Содержание

1 Билет 1

2 Билет 2 (Парадоксы Рассела и Берри)

Пример 1 (Парадокс Рассела). *Рассмотрим множество $R = \{x | x \notin x\}$, тогда с одной стороны $R \in R$, но в то же время $R \notin R$ по определению множества R.*

Пример 2 (Парадокс Берри). *Рассмотрим натуральное число B, равное наименьшему числу, которое нельзя определить предложением менее чем из 100 слов.*
С одной стороны, данной формулировкой мы определили данное число предложением менее чем из 100 слов, с другой стороны по определению оно не определяется предложением менее чем из 100 слов.

3 Билет 3 (Декартово произведение)

Определение 3.1. *Неупорядоченной парой (a, b) называется двуэлементное множество $\{a, b\}$.*

Определение 3.2. *Упорядоченной парой (a, b) называется двуэлементное множество $\{a, \{a, b\}\}$.*

Определение 3.3. *Декартовым произведением множеств $A \times B$ называется $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.*

Определение 3.4. *Бинарным отношением на множестве A называется $R \subseteq A \times A$ такое, что $xRy = (x, y) \in R$*

4 Билет 4 (Отношения и функции)

Определение 4.1. *Отношение R на множестве A называется отношением порядка, если:*

1. $\forall x, y \in A \; xRy \vee yRx$
2. $\forall x, y \in A \; (xRy) \wedge (yRx) \rightarrow x = y$
3. $\forall x, y, z \in A \; (xRy) \wedge (yRz) \rightarrow xRz$

Определение 4.2. *Отношение R на множестве A называется отношением эквивалентности, если:*

1. $\forall x \in A \; xRx$
2. $\forall x, y \in A \; (xRy) \leftrightarrow (yRx)$
3. $\forall x, y, z \in A \; (xRy) \wedge (yRz) \rightarrow xRz$

Определение 4.3. *Функцией f из A в B называется $f \subseteq A \times B$, если $\forall x \in A \exists! y \in B \; : (x, y) \in f$*

Определение 4.4. *Функция* $f : A \to B$ *называется сюръекцией, если* $\forall y \in B \exists x \in A \; : f(x) = y$

Определение 4.5. *Функция* $f : A \to B$ *называется инъекцией, если* $\forall x_1, x_2 \in A \; (x_1 = x_2) \to (f(x_1) = f(x_2))$

Определение 4.6. *Функция* $f : A \to B$ *называется биекцией, если она инъективна и сюръективна.*

5 Билет 5 (Фактормножества и разбиения)

Определение 5.1. *Пусть* R *— отношение эквивалентности на множества* X*, тогда множество* $R(x) = \{y | xRy\}$ *называется классом эквивалентности элемента* x*.*

Определение 5.2. *Множество классов эквивалентности называется фактормножеством и обозначается* $X/R := \{R(x) | x \in X\}$*.*

Определение 5.3. *Пусть* $P(A) = \{B | B \subseteq A\}$ *(множество всех подмножеств множества* A*), тогда* $\Gamma \subseteq P(A)$ *такое, что:*

1. $\forall B \in \Gamma \; B \neq \varnothing$
2. $\forall x \in A \; \exists! B \in \Gamma \; : \; x \in B$

Утверждение 5.1.

1. A/R *— разбиение.*
2. Γ *— разбиение* A*, тогда* $\exists! R$ *такое, что* $\Gamma = A/R$

Доказательство.

1.
   (a) $A/R \subseteq P(A)$.

   (b) Класс эквивалентности любого элемента $x \in A$ не пуст, так как xRx.

   (c) У любого элемента $x \in A \; \exists R(x) \in A/R$, а в силу транзитивности отношения эквивалентности $\exists! R(x)$.

2. В качестве отношения эквивалентности выберем такое отношение: элементы x и y эквивалентны, если $\exists! B \in \Gamma \; : \; (x \in B) \wedge (y \in B)$. Данное отношение является отношением эквивалентности.

   Такое отношение эквивалентности единственно в силу пункта 2 определения разбиения, так как в противном случае у какого-то элемента было бы два различных класса эквивалентности, что противоречит пункту 2.

∎

6 Билет 6 (Равномощность, вложимость)

Определение 6.1. *Множества A и B называются равномощными, если между ними существует биекция.*

Определение 6.2. *Множество A вложимо в множество B, если существует инъекция $f : A \to B$. Обозначение: $A \preceq B$.*

Свойства 1.

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \;\leftrightarrow\; B \sim A$
3. $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \to (A \sim C)$
4. $A \preceq A$
5. $(A \preceq B) \wedge (B \preceq C) \to (A \preceq C)$

Теорема 6.1 (Теорема Кантора-Бернштейна)**.** $(A \preceq B) \wedge (B \preceq A) \to A \sim B$.

7 Билет 7 (Натуральные числа и принцип индукции)

Определение 7.1 (Определение натуральных чисел по фон Нейману)**.** $0 = \{\varnothing\}$
$1 = \{0\}$
$2 = \{0, 1\}$
$\vdots$
$n + 1 = n \cup \{n\}$
$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

Определение 7.2 (Принцип индукции)**.** *Пусть $X \subseteq \omega$ со следующими свойствами:*

1. $0 \in X$
2. $\forall n (n \in X) \to (n + 1 \in X)$

тогда $X = \omega$.

Определение 7.3 (Принцип наименьшего элемента)**.** *Каждое непустое подмножество ω имеет наименьший элемент.*

Теорема 7.1. *Из принципа индукции следует принцип наименьшего элемента.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \neq X \subseteq \omega$ и пусть в X нет наименьшего элемента, тогда $0 \notin X$, значит, по принципу ндукции $1 \notin X, \ldots$.
То есть $\{0, 1, 2, \ldots\} \cap A = \varnothing$, то есть $\omega \cap A = \varnothing$, то есть $A = \varnothing$. ■

Теорема 7.2. *Из принципа наименьшего элемента следует принцип индукции.*

Доказательство. Пусть $\Phi(0) \wedge \forall n (\Phi(n) \to \Phi(n+1))$, но множество $X = \{n | \Phi(n) \text{ ложно}\}$ не пусто.
Тогда по принципу наименьшего элемента в X существует наименьший элемент n такой, что $\Phi(n)$ ложно. Рассмотрим $\Phi(n-1)$ оно истинно, а значит, $\Phi(n)$ тоже истинно — противоречие. ■

Утверждение 7.1 (Принцип возвратной индукции)**.** *Пусть* $\Phi(n)$ *— свойство натурального числа* n*, тогда* $\forall n (\forall m (m < n \to \Phi(m)) \to \Phi(n)) \to \forall n \Phi(n)$.

Доказательство. Рассмотрим свойство $\Psi(n) = \forall m (m < n \to \Phi(m))$ и применим принцип индукции. ■

8 Билет 8 (Конечные множества, принцип Дирихле)

Определение 8.1. *Множество называется конечным, если оно равномощно некоторому* $m \in \omega$.

Теорема 8.1 (Принцип Дирихле)**.** $\forall m, n \in \omega \; m \sim n \to m = n$.

Доказательство.

Лемма 8.1. *Если* $m \in n$*, то* $n \setminus \{m\} \sim n - 1$.

Доказательство. База индукции: $n = 0$ доказывать нечего.
Шаг индукции: возьмём $m \in n + 1 = n \cup \{n\}$, тогда:

1. если $m = n$, то $n + 1 \setminus \{m\} = n \cup \{n\} \setminus \{n\} = n$ ч.т.д.

2. если $m \in n$, то $(n+1) \setminus \{m\} = n \setminus \{m\} \cup \{n\}$, по предположению индукции есть биекция $n \setminus \{m\} \to (n-1)$, продолжим её до биекции $(n+1) \setminus \{m\} \to n$, отобразим $n \to n - 1$.

■

База индукции: $n = 0$, $m \sim \varnothing$, тогда $m = \{\varnothing\} = 0$
Шаг индукции: $m \sim n+1$, то есть существует биекция $f : n \cup \{n\} \to m$. Пусть $k = f(n)$, сузим биекцию f до $g : n \to m \setminus \{k\}$, тогда $n \sim m \setminus \{k\}$. По лемме $m \setminus \{k\} \sim m - 1 \sim n$. Тогда по предположению индукции $\Phi(n)$ истинно $\implies n = m - 1 \implies n + 1 = m \implies \Phi(n+1)$ истинно. ■

Определение 8.2. *Мощностью конечного множества X называется число n такое, что $n \sim X$.*

9 Билет 9 (Порядок на натуральных числах, эквивалентность его определений)

Определение 9.1. *Для $m, n \in \omega$ полагаем $m < n$, если $m \in n$. $m \leqslant n$, если $m \in n \vee m = n$.*

Свойства 2.

1. $m < n \wedge n < k \to m < k$
2. $m \leqslant n \to m \subseteq n$*(транзитивность)*
3. $n \nless n$*(иррефлексивность)*
4. $n < m \leftrightarrow n + 1 \leqslant m$*(дискретность в вверх)*
5. $n < m \vee m < n \vee m = n$*(линейность)*

Доказательство.

1. База $k = 0$ очевидно.
   Шаг индукции: Пусть верно для k, $n < k + 1$, $m < n$. Тогда $n < k$ или $n = k$. Если $n < k$, то по предположению индукции $m < k$, а значит, $m < k + 1$. Если $n = k$, то $m < n - 1$ или $m = n - 1$. Значит, $m < (k - 1) \vee m = k - 1$, то есть $m < k$, значит, $m < k + 1$.

2. $m \leqslant n$, тогда $m < n \vee m = n \Longrightarrow m \in n \vee m = n \Longrightarrow m \subseteq n$.

3. База индукции: $n = 0$ очевидно.
   Шаг индукции: Пусть $n \notin n$, но $(n + 1) \in (n + 1)$, $n + 1 = n \cup \{n\} \Longrightarrow n + 1 \in n \vee n + 1 = n$

   (a) $n + 1 \in n$, $n \in n + 1$ по определению, значит, $n \in n$ по транзитивности — противоречие.

   (b) $n + 1 = n$, $n \in n + 1$ по определению $\Longrightarrow n \in n$ — противоречие.

4. $\Longleftarrow$ по транзитивности.
   $\Longrightarrow$ База индукции: $m = 0$ очевидно.
   Шаг индукции: $n < m + 1$, $m + 1 = m \cup \{m\} \Longrightarrow n \in m$, $n + 1 = n \cup \{n\}$, причём $n \in (m - 1) \cup \{m - 1\} \Longrightarrow n \leqslant m - 1 \Longrightarrow n + 1 \leqslant m$

5. База индукции: $n = 0$ очевидно.
   Шаг индукции: $n+1 = n \cup \{n\}$; либо $n+1 \in m$, либо $m \in n+1$, либо $n+1 \sim m$. Значит, если $n+1 \sim m$, то $n+1 = m$ по теореме Кантора-Бернштейна, если $n+1 \in m$, $m \in m+1 \implies n+1 \in m+1 \implies n+1 < m+1 \implies n < m$, если $m \in n+1$, то по пункту 4 $m+1 \leqslant n+1 \implies m \leqslant n$.

■

Теорема 9.1. *$m \preceq n \iff m \leqslant n$.*

Доказательство. $\Longleftarrow$ Пусть $m \leqslant n$, тогда по свойству 2 $m \subseteq n$. В качестве инъекции $f : m \to n$ рассмотрим отображение, оставляющее все элементы m на месте.
$\underline{\Longrightarrow}$

Лемма 9.1. *$n+1 \npreceq n$.*

Доказательство. База индукции: $n = 0$, тогда $\{\varnothing\} \nsubseteq \varnothing$.
Шаг индукции: Пусть $n+1 \npreceq n$ и предположим, что существует вложение $f : n+2 \to n+1$. Пусть $f(n+1) = a$, тогда рассмотрим сужение $f : (n+1) \to (n+1) \setminus \{a\}$. По лемме из билета 8 имеем $(n+1) \setminus \{a\} \sim n$, тогда по транзитивности $n+1 \preceq n$, что противоречит предположению индукции. ■

Пусть $m \preceq n$ и $m \nleqslant n$, тогда по линейности (свойству 5) имеем $n < m$. По свойству 4 $n+1 \leqslant m$, тогда по свойству 2 $n+1 \subseteq m$, то есть $n+1 \preceq m$, а значит, по транзитивности $n+1 \preceq n$, что противоречит утверждению леммы. ■

10 Билет 10 (Сохранение конечности)

Утверждение 10.1.

1. *Если $A \subseteq B$ и $|B| = n \in \omega$, то $\exists m \in \omega \ : \ |A| = m$.*
2. *Объединение конечных множеств конечно.*
3. *Декартово произведение конечных множеств конечно.*

Доказательство.

1. Пусть $f : A \to n$ биекция, тогда сузим это отображение на множество B. Данное отображение инъективно, его образ является подмножеством n, значит, можно перенумеровать и получить искомую биекцию.

2. (a)

   Лемма 10.1. *Если A конечно, то $A \cup \{x\}$ конечно.*

Доказательство. Если $x \in A$, то $A \cup \{x\} = A \Longrightarrow |A \cup \{x\}| = |A|$.
Если $x \notin A$, то продолжим биекцию, отобразив $x \to n$. ■

(b)

Лемма 10.2. *Если A конечно и $n \in \omega$, то $A \cup n$ конечно.*

Доказательство. База индукции: очевидно.
Шаг индукции: $A \cup (n+1) = A \cup (n \cup \{n\}) = (A \cup n) \cup \{n\}$ — конечно по предположению индукции и предыдущей лемме. ■

(c)

Лемма 10.3. *Если A и B конечны и $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B$ конечно.*

Доказательство. Пусть $f : B \to n$ — биекция, тогда рассмотрим $g : (A \cup B) \to (A \cup n)$ — тождественная на A (в силу пустого пересечения) биекция, значит, по предыдущей лемме $A \cup B$ конечно. ■

$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, тогда по последней лемме и пункту 1 имеем нужное утверждение.

3. Доказательство по индукции по мощности множества B.
База индукции: очевидно.
Шаг индукции: $|A'| = n$, $A = A' \cup \{a_0\}$ $|A| = n + 1$, тогда разложив в оъединение двух конечных множеств и применив утверждение предыдущего пункта получиим данное утверждение.

■

11 Билет 11 (Определение суммы и произведения)

Определение 11.1. *1. $m + n = |A \cup B|$, где $A \cap B = \varnothing$, $|A| = m$, $|B| = n$.*

2. $m \cdot n = |A \times B|$, где $|A| = m$, $|B| = n$.

Утверждение 11.1. *Сложение и умножение определены корректно.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $A' \sim A \wedge B' \sim B \to A \times B \sim A' \times B'$ (сложение аналогично)
$f : A' \to A$, $g : B' \to B$, тогда построим $h : (A' \times B') \to (A \times B)$ по правилу $h(a', b') = (f(a'), g(b'))$. Это отображение биективно. ■

12 Билет 12 (Множество функций, возведение в степень)

Определение 12.1. *Для множеств A и B* $B^A = \{f | f : A \to B\}$.

Лемма 12.1.

1. $B^0 \sim 1$, $B^{n+1} \sim B^n \times B$
2. *Если B конечно, то $\forall n \in \omega$ B^n конечно.*
3. *Если $C \sim A$, то $B^A \sim B^C$.*

Доказательство.

1. Пусть $f : n \to B$, тогда построим функцию $g : (n+1) \to B$, совпадающую с f на n и переводящую $n \to B$. Это задаёт биекцию $B^n \times B \to B^{n+1}$.
2. База индукции: по первому пункту.
   Шаг индукции: по первому пункту.
3. Пусть $g : A \to C$ — биекция, $f : C \to B$, тогда $f \circ g$ — функция из A в B. Построим функцию h, которая ставит в соответствие функции f функцию $f \circ g$. Эта функция является искомой биекцией.

