Определение. Линейное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. V_1 и V_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V_1 \to V_2$. Обозначается: $V_1 \cong V_2$.

Теорема. *(Об изоморфизме) Конечномерные векторные пространства V_1 и V_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $dim V_1 = dim V_2$.*

Доказательство. $dim V_1 = dim V_2 = n$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V_1, а $f_1, \ldots, f_n$ - базис в V_2, тогда $\forall v \in V_1\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Определим отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ формулой $\varphi(v) := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i$.

1. (линейность) Пусть $v_1, v_2 \in V_1$, $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $v_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, тогда

   $v_1 + v_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i) f_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

   $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ и $\forall v \in V_1\ \varphi(\lambda v) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda x_i) f_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i = \lambda \varphi(v)$.

2. (инъективность) $Ker\varphi = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{V_2}\}$. Пусть $v \in V_1$ и $v \in Ker\varphi$, тогда $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow \varphi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$, так как $f_1, \ldots, f_n$ - линейно независимы $\Longrightarrow \forall i\ \alpha_i = 0 \Longrightarrow$ $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Longrightarrow Ker\varphi = \{0\}$.

3. (сюръективность) $\forall w \in V_2\ w = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \Longrightarrow w = \varphi(v)$, $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \Longrightarrow \varphi(V_1) = V_2$.

$\underline{\Longrightarrow}$ Пусть $V_1 \cong V_2$, $dim V_1 = n$, $\varphi : V_1 \to V_2$ - изоморфизм. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в V_1 и покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ - базис в V_2.

$\forall w \in V_2\ \exists v \in V_1 : \varphi(v) = w$. Пусть $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, тогда $\varphi(v) = w = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow V_2 = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$. Проверим линейную независимость

Предположим, что $\exists \mu_i \in \mathbb{F} : 0_{V_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i) \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i \in Ker\varphi = \{0\}$, так как φ - биекция.

Так как $\{e_i\}$ - линейно независимы $\Longrightarrow \mu_i = 0\ \forall i \Longrightarrow \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ - линейно независимы.

$\square$