Содержание

1 Множества

Построение множеств:

Определение. Множество - $\{x|A(x)\}$, где $A(x)$ - некоторое свойство.

Определение. $A \subseteq B$, если все элементы A принадлежат множеству B

Определение. $A = B$, если множества A и B состоят из одинаковых элементов.

Определение. $P(A) = \{B|B \subseteq A\}$ - множество всех подмножеств.

Примеры. Парадокс Рассела: $R = \{x|x \notin x\}$ $R \in R$ и $R \notin R$.

Определение. $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ - упорядоченная пара.

Определение. $A \times B := \{(a, b)|a \in A \wedge b \in B\}$ - декартого произведение множеств A и B.

Определение. $R \subseteq A \times A$ - бинарное отношение на множестве A.

Определение.

1. Рефлексивность: $\forall x \in A\ xRx$
2. Симметричность: $\forall x, y \in A\ (xRy \to yRx)$
3. Транзитивность: $\forall x, y, z \in A\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$
4. Антисимметричность: $\forall x, y \in A\ (xRy \wedge yRx \to x = y)$

Определение. R - отношение частичного порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Определение. R - отношение эквивалентности, если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично.

Определение. $R(x) := \{y|xRy\}$ - класс эквивалентности элемента x.
$A/R := \{R(x)|x \in A\}$ - фактормножество.

Определение. Γ - разбиение множества A, если:

1. $\Gamma \subseteq P(A)$
2. $\forall B \in \Gamma\ B \neq \varnothing$
3. $\forall x \in A\ \exists!\ B \in \Gamma : x \in B$

Теорема. *A/R - разбиение. Если Γ - разбиение A, то $\exists!\ R : \Gamma = A/R$.*

Доказательство.

1. $A/R \subseteq P(A)$
2. $\forall B \in A/R\ B \neq \varnothing$, потому что $\forall x \in A\ xRx \Longrightarrow x \in R(x)$
3. $\forall x \in A\ \exists B \in A/R : x \in B$. Из-за транзитивности класс B единственный.

□

Определение. $f \subseteq A \times B$ - функция из множества A в множество в B, если $\forall x \in A\ \exists!\ y \in B : (x, y) \in f$.
Если $\forall x, x' \in A\ (f(x) = f(x') \to x = x')$, то f - инъекция.
Если $\forall y \in B\ \exists\ x \in A : y = f(x)$, то f - сюръекция.
f - биекция $\Longleftrightarrow$ f - инъекция и сюръекция.

Определение. Множества A и B равномощны, если существует биекция $f : A \longrightarrow B$. Обозначение: $A \sim B$.

Утверждение. *Ровномощность является отношением эквивалентности.*

Доказательство.

1. $A \sim A$, так как $f : f(x) = x$ - биекция
2. $A \sim B$, тогда $\exists$ биекция $f : A \longrightarrow B \Longrightarrow f^{-1}$ - биекция из B в A
3. Биекция из A в C - композиция биекций

□

Определение. Множество A вложимо в B, если существует инъекция $f : A \longrightarrow B$.

Теорема. *Данное отношение является отношением порядка.*

Доказательство.

1. $A \preceq A$ (так как существует биекция, то существует и инъекция)
2. $A \preceq B \wedge B \preceq C \to A \preceq C$, так как композиция инъекций является инъекцией
3. $A \preceq B \wedge B \preceq A \to A \sim B$ (Теорема Кантора - Бернштейна)

□

Определим натуральные числа так:
$0 = \varnothing$
$1 = \{0\}$

$\vdots$

$n+1 = n \cup \{n\}$ $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ - множество натуральных чисел. Принцип индукции Пусть $X \subseteq \omega$, и пусть выполнены свойства:

1. $0 \in X$
2. $\forall n (n \in X \to (n+1) \in X)$

Тогда $X = \omega$.

Теорема. *Всякое не пустое подмножество ω имеет наименьший элемент.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \neq A \subseteq \omega$ и в A нет наименьшего элемента, тогда

1. $0 \notin A$, иначе 0 - наименьший элемент
2. $\{0, 1, 2, \dots, n\} \cap A = \varnothing$, тогда $n+1 \notin A$, иначе $n+1$ - наименьший элемент

Следовательно, по принципу математической индукции $\{0, 1, 2, \dots, n\} \cap A = \varnothing$ $\forall n \implies A = \varnothing$ - противоречие. ☐

Определение. Множество называется конечным, если равномощно некоторому натуральному числу.