■

Теорема 12.1. *Если A и B конечны, то B^A конечно.*

Доказательство. По определению конечного множества и по пунктам 2 и 3 леммы имеем данное утверждение. ■

Определение 12.2. $m^n = |A^B|$, *где* $|A| = m$, $|B| = n$.

Утверждение 12.1. *Если A конечнно, то $2^A \sim P(A)$.*

Доказательство. Для каждого подмножества сопоставим каждому его элементу число 1, а всем остальным число 0, таким образом зададим для каждого подмножества функцию $f : A \to 2$. То есть мы получили искомую биекцию. ■

13 Билет 13 (Теорема Кантора)

Теорема 13.1. $|A| < |P(A)|$

Доказательство. $A \preceq P(A)$, в качестве инъекции рассмотрим такое отображение f, которое переводит a в $\{a\}$, оно инъективно.
$A \not\sim P(A)$: предположим противное, пусть существует биекция $f : A \to P(A)$, тогда рассмотрим множество $B = \{a | a \notin f(a)\}$. Если $B = f(b)$ для некоторого $b \in A$, то возникает противоречие. ∎

Пример 3 (Парадокс Кантора)**.** *Пусть V — множество всех множеств, тогда $P(V) \subseteq V \implies |P(V)| \leqslant |V|$, но по теореме Кантора $|V| < |P(V)|$ — противоречие.*

14 Билет 14 (Теорема о рекурсии)

Теорема 14.1. *Даны множество Y, $y_0 \in Y$, функция $h : Y \to Y$, тогда существует единственная функция $f : \omega \to Y$ такая, что:*

1. $f(0) = y_0$
2. $\forall n \ f(n+1) = h(f(n))$

Примеры 1.

1. *$m + n$ определяется рекурсией по n: $m + 0 = m$, $m + (n+1) = (m+n) + 1$.*
2. *$m \cdot n$ определяется рекурсией по n: $m \cdot 0 = 0$, $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$.*
3. *$n!$ определяется по рекурсии.*

15 Билет 15 (Счётное множество)

Определение 15.1. *Множество $A \sim \omega$ называется счётным множеством.*

Свойства 3.

1. *Если A конечно, B счётно, то $A \prec B$.*
2. *Если A счётно, $B \subseteq A$, то B конечно или счётно.*
3. *Если A счётно, B конечно или счётно, то $A \cup B$ счётно.*
4. *Если A счётно, B конечно или счётно, то $A \times B$ счётно.*

Доказательство.

1. По транзитивности $\preceq$ имеем $A \preceq B$. Предположим, что $A \sim B$, но $A \sim n$, $n + 1 \preceq \omega \sim B \implies n + 1 \preceq n$ — противоречие с принципом Дирихле.

2. Пусть $A \sim \omega$, $B \subseteq A$ бесконечно. Построим биекцию $f : \omega \to B$, для этого сначала построим функцию F: $F(0) = \{\min B\}$, $F(n+1) = F(n) \cup (\min B \setminus F(n))$
   $f(0) = \min B$, $f(n+1) = \min B \setminus f(n)$.

3. Докажем для случая $A \cap B = \varnothing$, $A \sim \omega \sim B$.

4. $\omega \times \omega \sim \omega$: канторовская нумерация.

■

16 Билет 16 (Конечность и бесконечность по Дедекинду)

Определение 16.1. *Множество бесконечно по Дедекинду, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству.*

Свойства 4.

1. *Конечное множество D-конечно.*

2. *Счётное множество D-бесконечно.*

3. *Если A счётно, $A \subseteq B$, то B — D-бесконечно.*

4. *A D-бесконечно $\iff$ A содержит счётное подмножество.*

5. *Если A D-бесконечно, B коненчо, то $A \cup B \sim A \setminus B \sim A$.*

6. *Если A D-бесконечно, B счётно, то $A \cup B \sim A$.*

Доказательство.

1. По принципу Дирихле.

2. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Рассмотрим $A' = A \setminus \{a_1\}$ и отображение $f : A \to A'$, заданное по правилу $f(a_n) = a_{n+1}$. Из построения оно сюръективно и инъективно, а значит, биективно, то есть $A \sim A'$, причём $A' \subset A$, значит, по определению A — D-бесконечно.

3. Построим отображение из A в собственное подмножество (оно существует по пункту 2) так, чтобы элементы $B \setminus A$ остались на месте.

4. $\Longleftarrow$ аналогичну пункту 2 построим отображение $f : A \to A'$, где $A' = B \setminus \{b\}$, заданное по правилу: если $a_i \in B$, то $f(a_i) = a_{i+1}$, а для всех $x \in A \setminus B$ $f(x) = x$. Построенная функция — биекция, а значит, $A \sim A'$, причём $A' \subset A$, то есть A — D-бесконечно по определению.

$\Longrightarrow$ Пусть $f : A \to B$ — биекция, где $B \subset A$, тогда возьмём $a \in A \setminus B$ и рассмотрим $\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$. Это будет искомое счётное подмножество.

5. Если $C \subseteq A$ счётно, $B \cap A = \varnothing$, $B \sim n$, то строим биекцию $f : A \cup B \to A$. Сдвигаем все элементы C на n, а на освободившиеся n мест отображаем B.
   Заметим, $A = (A \setminus B) \cup B$, тогда $A \setminus B$ D-бесконечно, так как $C \setminus B$ счётно, значит, $A \sim A \setminus B$.

6. Пусть $C \subseteq A$ счётно, $A \cap B = \varnothing$, $B \sim \omega$. Построим биекцию $f : A \cup B \to A$. Удваиваем все номера элементов C и в нечётные номера отображаем B.

$\blacksquare$

17 Билет 17 (Континуальность)

Определение 17.1. $c = 2^\omega$ — *континуум.*

Множество вещественных чисел отождествляем с множеством двоичных последовательностей, кроме тех, которые, начиная с некоторого номера, равны 1.

Утверждение 17.1. *Пусть $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.*

1. *R D-бесконечно.*

2. *$R \sim c$.*

3. *$A \sim c$, $B \preceq A$, тогда $A \cup B \sim c$*

4. *$A \sim c$, $B \preceq A$, тогда $A \cup B \times c$*

Доказательство.

1. По теореме о том, что бесконечное множество D-бесконечно.

2. При добавлении счётного множества последовательностей, оканчивающихся единицами, мощность $\mathbb{R}$ не изменится.

3. В силу теоремы Кантора-Бернштейна достаточно доказать, что если A и B континуумы, то они не пересекаются.

4. Достаточно доказать, что $c \times c \sim c$. $P(A) \times P(B) = P(A \cup B)$, значит, отображение, переводящее $(X, Y) \to X \cup Y$ — искомая биекция.

$\blacksquare$

Утверждение 17.2 (Континуум гипотеза Кантора)**.** *Если $\omega \prec A \preceq c$, то $A \sim c$.*

18 Билет 18 (Порядок на множестве)

Определение 18.1.

1. *Частичным порядком на множестве X называется бинарное отношение, которое рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.*

2. *Линейным порядком на множеств X называетсябинарное отношение, которое рефлексивно, транзитивно, антисимметрично и $\forall x, y \in X$ $(yRx) \vee (xRy)$.*

3. *Полным порядком на множестве X называется частичный порядок, при котором в любом подмножестве X существует наименьший элемент.*

Определение 18.2.

1. *Если на множестве можно задать частичный порядок, то оно называется частично упорядоченным.*

2. *Если на множестве можно задать линейный порядок, то оно называется линейно упорядоченным.*

3. *Если на множестве можно задать полный порядок, то оно называется вполне упорядоченным.*

Определение 18.3. *Изоморфизмом между двумя упорядоченными множествами $(X, \leqslant)$, $(X', \leqslant')$ называется биективное отображение $f : X \to X'$, уважающее отношение порядка.*

Свойства 5.

1. *Если $x < y$, то $f(x) < f(y)$ (строгое возрастание)*

2. *Если f — изоморфизм α на β, то f^{-1} — изоморфизм β на α.*

3. *Композиция изоморфизмов изоморфизм.*

Доказательство.

1. Пусть $x < y \Leftrightarrow (x \leqslant y) \wedge (x \neq y)$, тогда в силу биективности $f(x) \neq f(y)$, а в силу изоморфности $f(x) \leqslant f(y)$, значит, $(f(x) \leqslant f(y)) \wedge (f(x) \neq f(y)) \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

2. Обратное отображение так же биективно и сохраняет отношение порядка.

3. Композиция биекций — биекция. Если $x \leqslant y$, то $f(x) \leqslant f(y)$ и $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$. Значит, композиция сохраняет порядок.

■

19 Билет 19 (ВУМ)

Определение 19.1. *Пусть* $(X, \leqslant)$ *— вполне упорядоченное множество (ВУМ). Начальным отрезком* α *называется подмножество* $Y \subseteq X$*, замкнутое по убыванию.*

Свойства 6.

1. *Пусть* Y *— начальный отрезок вполне упорядоченного множества* $(X, \leqslant)$*, тогда* $Y = \{x | x < a\}$ *для некоторого* $a \in X$*.*

2. *Пусть* $(X, \leqslant)$ *— вум,* $f : X \to X$ *— строго возрастающая функция, тогда* $\forall x \in X$ $x \leqslant f(x)$*.*

3. *Никакое вум не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку.*

Доказательство.

1. Рассмотрим $a \in X \setminus Y$, $X \setminus Y$ частично упорядочено, тогда по определению собственного начального отрезка имеем, что $\forall y \in Y$, $y \leqslant a$, так как в противном случае $a \in Y$. $\forall y \in Y$ $a \neq y$, так как $a \notin Y$, значит, $\forall a \in X \setminus Y$ $\forall y \in Y$ $y < a$.

2. Рассмотрим $Y = \{x | f(x) < x\}$. Пусть $Y \neq \varnothing$, x наименьший в Y, тогда $f(f(x)) < f(x)$ (так как f строго возрастает). Так как x наименьший в Y, то $f(x) \leqslant f(f(x))$ — противоречие.

3. Пусть Y — собственный начальныйй отрезок X, X — вум, $f : X \to Y$ — изоморфизм. Тогда $f(x) \leqslant x$ — противоречие с пунктом 2.

∎

20 Билет 20 (Теорема Кантора)

Теорема 20.1. *Пусть* α, β *— два вполне упорядоченных множества, тогда выполнено ровно одно из следующих услоивий:*

1. α *изоморфно некоторому собственному началу* β

2. β *изоморфно некоторому собственному началу* α

3. $\alpha \simeq \beta$

Доказательство. Пусть $\alpha = (X, \leqslant)$, $\beta = (Y, \leqslant')$. Рассмотрим $f = \{(x, y) | x \in X,\ y \in Y,\ x \downarrow \simeq y \downarrow\}$.
Докажем 3 леммы.

Лемма 20.1. *f — биекция некоторого $X_0 \subseteq X$ на $Y_0 \subseteq Y$.*

Доказательство. Так как ни одно вум не изоморфно никакому собственному начальному отрезку, то в силу изоморфности начальных отрезков для каждого $x \in X$ существует не более одного y такого, что $(x, y) \in f$. И для каждого y существует не более одного x такого, что $(x, y) \in f$. В качестве $X_0 = \{x | \exists y \in Y \ (x, y) \in f\}$, $Y_0 = \{y | \exists x \in X \ (x, y) \in f\}$. ■

Лемма 20.2. *X_0 — начальный отрезок α, Y_0 начальный отрезок β.*

Доказательство. Пусть $x \in X_0$, $y \in Y_0$, $x \downarrow \simeq y \downarrow$, h — данный изоморфизм. $\forall z < x$, сужая h, получим $z \downarrow \simeq h(z) \downarrow$, так как h сохраняет порядок, и у каждого элемента $h(z)$ есть прообраз. Значит, $z \in X_0$. Для Y_0 аналогично, только вместо h рассматриваем h^{-1}. ■

Лемма 20.3. *f сохраняет порядок.*

Доказательство. Пусть $x \in X_0$, $h : x \downarrow \to y \downarrow$ — изоморфизм и пусть $z < x$, тогда по аналогии с предыдущей леммой $z \downarrow \simeq h(z) \downarrow$, то есть $f(z) = h(z)$. $h(z) < y = f(x)$ ■

По первым двум леммам имеем, что f — изоморфизм начального отрезка α на начальный отрезок β. Если оба отрезка собственные, то по третьей лемме $X_0 = x \downarrow$, $Y_0 = y \downarrow$ для некоторых x, y. Так как $(x, y) \in f$, то $x \in X_0$ — противоречие. Следовательно, один из них несобственный, значит, остаётся три случая из условия теоремы. Никакой из них не совпадает в силу того, что никакое вум не изоморфно никакому собственному начальному отрезку, а изоморфность ассоциативна. ■

21 Билет 21 (Ординальные числа)

Определение 21.1. *Ординальное число — класс эквивалентности по отношению изоморфизма.*

$\alpha \leqslant \beta$, если α вложимо в β, то есть существует изоморфизм α на начальный отрезок β.

Теорема 21.1. *В любом не пустом множестве S ординальных чисел есть наименьшее.*

Доказательство. $\forall \alpha \in S$ рассмотрим $\{\beta \in S | \beta \leqslant \alpha\}$, тогда среди них есть наименьший. Так как в непустом множестве начальных отрезков α, которым изоморфны β, есть наименьший элемент. ■

22 Билет 22 (Теорема о трансфинитной индукции)

Теорема 22.1. *Пусть дано свойство ординальных чисел* $\Phi(\alpha)$, *которое наследуется:* $\forall\alpha(\forall\beta < \alpha\ \Phi(\beta) \to \Phi(\alpha))$. *Тогда* $\forall\alpha\ \Phi(\alpha)$.

Доказательство. Пусть для некоторого α_0 $\Phi(\alpha_0)$ ложно.
Рассмотрим $S = \{\beta | \beta \leqslant \alpha_0\ \Phi(\beta) \text{ ложно}\}$. Так как S не пусто, то в S есть наименьший элемент. Обозначим его β_0, тогда $\forall\beta < \beta_0\ \Phi(\beta)$, тогда $\Phi(\beta_0)$ — противоречие. ■

23 Билет 23 (Ограниченность сверху любого непустого множества ординальных чисел)

Теорема 23.1. *Пусть* X *произвольное множество ординальных чисел, тогда существует максимальное ординальное число* α, *что* $\forall\beta \in X\ \beta < \alpha$.

Доказательство. Будем считать, что все порядки попарно не пересекаются. Возьмём их объединение. Зададим на нём отношение эквивалентности: если $x \in \alpha$, $y \in \beta$, то $x \sim y$, если вложение α в β переводит x в y.
Упорядочим эти классы эквивалентности: $u < v$, если $\exists\alpha$ такое, что $\exists x \in u$, $\exists y \in v$ такие, что $(x \in \alpha \wedge y \in \alpha \wedge x < y)$.
Рассмотрим не пустое $U \subseteq V$. Все классы эквивалентности, меньшие данного u, пересекают все порядки, которые пересекают u. Так как порядки вполне упорядочены, то можно выбрать наименьший элемент из тех, которые находятся в пересечениях. Класс эквивалентности этого элемента наименьший в V.
Всякое $\beta \in X$ вложимо в U, так как каждый элемент принадлежит некоторому классу эквивалентности. Следовательно, U, как ординальное число, ограничивает множество всех ординалов сверху. Выберем следующее число и получим нужное утверждение. ■

24 Билет 24 (Парадокс Бурали-Форти)

Теорема 24.1. *Все ординальные числа не образуют ординального числа.*

Доказательство. Все ординальные числа упорядочены по вложимости. Так как в любом не пустом множестве ординальных чисел есть наименьшее, то этот порядок полный. Тогда он должен задавать некоторое ординальное число α, которое, больше всех остальных, но $\alpha + 1$ тоже ординальное число, следующее за α, а значит, наибольшего ординального числа не существует. ■

25 Билет 25 (Теорема о трансфинитной рекурсии)

Теорема 25.1. *Дано: ординальное число*α_0*, функция* H *на ординальных числах, тогда существует единственная функция* F *на ординальных числах такая, что:*

1. $F(0) = \alpha_0$.

