Содержание

1 Билет 1 (Система окрестностей и топология)

Определение 1.1. *Пусть X - множество и пусть каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие семейство подмножеств $U(x)$ множества X, обладающее следующими свойствами:*

1. $\forall U \in U(x)$ *содержит точку* x
2. $\forall U$ *и* $V \in U(x)$ $\exists W \in U(x)$ *такое, что* $W \subseteq (U \cap V)$
3. $\forall U \in U(x)$ *и* $y \in U$ $\exists$ $V \in U(y)$ *такое, что* $V \subseteq U$

Тогда семейство $\{U(x)\}_{x \in X}$ *- система открытых окрестностей.*

Определение 1.2. *Пусть X — множество и пусть каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствии семейство $\mathcal{N}(x)$ подмножеств X такое, что выполнены следующие условия:*

1. $\forall N \in \mathcal{N}(x) \Longrightarrow x \in N$.
2. *Если* N, $M \in \mathcal{N}(x)$, *то* $N \cap M \in \mathcal{N}(x)$.
3. $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ *существует* $U \in \mathcal{N}(x)$ *с тем свойством, что* $U \subset N$ *и* $\forall y \in U$ *существует* $W \in \mathcal{N}(y)$ *такое, что* $W \subset U$.
4. *Если* $N \in \mathcal{N}(x)$ *и* $N \subset M \subset X$, *то* $M \in \mathcal{N}(x)$.

Тогда семейство $\{\mathcal{N}(x)\}_{x \in X}$ *называется системой окрестностей.*

Определение 1.3. *Элементы семейства $\mathcal{N}(x)$ называются окрестностями точки x.*

Определение 1.4. *Подмножество U пространства X называется открытым, если для любой точки $x \in U$ существует $V \in \mathcal{N}(x)$ такое, что $V \subset U$.*

Определение 1.5. *(Определение Александрова) Топологическое пространство - множество X вместе с семейством τ его подмножеств, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. *$\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$*
2. *если $\mathcal{U} \subset \tau$, то $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$ ($\mathcal{U}$ — семейство подмножеств X)*
3. *$\forall U, V \in \tau$ $U \cap V \in \tau$*

Определение 1.6. *Семейство τ из предыдущего определения называется топологией на множестве X, его элементы - открытыми множествами, а их дополнения - замкнутыми множествами. Множества, которые одновременно являются открыитыми и замкнутыми, называются открыто-замкнутыми.*

Определение 1.7. *Множество $U \subset X$ называется открытой окрестностью точки x, если $x \in U$ и $U \in \tau$.*

Определение 1.8. *Любое множество, содержащее открытую окрестность точки x, называется окрестностью точки x.*

Утверждение 1.1. *Понятия открытого множества в системе окрестностей и в топологии равносильны.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть $U \subset X$ открыто в терминах системы окрестностей, тогда $\forall x \in U$ существует $V \in \mathcal{N}(x)$ такое, что $V \subset U$. Пусть τ — семейство открытых множеств в терминах окрестностей. Проверим, что τ является топологией.

1. $\varnothing \in \tau$ (так как нет элементов), $X \in \tau$ (так как все точки принадлежат X)
2. Пусть U и V — два открытых множества, тогда, если $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$. Если $U \cap V \neq \varnothing$, то $\exists x \in X$ такой, что $x \in U$ и $x \in V$, значит, по определению U и V окрестности точки x, то есть $U \in \mathcal{N}(x)$ и $V \in \mathcal{N}(x)$. Тогда по второму пункту определения $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$, а значит, $U \cap V \in \tau$.
3. Пусть $\mathcal{U} \subset \tau$. Пусть $x \in \bigcup \mathcal{U}$, тогда существует $U \in \bigcup \mathcal{U}$ такое, что $x \in U$. Значит, по определению существует $V \in \mathcal{N}(x)$ такое, что $V \subset U$, тогда $V \subset \bigcup \mathcal{U} \subset X$, значит, по четвёртому пункту определения $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{N}(x)$, а значит, $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Из этих трёх пунктов имеем по определению, что τ — топология, причём $U \in \tau$ по построению, а значит, по определению U открыто в терминах топологии.
$\Longleftarrow$ Пусть $U \subset X$ открыто в терминах топологии, то есть $U \in \tau$, где τ — топология на X. В качестве $\mathcal{N}(x)$ рассмотрим семейство множеств $\mathcal{N}(x) = \{A | \exists U \in \tau,\ x \in U$ и $U \subset A\}$ и докажем, что $\{\mathcal{N}(x)\}_{x \in X}$ — система окрестностей.

1. По построению имеем, что для любого $N \in \mathcal{N}(x)$ $x \in N$.

2. Пусть $N \in \mathcal{N}(x)$ и $M \in \mathcal{N}(x)$, тогда по определению $\exists U_1 \in \tau$ такое, что $U_1 \subset N$ и $x \in U_1$, и $U_2 \in \tau$ такое, что $U_2 \subset N$ и $x \in U_2$. Так как $x \in N$ и $x \in M$, то $x \in N \cap M$ и аналогично $x \in U_1 \cap U_2$, а так же $U_1 \cap U_2 \subset N \cap M$. По определению топологии $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Значит, $N \cap M \in \mathcal{N}(x)$.

3. Пусть $N \in \mathcal{N}(x)$, тогда по построению $\exists U \in \tau$ такое, что $x \in U$ и $U \subset N$. Аналогично по определению для $\mathcal{N}(y)$ для каждого $y \in U$ имеем, что $U \in \mathcal{N}(y)$.

4. Если $N \in \mathcal{N}(x)$ и $N \subset M \subset X$, то по построению существует $U \in \tau$ такое, что $x \in U$ и $U \subset N$, но тогда $U \subset M$ и $x \in M$, а значит, $M \in \mathcal{N}(x)$.

Таким образом, по определению $\{\mathcal{N}(x)\}_{x \in X}$ — система окрестностей.
Так как множество U открыто в X в терминах топологии, то $x \in U$ $U \in \tau$. Значит, $U \in \mathcal{N}(x)$ по построению, а значит, по определению U — октрытая окрестность точки x в терминах системы окрестности. ■

2 Билет 2 (Базы и предбазы, метрическая топология)

Определение 2.1. *Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B} \subset \tau$ называется базой топологии τ или базой топологического пространства X, если любое открытое множество в X является объединением элементов семейства $\mathcal{B}$.*

Определение 2.2. *Пусть (X, τ) - топологическое пространство, семейство $\mathcal{B} \subset \tau$ называется предбазой топологии τ или предбазой топологического пространства X, если семейство всех конечных пересечений является базой топологии τ.*

Утверждение 2.1. *Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X является базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда*

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$

2. $\forall U, V \in \mathcal{B}$ *и* $\forall x \in U \cap V$ *существует* $W \in \mathcal{B}$ *такое, что* $x \in W$ *и* $W \subset U \cap V$.

Доказательство. $\Longrightarrow$

1. Так как X в силу определения топологического пространства открыто, то X является объеединением элементов базы, а так как каждый элемент базы содержится в X, то $X = \bigcup \mathcal{B}$.

