $u_i \neq 0$, $\Longrightarrow \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.
Если $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $\exists U$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Вместо диаганализируемости можно использовать следующее утверждение:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 \\ \ddots & & & & \\ & \alpha_m & \beta_m & & \\ & -\beta_m & \alpha_m & & \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}, \text{ а } \beta_j \neq 0,\ j = \overline{1, m}$$

0.1 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ такой, что $\varphi(v) = v \ \forall v \in V$, называется тождественным оператором и обозначается Id.

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ, если $f(\varphi) = a_0 Id + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m = 0$, то есть $f(A_\varphi) = 0$
$\Longrightarrow A_{f(\varphi)} = f \cdot A_\varphi = a_0 E + a_1 A_\varphi + \ldots + a_m A_\varphi^m$.

Примеры. $V = \mathbb{R}[t]_n$, $\varphi = \frac{d}{dt}$.
$\varphi^n(t^n) = n!$, $\varphi^{n+1} \equiv 0 \Longrightarrow$ для $\varphi = \frac{d}{dt}$ t^{n+1} - анулирующий многочлен.

Утверждение. *Если* $dimV = n$, *то* $\exists$ *многочлен степени* $\leq n^2$, *анулирующий* φ. $dimL(V) = n^2$, $L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \Longrightarrow$ *операторы*