2. $F(\alpha + 1) = H(F(\alpha))$.

3. $F(\alpha) = \sup\{F(\beta) | \beta < \alpha\}$, *если* α *предельное.*

Примеры 2.

1. *Сложение:* $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
   $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma | \gamma < \beta\}$, *если* β *предельное.*

2. *Умножение:* $\alpha \cdot 0 = 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
   $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma | \gamma < \beta\}$, *если* β *предельное.*

3. *Возведение в степень:* $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
   $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma | \gamma < \beta\}$, *если* β *предельное.*

26 Билет 26 (Ординалы фон Неймана)

Определение 26.1. *Ординал фон Неймана — это множество специального вида, являющееся обобщением натуральных чисел фон Неймана, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. *это множество* α *транзитивно:* $\forall x, y\ (x \in y) \wedge (y \in \alpha) \to x \in \alpha$

2. α *вполне упорядочено:* $x \leqslant y := x \in y \vee x = y$.

Теорема 26.1 (Теорема счёта)**.** *Любое вум изоморфно какому-то ординалу.*

27 Билет 27 (Аксиома выбора, эквивалентные формулировки)

Определение 27.1. *Аксиома выбора: если* X *множество не пустых множеств, то существует функция выбора на* X*. Это функция* $f : X \to Y$ *такая, что* $f(x) \in x$ *для всех* $x \in X$.

Утверждение 27.1. *Эквивалентные формулировки:*

1. *Если* R *— отношение эквивалентности на* X*, то* $X/R \preceq X$.

2. *Если Γ — разбиение множества X, то $\exists Y \subseteq X$ такой, что $\forall Z \in \Gamma$ $|Z \cap Y| = 1$*

Доказательство.

1. $\Longleftarrow$ Рассмотрим произвольное не пустое множество A не пустых множеств. Зададим на объединении всех этих множеств отношение эквивалентности R (элементы x и y эквивалентны, если x и y принадлежат одному множеству). Обозначим это множество Y. Фактор множеством является само множество A. Тогда по условию $\exists f : A \to Y$ — вложение, то есть f — искомая функция выбора.
$\Longrightarrow$ В качестве X рассматриваем X/R и получаем данное утверждение.

2. $\Longrightarrow$ Пусть Γ — некоторое разбиение множества X, тогда по аксиоме выбора $\exists f : \Gamma \to X$ такое, что $f(A_i) \in A_i$ для каждого $A_i \in \Gamma$. Рассмотрим $Y = \{f(A_i) | A_i \in \Gamma\}$, тогда по построению $|Y \cap A_i| = 1$.
$\Longleftarrow$ Рассмотрим отображение $f : \Gamma \to Y$, переводящее $Z \in \Gamma$ в элемент, по которому Z пересекает Y. Данное отображение является функцией выбора.

∎

Теорема 27.1 (Теорема Цермело)**.** *Всякое множество можно вполне упорядочить.*

Теорема 27.2. *Из теоремы Цермело следует аксиома выбора.*

Доказательство. Пусть X — множество, состоящее из непустых множеств. Упорядочим их объединение. В качестве функции выбора выберем $f(x) = \min x$. ∎

Теорема 27.3 (Лемма Цорна)**.** *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, в котором каждое линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, тогда X имеет максимальный элемент.*

28 Билет 28 (Теорема о сравнении мощностей)

Теорема 28.1. *Всякое бесконечное множество D-бесконечно.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Построим функцию выбора g на множестве всех не пустых подмножеств множества A. Построим по рекурсии инъекцию $f : \omega \to A$:
$f(0) = a_0$ (a_0 существует, так как $A \neq \varnothing$)
$f(n+1) = g(A \setminus \{f(0), f(1), \dots, f(n)\})$ ∎

Теорема 28.2. *Для любых множеств X, Y либо $X \preceq Y$, либо $Y \preceq X$.*

Доказательство. По теореме Цермело их можно вполне упорядочить, а по теореме Кантора одно из них вложено в другое. ∎

29 Билет 29 (Карденалы и алефы)

Определение 29.1. *Кардинал — это ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу.*

Утверждение 29.1. *Всякий ординал равномощен некоторому кардиналу.*

Доказательство. Если α — не кардинал, то $\{\beta | \beta < \alpha,\ \beta \sim \alpha\}$. Тогда существует наименьший элемент, он и будет искомым кардиналом. ∎

Определение 29.2. *Мощностью множества X называется кардинал, равномощный X.*

Определение 29.3. *По рекурсии построим $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1}$ — наименьший кардинал, больший $\aleph_\alpha$, $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta | \beta < \alpha\}$, если α предельное.*

Утверждение 29.2. *Последовательность алефов содержит все бесконечные кардиналы.*

Доказательство.

1. $\alpha < \aleph_\alpha$ из определения последовательности алефов по трансфинитной индукции.

2. Если k — бесконечный кардинал, то он не может быть больше всех алефов, так как иначе он больше всех ординалов, то есть они образуют вполне упорядоченное подмножество k, что противоречит тому, что все ординалы не образуют ординал.

3. Пусть k не алеф, выберем наименьшее α такое, что $k < \aleph_\alpha$.

   (a) Пусть $\alpha = \beta + 1$, тогда $\aleph_\beta \leqslant k \leqslant \aleph_{\beta+1}$. Так как $\aleph_{\beta+1}$ наименьший кардинал больший $\aleph_\beta$, то есть k — алеф.

   (b) Пусть α предельное, тогда $k < \aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta | \beta < \alpha\}$. По определению супремума $\exists \beta < \alpha$ такое, что $k < \aleph_\beta$, что противоречит выбору α.

∎

30 Билет 30 (Операции над кардиналами, основная теорема кардинальной арифметики)

Примеры 3.

1. $|A| \cdot |B| = |A \times B|$, $|A| + |B| = |A \cup B|$, *если* $A \cap B = \varnothing$.

2. $|A|^{|B|} = |A^B|$.

Утверждение 30.1 (Обобщённая континуум-гипотеза). $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

Теорема 30.1 (Основная теорема кардинальной арифметики).

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$$

Доказательство. (Идея доказательства) По теореме Кантора-Бернштейна достаточно доказать, что $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Это доказывается по трансфинитной рекурсии по аналогии с Канторовской нумерацией точек на целочисленной плоскости. ∎

31 Билет 31 (Слова)

Определение 31.1. *Словом в алфавите A длины n называется функция $f : n \to A$. A^∞ — множество всех слов в алфавите A.*

Определение 31.2. *Язык в алфавите A — некоторое подмножество A^∞.*

Определение 31.3. *Собственным началом слова $a_1 \dots a_n$ называется слово $a_1 \dots a_m$, где $m < n$.*

Определение 31.4. *Конкатенацией слов α и β называется слово $\alpha\beta$.*

32 Билет 32 (Формула)

Определение 32.1. *Фиксируем счётное множество символов, которые назовём пропозициональными переменными и обозначим $Var = \{P_1, P_2, \dots\}$. Построим множество пропозицональных формул (Fm):*

1. *Если $A \in Var$, то $A \in Fm$.*
2. *Если $A \in Fm$, $B \in Fm$, то $(A \wedge B) \in Fm$.*
3. *Если $A \in Fm$, $B \in Fm$, то $(A \vee B) \in Fm$.*
4. *Если $A \in Fm$, $B \in Fm$, то $(A \to B) \in Fm$.*
5. *Если $A \in Fm$, то $\neg A \in Fm$.*

Утверждение 32.1. *Никакая пропозициональная формула не является собственным началом другой пропозициональной формулы.*

Доказательство.

1. Если A — пропозициональная переменная, то очевидно.

2. Пусть $A = \neg A_1 \sqsubset B$, тогда B начинается с $\neg$, то есть $B = \neg B_1 \implies A_1 \sqsubset B_1$. По предположению индукции такого B_1 не существует.

3. Пустмь $A = (A_1 \circ B_1)$, $B \sqsubset A$, тогда B начинается с левой скобки, значит, $B = (B_1 \circ' B_2)$.
   Одна из формул A_1, B_1 является началом другой или они равны. Значит, $A_1 = B_1$, так как другие случаи не возможны в силу предположения индукции. Следовательно, $\circ = \circ'$, значит, $A_2 \sqsubset B_2$, что противоречит предположению индукции, значит, $A_2 = B_2$.

■

Лемма 32.1 (Об однозначном анализе формул)**.** *Для любой пропозициональной формулы C выполнено ровно одно из условий:*

1. $C \in Var$.
2. $C = (A \wedge B)$.
3. $C = (A \vee B)$.
4. $C = (A \to B)$.
5. $C = \neg A$.

Доказательство.

1. Если C начинается с $\neg$, то очевидно.

2. Пусть C начинается с левой скобки, $C = (A \circ B) = (A' \circ' B')$. Тогда A и A' являются началом одного слова, значит, одно из них является собственным началом другого или они равны. Первое невозможно по утверждению выше, значит, $A = A'$, $\circ = \circ'$, $B = B'$.

■

В записи часто опускают скобки, такая запись называется бесскобочной. Для этого установим приоритеты операций от самой сильной до самой слабой в таком порядке: $\wedge$, $\vee$, $\to$.

33 Билет 33 (Оценки переменных и формул)

Определение 33.1. *Оценкой пропозициональных переменных называется отображение $f : Var \to \mathbb{B}$, где $\mathbb{B} = \{0, 1\} = 2$.*

Лемма 33.1 (О продолжении оценок на формулы). *Для любой оценки $f : Var \to \mathbb{B}$ существует единственное продолжение $\overline{f} : Fm \to \mathbb{B}$ такое, что $\forall A, B \in Fm$:*

1. *Если $A \in Var$, то $\overline{f}(A) = f(A)$.*
2. *$\overline{f}(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 1$ и $\overline{f}(B) = 1$.*
3. *$\overline{f}(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 1$ или $\overline{f}(B) = 1$.*
4. *$\overline{f}(A \to B) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 0$ или $\overline{f}(B) = 1$.*
5. *$\overline{f}(\neg A) = 1 \Leftrightarrow \overline{f}(A) = 0$.*

Доказательство. Определим по индукции. Если C — переменная, то $\overline{f}(C) = f(C)$. Пусть есть оценки для всех формул, длина которых меньше n. Любая формула имеет один из видов 2 — 5. Пусть $C = (A \wedge B)$, тогда $\overline{f}(C) = \min(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$.
Пусть $C = (A \vee B)$, тогда $\overline{f}(C) = \max(\overline{f}(A), \overline{f}(B))$.
Пусть $C = \neg A$, тогда $\overline{f}(C) = \neg\overline{f}(A)$.
Пусть $C = (A \to B)$, тогда $\overline{f}(C) = \max(\overline{f}(\neg A), \overline{f}(B))$. ■

34 Билет 34 (Булевы функции и таблицы истинности)

Определение 34.1. *n-местной булевой функцией назовём $\varphi_A^n : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.*

Эта функция задаёт значение формулы A, состоящей из переменных $P_1, \ldots, P_n$, при всевозможных оценках.

Определение 34.2. *Таблица значений φ_A называется таблицей истинности.*

Определение 34.3. *Оценкой двоичного вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ назовём функцию $f_{\vec{x}} : Var \to \mathbb{B}$ такую, что $f_{\vec{x}}(P_i) = x_i$ при $i \leqslant n$ и 0 при $i > n$. Положим $\varphi_A^n(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A)$.*

Определение 34.4. *Формула называется тавтологией, если она принимает значение 1 при любой оценке.*

Определение 34.5. *Формула называется выполнимой, если существует оценка, при которой она принимает значение 1.*

Определение 34.6. *Формулы называются равносильными, если при всех оценках их значения совпадают.*

35 Билет 35 (Теорема о функциональной полноте булевых функций)

Теорема 35.1. *Любая булева функция отвечает некоторой формуле логики высказываний, то есть для любой n-местной булевой функции α существует формула $A(P_1, \ldots, P_n)$ такая, что $\varphi_{_A} \equiv \alpha$.*

Доказательство. Равенство $\varphi = \varphi_A$ означает, что для всех $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A).$$

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И};\\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для произвольного $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} := \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}.$$

Легко видеть, что формула $A_{\vec{x}}$ истинна лишь при оценке $f_{\vec{x}}$. Другими словами, для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = 1(\text{истина}) \iff f = f_{\vec{x}}. \tag{1}$$

Для данной функции φ пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все наборы $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = 1(\text{истина})$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = 1(\text{истина}) \iff \exists j\, \vec{x} = \vec{x}_j. \tag{2}$$

Положим теперь

$$A := \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j},$$

тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = 1(\text{истина}) &\iff \exists j\, f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = 1(\text{истина})\\ &\iff \exists j\, \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по (1)}\\ &\iff \varphi(\vec{x}) = 1(\text{истина}) \quad \text{по (2)}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что конъюнкция выражается через дизъюнкцию и отрицание, поскольку формула $A \wedge B$ равносильна $\neg(\neg A \vee \neg B)$. Поэтому формулы $A_{\vec{x}}$ могут быть переписаны без использования знака $\wedge$. ■

36 Билет 36 (Элементарные конъюнкции и СДНФ)

Определение 36.1. *Литерал — переменная или её отрицание.*

Определение 36.2. *Элементарная конъюнкция от переменных $P_1, \ldots, P_n$ называется конъюнкция литералов, построенных из этих переменных, в которой каждая переменная встречается ровно 1 раз.*

Определение 36.3. *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) от переменных $P_1, \ldots, P_n$ — дизъюнкция элементарных конъюнкций от этих переменных.*

Теорема 36.1. *Каждая формула, построенная из переменных $P_1, \ldots, P_n$, соответствует некоторой СДНФ от этих переменных.*

Доказательство. По теореме из билета 35 имеем, что любой функции от n переменных соответствует n-местная булева функция. По теореме из курса теории дискретных функций имеем, что любая булева функция обладает СДНФ, а значит, любая n-местная функция обладает СДНФ. ■

37 Билет 37 (Сигнатура, термы, атомарные формулы)

Определение 37.1. *Сигнатура — четвёрка вида $(Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega, \nu)$, где:*

1. *Множества $Pred_\Omega$, $Const_\Omega$, Fun_Ω попарно не пересекаются.*
2. $Pred_\Omega \neq \varnothing$
3. $\nu : Fun_\Omega \cup Const_\Omega \to \{1, 2, \ldots\}$.

Множество $Pred_\Omega$ — множество предикатных символов, множество Fun_Ω — множество функциональных символов, $Const_\Omega$ — множество константных символов. Функция ν называется функцией валентности.

Определение 37.2. *Алфавит данной сигнатуры Ω состоит из следующих элементов:*

1. *Все предикатные, константные и функциональные символы Ω.*
2. *Счётное множество $FVar_\Omega$ всех свободных переменных.*
3. *Счётное множество $BVar_\Omega$ связанных переменных.*
4. *Логические связки $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$.*
5. *Кванторы $\forall$, $\exists$.*

6. *Скобки и запятая.*

Определение 37.3. *Множество термов сигнатуры* Ω *— наименьшее множество* $X \subseteq \Omega$*, содержащее:*

1. *Все константные символы.*

2. *Все свободные переменные.*

3. *Если* $f^k \in Fun_\Omega$*,* t_1*, …,* t_k *— термы, то* $f(t_1, \ldots, t_k)$ *— терм.*

Определение 37.4. *Атомарная формула — слово вида* $P(t_1, \ldots, t_k)$*, где* t_1*, …,* t_k *— термы сигнатуры* Ω*,* $P^k \in Pred_\Omega$*.*

Определение 37.5.

