Пусть U - инвариантное подпространство V для линейного оператора $\varphi : V \to V$.

Определение. Ограничением φ на подпространство U называется отображение $\varphi\big|_U : U \to U$ такое, что $\forall u \in U \varphi\big|_U(u) = \varphi(u)$

Рассмотрим фактор-пространство $\overline{V} = V\big|_U : \bar{v} = v+u | u \in U$

Определение. Оператор $\overline{\varphi} : \overline{V} \to \overline{V}$ называется фактор-оператором.

$\forall v' = v+u$, где $u \in U$, $\varphi(v') = \varphi(v) + \varphi(u) \Longrightarrow \overline{\varphi(v')} = \overline{\varphi(v)}$ (так как $\varphi(u) \in U$) $\Longrightarrow \overline{\varphi} : \overline{V} \to \overline{V}$ - линейный оператор.

Теорема. *1. Если $\exists U \neq \{0\}$, U - подпространство V, $Im\varphi \subset U$, то в подходящем базисе $A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ (1), где $B_{m\times n}$ - матрица линейного оператора $\varphi\big|_U$, где $m = dimU$, а C - матрица оператора $\overline{\varphi}$.*
2. Если $V = U \oplus W$, где U и W - инвариантные подпространства относительно φ, то в подходящем базисе $A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ (2), где $B = A_{\varphi|_U}$, $C = A_{\varphi|_W}$.

3. Верны и обратные утверждения: если в некотором базисе A_φ имеет вид (1), то для φ существует инвариантое подпространство, а если A_φ имеет вид (2), то V - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

Доказательство. 1. Обозначим $\mathrm{dim}V = \mathrm{n}$, $\mathrm{dim}U = \mathrm{m}$, $0 < \mathrm{m} < \mathrm{n}$. Выберем базис в U $e_1, \dots, e_m$ и дополним его до базиса в V произвольными векторами $e_{m+1}, \dots, e_n$. Тогда $\forall u \in U$ $u = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i e_i \Longrightarrow \varphi(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \varphi(e_i)$ В частности, столбцы $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_m)$ имеют вид: $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ они составляют матрицу $\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right)$ Разбивка матрицы, составленной из столбцов образов базисных векторов $e_{m+1}, \dots, e_n$, Видно, что $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_U}$.

2. Если $V = U \oplus W$, векторы $e_{m+1}, \dots, e_n$ надо выбирать в W, а остольное аналогично предыдущему пункту.

3. В обратную сторону для второго случая: если в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрица имеет вид (2), то положим в качестве $U = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$, а $W = \langle_{m+1}, \dots, e_n \rangle$ Из определения матрицы $A_{\varphi,e}$ следует, что U и W - инварианты относительно φ, $\varphi\big|_U$ имеет матрицу B, а φ, $\varphi\big|_W$ имеет матрицу C. Для первого случая: $\overline{e_j} = e_j + U$, для $\overline{m+1, n}$, является базисом в фактор-пространстве $overlineV = V\big|_U \overline{\varphi}(\bar{e}_j) = \varphi(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}e_i + \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_{kj}e_k = \sum\limits_{k=m+1}^{n} e_{kj}\overline{e_k}$ (так как первая сумма $\in U$) $\Longrightarrow C = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица оператора $\overline{\varphi}$. $\square$

Замечание. В общем случае, если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$, то в некотором базисе, согласно разложению, $A_\varphi = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}$, где B_i - матрица $\varphi|_{U_i} \forall i = \overline{1, s}$

Пример. (Естественные примеры инвариантных подпространств (доказательство - упражнение)) $\varphi : V \to V$ - линейный оператор. 1. $\mathrm{Ker}\varphi$, $\mathrm{Im}\varphi$ и любое подпространство $U : \mathrm{Im}\varphi \subset U$, тогда U является инвариантным подпространством относительно φ. 2. Если U_1 и U_2 являются инвариантными подпространствами относительно оператора φ, то $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$ также являются инвариантными относительно оператора φ.