2. По определению топологического пространства пересечение открытых множеств открыто, значит, по определению базы $U \cap V = \bigcup\limits_i B_i$, где $B_i \in \mathcal{B}$. Так как $\bigcup\limits_i B_i \in \mathcal{B}$, то положим искомое $W = B_i$ такому, что $x \in B_i$ (такое найдётся, так как x принадлежит объединению, а значит, найдётся B_i его содержащий).

$\Longleftarrow$ Пусть $\mathcal{B}$ — данное семейство подмножеств множества X. Зададим семейство множеств $\tau = \{U | \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B}\ :\ x \in B \subset U\}$. Проверим, что это топология.

1. $\varnothing \in \tau$ (так как нет элементов), $X \in \tau$: так как $X = \bigcup \mathcal{B}$, то для любого $x \in X$ существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B$.

2. Пусть $\mathcal{U} \subset \tau$, тогда $\forall x \in \bigcup \mathcal{U}$ будет существовать $U_i \in \mathcal{U}$ такое, что $x \in U_i$, а зачит, по определению будет существовать элемемнт $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $B \subset U$. Этот же элемент подойдёт для $\bigcup \mathcal{U}$, значит, $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

3. По второму условию $\forall U,\ V \in \mathcal{B}$ существует $W \in \mathcal{B}$ такой, что $W \subset U \cap V$. По определению τ $\forall N,\ M \in \tau\ \forall x \in N\ \exists B_1,\ \forall y \in M\ \exists B_2 \in \mathcal{B}$ такие, что $B_1 \subset N$, $B_2 \subset M$, $x \in B_1$ и $y \in B_2$. Тогда $\forall x \in N \cap M\ \exists B_1$ и $B_2 \in \tau$ такие, что $x \in B_1 \cap B_2$ и по пункту 2 $\exists W \in \mathcal{B}$ такой, что $W \subset B_1 \cap B_2$ и $x \in W$. Значит, $W \subset N \cap M$, то есть $N \cap M \in \tau$.

Значит, по определению $\mathcal{B}$ — база топологии. ■

Утверждение 2.2. *Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда $\bigcup \mathcal{B} = X$.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть $\mathcal{P}$ — предбаза топологии, тогда по определению семейство $\mathcal{B} = \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} P_i | P_i \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N}\}$ — база топологии. По критерию базы $X = \bigcup \mathcal{B}$. Из определения предбазы $\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup \mathcal{P}$. Значит, $X \subset \bigcup \mathcal{P}$. С другой стороны $\forall P \in \mathcal{P}\ P \in \mathcal{B}$ как пересечение из одного множества. Значит, $\bigcup \mathcal{P} \subset \bigcup \mathcal{B}$. А значит, $\bigcup \mathcal{P} = \bigcup \mathcal{B} = X$.
$\Longleftarrow$ Пусть $\mathcal{P}$ — данное семейство подмножеств множества X. Зададим семейство множеств $\mathcal{B} = \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} P_i | P_i \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N}\}$. Проверим, что это база.

1. Так как $X = \bigcup \mathcal{P} \subset \bigcup \mathcal{B}$, но с другой стороны $\bigcup \mathcal{B} \subset X$, а значит, $X = \bigcup \mathcal{B}$.

2. Пусть U, $V \in \mathcal{B}$, тогда по построению $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n_1} B_i$ и $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n_2} B'_i$, тогда

$$U \cap V = \bigcap_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{B}$$

Значит, по критерию $\mathcal{B}$ — база топологии. А по построению $\mathcal{P}$ — предбаза топологии. ■

Определение 2.3. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, тогда топология $\tau_d = \{U \subset X | \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0\ :\ B(x,\varepsilon) \subset U\}$ называется топологией, индуцированной метрикой ($B(x,\varepsilon)$ — открытая окрестность точки x радиуса ε).*

Утверждение 2.3. *Базой топологии, индуцированной метрикой, является множество всевозможных ε-окрестностей точек $x \in X$.*

Определение 2.4. *Две метрики d_1 и d_2 называются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию, то есть $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.*

Примеры 1.

1. *Топология, порождённая линейным порядком на множестве.*
   Предбаза этой топологии — это все открытые лучи вида $\{x|x < a\}$ и $\{x|x > a\}$, где $a \in X$.
   База этой топологии — множество всех интервалов вида $\{x|x < a\}$, $\{x|x > a\}$ и $\{x|a < x < b\}$, где a, $b \in X$.

2. *Топология на плоскости, порождённая лексикографическим порядком.*
   Предбаза этой топология — семейство множеств вида $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x > a \vee (x = a \wedge y > b))\}$ и $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x < a \vee (x = a \wedge y < b))\}$, где a, $b \in \mathbb{R}$.
   База этой топологии — полоски между вертикальными прямыми $x = a_1$ и $x = a_2$ и множество точек на этих прямых, для которых $y > b_1$ и $y < b_2$ для прямых $x = a_1$ и $x = a_2$ соответственно (считаем $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$).

3 Билет 3 (Локальная база, метризуемое пространство, аксиомы счётности)

Определение 3.1. *Семейство $B(x)$ открытых окрестностей точки x называется локальной базой топологии τ в точке x или базой окрестностей точки x, если любая окрестность точки x содержит окрестность из $B(x)$.*

Определение 3.2. *Локальная база топологии, порождённой метрикой, в точке x_0 — это множество всех ε-окрестностей данной точки.*

Определение 3.3. *Топологическое пространство метризуемо, если его топология является метрической топологией, порождённой некоторой метрикой.*

Утверждение 3.1. *Каждая точка метризуемого пространства имеет счётную локальную базу.*

Доказательство. Любая окрестность каждой точки содержит некоторую окрестность радиуса $\frac{1}{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, а значит, семейство окрестностей радиуса $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ образует локальную базу топологии в каждой точке. ■

Примеры 2. 1. *Дискретное пространство — пространство, в котором все множества точек считаются открытыми. Метрика —* $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ 0, & \text{если } x \neq y \end{cases}$

2. *Топология на плоскости, порождённая лексикографическим порядком. Это пространство не метризуемо, так как нет счётной локальной базы.*

3. *Пусть* κ *— произвольный кардинал. Метрический ёж колючести* κ *— объединение копий единичного отрезка с общим началом 0. Метрика задаётся так:* $d(0, 0) = 0$, $d(0, (x, \alpha)) = x$, $d((x, \alpha), (y, \beta)) = \begin{cases} |x - y|, & \text{если } \alpha = \beta \\ x + y, & \text{если } \alpha \neq \beta \end{cases}$

4 Билет 4 (Подпространство, индуцируемая метрика, ограничение на подпространство)

Определение 4.1. *Пусть* (X, τ) *- топологическое пространство и* $Y \subset X$. *Топологическое пространство* (Y, τ_Y) *является подпространством топологического пространства* (X, τ), *а топология* $\tau_Y = \{U \cap Y | U \in \tau\}$ *называется индуцированной или относительной топологией.*

Определение 4.2. *Пусть* (X, d) *- метрическое пространство и* $Y \subset X$, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *- метрика. Метрическое пространство* (Y, d_y) *называется подпространством метрического пространства* (X, d), *а метрика* $d_y = d|_{Y \times Y}$ *называется индуцированной или относительной метрикой.*

Утверждение 4.1 (Лемма о базе подпространства). *Пусть* X *— топологическое пространство и* Y *— его подпространство, тогда*

1. *Если* $\mathcal{B}$ *— база топологического пространства* X, *то семейство* $\mathcal{B}_Y = \{U \cap Y | U \in \mathcal{B}\}$ *— база топологии* Y.