1. *Все атомарные формулы — формулы.*

2. *Если* A*,* B *— формулы, то* $A \vee B$ *— формула.*

3. *Если* A*,* B *— формулы, то* $A \wedge B$ *— формула.*

4. *Если* A*,* B *— формулы, то* $A \to B$ *— формула.*

5. *Если* A *— формула, то* $\neg A$ *— формула.*

6. *Если* A *— формула,* $x \in BVar$ *(связанная переменная),* $a \in FVar$ *(свободная переменная) и* $x \notin A$*, то* $\exists x[x/a]A$*.*

7. *Если* A *— формула,* $x \in BVar$ *(связанная переменная),* $a \in FVar$ *(свободная переменная) и* $x \notin A$*, то* $\forall x[x/a]A$*.*

Пример 4 (Сигнатура арифметики)**.** *Сигнатура состоит из констант* 0, 1*, предикатного символа* $=^2$*, функциональных символов* $+^2$*,* $\cdot^2$*.*

38 Билет 38 (Собственное начало терма и атомарной формулы)

Утверждение 38.1. *Терм не может быть началом другого терма.*

Доказательство.

1. Если терм — константный символ, то очевидно.

2. Если терм — свободная переменная, то очевидно.

3. Пусть терм имеет вид $f(t_1, \ldots, t_k)$ и пусть существует терм $f(t_1, \ldots, t_k)\alpha$, тогда если в α есть ещё термы, то получаем противоречие с определением терма, так как он должен иметь вид $(\ldots)$.

■

Утверждение 38.2. *Любой терм является либо константным символом, либо свободной переменной, либо имеет вид $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $f^n \in Fun$ и термы t_1, …, t_n определены однозначно.*

Доказательство. Из определения имеем, что структура терма совпадает с одним из трёх видов, указанных в условии. Осталось доказать единственность. Первые два случая очевидны. Они будут являться базой индукции. По предположению индукции термы $t_1, \ldots t_k$ определены однозначно. Значит, терм f^k определён однозначно. ■

Утверждение 38.3. *Каждая атомарная формула сигнатуры имеет вид $P(t_1, \ldots, t_k)$ для единственного $P^k \in Pred$ и термов t_1, …, t_k.*

Доказательство. Аналогично с предыдущим утверждением. ■

39 Билет 39 (Леммы об анализе формул)

Лемма 39.1. *Для любой формулы верно ровно одно из следующих условий:*

1. *C — атомарная формула.*
2. *Существует единственная пара формул A и B такие, что $C = (A \vee B)$.*
3. *Существует единственная пара формул A и B такие, что $C = (A \wedge B)$.*
4. *Существует единственная пара формул A и B такие, что $C = (A \to B)$.*
5. *Существует единственная формула A такая, что $C = \neg A$.*
6. *$C = \exists x[x/a]A$ для некоторой формулы A, зависимой переменной x и свободной переменной a.*
7. *$C = \forall x[x/a]A$ для некоторой формулы A, зависимой переменной x и свободной переменной a.*

Доказательство.

1. Если C атомарная формула, то очевидно.
2. Для случаев 2, 3, 4 $C = (A \circ B)$. Так как никакая формула не является началом другой формулы, то A и B определены однозначно. Значит, C определено однозначно.

3. Для $C = \neg A$ аналогично с предыдущим.

$\blacksquare$

Лемма 39.2. *$Kx[x/a]A = Kx[x/b]B$, где $B = [b/a]A$.*

Доказательство. $[x/a]A = [x/b]B \Longrightarrow B = [b/x][x/b]B = [b/x][x/a]A = [b/a]A$. $\blacksquare$

40 Билет 40 (Модель сигнатуры, значения замкнутых термов)

Определение 40.1. *Моделью сигнатуры Ω или Ω-структурой называется пара $(\underline{M}, \mathcal{I})$, где*

1. *$\underline{M}$ — непустое множество, называемое носителем модели.*

2. *$\mathcal{I}$ — функция, определённая на множестве $Const_\Omega$, $Pred_\Omega$, Fun_Ω, причём*

   (a) *если $C \in Const_\Omega$, то $\mathcal{I}(c) \in \underline{M}$*

   (b) *если $c^n \in Pred_\Omega$, то $\mathcal{I}(c) : \underline{M}^n \to \mathbb{B}$*

   (c) *если $c^n \in Fun_\Omega$, то $\mathcal{I}(c) : \underline{M}^n \to \underline{M}$*

Определение 40.2. *Терм называется замкнутым, если он не содержит переменные, то есть построен только из константных и функциональных символов. Множество замкнутых термов обозначается CTm_Ω.*

Определение 40.3. *Значение замкнутого терма в модели M определяется по рекурсии:*

1. *если $c \in Const_\Omega$, то $|c|_{_M} = c_{_M}$.*

2. *если $f^n \in Fun_\Omega$, $f(t_1, \ldots, t_n)$, то $|f(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = f(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$, где t_1, ..., $t_n \in CTm_\Omega$ (замкнутые термы).*

Определение 40.4. *Значением замкнутой атомарной формулы $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ в сигнатуре Ω называется $|P(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = P(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$.*

Утверждение 40.1. *Значения замкнутых термов и замкнутых атомарных формул определены корректно, то есть существует единственное отображение $t \to |t|_{_M}$, удовлетворяющее условиям:*

1. *$|c|_{_M} = c_{_M}$, если c — константа.*

2. *$|f(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = f_{_M}(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$*

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: если t — константа, то очевидно.

Шаг индукции: Пусть $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, причём по лемме из билета 39 имеем, что f и t_1, $\ldots$, t_n определены однозначно. По предположению индукции $|t_1|_{_M}$, $\ldots$, $|t_n|_{_M}$ определены однозначно, а значит, $|t|_{_M}$ определено однозначно.

Так как каждая атомарная формула имеет вид $P(t_1, \ldots, t_n)$, где P, t_1, $\ldots$, t_n определены однозначно, то по доказанному выше имеем, что $|P(t_1, \ldots, t_n)|_{_M}$ определено однозначно. ■

Определение 40.5. *Модель сигнатуры, которая содержит двуместный предикатный символ равенства (=), называется нормальной моделью, если для любых m_1, $m_2 \in M$*

$$=_{_M}(m_1, m_2) = \begin{cases} \text{и, если } m_1 \text{ и } m_2 \text{ совпадают} \\ \text{л, иначе} \end{cases}$$

41 Билет 41 (Оценённые термы и формулы и их значения)

Определение 41.1. *Пусть M — модель сигнатуры Ω. Расширенной сигнатурой модели M называется сигнатура, полученная добавлением к Ω всех элементов $\underline{M}$ в качестве константных символов.*

Определение 41.2. *Терм, оценённый в модели M — это замкнутый терм сигнатуры $\Omega \cup M$.*

Определение 41.3. *Значение терма, оценённого в модели M, определяется рекурсивно:*

1. $|c|_{_M} = c_{_M}$, *если c — константа.*
2. $|m|_{_M} = m$, *если $m \in \underline{M}$*
3. $|f(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = f_{_M}(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$

Утверждение 41.1. *Значение термов определено корректно, то есть каждому терму соответствует единственное значение.*

Доказательство. База индукции: если c — константа, то очевидно. Шаг индукции: так как для $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ f, t_1, $\ldots$, t_n определены однозначно и по предположению индукции значения термов определены однозначно, то и значение терма t определено однозначно. ■

Определение 41.4. *Формула, не содержащая свободных переменных, называется замкнутой формулой или предложением.*

Определение 41.5. *Формула, оценённая в модели M — предложение (замкнутая формула) в сигнатуре $\Omega \cup M$.*

Определение 41.6. *Логической длиной формулы называется число вхождений в неё логических связок и кванторов.*

Определение 41.7. *Значение формулы, оценённой в модели M, определяется по рекурсии по логической длине формулы:*

1. $|P(t_1, \ldots, t_n)|_{_M} = P_{_M}(|t_1|_{_M}, \ldots, |t_n|_{_M})$, *если* $P^n \in Fun_\Omega$, t_1, …, t_n — *термы.*
2. $|c|_{_M} = c_{_M}$, *если* $c \in Const_\Omega$.
3. *Если* $C = (A \vee B)$, *то* $|C|_{_M} = |(A \vee B)|_{_M} = \max(|A|_{_M}, |B|_{_M})$.
4. *Если* $C = (A \wedge B)$, *то* $|C|_{_M} = |(A \wedge B)|_{_M} = \min(|A|_{_M}, |B|_{_M})$.
5. *Если* $C = (A \to B)$, *то* $|C|_{_M} = |(A \to B)|_{_M} = \max(1 - |A|_{_M}, |B|_{_M})$.
6. *Если* $C = \neg A$, *то* $|C|_{_M} = |\neg A|_{_M} = 1 - |A|_{_M}$.
7. *Если* $C = \exists x[x/a]A$, *то* $|C|_{_M} = 1 \iff$ *существует* $m \in \underline{M}$ *такое, что* $|[m/a]A|_{_M} = 1$.
8. *Если* $C = \forall x[x/a]A$, *то* $|C|_{_M} = 1 \iff$ *для любого* $m \in \underline{M}$ $|[m/a]A|_{_M} = 1$.

Утверждение 41.2. *Значение формулы, оценённой в модели M, определено корректно.*

Доказательство. База индукции: если c — константа, то очевидно.
Шаг индукции: каждая формула определена однозначно (последние 2 пункта с точностью до $B = [b/a]A$) (следует из лемм из билета 39), а по предположению индукции все значения всех составляющих определены однозначно, а значит, значение самой формулы определено однозначно. ■

42 Билет 42 (Истинность и общезначимость атомарных формул)

Определение 42.1. *Пусть M — модель сигнатуры Ω, A — замкнутая формула сигнатуры Ω. Формула истинна в модели M, если $|A|_{_M} = 1$. Так же говорят, что M — модель A и пишут $M \models A$.*

Определение 42.2. *Формула выполнима, если она имеет модель, то есть существует модель данной сигнатуры, в которой она истинна.*

Определение 42.3. *Формула называется общезначимой, если она истинна во всех моделях данной сигнатуры.*

Определение 42.4. *Замкнутые формулы A и B называются равносильными, если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима. Обозначение: $A \sim B$.*

43 Билет 43 (Универсальное замыкание, его равносильные варианты)

Введём обозначение. Пусть $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — множество свободных переменных, $A(\vec{b})$ — формула, в которую входят только эти переменные, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — множество связанных переменных, не входящих в A. Тогда обозначим $\forall \vec{x} A(\vec{x}) = \forall x_1 [x_1/b_1] \ldots \forall x_n [x_n/b_n] A(\vec{b})$.

Определение 43.1. *Формула вида* $\forall \vec{x} A(\vec{x})$ *называется универсальным замыканием формулы* $A(\vec{b})$*. Обозначение:* $\overline{\forall} A$.

Утверждение 43.1. $M \models \forall \vec{x} A(\vec{x}) \iff$ *для всех* $\vec{m}$ $M \models A(\vec{m})$.

Доказательство. Очевидно из определения. ■

Утверждение 43.2. *Пусть* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *— два списка связанных переменных, не входящих в* A*, тогда* $\forall \vec{x} A(\vec{x}) \sim \forall \vec{y} A(\vec{y})$.

Доказательство. Пусть $M \models \forall \vec{x} A(\vec{x})$, тогда по предыдущему утверждению для любого $\vec{m} \in M$ $M \models A(\vec{m})$. Аналогично, $M \models \forall \vec{y} A(\vec{y})$ для всех $\vec{n} \in M$ $M \models A(\vec{n})$. Значит, $M \models (\forall \vec{x} A(\vec{x}) \leftrightarrow \forall \vec{y} A(\vec{y}))$, то есть по определению $\forall \vec{x} A(\vec{x}) \sim \forall \vec{y} A(\vec{y})$. ■

44 Билет 44 (Подстановочные примеры тавтологий и их общезначимость)

Определение 44.1. *Пусть* $F(P_1, \ldots, P_n)$ *— пропозициональная формула,* P_1, …, P_n *— пропозициональные переменные,* B_1, …, B_n *— формулы сигнатуры* Ω*. Формула* $F(B_1, \ldots, B_n)$ *называется подстановочным примером формулы* F.

Лемма 44.1. *Подстановочные примеры тавтологий общезначимы.*

Доказательство. Пусть $F(B_1, \ldots, B_n)$ — подстановочный пример тавтологии, то есть при любых оценках значение формулы F равно 1, то есть при любых значениях переменных формула F истинна, а значит, при замене переменных формула останется тождественно истинной, то есть формула $F(B_1, \ldots, B_n)$ общезначима. ■

45 Билет 45 (Предварённая нормальная форма (ПНФ))

Определение 45.1. *Предварённая нормальная форма — формула вида* $K_1 x_1 \ldots K_n x_n [x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n] A$*, где* K_1, …, K_n *— кванторы,* A *— формула без кванторов,* a_1, …, a_n *— различные свободные переменные,* x_1, …, x_n *— различные связанные переменные, не входящие в* A.

Утверждение 45.1 (Основные раносильности)**.**

1. *Если* $F_1(P_1, \dots, P_n) \sim F_2(P_1, \dots, P_n)$*, где* F_1 *и* F_2 *— пропозициональные формулы, то* $F_1(B_1, \dots, B_n) \sim F_2(B_1, \dots, B_n)$*.*

2. $\neg\exists x[x/a]A \sim \forall x[x/a]\neg A$*.*

3. $\neg\forall x[x/a]A \sim \exists x[x/a]\neg A$*.*

4. $Kx[x/a](A \circ B) \sim Kx[x/a]A \circ B$*, если* $a \notin B$ *и* $x \notin A \wedge x \notin B$*, здесь* $\circ$ *—* $\vee$ *или* $\wedge$*.*

5. *Если* $A \sim B$*, то* $\neg A \sim \neg B$*.*

6. *Если* $A \sim A'$ *и* $B \sim B'$*, то* $(A \circ B) \sim (A' \circ B')$*.*

7. *Если* $A \sim B$*, то* $Kx[x/a]A \sim Kx[x/b]B$ *(*$x \notin A \wedge x \notin B$*).*

8. $Kx[x/a]A \sim Ky[y/a]A$*, если* x*,* $y \notin A$*.*

Доказательство.

1. Так как $F_1 \sim F_2$ при любых значениях переменных, то при подстановке ничего не изменится.

2. $|\neg\exists x[x/a]A|_{_M} \equiv |\forall x \neg[x/a]A|_{_M} \equiv |\forall x[x/a]\neg A|_{_M}$.

3. $|\neg\forall x[x/a]A|_{_M} \equiv |\exists x \neg[x/a]A|_{_M} \equiv |\exists x[x/a]\neg A|_{_M}$.

4. Очевидно, так как подстановка a не влияет на B, а значит, значение B не изменится.

5. $A \sim B \iff$ формула $(A \to B) \wedge (B \to A)$ общезначима. По таблице истинности $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$. Аналогично для $B \to A$, то есть $\neg A \leftrightarrow \neg B$ общезначима.

6. Для каждой из операций: конъюнкции, дизъюнкции и имплекации — достаточно проверить, что значение формулы $A' \circ B'$ совпадает со значением формулы $A \circ B$.

7. Так как при любой оценке формулы A и B истинны или ложны одновременно, то при замене $[x/a]$ формулы останутся эквивалентными, так как логическая структура не изменится.

8. Аналогично с предыдущим пунктом.

