

Содержание

1 Кривые	1
1.1 Кривые на плоскости	1
1.2 Кривые в трёхмерном пространстве	5

1 Кривые

1.1 Кривые на плоскости

Здесь и далее координаты векторов обозначаем верхними индексами, производные обозначаем так: \dot{a} .

Определение 1.1. Гладкая элементарная регулярная вложенная плоская кривая — множество точек γ на плоскости, задаваемое параметрическими уравнениями

$$z^1 = u(t)$$

$$z^2 = v(t)$$

$$z(t) = (u(t), v(t))$$

причём

1. $t \in [a, b]$
2. $z(t) \in C^\infty[a, b]$ (гладкость)
3. $\forall t \in [a, b] \dot{z}(t) = (\dot{u}(t), \dot{v}(t)) \neq 0$ (вектор скорости кривой не обращается в 0 на отрезке $[a, b]$ (регулярность))
4. если $z(t_1) = z(t_2)$, то $t_1 = t_2$

Пример 1.

$$z^1(t) = t^3$$

$$z^2(t) = t^2$$

$$t \in [-1, 1]$$

Упражнение. Пусть γ — прямой угол, необходимо задать $z = r(t)$, где $r(t) \in C^\infty$.

Определение 1.2. Замена параметра вида: $t(\tau)$, где $\tau \in [\alpha, \beta]$, $t(\tau) \in C^\infty[\alpha, \beta]$, $t'(\tau) \neq 0$, называется допустимой заменой.

Определение 1.3. Касательной к кривой γ в точке $r(t_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку в направлении вектора $\dot{r}(t_0)$. $z = r(t_0) + \tau \cdot \dot{r}(t_0)$.

Определение 1.4. Нормалью к кривой γ в точке $r(t_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку и ортогональная касательной.

Определение 1.5. Длина дуги кривой между точками t_1 и t_2 называется числом

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$$

Упражнение. Доказать, что l не зависит от допустимой параметризации.

Рассмотрим кривую $\gamma : z = r(t)$, рассмотрим точку t_0 на этой кривой и функцию $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{r}(t_1)| dt_1$. Зададим параметризацию $t = t(s)$.

Определение 1.6. Такая параметризация называется натуральной параметризацией, а s называется натуральным параметром.

Замечание 1. Если кривая γ задана натуральной параметризацией, то

$$l = |s(t_2) - s(t_1)|$$

Замечание 2. $v(s) = 1$, обозначение: $\rho'(s) := v(s)$.

Пусть даны две кривые γ и $\tilde{\gamma}$, s_0 — их общая точка.

$$\gamma : z = \rho(s)$$

$$\tilde{\gamma} : z = \tilde{\rho}(s)$$

$$\rho(s_0) = \tilde{\rho}(s_0)$$

Определение 1.7. Кривые γ и $\tilde{\gamma}$ имеют в точке s_0 касание порядка k , если натуральные параметры можно выбрать так, что $\rho(s) - \tilde{\rho}(s) = (s - s_0)^k$.

Утверждение 1.1. Кривые γ и $\tilde{\gamma}$ имеют в точке s_0 касание порядка k тогда и только тогда, когда натуральные параметры можно выбрать так, что

$$\rho(s_0) = \tilde{\rho}(s_0), \quad \rho'(s_0) = \tilde{\rho}'(s_0), \quad \dots, \quad \rho^{(k)}(s_0) = \tilde{\rho}^{(k)}(s_0)$$

.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\rho(s) - \tilde{\rho}(s) = \sum_{j=0}^k \frac{\rho^{(j)}(s_0) - \tilde{\rho}^{(j)}(s_0)}{j!} \cdot (s - s_0)^j + \bar{o}((s - s_0)^k)$$

■

Лемма 1.1. Пусть $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(t)$ — бесконечно дифференцируемая вектор-функция и $l = \text{const}$, тогда $\alpha \perp \dot{\alpha}$.

Доказательство. $l^2 = (\alpha, \alpha) = \text{const} \implies |\alpha|^2 = \text{const} \implies (|\alpha|^2)' = 2(\alpha, \dot{\alpha}) = 0$. ■

Следствие 1.0.1. Если $z = \rho(s)$ — нормальная параметризация кривой γ , то $(\ddot{\rho}, \dot{\rho}) = 0$.