2. *Если* $\mathcal{B}$ *— локальная база топологического пространства* X *в точке* $y \in Y$, *то семейство* $\mathcal{B}_Y(y) = \{U \cap Y | U \in \mathcal{B}(y)\}$ *— локальная база топологии* Y *в точке* y.

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 68-69) ■

Утверждение 4.2. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и (Y, d_Y) — его подпространство, тогда множество $U \subset Y$ открыто в метрическом пространстве (Y, d_Y) тогда и только тогда, когда $U = V \cap Y$ для некоторого открытого в (X, d) множества V.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 67) ■

Пример 1. *Топология на подмножестве, порождённая ограничением линейного порядка на это подмножество, может не совпадать с индуцированной топологией. Рассмотрим множество $Y = [0, 1) \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$, подмножество $\{2\}$ открыто в Y с индуцированной топологией, так как $(1, 3) \cap Y = \{2\}$. Но любой интервал $\{2\}$ относительно индуцированного порядка на Y будет также содержать и числа из интервала $[0, 1)$, так как для $x < 2$ $x < 1$ в Y.*

5 Билет 5(Теория множеств)

Определение 5.1.

1. *Частичным порядком на множестве X называется бинарное отношение, которое рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.*

2. *Линейным порядком на множеств X называетсябинарное отношение, которое рефлексивно, транзитивно, антисимметрично и $\forall x, y \in X$ $(yRx) \vee (xRy)$.*

3. *Полным порядком на множестве X называется частичный порядок, при котором в любом подмножестве X существует наименьший элемент.*

Определение 5.2.

1. *Если на множестве можно задать частичный порядок, то оно называется частично упорядоченным.*

2. *Если на множестве можно задать линейный порядок, то оно называется линейно упорядоченным.*

3. *Если на множестве можно задать полный порядок, то оно называется вполне упорядоченным.*

Определение 5.3. *Аксиоматика:*

1. *Аксиома существования: множества существуют.*

2. *Аксиома объёмности: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы.*

3. *Аксиома пары: для любых двух множеств существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов x и y.*

4. *Аксиома объединения (степени): для любого множества x существует множество $y = \bigcup x$.*

5. *Схема аксиом выделения: любому множеству x и свойству φ отвечает множество, состоящее в точности из тех элементов множества x, которые обладают свойством φ.*

6. *Схема аксиом подстановки: пусть $\varphi(u, v)$ — функция с двумя свободными переменными, причём для любого множество a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ истинно, тогда для любого данного множества x определено множество y, элементами которого являются те и только те множества z, при которых $\varphi(a, z)$ истинно при некотором $a \in x$.*

7. *Аксиома множества подмножеств: для любого множества x существует множество y, состоящее из всех подмножеств множества x.*

8. *Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит пустое множество в качестве элемента и с каждым элементом x содержит элемент $S(x) = x \cup \{x\}$.*

9. *Аксиома регулярности: каждое непустое множество x содержит элемент y такой, что $x \cap y = \varnothing$.*

10. *Аксиома выбора: Для каждого не пустого множества x, состоящего из непересекающихся элементов, существует множество, которое пересекается с каждым элементом множества x ровно по одному элементу.*

Определение 5.4. *Ординальное число — класс эквивалентности по отношению изоморфизма.*

Определение 5.5. *Кардинал — это ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу.*

Определение 5.6. *Мощность — единственный инвариант для множеств относительно биекций.*

Определение 5.7. *Порядковый тип вполне упорядоченного множества — класс изоморфных вполнеупорядоченных множеств.*

6 Билет 6 (Вес и характер пространства)

Определение 6.1. *Наименьшая мощность локальной базы топологии топологического пространства X в точке x назывется характером пространства X в точке x и обозначается $\xi(x, X)$.*

Определение 6.2. *Супремум кардиналов $\xi(x, X)$ называется характером пространства X и обозначается $\xi(X)$.*

Определение 6.3. *Если характер пространства X не более чем счётен, то говорят, что X удовлетворяет первой аксиоме счётности.*

Определение 6.4. *Наименьшая мощность базы топологии топологического пространства X называется весом этого пространства и обозначается $\omega(X)$.*

Определение 6.5. *Если вес пространства не более чем счётен, то говорят, что пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности.*

Пример 2. *Пример счётного пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме счётности. Счётный веер Фреше-Урысона. Рассмотрим множество, равное объединению копий пространства $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{R}$ так, что $V(\aleph_0) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{N}$. Базу такой топологии образуют все одноточечные множества вида $\{\frac{1}{n}, k\}$, где n, $k \in \mathbb{N}$ и всевозможные множества $\{0\} \cup \{(\frac{1}{n}, k) | n, k \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_k\}$, где n_k — любая последовательность натуральных чисел.*

Определение 6.6 (Континуум-гипотеза). *Если $\omega \prec A \preceq c$, то $A \sim c$.*

7 Билет 7 (Замыкание и плотность)

Определение 7.1. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда точка $x \in A$ называется:*

1. *точкой прикосновения множества A, если всякая её окрестность пересекает A*
2. *предельной точкой множества A, если всякая её окрестность пересекает $A \setminus \{x\}$*
3. *называется изолированной в A, если у неё есть окрестность, пересечение которой с A равно $\{x\}$*
4. *внутренней точкой, если у этой точки есть окрестность полностью содержащаяся в A*
5. *граничной точкой, если она является предельной, но не является внутренней*
6. *точкой накопления, если пересечение всякой её окрестности с A бесконечно*

Определение 7.2. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех точек прикосноевения множества A называется замыканием множества A и обозначается $\overline{A}$.*

Определение 7.3. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех предельных точек множества A называется производным множеством множества A и обозначается A' или A^d.*

Определение 7.4. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью множества A и обозначается $IntA$.*

Определение 7.5. *Пусть X - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда множество всех граничных точек множества A называется границей множества A и обозначается FrA.*

Определение 7.6. *Пусть X - топологическое пространство $A \in F(X)$. Отображение $F(X) \to F(X)$ называется оператором замыкания на X, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. $A \subseteq \overline{A}$ *(экскстенсивность)*
2. $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ *(монотонность)*
3. $\overline{\overline{A}} = A$ *(идемпотентность)*