$\blacksquare$

46 Билет 46 (ТО формулы)

Определение 46.1. *Формула с тесными отрицаниями (ТО) — формула, построенная только из литералов (то есть атомарных формул и их отрицаний) с помощью конъюнкции, дизъюнкции и кванторов.*

Утверждение 46.1. *Любая формула равносильна некоторой ТО-формуле.*

Доказательство. Имплекацию можно представить с помощью дизъюнкции и отрицания $A \to B \sim \neg A \lor B$, а по равносильностям из билета 45 любое отрицание можно поменять местами с квантором. ■

47 Билет 47 (Приведение формул к ПНФ)

Теорема 47.1. *Всякая формула равносильна некоторой ПНФ.*

Доказательство. Так как любая формула равносильна некоторой ТО-формуле (по утверждению из билета 46), то достаточно доказать данное утверждение для ТО-формулы.
Индукция по числу связок и кванторов.
База индукции: если A — литерал, то A — ПНФ.
Шаг индукции:

1. Пусть $C = (A \circ B)$. По предположению индукции $A \sim A'$, $B \sim B'$, где A' и B' — ПНФ. Тогда по равносильностям из билета 45 имеем, что $C = (A \circ B) \sim (A' \circ B')$. Значит, достаточно доказать для случая, когда A и B — ПНФ. Проведём индукцию по числу кванторов
   База внутренней индукции: если кванторов нет, то имеем ПНФ.
   Шаг внутренней индукции: пусть $A = Kx[x/a]A_1$ (если в A нет квантора, то поменяем местами A и B).

   (a) Пусть $a \notin B$ и $x \notin B$. По равносильностям из билета 45 имеем, что $(A \circ B) \sim (Kx[x/a]A_1 \circ B) \sim Kx[x/a](A_1 \circ B)$. Число кванторов в $(A_1 \circ B)$ меньше чем в A, а значит, по предположению индукции $(A_1 \circ B) \sim C$, где C — ПНФ.

      i. Если $x \notin C$, то по равносильностям из билета 45 $Kx[x/a](A_1 \circ B) \sim Kx[x/a]C$. Тогда $(A \circ B) \sim Kx[x/a]C$ — искомая ПНФ.

      ii. Если $x \in C$, то выберем связанную переменную y такую, что $y \notin A_1$, $y \notin B$ и $y \notin C$. Тогда по последнему пункту из билета 45 имеем $Kx[x/a]A_1 \sim Ky[y/a]A_1$. Тогда по аналогии с предыдущим пунктом $Ky[y/a]C$ — искомая ПНФ.

(b) Пусть $a \in B$ или $x \in B$. Тогда выберем новую свободную переменную b и связанную переменную y такие, что $b \notin B$ и $y \notin B$. По равносильностям из билета 45 имеем, что $Kx[x/a]A_1 \sim Ky[y/a]A_1$, а по лемме из билета 39 имеем $Kx[x/a]A_1 = Kx[x/b][b/a]A_1$. По первому пункту для $A_1 = [b/a]A_1$ существует равносильная ПНФ.

2. Пусть $A = Kx[x/a]B$, тогда по предположению индукции существует ПНФ $B' \sim B$. Выберем связанную переменную y такую, что $y \notin B$ и $y \notin B'$, тогда по равносильностям из билета 45 имеем $A = Kx[x/a]B \sim Ky[y/a]B \sim Ky[y/a]B'$.

■

48 Билет 48 (Изоморфизм моделей)

Определение 48.1. *Модели M и M' сигнатуры Ω называются изоморфными, если существует изоморфизм — отображение $\alpha : \underline{M} \to \underline{M}'$, которое удовлетворяет следующим условиям:*

1. *α — биекция.*
2. *$\alpha(c_{M}) = c_{M'}$ для $c \in Const_\Omega$*
3. *$\alpha(f_{M}(m_1, \dots, m_k)) = f_{M'}(m_1, \dots, m_k)$ для $f_{M} \in Fun_\Omega$ и $m_1, \dots, m_k \in \underline{M}$.*
4. *$\alpha(P_{M}(m_1, \dots, m_k) = P_{M'}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k))$ для $P_{M} \in Pred_\Omega$ и $m_1, \dots, m_k \in \underline{M}$.*

Теорема 48.1. *Пусть $\alpha : \underline{M} \cong \underline{M}'$ — изоморфизм моделей.*

1. *Пусть t — терм, оценённый в модели M, тогда $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_{M})$.*
2. *Пусть A — формула, оценённая в модели M, тогда $|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_{M}$.*

Доказательство.

1. Индукция по длине терма.
База: если t — константа, то $\alpha \cdot t = t = c$, значит, $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_{M})$. Если $t = m \in \underline{M}$, то $|\alpha(m)|_{M'} = \alpha(m) = \alpha(|m|_{M})$.
Шаг индукции: $t = f(t_1, \dots, t_n)$, тогда $\alpha(t) = f(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n))$.

$$|\alpha(t)|_{M'} = f_{M'}(|\alpha(t_1)|_{M'}, \dots, |\alpha(t_n)|_{M'}) = f_{M'}(\alpha(|t_1|_{M}), \dots, \alpha(|t_n|_{M}))$$

По определению изоморфизма

$$f_{M'}(\alpha(|t_1|_{M}), \dots, \alpha(|t_n|_{M})) = \alpha(f_{M}(|t_1|_{M}, \dots, |t_n|_{M})) = \alpha(|t|_{M})$$

2. Проведём индукцию по числу логических связок и кванторов.
База индукции: если $A = P^n(t_1, \dots, t_n)$, то по аналогии с шагом индукции для термов имеем

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = P_{M'}(|\alpha(t_1)|_{M'}, \dots, |\alpha(t_n)|_{M'}) = P_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \dots, \alpha(|t_n|_M))$$

По определению изоморфизма

$$P_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \dots, \alpha(|t_n|_M)) = P_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M) = |A|_M$$

Шаг индукции: для следующих случаев $\alpha(|B|_M) = |\alpha(B)|_{M'}$, $\alpha(|C|_M) = |\alpha(C)|_{M'}$ по предположению индукции: $A = (B \vee C)$, $A = (B \wedge C)$, $A = (B \to C)$, $A = \neg B$. Например, для случая $A = (B \wedge C)$ $|\alpha \cdot A|_{M'} = \min(|\alpha \cdot B|_{M'}, |\alpha \cdot C|_{M'}) = \min(|B|_M, |C|_M) = |A|_M$. Для остальных аналогично.

(a) Пусть $A = \exists x[x/a]B$, тогда по определению истинности

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = |\exists x[x/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \max_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

По определению истинности и предположению индукции для $[m/a]B$ имеем

$$|A|_M = \max_{m \in M} |[m/a]B|_M = \max_{m \in M} |\alpha \cdot [m/a](B)|_{M'}$$

В силу того что $\alpha \cdot [m/a]B = [\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)$ имеем

$$\max_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \max_{m \in M} |[\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

(b) Пусть $A = \forall x[x/a]B$, тогда по определению истинности

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = |\forall x[x/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \min_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

По определению истинности и предположению индукции для $[m/a]B$ имеем

$$|A|_M = \min_{m \in M} |[m/a]B|_M = \min_{m \in M} |\alpha \cdot [m/a](B)|_{M'}$$

В силу того что $\alpha \cdot [m/a]B = [\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)$ имеем

$$\min_{m' \in M'} |[m'/a](\alpha \cdot B)|_{M'} = \min_{m \in M} |[\alpha(m)/a](\alpha \cdot B)|_{M'}$$

$\blacksquare$

49 Билет 49 (Элементарная теория модели)

Определение 49.1. $Th(M) = \{A \in CFm_\Omega |\ M \models A\}$ — *элементарная теория модели* M *(*CFm_Ω *— множество замкнутых формул в сигнатуре* Ω*).*

Определение 49.2. *Модели* M *и* M' *называются элементарно эквивалентными, если* $Th(M) = Th(M')$*. Обозначение:* $M \equiv M'$*.*

Теорема 49.1. *Если модели изоморфны, то они элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\alpha : M \cong M'$ — изоморфизм моделей. Если A — замкнутая формула, то в ней нет констант из M, то есть $\alpha \cdot A = A$, тогда по теореме из билета 48 имеем $\alpha(|A|_M) = |\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_{M'} = |A|_M$, значит, $M \models A \Leftrightarrow M' \models A$. А значит, это верно для любой замкнутой формулы. Тогда по определению $Th(M) = Th(M')$. ∎

50 Билет 50 (Определимые в модели предикаты и отношения, их инвариантность)

Определение 50.1. *Рассмотрим формулу* $A(\vec{b})$*, где* $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$*.* k*-местный предикат, определимый формулой* $A(\vec{b})$ *в модели* M *— это* $A_M : \underline{M}^k \to \{0, 1\}$ *такой, что для всех* m_1*, …,* m_k $A_M(m_1, \ldots, m_k) = |[m_1, \ldots, m_k/b_1, \ldots, b_k]|_M$*.*

Теорема 50.1. *Пусть* α *— автоморфизм модели* M *сигнатуры* Ω*,* $A(a_1, \ldots, a_k)$ *— формула данной сигнатуры, тогда для любых* m_1*, …,* $m_k \in M$ $A_M(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \ldots, m_k)$*. Сокращённо,* $A_M(\alpha\vec{m}) = A_M(\vec{m})$*.*

Доказательство. По теореме из билета 48 имеем $|\alpha \cdot A(\vec{m})|_{M'} = |A(\vec{m})|_M$. Так как α — автоморфизм, то $M = M'$. ∎

Замечание 1. k*-местный предикат, определимый формулой в модели* M*, инвариантен относительно автоморфизма модели.*

Определение 50.2. k*-местное отношение* R *определимо в* M *формулой* $A(\vec{b})$*, если определим соответствующий предикат, то есть* $\forall \vec{m} \in M^k\ M \models A(\vec{m}) \iff \vec{m} \in R$*.*

Из теоеремы следует, что автоморфизм — инвариант для этого отношения.

Определение 50.3. *Подмножества* $\mathbb{N}$*, определимые в сигнатуре арифметики* $\{=, +, \cdot, 0, 1\}$*, называются арифметическими множествами.*

51 Билет 51 (Стандартные теории равенства, теоерма о нормальности)

Определение 51.1. *Пусть Ω — сигнатура, содержащая предикатный символ равенства. Стандартная теория равенства в сигнатуре Ω — теория, содержащая следующие формулы:*

1. $\forall x(x = x)$
2. $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \to x = z)$
4. $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(x_i = y_i) \to (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \dots, y_n)))\ \forall P \in Pred_\Omega$
5. $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(x_i = y_i) \to f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))\ \forall f \in Fun_\Omega$

Обозначение: Eq_Ω.

Лемма 51.1. *Пусть $M \models Eq_\Omega$. Тогда предикат $=_{_M}$ в силу первых трёх условий (аксиом) задаёт отношение эквивалентности на $\underline{M}$. Обозначим его $\approx$ и рассмотрим фактормножество $\underline{M}/\approx$. Зададим модель $\tilde{M}$ в сигнатуре Ω на этом фактормножестве.*

1. $c_{_{\tilde{M}}} = (c_{_M})\tilde{}$
2. $f_{_{\tilde{M}}}(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_k) = (f_{_M}(m_1, \dots, m_k))\tilde{}$
3. $P_{_{\tilde{M}}}(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_k) = P_{_M}(m_1, \dots, m_k)$

Модель $\tilde{M}$ — нормальная модель.

Доказательство. Для этого достаточно проверить, что при замене m_i на эквивалентные элементы правые части в последних двух пунктах не изменятся.

Пусть $m_1 \approx m_1'$, ..., $m_k \approx m_k'$, тогда $M \models (m_i = m_i')$, а значит, $M \models \bigwedge\limits_{i=1}^{k}(m_1 = m_1')$ Из условия 2 имеем

$$\forall m_1 \dots \forall m_k \forall m_1' \dots \forall m_k' (\bigwedge_{i=1}^{k}(m_1 = m_1') \to (f(m_1, \dots, m_k) = f(m_1', \dots, m_k')))$$

то есть $M \models (f(\vec{m}) = f(\vec{m}'))$. Значит, $=_{_M}(|f(\vec{m})|_{_M}, f(\vec{m}')|_{_M}) = 1$. По определению значения терма $|f(\vec{m})|_{_M} = f_{_M}(\vec{m})$, то есть $(f_{_M}(\vec{m}))\tilde{} = (f_{_M}(\vec{m}'))\tilde{}$. ■

Таким образом имеем, что $\tilde{M}$ — нормальная модель в $\underline{M}/\approx$.

Теорема 51.1 (О нормализации). *Если $M \models Eq_\Omega$, то $M \equiv \tilde{M}$.*

Доказательство. Имеется сюръекция $\alpha : \underline{M} \to \underline{M}/\approx$ такая, что $\alpha(m) = \tilde{m}$. По построению:

1. $\alpha(c_{_M}) = c_{_{\tilde{M}}}$
2. $\alpha(f_{_M}(\vec{m})) = f_{_{\tilde{M}}}(\alpha \cdot \vec{m})$
3. $P_{_M}(\vec{m}) = P_{_{\tilde{M}}}(\alpha \cdot \vec{m})$

Так как в доказательстве теоремы из билета 48 нам была нужна только сюръективность, то, применив её, получим $|A|_{_M} = |\alpha \cdot A|_{_{\tilde{M}}}$. Таким образом, по определению $M \equiv \tilde{M}$ ■

52 Билет 52 (Теория в сигнатуре)

Определение 52.1. *Теорией в сигнатуре Ω называется любое множество замкнутых формул данной сигнатуры. Элементы теории называются её аксиомами.*

Определение 52.2. *Говорят, что теория T выполнима в модели M (M — модель теории T), если все формулы теории истинны в M.*

Определение 52.3. *Теория называется выполнимой (совместной), если она имеет модель.*

53 Билет 53 (Логическое следование, полные теории)

Определение 53.1. *Пусть T — теория, A — замкнутая формула в сигнатуре данной теории. Говорят, что A логически (семантически) следует из T, если A истинна во всех моделях T. Обозначение: $T \models A$.*

Определение 53.2. *Теория T называется полной, если для любой замкнутой формулы A её сигнатуры либо A, либо $\neg A$ логически следует из T, то есть либо формула истинна, либо её отрицание истинно в любой модели данной теории.*

Определение 53.3. *Элементарной теорией модели называется множество всех замкнутых формул данной сигнатуры, которые истинны в этой модели. Обозначение: $Th(M)$.*

Определение 53.4. *Теории T_1 и T_2 одной сигнатуры называются эквивалентными, если они имеют одни и те же модели. Обозначение: $T_1 \sim T_2$.*

Определение 53.5. *Логическим замыканием теории T называется множество $[T] = \{A |\ T \models A\}$.*

Утверждение 53.1. *Пусть T — выполнимия теория, тогда следующие условия равносильны:*

1. *T полна*
2. *Любое выполнимое расширение теории T эквивалентно T*
3. *$[T] = Th(M)$ для некоторой модели M*
4. *Все модели T элементарно эквивалентны.*

Доказательство.

1. $1 \implies 2$ Пусть T — полная теория. Предположим, что $T \subseteq T'$ и $T \not\sim T'$, тогда $[T] \subseteq [T']$ и существует замкнутая формула A такая, что $T' \models A$ и $T \not\models A$. В силу полноты теории T имеем $T \models \neg A$, тогда $T' \models \neg A$, но $T' \models A$, значит, T' невыполнима — противоречие.

2. $2 \implies 3$ Пусть любое выполнимое расширение теории T эквивалентно T. Пусть $M \models T$ (M — модель теории T), тогда $T \subseteq Th(M)$. По определению $Th(M)$ выполнима, тогда по пункту 2 $Th(M) \sim T$, а значит, $Th(M) = [T]$ по определению.