Лемма. *Если $m \in n$, то $n \setminus \{m\} \sim (n-1)$*

Доказательство. База индукции:
$n = 0$, доказывать нечего.
Пусть верно для n, докажем для $n+1$. Возьмём $m \in (n+1) = n \cup \{n\}$. Если $m = n$, то $(n+1) \setminus \{m\} = n$. Если $m \in n$, то применяем предположение индукции, что $n \setminus \{m\} \sim (n-1)$, то есть существует биекция между $n \setminus \{m\}$ и $(n-1)$. Отобразим $n \to (n-1)$, тем самым продлив биекцию до $(n+1) \setminus \{m\} \to n$. ☐

Теорема. *(Принцип Дирихле) $\forall m,\ n \in \omega (m \sim n \to m = n)$.*

Доказательство. $\Phi(n) := \forall m \{m \sim n \to m = n)\}$. База индукции:
$n = 0 \implies m \sim \varnothing \implies m = \varnothing$. Пусть верно $\Phi(n)$, докажем $\Phi(n+1)$. Предположим $(n+1) \sim m$, тогда существует биекция $f : n \cup \{n\} \to m$. Пусть $k = f(n)$, тогда $g : n \to m \setminus \{k\}$ - биекция $\implies n \sim m \setminus \{k\}$. По лемме $m \setminus \{k\} \sim (m-1)$ $\implies$ по транзитивности $n \sim m - 1$. По предположению индукции $n = m - 1 \implies$ $n + 1 = m$. ☐

Определение. Для конечного множества x полагаем, что $|x| = n$, если $x \sim n$.

Определение. Для $m, n \in \omega$ $m < n := m \in n$, $m \leqslant n := m < n \vee m = n$.

Свойства. *1.* $m < n \wedge n < k \to m < k$*(транзитивность)*

2. $m \leqslant n \to m \subseteq n$

3. $n \nless n$*(иррефлексивность)*

4. $n < m \leftrightarrow n + 1 \leqslant m$ *(дискретность вверх)*

5. $n < m \vee m < n \vee m = n$

Лемма. *Если A конечно, то $A \cup \{x\}$ конечно.*

Доказательство. Если $x \in A$, то $A \cup \{x\} = A$ конечно. Пусть $x \notin A$, $A \sim n$, тогда $A \cup \{x\} \sim n + 1$ □

Лемма. *Если A конечно, то $\forall n \in \omega$ $A \cup n$ конечно.*

Доказательство. База индукции: $n = 0$, $A \cup \varnothing = A$ конечно. Пусть $A \cup n$ конечно. Запишем $A \cup (n + 1) = A \cup (n \cup \{n\}) = (A \cup n) \cup \{n\}$ - конечное множество по предположению индукции и по предыдущей лемме, последний переход по транзитивности. □

Лемма. *Если множества A и B конечны и $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B$ конечно.*

Доказательство. Так как B конечно, то $B \sim n \in \omega$, то есть существует биекция $f : B \to n \Longrightarrow$ существует биекция $g : A \cup B \to A \cup n$, тождественная на A и совпадает с f на B. По транзитивности и предыдущй лемме имеем, что $A \cup B$ конечно. □

Теорема. *Если множества A и B конечны, то $A \cup B$ конечно.*

Доказательство. $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$. Докажем, что $A \backslash B$ - конечное множество. $A \backslash B \subseteq A$ и докажем, что любое подмножество C конечного множества конечно. База индукции: $|A| = 0$, тогда $|C| = 0$. Пусть верно для $|A| = n$. Рассмотрим $|A| = n + 1$, если $C = A$, то C конечно. Пусть $C \subset A$, тогда $\exists a \in A$ и $a \notin C$ $\Longrightarrow |A \setminus \{a\}| = n \Longrightarrow C \subseteq A \setminus \{a\} \Longrightarrow$ по предположению индукции C конечно. Значит, $A \setminus B$ конечно. По последней лемме $A \cup B$ конечно. □

Теорема. *Если множества A и B конечны, то $A \times B$ конечно.*

Доказательство. База индукции: $|B| = 0$, тогда □

Определение. $m+n := |A \cup B|$, где $|A| = m$, $|B| = n$, $A \cap B = \varnothing$. $m \cdot n := |A \times B|$, где $|A| = m$, $|B| = n$. $B^A := \{f | f$ - функция из A в B$\}$.

Лемма. $\forall n \in \omega \ B^{n+1} \sim B^n \times B$.

Доказательство. Пусть $f : n \to B$, $b \in B$, тогда построим функцию $g : (n+1) \to B$, которая совпадает с f на множестве n и переводит $n+1$ в b. Она задаёт биекцию между $B^n \times B \to B^{n+1}$. ☐

Лемма. *Если множество B конечно, то* $\forall n \in \omega \ B^n$ *конечно.*

Доказательство. По последней теореме и предыдущей лемме по индукции получаем данное утверждение. ☐

Лемма. *Если* $A \sim C$*, то* $B^A \sim B^C$*.*

Доказательство. Пусть дана биекция $g : A \to C$. По функции $f : C \to B$ строим композицию $(f \cdot g) : A \to B$. Это задаёт биекцию B^C на B^A. ☐

Теорема. *Если множества A и B конечны, то* B^A *конечно.*

Доказательство. Из двух последних лемм получаем данное утверждение. ☐

Определение. $m^n := |B^A|$, где $|B| = m$, $|A| = n$.