Замечание 3. Далее вместо $\dot{\rho}$ пишем ρ' , имея ввиду, что ρ — натуральная параметризация.

Теорема 1.1. Пусть в некоторой точке s_0 кривой γ $\rho''(s_0) \neq 0$, тогда существует единственная окружность, имеющая касание второго порядка в точке s_0 , причём центр этой окружности находится на нормали к кривой γ в направлении $\rho''(s_0)$, а её радиус $R = \frac{1}{|\rho''(s_0)|}$.

Доказательство. Рассмотрим окружность $\tilde{\gamma}$ с центром в точке z_0 и радиуса $R = \frac{1}{|\rho''(s_0)|}$. Зададим эту окружность так:

$$\tilde{\gamma} : z = z_0 + \begin{pmatrix} a \cos(\frac{s}{a}) \\ a \sin(\frac{s}{a}) \end{pmatrix}$$

Тогда $\tilde{\rho}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{a}) \\ \cos(\frac{s}{a}) \end{pmatrix}$

$$\tilde{\rho}''(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \cos(\frac{s}{a}) \\ -\frac{1}{a} \sin(\frac{s}{a}) \end{pmatrix}$$

Значит, $|\tilde{\rho}''(s)| = \frac{1}{a}$. ■

Определение 1.8. Построенная окружность называется соприкасающейся окружностью. Её центр называется центром кривизны, её радиус R — радиусом кривизны, а величина $k = \frac{1}{R}$ — кривизной кривой.

Замечание 4. Пусть $\ddot{a}(s_0) \neq 0$, тогда пара $\{v(s_0), n(s_0) = \frac{\ddot{a}(s_0)}{|\ddot{a}(s_0)|}\}$ — ортонормированный репер с центром в точке s_0 , $n(s_0)$ — вектор нормали.

Определение 1.9. Такой репер называется репером Френе.

Утверждение 1.2 (Плоские формулы Френе).

$$1. v' = \frac{1}{R} \cdot n$$

$$2. n' = -\frac{1}{R} \cdot v$$

Доказательство.

1. $n = \frac{\rho''}{|\rho''|} = \frac{v'}{\frac{1}{R}}$, то есть $v' = \frac{1}{R} \cdot n$.

2. По лемме 1.1 $n' \perp n$, тогда $n' \parallel v \implies n' = \lambda v$. Так как $(v, n) = 0$, то $(v, n') + (v', n) = 0$. По пункту 1. $v' = \frac{1}{R} \cdot n$, тогда $\frac{1}{R}(n, n) + \lambda(v, v) = 0$.

Векторы \vec{n} и \vec{v} имеют единичную длину, значит, $\lambda = -\frac{1}{R}$, то есть $n' = -\frac{1}{R} \cdot v$.

■

Замечание 5. Пусть плоскость ориентирована и $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, тогда рассмотрим

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

В таком случае, можно не требовать, что вектор скорости нигде не обращается в

ноль. При этом $\tilde{k} = \begin{cases} k, & \text{при } \tilde{n} = n \\ -k, & \text{при } \tilde{n} = -n \\ 0, & \text{при } \ddot{a} = 0 \end{cases}$

Утверждение 1.3.

1. Формулы Френе остаются верными при замене n на \tilde{n} и k на \tilde{k} .

2. $\tilde{k} \in C^\infty$

Доказательство.

1. Так как $\tilde{n} = n$ либо $\tilde{n} = -n$, и знаки \tilde{n} и \tilde{k} совпадают, и $|k| = |\tilde{k}|$, то $kn = \tilde{k}\tilde{n}$.

2. $|\tilde{n}| = 1$, рассмотрим (v', \tilde{n}) . По первой плоской формуле Френе $(v', \tilde{n}) = \tilde{k} \cdot (\tilde{n}, \tilde{n}) = \tilde{k} = v_1 \cdot v'_2 - v_2 \cdot v'_1$. Так как v — бесконечно непрерывно дифференцируемая функция, то \tilde{k} тоже.

■

Теорема 1.2 (о восстановлении кривой по функции кривизны).

1. Пусть $k_0 \in C^\infty[0, l]$, тогда существует кривая γ такая, что k_0 — её функция кривизны.

2. Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые такие, что $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2$, тогда существует движение f плоскости, переводящее γ_1 в γ_2 , то есть $f(\gamma_1) = \gamma_2$.

Доказательство.

1. Рассмотрим $\alpha(s) = \int_0^s k_0(s_1)ds_1 + \alpha_0$, тогда $\alpha' = k_0$. Рассмотрим $v(s) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s)) \\ \sin(\alpha(s)) \end{pmatrix}$, тогда $r(s) = \int_0^s v(s_1)ds_1$. Рассмотрим кривую $\gamma : s = r(s)$. Эта кривая гладкая, так как $v(s)$ — гладкая функция. Так как $v(s)$ — бесконечно непрерывно дифференцируемая функция, то $r(s)$ тоже. Из того что $|v(s)| = 1 \neq 0$, следует, что γ регулярна, а так же $r'' = v' = \alpha' \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = k_0 \cdot \tilde{n}$, то есть k_0 — кривизна кривой γ .
2. Соединим начала данных кривых при помощи сдвига. Затем, применим поворот, чтобы их векторы скорости в начальной точке совпали. Так как $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2$, то $v'_1 = v'_2$, значит, $v_1 = v_2 + const$. Так как вектора скорости в начальной точке совпадают, то $const = 0$. Аналогично $r_1(s) = r_2(s)$. Композиция использованных сдвига и поворота является искомым движением. ■

Замечание 6. Возможны точки самопересечения, в таких случаях эти точки считаем различными.

1.2 Кривые в трёхмерном пространстве

Определение 1.10. Гладкая элементарная регулярная вложенная кривая — множество точек $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, задаваемое параметрическими уравнениями

$$z^1 = z^1(t)$$

$$z^2 = z^2(t)$$

$$z^3 = z^3(t)$$

$$z(t) = (z^1(t), z^2(t), z^3(t))$$

причём

1. $t \in [a, b]$
2. $z(t) \in C^\infty[a, b]$ (гладкость)
3. $\forall t \in [a, b] \dot{z}(t) = (\dot{z}^1(t), \dot{z}^2(t)) \neq 0$ (вектор скорости кривой не обращается в 0 на отрезке $[a, b]$ (регулярность))
4. если $z(t_1) = z(t_2)$, то $t_1 = t_2$

Определение 1.11. Касательной к кривой γ в точке $r(t_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку в направлении вектора $\dot{r}(t_0)$. $z = r(t_0) + \tau \cdot \dot{r}(t_0)$.

Определение 1.12. Нормальная плоскость к кривой γ в точке $r(t_0)$ — прямая, проходящая через эту точку и ортогональная касательной. $(z - r(t_0), \dot{r}(t_0)) = 0$.

Замечание 7. Длина дуги, натуральная параметризация, порядок касания, соприкасающиеся окружности, центр и радиус кривизны и кривизна определяются аналогично плоскому случаю.

Пусть $z = r(s)$ и $r(s_0) \neq 0$ для некоторого s_0 , тогда определены $v = r'(s_0)$ и $n = r''(s_0)$

Определение 1.13. Вектор n — вектор главной нормали к кривой.

Рассмотрим вектор $b = [v, n]$.

Определение 1.14. Вектор b называется вектором бинормали. Тройка векторов $\{v, n, b\}$ является ортонормированным репером с центром в точке s_0 .

Лемма 1.2. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ — это $n \times n$ гладкие матричные функции, заданные на отрезке $[a, b]$, причём $\dot{Q} = A \cdot Q$, тогда

1. если $\forall t \in [a, b] Q(t) \cdot Q^T(t) = E$, то $\forall t \in [a, b] A^T(t) = -A(t)$.
2. если $\forall t \in [a, b] A(t)^T = -A(t)$ — ортогональная матрица и $Q(t)$ — ортогональная матрица хотя бы в одной точке, тогда $\forall t \in [a, b] Q(t)$ — ортогональная матрица.

Доказательство. Рассмотрим $(Q^T \cdot Q)' = \dot{Q}^T \cdot Q + Q^T \cdot \dot{Q} = (A \cdot Q)^T \cdot Q + Q^T \cdot A \cdot Q = Q^T(A^T + A)Q$. $Q^T(A^T + A)Q = 0 \iff A^T + A = 0$, то есть $Q^T \cdot Q = \text{const} \iff A^T + A = 0$.