3. $3 \implies 4$ Пусть $[T] = Th(M)$ для некоторой модели M. Пусть M' — модель теории T, тогда любая замкнутая формула, истинная в теории T, истинна в M', значит, $Th(M) = [T] \subseteq Th(M')$. Пусть формула A истинна в M' и ложна в M. $A \in Th(M')$ и $A \notin Th(M) = [T] \subseteq Th(M')$ — противоречие. Значит, $Th(M') = Th(M)$, то есть по определению $M \equiv M'$.

4. $4 \implies 1$ Пусть все модели теории T элементарно эквивалентны и теория T не полна. Тогда существует формула A такая, что $T \not\models A$, то есть теории $T \cup \{\neg A\}$ и $T \cup \{A\}$ выполнимы. Их модели будут моделями теории T. Они не будут элементарно эквивалентны — противоречие.

■

54 Билет 54 (Конечно аксиоматизируемые теории, сильно категорчные теории)

Определение 54.1. *Теория T называется конечно аксиоматизируемой, если она эквивалентна некоторой конечной теории.*

Определение 54.2. *Теория T называется сильно категоричной, если все её модели изоморфны.*

Утверждение 54.1. *Любая сильно категоричная теория полна.*

Доказательство. Так как у сильно категоричной теории все модели изоморфны, то они элементарно эквивалентны по теореме из билета 49. А по утверждению из билета 53 эта теория полна. ■

Теорема 54.1. *В конечной сигнатуре с равенством любая элементарная теория конечной модели конечно аксиоматизируема и сильно категорична.*

Доказательство. Пусть M — конечная модель конечной сигнатуры Ω. Построим формулу, которая полностью описывает M. Пусть $\underline{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Рассмотрим $A_M = \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi_M(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\psi_M(a_1, \ldots, a_n) = \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ((a_i \neq a_j) \wedge (\forall x_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (x_{n+1} = a_i))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge(\{c = a_i | c \in Const_\Omega,\ M \models (c = m_i)))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge\{f^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = a_j | f^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \in Fun_\Omega,\ M \models (f^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = m_j)\})\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge\{P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) | P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \in Pred_\Omega,\ M \models (P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}))\})\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge\{\neg P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) | P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \in Pred_\Omega,\ M \not\models (P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}))\})$$

Лемма 54.1. *Если M' — нормальная модель сигнатуры Ω, то $M' \models A_M \iff M' \cong M$.*

Доказательство. $\Longleftarrow$ Проверим определение истинности формулы A_M в модели M:

1. Все m_i различны.
2. Каждый элемент из M равен одному из m_i, так как $\underline{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$.
3. Очевидно.
4. Очевидно.
5. Очевидно.
6. Очевидно.

Знпчит, $M \models A_M$, а так как $M' \cong M$, то $M' \models A_M$ по теореме из билета 48.
$\Longrightarrow$ Пусть $M' \models A_M$, то есть существуе набор $\{m'_1, \ldots, m'_n\}$ такой, что $M' \models \psi_M(m'_1, \ldots, m'_n)$. Докажем, что отображение φ, переводящее m'_i в m_i — изоморфизм моделей M и M'.

$$\psi_M(m'_1, \ldots, m'_n) = \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ((m'_i \neq m'_j) \wedge (\forall x_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (x_{n+1} = m'_i))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge(\{c = m_i' | c \in Const_\Omega,\ M \models (c = m_i)))\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge\{f^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = a_j | f \in Fun_\Omega,\ M \models (f^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = m_j)\})\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge\{P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) | P \in Pred_\Omega,\ M \models (P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}))\})\wedge$$

$$\wedge(\bigwedge\{\neg P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) | P \in Pred_\Omega,\ M \not\models (P^k(m_{i_1}', \ldots, m_{i_k}'))\})$$

1. Биекция очевидна.

2. Константы сохраняются.

3. Операции сохраняются.

4. Значения предикатов сохраняются.

■

1. Докажем конечную аксиоматизируемость. По лемме выше $A_M \in Th(M)$, а также $M' \models Th(M) \implies M' \models A_M$.
   Обратное включение: пусть $M' \models A_M$. Так как по лемме $M' \cong M$, то $M' \models Th(M)$ $\implies A_M \sim Th(M)$.

2. Докажем сильную категоричность. Так как $A_M \sim Th(M)$, то любая модель, в которой будет истинна формула A_M, будет моделью теории, а по лемме она изоморфна модели M. Значит, все модели изоморфны. Тогда по определению теория T сильно категорична.

■

Следствие 54.1.1. *Если M — конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.*

Доказательство. Рассмотрим элементарную теорию T конечной модели M. По теореме она сильно категорична, а значит, любая её модель элементарно эквивалентна M. Так как $M' \equiv M$, то $Th(M') = Th(M) = [T]$ (так как сильно категоричная теория полна), значит, по определению M' — модель T, а значит, по лемме $M' \cong M$. ■

55 Билет 55 (Теоерма Гёделя (формулировка и следствие))

Определение 55.1. *Теория локально выполнима, если любое её конечное подмножество выполнимо.*

Теорема 55.1 (Теорема компактности (Гёдель))**.** *Если любое конечное подмножество теории T выполнимо, то теория T выполнима.*

Следствие 55.1.1. *Если теория имеет модели неограниченной мощности, то она имеет бесконечную модель.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $A_{\geqslant n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \neq x_j)$
Заметим, что любая модель $A_{\geqslant n}$ имеет мощность больше либо равную n.
Пусть $T' = T \cup \{A_{\geqslant n} | n \geqslant 2\}$. Пусть $S \subseteq T'$ — конечная теория, тогда S содержит конечное число формул, то есть $S \subseteq T \cup \{A_{\geqslant n} | 2 \leqslant n \leqslant k\}$
Теория $T \cup \{A_{\geqslant n} | 2 \leqslant n \leqslant k\}$ выполнима, так как теория T выпонима (существует модель любой мощности, а значит, и мощности большей k). По теореме Гёделя теория T' выполнима, а значит, если $M \models T'$, то M — бесконечная модель T. ∎

56 Билет 56 (Основные вспомогательные понятия для теоремы Гёделя)

Определение 56.1. *Таблица — пара теорий* (Γ, Δ) *сигнатуры* Ω^+*, в которых встречается конечное число новых констант.* $\Omega^+ = \Omega \cup \{c_n | n \in \omega\}$.

Определение 56.2. *Множество всех констант в таблице* (Γ, Δ) *обозначается* $C_{(\Gamma, \Delta)}$.

Определение 56.3. $M \models (\Gamma, \Delta)$ *(*M *— модель таблицы* (Γ, Δ)*), если* $M \models \Gamma$ *и* $M \models \{\neg A | A \in \Delta\}$.

Определение 56.4. *Таблица выполнима, если она имеет модель.*

Определение 56.5. *Таблица* (Γ_1, Δ_1) *включена в таблицу* (Γ, Δ)*, если* $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ *и* $\Delta_1 \subseteq \Delta$*. Обозначение:* $(\Gamma_1, \Delta_1) \subseteq (\Gamma, \Delta)$.

Определение 56.6. *Таблица* (Γ, Δ) *называется локально выполнимой, если любая конечная таблица* $(\Gamma_1, \Delta_1) \subseteq (\Gamma, \Delta)$ *выполнима.*

Определение 56.7. *Таблица* (Γ, Δ) *называетя тупиковой, если она локально невыполнима.*

Определение 56.8. *Дерево — это частично упорядоченное множество* $(X, \leqslant)$ *с наименьшим элементом, называемым корнем, со следующим свойством: каждое множество* $\{y | r \leqslant y \leqslant x\}$ *(*r *— корень дерева) конечно и линейно упорядочено отношением* $\leqslant$.

Определение 56.9. *Лист дерева — это его максимальный элемент.*

Определение 56.10. *Дерево таблиц — отображение* δ *из дерева в множество таблиц, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. $\delta(r) = (\Gamma_0, \varnothing)$

2. *В тупиковые таблицы отображаются только листья.*

3. *Если* $x \leqslant y$, *то* $\delta(x) \subseteq \delta(y)$.

Определение 56.11. *Следующие формулы называем разобранными:*

1. $\neg A \in \Gamma$ *разобрана, если* $A \in \Delta$

2. $\neg A \in \Delta$ *разобрана, если* $A \in \Gamma$

3. $(A \vee B) \in \Gamma$ *разобрана, если* $A \in \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$

4. $(A \vee B) \in \Delta$ *разобрана, если* $A \in \Delta$ *или* $B \in \Delta$

5. $\exists x A(x) \in \Gamma$ *разобрана, если* $A(d) \in \Gamma$ *для некоторой константы* d.

6. $\exists x A(x) \in \Delta$ *разобрана, если* $A(d) \in \Delta$ *для всех констант* $d \in C_{(\Gamma,\Delta)}$.

Определение 56.12. *Разбор формул в листе дерева таблиц.*

1. *Если* $\neg A \in \Gamma$ *не разобрана, то добавим новый лист с таблицей* $(\Gamma, \Delta \cup \{A\})$.

2. *Если* $\neg A \in \Delta$ *не разобрана, то добавим новый лист с таблицей* $(\Gamma \cup \{A\}, \Delta)$.

3. *Если* $(A \vee B) \in \Gamma$ *не разобрана, то добавим 2 листа с таблицами* $(\Gamma \cup \{A\}, \Delta)$, $(\Gamma \cup \{B\}, \Delta)$.

4. *Если* $(A \vee B) \in \Delta$ *не разобрана, то добавим 2 листа с таблицами* $(\Gamma, \Delta \cup \{A\})$, $(\Gamma, \Delta \cup \{B\})$.

5. *Если формула* $\exists x A(x) \in \Gamma$ *не разобрана, то добавляем лист с таблицей* $(\Gamma \cup \{A(d)\}, \Delta)$ *для первой свободной константы* $d \in C_{(\Gamma,\Delta)}$.

6. *Если формула* $\exists x A(x) \in \Delta$ *не разобрана, то добавляем лист с таблицей* $(\Gamma, \Delta \cup \{A(d) | d \in C_{(\Gamma,\Delta)}\})$.

Лемма 56.1. *При разборе формул сохраняется локальная выполнимость в новой таблице, если она одна, и хотя бы в одной из новых таблиц, если их две.*

Доказательство. Разберём случаи:

1. $\neg A \in \Gamma$, добавляем лист с таблицей $(\Gamma, \Delta \cup \{A\})$. Так как таблица (Γ, Δ) локально выполнима и $\neg A \in \Gamma$, то существует модель M такая, что $M \models \Gamma$ и $M \models \{\neg B | B \in \Delta\}$. Значит, $M \models \neg A$, а значит, $M \models \{\neg B | B \in (\Delta \cup \{A\})\}$. Значит, новая таблица локально выполнима.

2. Аналогично, только все Γ меняются на Δ и на оборот.

3. $(A \vee B) \in \Gamma$, добавляем 2 листа с таблицами $(\Gamma \cup \{A\}, \Delta)$, $(\Gamma \cup \{B\}, \Delta)$. Предположим, что обе таблицы локально невыполнимы, тогда существуют таблицы $(X \cup \{A\}, Y)$ и $(X \cup \{B\}, Y)$, которые невыполнимы и $X \subseteq \Gamma$, $Y \subseteq \Delta$. Но таблица (Γ, Δ) локально выполнима и $(A \vee B) \in \Gamma$, значит, существует модель $M \models (X \cup \{(A \vee B)\}, Y\} \implies M \models A \vee B \Leftrightarrow M \models A$ или $M \models B$. То есть либо M — модель первой таблицы, либо M — модель второй таблицы.

4. Аналогично, только $M \models \{X, Y \cup \{A \vee B\}\}$.

5. $\exists x A(x)$, добавляем лист с таблицей $(\Gamma \cup \{A(d)\}, \Delta)$ для первой свободной константы $d \in C_{(\Gamma,\Delta)}$. Предположим, что она локально невыполнима, тогда найдутся $X \subseteq \Gamma$, $Y \subseteq \Delta$ такие, что $(X \cup \{A(d)\}, Y)$ невыполнима. Но (Γ, Δ) локально выполнима и $\exists x A(x) \in \Gamma$, тогда $(X \cup \{\exists x A(x)\}, Y)$ выполнима, то есть существует модель $M \models (X \cup \{\exists x A(x)\}, Y)$, значит, $M \models \exists x A(x)$, то есть для некоторого m $M \models A(m)$. Зададим интерпретацию $d \to m$, тогда $M_1 \models (X \cup \{A(d)\}, Y)$ — противоречие.

6. Аналогично, только $M \models (X, Y \cup \{A(d) | d \in C_{(\Gamma,\Delta)}\})$.

■

Лемма 56.2. *Если в локально выполнимой таблице все формулы разобраны, то она выполнима.*

Доказательство. Пусть (Γ, Δ) — локально выполнимая таблица. Построим модель M с носителем $C_{(\Gamma,\Delta)}$. $M \models P(d_1, \ldots, d_k) \Leftrightarrow P(d_1, \ldots, d_k) \in \Gamma$ и значение каждой константы есть само d. Покажем, что M — модель таблицы.

1. База индукци: если $A = P(d_1, \ldots, d_k)$ — атомарная формула, то по определению M имеем, что $M \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$, значит, $M \not\models A \Leftrightarrow A \notin \Gamma$.

2. $A = B \vee C \in \Gamma$, $M \models B \vee C \iff M \models B$ или $M \models C$. Так как $A = B \vee C \in \Gamma$, то одно из формул B и C принадлежит Γ, иначе не выполнялась бы истинность формулы A. Пусть $B \in \Gamma$, тогда по предположению индукции $M \models B$, а значит, по определению дизъюнкции $M \models B \vee C$, то есть $M \models A$

3. $A = B \vee C \in \Delta$, $M \not\models (B \vee C) \iff M \not\models B$ и $M \not\models C$. Так как $A = B \vee C \in \Delta$, то обе формулы B и C принадлежат Δ, иначе не выполнялась бы ложность формулы A. По предположению индукции $M \not\models B$ и $M \not\models C$, а значит, по определению дизъюнкции $M \not\models B \vee C$, то есть $M \not\models A$.

4. $A = \neg B \in \Gamma$, тогда $M \models \neg B \iff M \not\models B$. По правилам разбора формул имеем, что $B \in \Delta$, а значит, $M \not\models B$, то есть $M \models \neg B \implies M \models A$.

5. Для случая $A = \neg B \in \Delta$ аналогично.

6. $A = \exists x B(x) \in \Gamma$, тогда по определению разобранной формулы $A \in \Gamma \implies B(c) \in \Gamma$ для некоторого $c \in C_{(\Gamma,\Delta)}$. По предположению индукции $M \models B(c)$, а значит, $M \models A$.

7. $A = \exists x B(x) \in \Delta$, тогда по определению разобранной формулы $A \in \Delta \implies B(c) \in \Gamma$ для всех $c \in C_{(\Gamma,\Delta)}$. По предположению индукции $M \not\models B(c)$ для всех $c \in C_{(\Gamma,\Delta)}$, а значит, $M \not\models A$.

■

57 Билет 57 (Теорема компактности (доказательство), Лемма Кёнига)

Теорема 57.1 (Теорема компактности (Гёдель))**.** *Если любое конечное подмножество теории T выполнимо, то теория T выполнима.*

Доказательство. Последовательно строим дерево, добавляя листья на каждом шаге. Таким образом получаем точки x_n и таблицы (Γ_n, Δ_n). Занумеруем все пары вида (n, A), где $n \in \omega$, A — предложение из Ω^+, такие, что номер пары (n, A) больше n.
Назовём пару (n, A) закрытой на некотором шаге построения, если формула A разобрана во всех локально выполнимых таблицах, стоящих в листьях с номерами $y \geqslant x_n$, или если A содержит константы, не входящие в (Γ_n, Δ_n). Таким образом, если все таблицы листьев над x_n оказались тупиковыми, то пара (n, A) считается закрытой.