Определение 7.7. *Пусть X - топологическое пространство $A \in F(X)$. Отображение $F(X) \to F(X)$ называется оператором внутренности на X, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. $IntA \subseteq A$
2. $A \subseteq B \Longrightarrow IntA \subseteq IntB$ *(монотонность)*
3. $Int(IntA) = A$ *(идемпотентность)*

Определение 7.8. *Пусть X - топологическое пространство и $Y \subset X$. Множество $A \subseteq Y$ плотно в Y, если $Y \subseteq \overline{A}$.*

Определение 7.9. *Множество плотное во всём пространстве X называется плотным или всюду плотным.*

Определение 7.10. *Множество $Y \subset X$ называется нигде не плотным, если его замыкание не содержит никакого непустого открытого множества.*

Определение 7.11. *Наименьшая мощность плотного подмножества топологического пространства X называется плотностью этого пространства и обозначается $d(X)$.*

Определение 7.12. *Если плотность топологического пространства не более чем счётна, то говорят, что это пространство сепарабельно.*

Утверждение 7.1. *Пусть X — топологическое пространство, Y всюду плотно в X, U — открытое множество в пространстве X, тогда $\overline{U} = \overline{U \cap Y}$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 88) ■

Теорема 7.1. *Сепарабельное метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 89) ■

8 Билет 8 (Число Суслина)

Определение 8.1. *Семейство множеств называется дизъюнктным, если его элементы попарно не пересекаются.*

Определение 8.2. *Супремум мощностей дизъюнктных семейств не пустых открытых подмножеств топологического пространства (X, τ) называется числом Суслина или клеточностью и обозначается $c(X)$.*

Определение 8.3. *Если число Суслина топологического пространства X не более чем счётно, то говорят, что это пространство обладает свойством Суслина.*

Теорема 8.1. *Любое метризуемое пространство со свойством Суслина удовлетворяет второй аксиоме счётности.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 91) ■

9 Билет 9 (Последовательности)

Определение 9.1. *Последовательностью элементов в X или просто последовательностью в X называется любое отображение $f : \mathbb{N} \to X$.*

Определение 9.2. *Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ точек из X сходится к точке $x \in X$, если для любой окпестности U точки X существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geqslant N$ $x_n \in U$. Точка x называется пределом последовательности.*

Определение 9.3. *Предельной точкой последовательности называется, любая окрестность которой содержит бесконечно много членов последовательности.*

Пример 3. *Пример недискретного пространства без сходящихся последовательностей (я не помню какой пример был на лекциях, поэтому предлагаю такой). Рассмотрим пространство $\mathbb{R}$ «косчётных дополнений». Открытыми множествами объявим пустое множество, все $U \subset \mathbb{R}$ такие, что $\mathbb{R} \setminus U$ не более чем счётно.*

Пространство не дискретно, так как в каждом открытом множестве будет несчётное число точек.
Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *тогда* $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ *счётно, а значит,* $U = \mathbb{R} \setminus A$ *открыто в этой топологии. Построим для каждой точки* $y \in X$ *открытую окрестность, не содержащую бесконечного числа точек данной последовательности. Пусть* $y \notin A$, *тогда* $U = \setminus A$ — *искомая окрестность. Пусть* $y \in A$, *тогда* $\exists k \in \mathbb{N}$ *такое, что* $x_k = y$. *Множество* $A \setminus \{x_k\}$ *счётно, значит,* $U = \mathbb{R} \setminus (A \setminus \{x_k\})$ *открыто, но* $\forall n \neq k\ x_n \notin U$.
Таким образом, мы получили открытые окрестности для каждой точки, не содержащие бесконечного числа элементов последовательности, значит, по определению эта последовательность не сходится.

10 Билет 10 (Фильтры и ультрафильтры)

Определение 10.1. *Фильтром на множестве* X *называется непустое* $f \in F(X)$, *удовлетворяющее трём условиям:*

1. $\varnothing \notin f$
2. $\forall A, B \in f\ A \cap B \in f$
3. $\forall A \in f$ *если* $A \subseteq B$, *то* $B \in f$

Определение 10.2. *Если* $\bigcap f = \varnothing$, *то фильтр называется свободным.*

Определение 10.3. *Семейство* $B \subset f$ *называется базой фильтра* f, *если любое множество* $A \in f$ *содержится в некотором* $C \in B$.

Определение 10.4. *Центрированное семейство множеств - это любое семейство* b *множеств с тем свойством, что любое пересечение конечного числа множеств из данного семейства не пусто.*

Определение 10.5. *Счётно центрированное семейство - это семейство, у которого пересечение любого счётного множества элементов не пусто.*

Определение 10.6. *Максимальный (по включению) фильтр называется ултрафильтром.*

Теорема 10.1. *Любое центрированное семейство* b *произвольного множества* X *содержится в некотором ультрафильтре* $\mathcal{U}$ *на* X.

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 99-100) ■

Определение 10.7. *Ультрафильтр называется главным, если* $\bigcap(U \in f) \neq \varnothing$.

Пример 4. *Фильтр Фреше — семейство всех дополнений до конечных множеств в бесконечном множестве* X.

Следствие 10.1.1. *На любом бесконечном множестве существует неглавный ультрафильтр.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть ультрафильтр, содержащий фильтр Фреше. ∎

Теорема 10.2. *Фильтр* f *на множестве* X *является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого* $A \subset X$ *либо* $A \in f$, *либо* $X \setminus A \in f$.

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 100-101) ∎

11 Билет 11 (Сходимость фильтров и ультрафильтров)

Определение 11.1. *Фильтр* f *на топологическом пространстве* X *сходится к некоторой точке* $x \in X$, *если любая окрестность этой точки принадлежит фильтру. Обозначение:* $f \to x$.

Определение 11.2. *Говорят, что фильтр сходится или является сходящимся, если он сходится к некоторой точке.*

Теорема 11.1. *Для топологического пространства* X, *множества* $A \subset X$ *и точки* $x \in X$ *следующие условия равносильны.*

1. *Точка* x *является точкой прикосновения множества* A.

2. *Существует фильтр* f *на* X, *который содержит* A *и сходится к* x.

3. *Существует ультрафильтр* $\mathcal{U}$ *на* X, *который содержит* A *и сходится к* x.