Определение. Характеристической функцией для любого подмножества A множества X называется функция f такая, что $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases} \quad \forall x \in X$

Теорема. $2^A \sim P(A)$.

Доказательство. Между подмножествами множества A и их характеристическими функция существует биекция, а множество всех характеристических функций равно 2^A. ☐

Теорема. *Теорема Кнтора* $|A| < |P(A)|$.

Доказательство. $A \preceq P(A)$: инъекция $a \to \{a\}$. Предположим, что $f : A \to P(A)$ - биекция, и рассмотрим $B = \{a | a \notin f(a)\}$. ☐

Теорема. *Даны множество* Y, $y_0 \in Y$, *функция* $h : Y \to Y$. *Тогда существует единственная функция* $f : \omega \to Y$ *такая, что*

1. $f(0)y_0$

2. $\forall n\ f(n+1) = h(f(n))$

Доказательство. Назовём m-функцией такую же функцию, как в формулировке теоремы, но заданную на множестве $m+1$.
База индукции: $\{(0, y_0)\}$ единственная 0-функция.
Шаг индукции: если g - m-функция, то, добавив $\{(m+1, h(g(m)))\}$, получим $m+1$-функцию.
Объединив все m-функции, получим искомую ω-функцию f. □

Определение. Множество A называется счётным, если $A \sim \omega$.

Теорема. *1. Если A конечно, B счётно, то $A \prec B$.*

2. Если A счётно, $B \subseteq A$, то B конечно или счётно.

3. Если A счётно, B конечно или счётно, то $A \cup B$ счётно.

4. Если A счётно, B конечно или счётно, то $A \times B$ счётно.

Доказательство. 1. По транзитивности $A \preceq B$. Пусть $A \sim B$, тогда $\omega \sim n$ по транзитивности. Из того что $n+1 \subseteq \omega$ следует, что $n+1 \preceq n$, что противоречит принципу Дирихле.

2. Пусть $A = \omega$, $B \subseteq A$ бесконечно. По рекурсии построим биекцию $f : \omega \to B$. Сначала построим функцию F такую, что $F(0) = \{min(B)\}$, $F(n+1) = F(n) \cup min(B \setminus F(n))$.

3. Пусть A и B счётны и не пересекаются, тогда предъявим обход по элементам как было в курсе математического анализа в первом семестре.

4. $\omega \times \omega \sim \omega$: канторовская нумерация.

□

Определение. Множество бесконечно по Дедекинду (D-бесконечно), если оно равномощно какому-нибудь своему собственному подмножеству.

Теорема. *1. Конечное множество D-конечно.*

2. Счётное множество D-бесконечно.

3. Если A счётно, $A \subseteq B$, то B D-бесконечно.

4. A D-бесконечно $\iff$ A содержит счётное подмножество.

5. Если A D-бесконечно, B конечно, то $A \cup B \sim A \setminus B \sim A$.

6. *Если A D-бесконечно, B счётно, то $A \cup B \sim A$.*

Доказательство. 1. По принципу Дирихле.

2. Пусть A счётно, тогда $\omega \subseteq A$ и $A \sim \omega \implies$ по определению A D-бесконечно.
3. Построим отображение из B в A,
4. $\impliedby$ По утверждению 3.
   $\implies$ Пусть $f : A \to B$ - биекция, где $B \subset A$. Если $A \in A \backslash B$, то рассмотрим $\{f(a), f(f(a)), \ldots\}$. Таким образом получили искомое счётное множество.
5. Если $C \subseteq A$ - счётное множество, $B \cap A = \varnothing$ и $B \sim n$, то строим биекцию из $A \cup B$ на A: сдвигаем все элементы C на n, а на освободившиеся места отображаем B. $A = (A \backslash B) \cup B$, тогда по утверждению 3 $A \backslash B$ D-бесконечно, так как оно содержит счётное подмножество $C \setminus B$, а по уже доказанному в утверждении пункту получаем, что $A \sim A \setminus B$.
6. Если $C \subseteq A$ счётно, $B \cap A = \varnothing$ и $B \sim \omega$, то строим биекуию из $A \cup B$ на A: удваиваем номера всех элементов C, а на нечётные места отображаем B.

□

Теорема. *Всякое бесконечное множество D-бесконечно.*

Доказательство. Построим инъекцию между бесконечным множеством и ω, тогда по утверждению 4 данное множество D-бесконечно. □

Определение. $c := 2^{\omega}$ - континуум.