Алгоритм 57.1 (Процесс построения дерева)**.** *На каждом очередном шаге выбираем первую незакрытую пару (n, A). Тогда (n, A) содержит константы только из таблицы (Γ_n, Δ_n).*
Разбираем A во всех локально выполнимых листьях выше x_n, которые имеются на данном шаге. В новом дереве пара (n, A) окажется закрытой. Если в дереве появилась локально выполнимая таблица, где все формулы разобраны, то процесс останавливается.

Определение 57.1. *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, x, $y \in X$. Если $x < y$ и $\{z | x < z < y\} = \varnothing$, то говорят, что y следует за x. Обозначение: $x < \cdot y$.*

Определение 57.2. *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Ветвление в точке — число следующих за ней элементов из X.*

Определение 57.3. *Путь или ветвь в дереве $(X, \leqslant)$ — это конечная или бесконечная последовательность точек x_0, x_1, ... со следующими свойствами:*

1. *$x_0 = x$*

2. *если x_i — не последний член последовательности, то $x_i < \cdot x_{i+1}$*

Утверждение 57.1. *Если $(X, \leqslant)$ — дерево с конечным ветвлением в каждой точке, то следующие условия равносильны:*

1. *В X есть пути из корня сколь угодно большой конечной длины*

2. *X бесконечно*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Предположим что X конечно, тогда максимальная длина пути будет равна n, где $n = |X|$. $\Longleftarrow$ Пусть длина всех путей ограничена числом n, а число точек, следующих за данной, не превосходит m, тогда число вершин в таком дереве $m^{n-1} + 1$, то есть их конечное число — противоречие. ■

Теорема 57.2 (Лемма Кёнига)**.** *Пусть дано дерево $(X, \leqslant)$ с конечным ветвлением в каждой точке. Если в X есть пути сколь угодно большой длины, то есть и бесконечный путь.*

Доказательство.

Определение 57.4. *Назовём точку в дереве богатой, если из неё есть пути сколь угодно большой конечной длины, иначе назовём эту точку бедной.*

Построим по рекурсии бесконечный путь из точки x_0.

1. $r = x_0$.

2. Пусть x_0, ..., x_n уже построены и y_1, ..., y_n — точки, следующие за x_n. Предположим, что они все бедные, тогда для любой точке y_i длины выходящих из неё путей конечны и ограничены некоторым числом l_i, тогда длины всех путей, выходящих из x_n, ограничены числом $l_i + 1$. Так как все y_i бедные, то длина любого пути из x_n ограничена числом $\max(1 + l_1, \ldots, 1 + l_n)$, что противоречит, тому, что есть пути любой длины. Значит, одна из точек богатая, тогда добавим её в последовательность.

■

По лемме из билета 56 при добавлении новых таблиц, хотя бы одна из них локально выполнима. Предположим, что алгоритм не ограничен, тогда число локально выполнимых таблиц неограниченно растёт. На каждом шаге они образуют дерево. При объединении всех этих деревьев составим бесконечное дерево с конечным ветвлением в каждой точке. По лемме Кёнига существует бесконечный путь из локально выполнимых таблиц: $(\Gamma_0, \Delta_0) = (\Gamma^0, \Delta^0) < \cdot(\Gamma^1, \Delta^1) < \cdot \ldots$. Рассмотрим таблицу $(\Gamma, \Delta) = (\bigcup\limits_n \Gamma^n, \bigcup\limits_n \Delta^n)$. Эта таблица локально выполнима.
Докажем, что все формулы данной таблицы разобраны.

1. Пусть $A \in \Gamma$, тогда $A \in \Gamma^n$ для некоторого n. $(\Gamma^n, \Delta^n) = (\Gamma_k, \Delta_k)$. Поскольку построение дерева не ограничено, то на каком-то шаге пара (k, A) закроется, то есть A окажется разобранной во всех листьях данного шага, а значит, A будет разобранной в некоторой паре (Γ_m, Δ_m) для некоторого $m \geqslant n$, а значит, и в большей паре (Γ, Δ).

2. Аналогично для всех случаев $A \in \Delta$, кроме $A = \exists x B(x)$.

3. Пусть $A = \exists x B(x) \in \Delta$. Если $d \in C_{(\Gamma, \Delta)}$, то $d \in C_{(\Gamma^n, \Delta^n)}$ для некоторого n. Тогда по аналогии с пунктом 1 A будет разобранной в некоторой паре (Γ^m, Δ^m) для некоторого $m \geqslant n$, значит, $B(d) \in \Delta^m \subseteq \Delta$.

Тогда по лемме из билета 56 имеем, что таблица (Γ, Δ) выполнима. ■

58 Билет 58 (Теорема компактности для теории с равенством)

Теорема 58.1. *Если теория с равенством локально выполнима в нормальных моделях, то она выполнима в нормальных моделях.*

Доказательство. Пусть дана теория T с равенством, которая локально выполнима в нормальных моделях сигнатуры Ω, тогда $T' = T \cup Eq_\Omega$, так как Eq_Ω верна в нормальных моделях. По теореме компактности теория T' выполнима, значит, по теореме о нормализации из билета 51 имеем, что любая модель T' элементарно эквивалентна нормальной модели, значит, T' имеет нормальную модель $\Longrightarrow T$ имеет нормальную модель, значит, она выполнима в нормальных моделях. ■

59 Билет 59 (Простые формулы)

Определение 59.1. *Назовём формулу простой, если она построена из атомарных формул вида* $f(u_1, \ldots, u_k) = v$ *или* $P(u_1, \ldots, u_k)$, *где* $f \in Fun_\Omega$, $P \in Pred_\Omega$, v, u_1, …, u_k *— либо константы, либо переменные.*

Теорема 59.1. *Пусть Ω — сигнатура с функциональными символами и равенством, T — теория с равенством. Тогда если любое конечное подмножество теории T выполнимо в нормальных моделях, то теория T выполнима в нормальных моделях.*

Доказательство. Заметим, что любую формулу можно заменить на эквивалентную простую формулу. Будем считать, что теория T состоит из проствых формул. Рассмотрим новую сигнатуру Ω_1, в которой каждый f^n из сигнатуры Ω заменим на Q_f^{n+1} в сигнатуре Ω_1. Тогда заменим все атомарные формулы, из которых состоят формулы теории T, так: $f^n(u_1, \ldots, u_n) = v$ заменяем на $Q_f(u_1, \ldots, u_n, v)$.
Добавим к теории T новые аксиомы:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! y \; Q_f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Таким образом, получим теорию T_1, она локально выполнима, значит, по теореме Гёделя она выполнима. Теперь превращаем модель сигнатуры Ω_1 теории T_1 в модель сигнатуры Ω для теории T. ■

60 Билет 60 (Слабая теорема о повышении мощности)

Теорема 60.1. *Если теория имеет бесконечную модель, то имеет модель сколь угодно большой мощности.*

Доказательство. Пусть M — бесконечная модель, k — кардинал. Добавим к существующей сигнатуре Ω множество констант $\{c_\alpha | \alpha < k\}$. В новой сигнатуре Ω^+ рассмотрим теорию $T^+ = T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta | \alpha < \beta < k\}$.
Любая конечная теория $T' \subset T^+$ содержится в некоторой теории $T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta | \alpha, \beta \in I \subseteq k\}$. Последняя теория выполнима в модели M, к которой добавили интерпретацию констант c_α и остальных добавленных констант. По теореме компактности T^+ выполнима в некоторой модели M^+. Из формул теории видно, что $|M^+| \geqslant k$. Исключив из полученной модели интерпретацию новых констант, получим модель M_1 теории T, мощность которой не меньше k. ■

61 Билет 61 (Подмодель, элементарная подмодель, Тест Тарского-Вота)

Определение 61.1. *Пусть M и M' — модели сигнатуры Ω. M является подмоделью M', если*

1. $\underline{M} \subseteq \underline{M'}$.

2. $\forall c \in Const_\Omega \ c_{_M} = c_{_{M'}}$.

3. $\forall f \in Pred_\Omega$ *и* $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$ $M \models P^n(m_1, \ldots, m_k) \Leftrightarrow M' \models P^n(m_1, \ldots, m_k)$.

4. $\forall f \in Fun_\Omega$ *и* $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$ $M \models f^n(m_1, \ldots, m_k) = m \Leftrightarrow M' \models f^n(m_1, \ldots, m_k) = m$.

Обозначение: $M \subseteq M'$

Определение 61.2. *Пусть M и M' — модели сигнатуры Ω. M является элементарной подмоделью M', если*

1. $M \subseteq M'$.

2. $M \models A \Leftrightarrow M' \models A$ *для любой формулы A, оценённой в M.*

Обозначение: $M \prec M'$.

Лемма 61.1 (Тест Тарского-Вота)**.** *Пусть M и M' — модели сигнатуры Ω. Пусть для любой оценки в M формулы $\exists x B(x)$ выполнено условие: если $M' \models \exists x B(x)$, то $M' \models B(m)$ для некоторого $m \in M$. Тогда $M \prec M'$.*

Доказательство. Проведём индукцию по числу связок и кванторов в формуле A.
База индукции: A — атомарная формула, тогда по определению подмодели $M \models A \Leftrightarrow M' \models A$. Шаг индукции: разберём 3 случая:

1. $A = B \vee C$, эта формула истинна в модели M тогда и только тогда, когда истинна хотя бы одна из формул A и B в этой модели. По предположению индукции $M \models B \Leftrightarrow M' \models B$ и $M \models C \Leftrightarrow M' \models C$. Значит, $M \models A \Leftrightarrow M' \models A$.

2. $A = \neg B$. A истинна в модели M тогда и только тогда, когда B ложна в этой модели, а по предположению индукции $M \models B \Leftrightarrow M' \models B$, значит, $M \not\models B \Leftrightarrow M' \not\models B$. Таким образом, $M \models A \Leftrightarrow M' \models A$.

3. $A = \exists x B(x)$

   (a) Пусть $M \models A$, тогда $M \models B(m)$ для некоторого $m \in M$. По предположению индукции $M \models B(m) \Leftrightarrow M' \models B(m)$, значит, по определению $M' \models A$.

   (b) Пусть $M' \models A$, тогда по условию $M' \models B(m)$ для некоторого $m \in M$. По предположению индукции $M \models B(m) \Leftrightarrow M' \models B(m) \Longrightarrow M \models A$.

Таким образом, $M \models A \Leftrightarrow M' \models A$ для любой формулы A, оценённой в M, значит, по определению $M \prec M'$. ■

62 Билет 62 (Теорема Лёвенгейма-Сколема-Тарского о понижении мощности)

Теорема 62.1. *Пусть M — модель сигнатуры Ω, $k = |Fm_\Omega|$ (мощность множества формул в сигнатуре), тогда M имеет элементарную подмодель мощности меньше либо равной k.*

Доказательство. Построим носитель искомой модели по рекурсии.
$D_0 = \{c_{_M} | c \in Const_\Omega\}$. Если $Const_\Omega$ пусто, то выберем $D_0 = \{m_0\}$, где m_0 — произвольный элемент из M.
Пусть построен D_n, тогда для каждой формулы, оценённой в D_n, если $M \models \exists x A(x)$, то $\{m | M \models A(m)\}$ не пусто. По аксиоме выбора можем выбрать элемент $m_{_A}$. Положим $D_{n+1} = D_n \cup \{m_{_A} | M \models \exists x A(x)\}$.
Заметим, что мощность множества всех формул равна мощности алфавита. Тогда $|D_0| \leqslant k$. Это будет база индукции.
Шаг индукции: пусть $|D_n| \leqslant k$. При построении D_n−оценённых формул к алфавиту добавится не более k символов и его мощность не изменится, значит, $|D_{n+1} \setminus D_n| \leqslant k$, а значит, $|D_{n+1}| \leqslant k$.
Возьмём $D = \bigcup\limits_n D_n$ и рассмотрим подмодель $M' \subseteq M$ с носителем D, тогда $|D| \leqslant k$, так как это счётное объединение множеств мощности $\leqslant k$, значит, $|D| \leqslant \aleph_0 \cdot k = k$.
По лемме из билета 61 (тест Тарского-Вота) $M' \prec M$. ∎

63 Билет 63 (Теорема Лёвенгейма-Сколема-Тарского о повышении мощности)

Теорема 63.1. *Если теория в конечной или счётной сигнатуре имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной мощности.*

Доказательство. По аналогии с билетом 60. Пусть M — бесконечная модель, k — бесконечный кардинал. Добавим к существующей сигнатуре Ω множество констант $\{c_\alpha | \alpha < k\}$.
В новой сигнатуре Ω^+ рассмотрим теорию $T^+ = T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta | \alpha < \beta < k\}$.
Причём $|Fm_\Omega| \leqslant k$, значит, по теореме из билета 62 существует $M' \prec M$, мощность которой не больше k. Но тогда $M' \models T^+$, а значит, из поостроения $|M'| \geqslant k$. Таким образом $|M'| = k$. Искдючим из модели M' добавленные константы и получим модель $M'' \models T$, и её мощность равна k в сигнатуре Ω. ∎

64 Билет 64 (Признак полноты Лося-Вота)

Определение 64.1. *Пусть k — бесконечный кардинал. Теория называется k-категоричной (категоричной в мощности k), если все её модели мощности k изоморфны.*

Теорема 64.1. *Пусть T — теория в конечной или счётной сигнатуре, не имеющая конечных моделей, k — бесконечный кардинал. Если все модели T изоморфны, то T полна.*

Доказательство. Предположим противное, пусть T не полна, тогда существует формула A, замкнутая в сигнатуре данной теории, такая, что $T \not\models A$ и $T \not\models \neg A$. Значит, теории $T_1 = T \cup \{\neg A\}$ и $T_2 = T \cup \{A\}$ выполнимы. Модель теории T_1 является и моделью T, а по условию она бесконечна. По теореме из билета 63 имеем, что существует модель $M_1 \models T_1$ такая, что $|M_1| = k$. Аналогично $M_2 \models T_2$ и $|M_2| = k$. Так как обе модели также являются моделями теории T, то по условию они изоморфны, то есть $M_1 \cong M_2$. С другой стороны, $M_1 \models \neg A$, $M_2 \models A$ — противоречие. ∎

65 Билет 65 (Теория категоричная во всех бесконечных мощностях)

Пример 5. *Рассмотрим сигнатуру $\{=\}$ и модели, которыми будут являться обычные множества. Рассмотрим теорию $T_1 = \{A_{>n} | n > 0\}$, где $M \models A_{>n} \Leftrightarrow |M| > n$.*
T_1 называется теорией бесконечных множеств. Очевидно, что здесь все модели бесконечны, а модели с одинаковыми мощностями биективны, а значит, изоморфны, то есть данная теория категорична во всех бесконечных мощностях по определению.

66 Билет 66 (Теорема Кантора)

Определение 66.1. *Рассмотрим сигнатуру $\{<^2, =\}$ и модели — множества с двуместным предикатом (отношением). Рассмотрим теорию T_2 с аксиомами:*

1. $\forall x \neg(x < x)$ *(иррефлексивность)*
2. $\forall x \forall y \forall z((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z))$ *(транзитивность)*
3. $\forall x \forall y((x < y) \vee (y < x) \vee (x = y))$
4. $\forall x \exists y(x < y)$
5. $\forall y \exists x(x < y)$
6. $\forall x \forall y \exists z((x < y) \rightarrow ((x < z) \wedge (z < y)))$*(плотность)*

Данная теория называется теорией неограниченных плотных линейных порядков.