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 101) ∎

Пример 5. *Пример счётного пространства без сходящихся последовательностей. Рассмотрим счётное пространство с топологией конечных дополнений аналогично с примером не дискретного пространства (пример не дискретного пространства без сходящихся последовательностей)*

12 Билет 12 (Непрерывность отображения в точке, непрерывность отображения, критерии непрерывности)

Определение 12.1. *Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется непрерывным, если прообраз при этом отображении любого открытого в Y множества открыт в X.*

Определение 12.2. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, если прообраз любой окрестности точки $f(x_0)$ является окрестностью точки x_0 в пространстве X.*

Теорема 12.1. *Для отображения $f : X \to Y$ топологических пространств следующие свойства равносильны.*

1. *f непрерывно.*
2. *Прообраз любого замкнутого множества замкнут.*
3. *Отображение f непрерывно в каждой точке пространства X.*
4. *Образ замыкания любого множества содержится в замыкании образа.*
5. *Замыкание прообраза любого множества содержится в прообразе замыкания.*
6. *Образ при отображении f последовательности, сходящейся к x, сходится к $f(x)$.*
7. *Образ любого ультрафильтра, сходящегося к x, сходится к $f(x)$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 116-117) ∎

Теорема 12.2. *Пусть $\mathcal{B}$ — база топологии топологического пространства Y, $f : X \to Y$ — отображение топологических пространств. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого $U \in \mathcal{B}$ открыт в X.*

Доказательство. $\underline{\Longrightarrow}$ По определению базы топологии $\mathcal{B} \subset \tau$, то есть все $U \in \mathcal{B}$ открыты в Y, тогда по определению непрерывного отображения $f^{-1}(U)$ открыто в X.
$\underline{\Longleftarrow}$ По определению любое открытое в Y множество является объединением элементов базы, прообраз объединения равен объединению прообразов. Значит, прообраз любого множества открытого в Y открыт в X, то есть по определению f непрерывно. ∎

Теорема 12.3. *Пусть $\mathcal{P}$ — предбаза топологии топологического пространства Y, $f : X \to Y$ — отображение топологических пространств. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого $U \in \mathcal{P}$ открыт в X.*

Доказательство. По определению предбазы любое конечное пересечение её элементов является элементом базы. По предыдущему критерию прообраз любого элемента базы открыт тогда и только тогда, когда f непрерывно, а так как прообраз пересечения равен пересечению прообразов, то пересечиние прообразов всех элементов предбазы открыто, а значит, все прообразы элементов предбазы открыты как пересечения из одного элемента.

■

Теорема 12.4. *1. Пусть отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ непрерывны, тогда отображение $f \circ g$ непрерывно.*

2. Пусть отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ непрерывны в точках x и $f(x)$ соответственно, тогда отображение $f \circ g$ непрерывно.

3. Если $f : X \to Y$ непрерывно, $A \subset X$, $B \subset Y$ такое, что $B \subset f(A)$, то подотображение $f \cap (A \times B) : X \to Y$ непрерывно. В частности сужение $f|_A : A \to Y$ непрерывно.

4. Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно, Z — топологическое пространство, содержащее Y в качестве подпространства, то над отображение $\hat{f} : X \to Z$ непрерывно ($\forall x \in f^{-1}(Y)$ $\hat{f}(x) = f(x)$).

Доказательство. 1. Пусть U открыто в Z, тогда $g^{-1}(U)$ открыто в Y, а тогда $f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в X.

2. Аналогично.

3. Пусть U открыто в B, тогда существует $V \subset Y$ открытое в Y такое, что $U = V \cap Y$. Тогда по непрерывности f имеем, что $f^{-1}(U) = f^{-1}(V \cap Y) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y)$ открыто в X, а по условию $f^{-1}(U) \subset A$, а значит, $f^{-1}(U)$ открыто в A.

4. Так как $\hat{f}(x) = f(x) \in Y$ для любого $x \in X$, то для любого V открытого в Z $f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y)$. Так как Y — подпространство X, то $V \cap Y$ открыто в индуцированной топологии Y, а значит, $f^{-1}(V \cap Y)$ открыто в X по определению непрерывности. Тогда $\hat{f}^{-1}(V) = \hat{f}^{-1}(V \cap Y) = f^{-1}(V \cap Y)$ открыто в X, значит, по поределению $\hat{f} : X \to Z$ непрерывно.

■

Примеры 3. *1. Отображение дискретного пространство в любое пространство.*

2. Отображение антидискретного пространства в антидискретное.

3. Отображение обычного отрезка $[0, 1]$ на квадрат (кривая Пеано).

Определение 12.3. *Пусть X, Y два топологических пространства. Множество $X \times Y$ с топологией произведения, порождённой базой $\mathcal{B} = \{U \times V | U \text{ открыто в } X, \ V \text{ открыто в } Y$ называется топологическим произведением.*

Определение 12.4. *Графиком отображения $f : X \to Y$ называется множество $Gr = \{(x, y) | x \in X, \ y = f(x) \subset X \times Y\}$.*

13 Билет 13 (Непрерывность расстояния, сохранение сепарабельности и несохранение метризуемости)

Определение 13.1. *Отображение f метрического пространства (X, d) в метрическое пространство (Y, ρ) называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $f(x) \in B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \ \forall x \in B_d(x_0, \delta)$.*

Определение 13.2. *Отображение $f : X \to Y$ метрческих пространств непрерывно, если оно непрерывно во всех точках пространства X.*

Определение 13.3. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subset X$. Функция $f : X \to \mathbb{R}$, определённая по правилу $f(x) = d(x, A)$, называется функцией расстояния от точки до множества.*

Теорема 13.1. *Функция расстояния непрерывна.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 114) ■

Утверждение 13.1. *Непрерывное отображение сохраняет сепарабельность, но не сохраняет метризуемость, вес и характер.*

Доказательство.

1. Пусть пространство X сепарабельно, тогда существует счётное всюдуплотное множество $U \subset X$ такое, что $\overline{U} = X$. По критерию непрерывности $f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)}$, $f(X) \subset \overline{f(U)}$. Но $f(U) \subset f(X)$, значит, $\overline{f(U)} \subset \overline{f(X)} = f(X)$. Таким образом образом, мы получили, что $\overline{f(U)} = f(X)$, то есть $f(U)$ всюду плотно в $f(X)$, причём счётность сохранилась, значит, $f(X)$ сепарабельно.

2. Возьмём $X = \mathbb{R}$ со стандартной метрикой и $Y = \mathbb{R}$ с антидискретной топологией. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно, но Y не метризуемо.

3. Возьмём $Y = \mathbb{R}$ со стандартной метрикой, его вес равен $\aleph_0$, и возьмём $Y = \{y_0\}$ с антидискретной топологией. $f : X \to Y$ непрерывно, но вес Y равен 1.

4. Тот же самый пример.

■

14 Билет 14 (Гомеорморфизмы)

Определение 14.1. *Гомеоморфизмом или топологическим отображением между топологическими пространствами X и Y называется непрерывное взаимнооднозначное отображение $f : X \to Y$ с таким свойством, что обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ тоже непрерывно.*

Определение 14.2. *Если пространство X гомеоморфно некоторому подпространству Z пространства Y, то говорят, что X гомеоморфно вложено, или вложено, или вкладывается в пространство Y, а гомеоморфизм между X и Z называется вложением.*

Определение 14.3. *Такие свойства как мощность, вес, характер и т.д. называются кардинальными инвариантами.*

Определение 14.4. *Отображение $f : X \to Y$ топологических протсранств называется открытым, если образ каждого множества открытого в X открыт в Y.*

Определение 14.5. *Отображение $f : X \to Y$ топологических протсранств называется замкнутым, если образ каждого множества замкнутого в X замкнут в Y.*

Определение 14.6. *Подпространство Y топологического пространства X называется ретрактом этого пространства, если сущетствует непрерывное отображение $r : X \to Y$, тождественное на Y. Такое отображение называется ретракцией.*