1. Из условия и равносильности выше следует, что $A^T = -A$.
2. Так как для некоторого $t \in [a, b] Q^T(t) \cdot Q(t) = E$, то из равносильности выше это равенство верно для любого t .

■

Теорема 1.3 (Пространственные формулы Френе). Пусть $\forall s r''(s) \neq 0$, тогда существует бесконечно непрерывно дифференцируемая функция $\kappa(s)$ такая, что:

1. $v' = \kappa \cdot n$
2. $n' = -\kappa \cdot v - b'$
3. $b' = \kappa \cdot n$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $Q(s) = \begin{pmatrix} v \uparrow & n \uparrow & b \uparrow \end{pmatrix}$, тогда

$$Q'(s) = \begin{pmatrix} v' \uparrow & n' \uparrow & b' \uparrow \end{pmatrix} = A \cdot Q$$

По первому пункту леммы 1.2 A — кососимметрическая матрица.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$. $n = \frac{r''}{|r''|} = \frac{v'}{k}$, то есть $v' = k \cdot n$. Тогда $a_{12} = k$ и $a_{13} = 0$.

Таким образом, матрица A имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим $-a_{23} = \kappa$. Тогда

из равенства $Q' = A \cdot Q$ следуют пункты 2 и 3.

Рассмотрим $-(n', b) = k \cdot (v, b) + \kappa \cdot (b, b) = \kappa$ ■

Определение 1.15. Функция $\kappa(s)$ называется функцией кручения кривой γ .

Упражнение. Доказать, что существует вектор $\omega(s)$ такой, что $v' = \omega v$, $n' = \omega n$, $b' = \omega b$

Определение 1.16. Кривая γ бирегулярна, если $\forall s \ r''(s) \neq 0$.

Утверждение 1.4. Пусть кривая γ бирегулярна, тогда она плоская тогда и только тогда, когда $\kappa \equiv 0$.

Доказательство. По третьему пункту теоремы 1.3 $b' = \kappa n$. Рассмотрим $(b', n) = \kappa$.

\implies Так как $b = b_0 = \text{const}$, то $b' \equiv 0 \implies \kappa \equiv 0$.

\impliedby Так как $\kappa \equiv 0$, то $b' \equiv 0 \implies b = b_0 = \text{const}$. По определению $(b, v) = 0$, тогда $0 = (b_0, r') = (b_0, r)' \implies (b_0, r) = \text{const} = c_0$. Последнее уравнение является уравнением плоскости, значит кривая γ плоская. ■

Теорема 1.4 (о восстановлении пространственной кривой по кривизне и кручению).

1. Пусть $k_0(s)$ и $\kappa_0(s)$ — две бесконечно непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0, l]$, причём $\kappa(s) > 0$, тогда существует бирегулярная кривая γ такая, что $k = k_0$ и $\kappa = \kappa_0$.
2. Пусть γ и $\tilde{\gamma}$ — две бирегулярные кривые такие, что $k(s) = \tilde{k}(s)$ и $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$, тогда существует движение $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящее γ в $\tilde{\gamma}$.

Доказательство.

1. Из доказательства пространственных формул Френе $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}$, рассмотрим матрицу $Q(s)$ такую, что $\dot{Q}(s) = A(s) \cdot Q(s)$ и $Q(0) = \begin{pmatrix} v_0 \uparrow & n_0 \uparrow & b_0 \uparrow \end{pmatrix}$. Последнее уравнение является системой линейных дифференциальных уравнений с

начальными условиями, тогда по теореме Коши существования и единственности решения существует единственное решение $Q(s) = \begin{pmatrix} v(s) \uparrow n(s) \uparrow b(s) \uparrow \end{pmatrix}$. Рассмотрим $r(s) = \int_0^s v(s_1) ds_1 + r_0$ и рассмотрим кривую $\gamma : z = r(s)$. $r'(s) = v(s)$, значит, эта кривая γ является гладкой и регулярной, причём s — нормальный параметр. Так как $r'' = v' = k_0 \cdot n$, то $|v'| = k_0$, то есть k_0 — кривизна кривой γ . По второй пространственной формуле Френе $n' = -k_0 v - \kappa_0 b \implies -\kappa_0 = (n', b)$.

■