0.1 Действия над линейными отображениями и операторами

Пусть $\varphi : V_1 \to V_2$ - линейное отображение, тогда: 1. $\forall \lambda \in \mathbb{F} (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$, $\forall x \in V_1$ 2. Если $\psi : V_1 \to V_2$, то $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $\forall x \in V_1$

Утверждение. *1 Относительно этих операций множество $L(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 является векторным пространством.*

Утверждение. *2 Если $dimV_1 = n$, $dimV_2 = m$, то $L(V_1, V_2) \cong M_{m\times n}(\mathbb{F})$*

Доказательство. Зафиксируем базисы в V_1 и V_2 e и f соответственно, тогда $\forall\varphi$ взаимооднозначно соответствует его матрица $A_{\varphi,e,f}$ относительно базисов e и f. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$ $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ $(\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \Longrightarrow$ все столбцы A_φ умножаются на $\lambda \Longrightarrow A_\varphi$ умножается на λ. $\forall j = \overline{1, m} (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j) \Longrightarrow$ столбцы $A_{\varphi+\psi}$ имеют вид $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$. □

Обозначение: $L(V_1, V_2) = \kappa(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. $\varkappa(V)$ - множество линейных операторов на V.

Определение. Произведением линейных операторов $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ называется их композиция $(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$, где $x \in V_1$.

Утверждение. *3 Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.*

Утверждение. *4 Пусть V_1, V_2, V_3 - конечномерные векторные пространства, а $\psi : V_1 \to V_2$ и $\varphi : V_2 \to V_3$ - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции $A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi A_\varphi$.*

Доказательство. Утверждение 3 - упражнение. Утверждение 4: Пусть e - базис в V_1, f - базис в V_2, g - базис в V_3. $A_\varphi = (\varphi(e_1) \uparrow \ldots \varphi(e_n) \uparrow)$ в базисе f, $A_\psi = (\psi(f_1) \uparrow \ldots \psi(f_m) \uparrow)$ в базисе g. $\forall x = eX$, обозначим $y = \varphi(x)$, $z = \psi(y)$ со столбцами координат Y и Z соответственно. Тогда $Y = A_\varphi X$, $Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi\circ\varphi}X$. □

Теорема. *Множество $\kappa(V)$ с операциями $+$, $\cdot\lambda$, $\cdot$ является ассоциативной алгеброй с единицей, равной IdV. Если $dimV = n$, то $\kappa(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Следует из утверждений 1 - 4. □

Утверждение. *Если φ - линейный оператор на V, то $\forall k \in \mathbb{N}$ подпространства $Ker\varphi^k$ и $Im\varphi^k$ - инварианты.*
При этом $0 \equiv Ker\varphi \equiv Ker\varphi^2 \equiv \ldots$
$V \supseteq Im\varphi \supseteq Im\varphi^2 \ldots$

0.2 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ, если $\exists \lambda \in \mathbb{F}$: $\varphi(x) = \lambda \cdot x$ и $x \neq 0$. λ называется собственным значением оператора φ, соответствующим вектору x.

Пусть $\dim V = n$, e - базис в V, в нём $\forall x = e \cdot X$, тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно $A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0$ (2) - это СЛУ для нахождения вектора x, если известна λ. Система (2) имеет ненулевое решение, только если $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$ (3). Равенство (3) называется характеристическим уравнением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

Пример. Пример 1. $V = D^\infty(\mathbb{R})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций. $\varphi = \frac{d}{dx}$ $\forall f(x)$ $\varphi(f) = f'(x)$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}(e^{\lambda x})' = \lambda e^x$.

Доказательство. Если $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$, то $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, где $C \neq 0$. Рассмотрим $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow f(x)e^{-\lambda x} = C$. □

Пример 2. $A_\varphi = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$.

Упражнение. Какие существуют собственные векторы и собственные значения у φ во втором примере?