Теорема 14.1. *Топологическое пространство X является ретрактом пространства Y тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $f : Y \to Z$ для любого пространства Z продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 128) ■

15 Билет 15 (Аксиомы отделимости)

Определение 15.1. *Аксиома T_0: Какого бы ни были две различные точки, хотя бы одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Определение 15.2. *Аксиома T_1: Какого бы ни были две различные точки, каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку. Эквиваленты:*

1. *все одноточечные множества замкнуты*
2. *все предельные точки любого множества являются точками накопления этого множества*

Определение 15.3. *Аксиома T_2: Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности. Эквиваленты:*

1. *пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$*
2. *для любой точки x и любой локалтной базы $B(x)$ в этой точке $\bigcap\{\overline{U} | U \in B(x)\} = \{x\}$*

Определение 15.4. *Аксиома T_3: У любой точки и любого замкнутого множества, не содержащего данную точку, есть непересекающиеся окрестности. Эквиваленты:*

1. *для любой точки x и любой её окрестности U найдётся такая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subseteq U$*

Определение 15.5. *Аксиома T_4: У любых двух непересекающихся замкнутых множеств есть не пересекающиеся окрестности. Эквивалентны:*

1. *для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U найдётся такая окрестность V множества F, что $\overline{V} \subseteq U$*
2. *F и G - любые замкнутые непересекающиеся множества, тогда у F найдётся такая окрестность V, что $G \subseteq X \setminus \overline{V}$*

Определение 15.6. *Топологическое пространство удовлетворяющее аксиоме 2 называется хаусдорфовым.*

Определение 15.7. *Пространство, удовлетворяющее аксиомам 1 и 3, называется регулярным.*

Определение 15.8. *Пространство, удовлетворяющее аксиомама 1 и 4, называется нормальным.*

Примеры 4.

1. *Пример пространства, удовлетворяющего аксиоме T_1, но не удовлетворяющего аксиоме T_0. Рассмотрим топологическое пространство $\{a, b\}$ с топологией $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.*
2. *Пример пространства, удовлетворяющего аксиоме T_2, но не удовлетворяющего аксиоме T_1. Рассмотрим топологическое пространство $X = \mathbb{R}$ с топологией Зарисского (открыты только дополнения до конечных множеств).*
3. *Пример пространства, удовлетворяющего аксиоме T_3, но не удовлетворяющего аксиоме T_2. Рассмотрим пространство $X = \mathbb{R}$, в котором открыты будут только множества вида $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus S$, где $\varepsilon > 0$ и $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.*

4. *Пример пространства, удовлетворяющего аксиоме T_4, но не удовлетворяющего аксиоме T_3. Рассмотрим Тихоновское пространство. Оно задаётся множеством $((\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)) \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$ с лексикографическим порядком (сложный пример, так что обосновывать я его скорее всего не буду).*

Утверждение 15.1. *Всякое метризуемое пространство нормально.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 157) ■

16 Билет 16 (Непрерывные отображения в хаусдорфовы пространства)

Теорема 16.1. *График отображения любого топологического пространства X в произвольное хаусдорфово пространство Y замкнут в $X \times Y$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 155) ■

Теорема 16.2. *Топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда $\Delta = \{(x,x) | x \in X\} \subset X \times X$ замкнуто в пространстве $X \times X$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 155) ■

Теорема 16.3. *Пусть $f, g : X \to Y$ — отображения из произвольного пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество всех точек совпадения $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 155) ■

Теорема 16.4. *Множество $Fix_f = \{x \in X | x = f(x)\}$ неподвижных точек, где $f : X \to X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства на себя, замкнуто в X.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 156) ■

Теорема 16.5. *Пусть $f, g : X \to Y$ — отображения из произвольного пространства X в хаусдорфово пространство Y. $A \subset X$ такое, что $\overline{A} = X$ и $\forall a \in A \ f(a) = g(a)$. Тогда $f = g$, то есть $\forall x \in X \ f(x) = g(x)$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 156) ■

17 Билет 17 (Лемма Урысона)

Теорема 17.1. *Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B в T_4 пространстве X существует функция $f : X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(x) = 0$ для всех $x \in B$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 157-159) ■

18 Билет 18 (Теорема Титце-Урысона)

Теорема 18.1. *Пусть X — T_4 пространство и F — замкнутое подмножество X, тогда:*

1. *У любой непрерывной функции $f : F \to [-1,1]$ существует непрерывное продолжение $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$.*
2. *У любой непрерывной функции $f : F \to [-1,1]$ существует непрерывное продолжение $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 159-161) ■

19 Билет 19 (Тихоновские пространства)

Определение 19.1. *Пространтсво X удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \notin F$ существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, принимающая значение 0 в точке x и тождественно равная 1 на всём множестве F.*

Определение 19.2. *Пространство X, удовлетворяющее аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называется вполне регулярным или тихоновским.*

Пример 6. *Квадрат прямой (стрелки) Зоргенфрея — топологическое пространство $X = \mathbb{R}^2$ с топологией, порождённой базой $\{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2 | a_1 < b_1 \text{ и } a_2 < b_2\}$. Это пространство вполне регулярно, но не нормально. Рассмотрим множества $A = \{(x, -x) | x \in \mathbb{Q}\}$ и $B = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Они замкнуты и не пересекаются. В силу того что в любом интервале $(x, x+\varepsilon)$ будут как рациональные, так и нерациональные числа, то не существует непересекающихся окрестностей для этих двух замкнутых множеств, а значит, пространство не нормально.*

20 Билет 20 (Свойства нормальности)

Теорема 20.1. *Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подпространство мощности не меньше $2^{\aleph_0}$, то оно не нормально.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 165-166) ■

Теорема 20.2. *Если $f : X \to Y$ — замкнутое непрерывное сюръективное отображение нормального пространства X на произвольное пространство Y, то Y нормально.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 169) ■

21 Билет 21 (Сумма пространств, факторпространства, присоединение пространства по отображению)

Определение 21.1. *Пусть* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ *- семейство попарно непересекающихся топологических пространств. Обозначим* $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, τ *- семейство всех подмножеств* $\{U \subset X \ : \ \forall \alpha \in A \ U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha\}$. *Множество* X *с топологией* τ *называется суммой топологических пространств* X_α *и обозначается* $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Определение 21.2. *Пусть* $\sim$ *- отношение эквивалентности на множестве* X, *тогда множество* $X/\sim$ *классов эквивалентности называется фактормножеством.*

Определение 21.3. *Пусть* $X/\sim$ *фактор множество. Фактор-топологией на топологическом пространстве* X *называется семейство* $\{U \subset X/\sim\}$, *для которых объединение всех подмножеств пространства* X, *которые являются классами эквивалентности, принадлежащими* U, *открыто в* X.

Определение 21.4. *Пусть* X *- топологическое пространство,* $X/\sim$ *- фактормножество с фактор-топологией, тогда непрерывное отображение* $q : X \to X/\sim$ *называется естественным факторным отображением.*

Определение 21.5. *Отображение* $f : X \to Y$ *топологических пространств называется факторным, если оносюръективно и* $\forall U \subset Y$, *которое открыто в топологии пространства* Y, *его прообраз открыт в* X.

Определение 21.6. *Пусть* X *— топологические пространство,* $F \subset X$, $\sim$ *— отношение эквивалентности, классами которого являются* F *и* $\{x\}$, *где* $x \notin F$. *Факторпространство* $Y = X/\sim$ *обозначается* X/F, *и говорят, что* Y *получается из* X *стягивается пространства в точку множества* F.

Утверждение 21.1. *Пусть пространство* Y *получено из* X *стягиванием множества* $F \subset X$ *в точку, тогда*

1. $X/F \in T_1 \iff F$ *и все* $\{x\}$ *замкнуты.*
2. $X/F \in T_2 \iff F$ *замкнуто, любая точка* $x \in X \setminus F$ *и множество* F *отделены окрестностями.*
3. $X/F \in T_3 \iff F$ *замкнуто, любая точка и замкнутое множество отделены непересекающимися окрестностями.*

Определение 21.7. *Пусть* X *и* Y *— непересекающиеся топологические пространства.* $F \subset X$ *— замкнутое в* X *множество и* $f : F \to Y$ *— непрерывное отображение.*

Обозначим $\sim$ — отношение эквивалентности на $X \oplus Y$, соответствующее разбиению множества $X \oplus Y$ на одноэлементные множества $\{z\}$, где $z \in (X \oplus Y) \setminus (F \cup f(F))$, и $\{y\} \cup f^{-1}(Y)$, где $y \in f(F)$. Факторпространство $X \oplus Y$ обозначается $X \cup_f Y$. При этом говорят, что пространство $X \cup_f Y$ получается из X присоединением пространства Y к X по отображению f.

Определение 21.8. *Операцию присоединения по гомеоморфизму называют приклеиванием.*

Определение 21.9. *Пусть X — топологическое пространство, G и F непересекающиеся подпространства, связанные гомеоморфизмом $f : F \to G$. Тогда факторизация по отношению эквивалентности, порождённому разбиением на одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus (F \cup G)$, и двуточечные множества $\{x, f(x)\}$, где $x \in F$, называется склейкой подпространств F и G.*

Свойства 1 (Свойства факторных отображений).

1. *сюръективное отображение $f : X \to Y$ факторно тогда и только тогда, когда множество $U \subset Y$ открыто в Y $\iff$ его прообраз открыт в X.*

2. *сюръективное отображение $f : X \to Y$ факторно тогда и только тогда, когда множество $U \subset Y$ замкнуто в Y $\iff$ его прообраз замкнут в X.*

3. *сюръективное отображение $f : X \to Y$ факторно тогда и только тогда, когда f непрерывно и топология пространства Y не слабее фактортопологии пространства X по отношению эквивалентности $\sim_f$.*

4. *Композиция факторных отображений является факторным отображением.*

5. *Если композиция $g \circ f$ непрерывных отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ факторна, то g факторно.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 185) ■

22 Билет 22 (Произведение топологических протсранств)

Определение 22.1. *Декартовым произведением произвольного семейства множеств $\{X_\alpha | \alpha \in A\}$ называется множество $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha | \forall \alpha \in A \ f(\alpha) \in X_\alpha\}$.*

Определение 22.2. *Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство топологических пространств, $\{U_\alpha \subseteq X_\alpha\}$, где U_α открыто в X_α и за исключением конечного числа индексов $U_\alpha = X_\alpha$. Тогда $\prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ образует базу топологии произведения, которая называется канонической* *базой, а её элементы - каноническими открытыми множествами. Такое произведение топологических пространств называется тихоновским произведением.*

Утверждение 22.1. *Пусть X_α — непустые топологические пространства, тогда*

1. *Для каждого $\beta \in A$ пространство X_β вкладывается в топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в виде подпространства.*
2. *Если все X_α — T_1 пространства, то для каждого $\beta \in A$ протсранство X_β вкладывается в произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в качестве замкнутого подпространства.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 196) ■

Теорема 22.1. *Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ удовлетворяет аксиоме T_i, где $0 \leqslant i \leqslant 3\frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда $X_\alpha \in T_i$ для всех $\alpha \in A$. Если $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ нормально, то все X_α нормальны.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 197) ■

23 Билет 23 (Произведение подпространств и подмножеств)

Теорема 23.1. *Если X_α — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$, то топология $\prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ совпадает с топологией, индуцированной из топологического произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \supset \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 194-195) ■

Теорема 23.2. *Пусть X_α — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$, тогда $\overline{\prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha} = \prod\limits_{\alpha \in A} \overline{Y_\alpha}$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 195) ■

Следствие 23.2.1. *Пусть X_α — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Множество $\prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ плотно в топологическим произведении $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ тогда и только тогда, когда Y_α плотно в X_α для каждого $\alpha \in A$.*

24 Билет 24 (Диагональное произведение непрерывных отображений, его непрерывность)

Утверждение 24.1. *Отображение $f : X \to \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\pi_\alpha \circ f : X \to X_\alpha$ непрерывна для каждого $\alpha \in A$, где π_α — проекция $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ на X_α.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 199) ∎

Определение 24.1. *Диагональным произведением семейства отображений f_α называется $\Delta f_\alpha : X \to \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$.*

Теорема 24.1. *Диагональное произведение $\Delta f_\alpha : X \to \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha : X \to \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$, где $\alpha \in A$, одного и того же пространства X в пространства Y_α, где $\alpha \in A$, непрерывно.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 200) ∎

25 Билет 25 (Теорема о подсемействе базы пространства веса κ)

Теорема 25.1. *Если вес топологического пространства X не превосходит κ, то в любой базе топологии этого пространства содержится подсемейство мощности не более чем κ, являющееся базой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная база топологии пространства X, $\mathcal{B}_0$ — база топологии мощности κ. Для каждой пары $(U, V) \in \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0$ положим $W_{(U,V)} \in \mathcal{B}$ такой, что $U \subset W_{(U,V)} \subset V$, если такой существует, и $W_{(U,V)} = \varnothing$ иначе. Докажем, что семейство $\mathcal{W} = \{W_{(U,V)} | (U, V) \in \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0\}$ является базой топологии на X.

1. Пусть $x \in X$, тогда по определению базы существует $U \in \mathcal{B}_0$ такое, что $x \in V$. Так как V открыто, то существует $W \in \mathcal{B}$ такой, что $W \subset V$ и $x \in W$ (так как $V = \bigcup\limits_i B_i$, где $B_i \in \mathcal{B}$, то в качесвтве W подойдёт B_i, содержащее x). Аналогично, так как W открыто в X, то существует $U \in \mathcal{B}_0$ такое, что $U \subset W$ (существует по аналогичным рассуждениям для базы $\mathcal{B}_0$). Тогда $U \subset W \subset V$, а значит, $W \in \mathcal{W}$. В силу произвольности x для каждой точки сможем найти такую окрестность из семейства $\mathcal{W}$, значит, $\bigcup \mathcal{W} = X$.

2. Пусть $U_1 \subset W_{(U_1,V_1)} \subset V_1$ и $U_2 \subset W_{(U_2,V_2)} \subset V_2$ и $x \in W_{(U_1,V_1)} \cap W_{(U_2,V_2)}$. Так как $U_1 \cap U_2$ открыто как пересечение открытых, то существует $U \in \mathcal{B}_0$ такой, что $U \subset U_1 \cap U_2$ и $x \in U$ (по критерию базы). Так как U открыто, то существует $W \in \mathcal{W}$ такое, что $W \subset U$ и $x \in W$ (существует по аналогичным рассуждениям как в пунтке 1). Так как W открыто, то существует $U' \in \mathcal{B}_0$ такое, что $x \in U'$ и $U' \subset W$ (существует по аналогичным рассуждениям как в пунтке 1). Таким образом, мы получили $U' \subset W \subset U$, где U и $U' \in \mathcal{B}_0$ и $W \subset W_{(U_1,V_1)} \cap W_{(U_2,V_2)}$ по построению. Значит, по построению $W \in \mathcal{W}$, а значит, по критерию $\mathcal{W}$ — база. Остаётся заметить, что по определению $\mathcal{W}$ $|\mathcal{W}| \leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa$ (из теорем кардинальной арифметики)

∎

26 Билет 26 (Теорема о вложении тихоновского пространства в тихоновский куб)

Определение 26.1. *Тихоновским кубом называется топологическое произведение вида* $[0,1]^\kappa$*, где* κ *— некоторый бесконечный кардинал.*

Теорема 26.1. *Всякое тихоновское пространство веса* $\kappa \geqslant \aleph_0$ *вкладывается в тихоновский куб* $[0,1]^\kappa$*.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 202) ■

27 Билет 27 (Критерий компактности в терминах ультрафильтров, теорема Тихонова о компактности)

Определение 27.1. *Пусть* X *произвольное множество,* $Y \subset X$*. Покрытием множества* Y *называется семейство* $\{C_\alpha | \alpha \in A\}$ *подмножеств* X *такое, что* $Y \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} C_\alpha$*.*

Определение 27.2. *Множество* $Y \subset X$ *называется компактным, если в любом его покрытии можно выделить конечное подпокрытие.*

Определение 27.3. *Топологическое пространство* X *называется компактным, если в любом его покрытии можно выделить конечное подпокрытие.*

Определение 27.4. *Если пространство* X *компактно и хаусдорфово, то оно называется компактом.*

Теорема 27.1. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр сходится на нём к некоторой точке.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 226-227) ■

Теорема 27.2. *Топологическое произведение* $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ *топологических пространств компактно тогда и только тогда, когда все* X_α *компактны.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 231-232) ■

28 Билет 28 (Локально компактные пространства, компактификации)

Определение 28.1. *Топологическое пространство* X *называется локально компактным, если каждая точка имеет компактную (не обязательно открытую) окрестность.*

Определение 28.2. *Компактификация локально компактного не компактного хаусдорфова пространства X называется александровской компактификацией или одноточечной компактификацией этого пространства.*

Теорема 28.1. *Каждое не компактное локально компактное хаусдорфово пространство X обладает одноточечной компактификацией. Эта компактификация является наименьшим элементом множества компактификаций, а её вес равен весу X.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 277-278) ∎

Определение 28.3. *Компактификация тихоновского пространства X, наибольшая относительно $\leqslant$, называется компактификацией Стоуна-Чеха или стоун-чеховской компактификацией.*

Теорема 28.2. *Для каждого тихоновского пространства X существует стоун-чеховская компактификация.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 280) ∎

29 Билет 29 (Свойства компактных пространств)

Свойства 2.

1. *Пространство компактно тогда и только тогда, когда любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет не пустое пересечение.*
2. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр сходится на нём к некоторой точке.*
3. *Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*
4. *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*
5. *Компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто.*
6. *Любая непрерывная биекция из компактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеорморфизмом.*
7. *Любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет точку накопления.*
8. *Любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.*
9. *Любой компакт нормален.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj

1. (страницы 225-226)

2. (страницы 226-227)

3. (страницы 227-228)

4. (страница 228)

5. (страница 227)

6. (страница 228)

7. (страница 228)

8. (страница 229)

9. (страницы 229-230)

■

30 Билет 30 (Теорема Бэра о категориях)

Теорема 30.1. *В любом компакте X пересечение $G = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} G_i$ любой последовательности всюду плотных открытых множеств всюду плотно.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 233) ■

31 Билет 31 (Теорема Вейерштрасса-Стоуна)

Определение 31.1. *Пусть X — топологическое пространство. $C_b(x)$ — множество всех ограниченных непрерывных функций на X. Формула $||f|| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ определяет норму на векторном пространстве $C_b(x)$. Топология, которая порождается соответствующей этой норме метрикой называется топологией равномерной сходимости.*

Теорема 31.1. *Если кольцо R непрерывных функций на компакте X содержит все постоянные функции, разделяет точки и замкнуто в $C(x) = C_b(x)$ относительно топологии равномерной сходимости, то $R = C(x)$.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страницы 239-240) ■

32 Билет 32 (Локально конечные семейства множеств, их консервативность; паракомпактные пространства)

Определение 32.1. *Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств топологического пространства X называется локально конечным, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающая лишь конечное число элементов данного семейства.*

Определение 32.2. *Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств топологического пространства X называется конесервативным, если $\forall \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ имеет место равенство $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}'} \overline{F} = \overline{\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}'} F}$.*

Утверждение 32.1. *Всякое локально конечное семейство консервативно.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 306) ■

Определение 32.3. *Пространство X называется паракомпактным, если каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Хаусдорфовы паракомпактные пространства называются паракомпактами.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 306) ■

33 Билет 33 (Разбиение единицы)

Определение 33.1. *Семейство $\{f_\alpha | \alpha \in A\}$ непрерывных функций из X в $[0, 1]$ называется разбиением единицы на X, если для каждого $x \in X$ знаения $f_\alpha(x)$ отличны от нуля только для конечного числа индексов α и $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$.*

Определение 33.2. *Разбиение единицы на X подчинено покрытию $\mathfrak{b}$ пространства X, если покрытие $\mathcal{F} = \{f_\alpha^{-1}((0, 1]) | \alpha \in A\}$.*

Определение 33.3. *Разбиение единицы локально конечно, если покрытие локально конечно.*

Теорема 33.1. *Для хаусдорфова пространства X следующие условия равносильны:*

1. *X паракомпактно.*
2. *Для каждого открытого покрытия пространства X найдётся подчинённое ему локально конечное разбиение единицы.*
3. *Для каждого открытого покрытия пространства X найдётся подчинённое ему разбиение единицы.*

Доказательство. https://djvu.online/file/uQersiImkznWj (страница 310) ■