Теорема 66.1 (Теорема Кантора)**.** *Все счётные модели теории неограниченных плотных линейных порядков изоморфны* $(Q, <, =)$.

Доказательство. Построим по рекурсии изоморфизм моделей $(M, <, =)$ и $(M', <, =)$.
База: выбираем $m_0 \in M$ и $m'_0 \in M'$.
Пусть уже выбраны $m_0, \ldots, m_n \in M$ и $m'_0, \ldots, m'_n \in M'$ такие, что $(m_i < m_j) \Leftrightarrow (m'_i < m'_j)$.

1. Если n чётно, то выбираем $m_{n+1} \in M$ как первый из оставшихся и выбираем аналогичный ему $m'_{n+1} \in M'$. Это можно сделать из аксиом теории T_2.

2. Если n нечётно, то сначала выбираем $m'_{n+1} \in M'$, а потом соответствующий ему $m_{n+1} \in M$.

После счётного числа шагов все элементы обеих моделей будут выбраны. Тогда отображение $m_n \to m'_n$ — искомый изоморфизм. ■

Утверждение 66.1. *Теория T_2 не категорична в несчётных мощностях.*

Доказательство. Рассмотрим кардинал $k > \aleph_0$. Построим k копий рациональной прямой друг за другом (лексикографическое произведение) $(Q, <) \cdot (Q, <)$.
Построим модели $M_1 = (Q \times k, <)$, $M_2 = (Q \times k, >)$ с обратным порядком. Все аксиомы теории T_2 выполнены в этих моделях, значит, M_1 и M_2 — модели теории T_2. Их мощность $\aleph_0 \cdot k = k$. Докажем, что эти модели не изоморфны.
В M_1 рассмотрим какой-нибудь начальный отрезок $\{y | y < x\}$, тогда при наличии изоморфизма он должен перейти в некоторый начальный отрезок $\{y | y > z\}$ модели M_2. Пусть $x = (r, \alpha)$, тогда разобьём отрезок $\{y | y < x\}$ на 2 части:

1. Множество точек вида (s, β), где $\beta < \alpha$ будет равно $Q \times \{\beta | \beta < \alpha\} = Q \times \alpha$. Мощность этого множества равна $\aleph_0 \cdot |\alpha| = \max(\aleph_0, |\alpha|)$, но $|\alpha| < k$, так как k — кардинал. Значит, $|Q \times \{\beta | \beta < \alpha\}| < k$

2. Множество точек вида (s, α), где $s < r$, счётно.

Из этих двух пунктов следует, что $|\{y | y < x\}| < k$. Аналогично $|\{y | y < z\}| < k$.
$\{y | y < z\} \cup \{z\} \cup \{y | y > z\}$ — это вся модель M_2. Так как $|M_2| = k$, значит, в силу предыдущей строчки $|\{y | y > z\}| = k$. Значит, $M_1 \ncong M_2$. ■

67 Билет 67 (Пример теории, которая категорична только в несчётных мощностях)

Пример 6. *Рассмотрим сигнатуру $\{S^1, =\}$, где S — функциональный символ, и модели — множества с одноместной функцией. Рассмотрим теорию T_3 со следующими аксиомами:*

1. $\forall x \exists! y (S(y) = x)$ *(биективность)*
2. $\forall x (S^n(x) \neq x)$ *при всех* $n > 0$

Определение 67.1. *Орбитой элемента b называется множество $\{S^n(b) | n > 0\}$.*

Утверждение 67.1.

1. *Все орбиты счётны.*
2. *Теория T_3 не имеет конечных моделей.*
3. *Различные орбиты не пересекаются.*
4. $|M| = \aleph_0 \cdot |O(M)|$, *где $O(M)$ — множество орбит модели M.*
5. T_3 *k-категорична при $k > \aleph_0$.*
6. T_3 *не $\aleph_0$-категорична.*

Доказательство.

1. по второй аксиоме теории T_3 $\forall x (S^n(x) \neq x)$ при всех $n > 0$, а значит, $(S^n(b) \neq b)$ при всех $n > 0$. Пусть $S^n(b) = S^m(b)$ и $m > n$, тогда рассмотрим S^{-n} (S^{-1} существует по первой аксиоме теории, а S^n — n итераций функции S). Значит, $S^{m-n}(b) = b$ — противоречие.

2. Так как $f^n(b)$ при фиксированном b принимает при различных n различные значения, то множество формул для каждой модели счётно, значит, все модели счётны.

3. Пусть $S^n(b) = S^m(c)$, тогда $S^{n-m}(b) = c$, значит, c лежит в орбите b. Таким образом, любые две орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.

4. Пусть X — множество, содержащее по одному элемменту из каждой орбиты (оно существует по аксиоме выбора), тогда $|X| = |O(M)|$. Тогда $\underline{M} = \{f^n(b) | n \in \mathbb{Z},\ b \in X\} \sim \mathbb{Z} \times X$. Значит, $|M| = \aleph_0 \cdot |O(M)|$.

5. Если M и M' — модели теории T_3 и $|M| = |M'| = k$, то по предыдущему пункту $|O(M)| = |O(M')| = k$. Докажем, что $M \cong M'$. Пусть X и X' — множества, содержащие по одному элементу каждой орбиты моделей M и M' соответственно, и пусть $g : X \to X'$ — биекция. Тогда положим $g(S^n(b)) = S^n(g(b))$ и тем самым получим нужную биекцию из $M \to M'$. Значит, по определению теория T_3 k-категорична.

6. Рассмотрим модель M_1 с одной орбитой $(\mathbb{Z}, S)$, где $S(x) = x+1$, и модель M_2 с двумя орбитами $(\mathbb{Z}, S)$, где $S^n(x) = x+2$, будет 2 орбиты — множество чётных и множество нечётных чисел. Они счётны и неизоморфны. Значит, T_3 не $\aleph_0$-категорична.

∎

68 Билет 68 (Теорема Морли)

Теорема 68.1. *Если теория счётной сигнатуры k-категорична для некоторого несчётного k, то она k-категорична для всех несчётных k.*

69 Билет 69 (Нестандартные модели арифметики)

Определение 69.1. *Рссмотрим сигнатуру $\Omega = \{0, 1, +, \cdot, =\}$ и стандартную модель натуральных чисел $\mathbb{N} = \{\omega, 0, 1, +, \cdot, =\}$. Рассмотрим теорию $T = Th(\mathbb{N}) \cup \{c | c \neq 0,\ c \neq 1,\ c \neq 2,\ \ldots\}$. Модель данной теории назовём нестандартной моделью арифметики.*

Теорема 69.1. *Такая модель M существует, $M \equiv \mathbb{N}$, но $M \ncong \mathbb{N}$.*

Доказательство. Так как любая конечная теория $T' = Th(\mathbb{N} \cup \{c \neq 0,\ c \neq 1,\ \ldots,\ c \neq \overline{n})$ теории T выполнима, можно взять интерпретацию $c \to n+1$, то по теореме компактности теория T выполнима. Тогда у неё существует модель M. Тогда по теореме Лёвенгейма-Сколема-Тарского о понижении мощности теория T имеет не более чем счётную модель. По построению $M \models Th(\mathbb{N})$, значит, $M \equiv \mathbb{N}$.
Эта модель счётна, так как значения всех термов $\overline{n}$ различны.
Предположим, что α — изоморфизм M на $\mathbb{N}$, тогда проведём индукцию по n.
База индукции: $n = 0$, тогда $\alpha(|0|_{M}) = 0$.
Шаг индукции: пусть $\alpha(|\overline{n-1}|_{M}) = n - 1$, тогда $\alpha(|\overline{n}|_{M}) = \alpha(S_{M}(|\overline{n-1}|_{M}))$, где S_{M} — интерпретация функции следования в M. Так как α — изоморфизм, то он сохраняет функцию следования, значит, $\alpha(S_{M}(x)) = S(\alpha(x))$. Тогда в силу предположения индукции $\alpha(S_{M}(|\overline{n-1}|_{M})) = S(n-1) = n$ по построению.
По построению $M \models (c \neq \overline{n})$, значит, $|c|_{M} \neq \overline{n}$. Тогда $\alpha(|c|_{M}) \neq \alpha(\overline{n}) \implies \alpha(|c|_{M}) \neq n)$ для всех n — противоречие. ∎

Определение 69.2. *Элементы* $|\overline{n}|_{_M}$ *в модели* M *называются стандартными числами, а остальные элементы — нестандартными числами.*

Утверждение 69.1. *Нестандартные числа больше стандартных.*

Доказательство. Сначала докажем, что все стандартные числа образуют подмодель, изоморфную $\mathbb{N}$.
Обозначим эту подмодель N'. Из построения M видно, что если $N' \models A$, то $M \models A$. Пусть формула $\varphi(a)$ истинна в N', тогда $a = |\overline{n}|_{_M}$ и $\varphi(n)$ истинна в M. Из построения $N' \subseteq M$, значит, по определению $N' \prec M$.
Изоморфизм был уже построен в доказательстве теоремы: $\alpha(|\overline{n}|_{_M}) = n$.
Докажем, что любое нестандартное число бесконечно большое.
Определим порядок в теории $Th(\mathbb{N})$: $a < b = (a \neq b) \wedge (\exists x(a + x = b))$. Тогда $\mathbb{N} \models \forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$, это будет верно и для M, так как $\mathbb{N} \equiv M$. Если $M \models (m < \overline{n})$, то $M \models ((m = 0) \vee (m = 1) \vee \ldots \vee (m = \overline{n-1}))$. Значит, если $M \models (m \neq \overline{n})\ \forall\ \overline{n}$, то $M \models ((m < \overline{n}) \vee (m > \overline{n}))$. Первое невозможно, значит, $M \models (m > \overline{n})\ \forall\ \overline{n}$. В силу произвольности m это верно для всех m, а значит, все нестандартные числа больше стандартных. ■

70 Билет 70 (Исчисление предикатов, вывод и выводимость, правила Бернайса, теорема дедукции)

Определение 70.1. *Исчисление предикатов в сигнатуре* Ω *— это произвольная подстановка формул в классические тавтологии вместо переменных со следующими условиями (аксиомами):*

1. $\forall x([x/a]A) \longrightarrow [t/a]A$
2. $[t/a]A \longrightarrow \exists x[x/a]A$
3. $\forall x[x/a](A \to B) \longrightarrow (A \to \forall x[x/a]B)$, *если* $a \notin A$.
4. $\forall x[x/a](B \to A) \longrightarrow (\exists x[x/a]B \to A)$, *если* $a \notin A$.

Везде $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$.
Обозначение: PC_Ω.

Определение 70.2. *Правила вывода:*

1. $\frac{A \quad A \to B}{B}(MP)$ *(из формул* A *и* $A \to B$ *выводимо* B*)*
2. $\frac{A}{\forall x[x/a]A}(Gen)$ *(из* A *выводимо* $\forall x[x/a]A$, $x \notin A$*)*

Определение 70.3. *Пусть* Γ *— некоторое множество формул сигнатуры* Ω. *Вывод формулы* A *в* PC_Ω *из* Γ *— это конечная последовательность формул* $A_1, \ldots, A_n = A$, *где каждая формула удовлетворяет одному из условий:*

1. A_k *— аксиома*
2. $A_k \in \Gamma$
3. $\exists i, j < k$, *для которых* $A_j = A_i \to A_k$
4. $\exists i < k$ *и переменные* x *и* a *такие, что* $A_k = \exists x[x/a]A_i$

Определение 70.4. *Формула* A *выводима из* Γ, *если существует её вывод из* Γ. *Обозначение:* $\Gamma \vdash_{PC_\Omega} A$.

Лемма 70.1.

1. $\vdash (\forall x[x/a]A \to A)$ *(*$X \notin A$*)*
2. $\vdash (A \to \exists x[x/a]A)$ *(*$X \notin A$*)*
3. $\frac{A \to B}{A \to \forall x[x/a]B}$ *(*$(x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (a \notin A)$*) (первое ослабленное правило Бернайса)*
4. $\frac{B \to A}{\exists x[x/a]B \to A}$ *(*$(x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (a \notin A)$*) (второе ослабленное правило Бернайса)*

Доказательство.

1. Первая аксиома.
2. Вторая аксиома.
3. Пусть $\Gamma \vdash (A \to B)$, тогда по второму правилу вывода $\Gamma \vdash (\forall x[a/x](A \to B))$, а по аксиоме 3 $\Gamma \vdash (\forall x[a/x](A \to B)) \to (A \to (\forall x[x/a]B))$. А по первому правилу вывода $\Gamma \vdash (A \to (\forall x[x/a]B))$.
4. Пусть $\Gamma \vdash (B \to A)$, тогда по второму правилу вывода $\Gamma \vdash (\forall x[a/x](B \to A))$, а по аксиоме 4 $\Gamma \vdash (\forall x[a/x](B \to A)) \to (\exists x[x/a]B \to A)$. Значит, по первому правилу вывода $\Gamma \vdash (\exists x[x/a]B \to A)$.

■

Лемма 70.2. $\vdash ((Ky[y/a]A) \to (Kx[x/a]A))$, *где* K *— квантор,* $x, y \notin A$.

Доказательство.

1. По первому пункту предыдущей леммы $\vdash (\forall y[y/a]A) \to A$, тогда по пункту 3 предыдущей леммы $\vdash (\forall y[y/a]A) \to (\forall x[x/a]A)$.

2. По второму пункту предыдущей леммы $\vdash (\exists y[y/a]A) \to A$, тогда по пункту 4 предыдущей леммы $\vdash (\exists y[y/a]A) \to (\exists x[x/a]A)$.

$\blacksquare$

Теорема 70.1 (Теорема дедукции)**.** *Если A — замкнутая формула, то $\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash (A \to B)$.*

Доказательство. $\Longleftarrow$ Очевидно из первого правила вывода.
$\Longrightarrow$ Проведём индукцию по построению вывода $\Gamma, A \vdash B$.
База индукции: если B — аксиома, то подставим в тавтологию $p \to (q \to p)$ формулы A и B. В результате получим $\Gamma \vdash B \to (A \to B)$, тогда по первому правилу вывода $\Gamma \vdash A \to B$.

1. Если $B \in \Gamma$, то доказательство аналогично предыдущим рассуждениям.

2. Если $A = B$, то подставим формулу A в тавтологию $p \to p$.

Шаг индукции:

1. Пусть B получено по первому правилу вывода из C и $C \to B$. По предположению индукции $\Gamma \vdash A \to C$ и $\Gamma \vdash A \to (C \to B)$.
   Воспользуемся тавтологией: $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ и подставим A, C и B. $\Gamma \vdash (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$.
   Применим первое правило вывода к $P = (A \to (C \to B))$ и $Q = ((A \to C) \to (A \to B))$, тогда $\Gamma \vdash Q$, то есть $\Gamma \vdash (A \to C) \to (A \to B)$. Повторим операцию для $P = (A \to C)$ и $Q = (A \to B)$, тогда получим $\Gamma \vdash Q$, то есть $\Gamma \vdash A \to B$.

2. Пусть B получена по второму правилу вывода, то есть $B = \forall x[x/a]C$ и $\Gamma, A \vdash C$. По предположению индукции $\Gamma \vdash A \to C$, тогда по первому правилу Бернайса $\Gamma \vdash A \to \forall x[x/a]C$, то есть $\Gamma \vdash A \to B$.

$\blacksquare$

Следствие 70.1.1. *Для любой конечной теории T и формулы A сигнатуры Ω*

$$T \vdash_{PC_\Omega} A \iff \vdash_{PC_\Omega} \left(\bigwedge T\right) \to A$$

Доказательство. По теореме дедукции имеем $(\bigwedge T) \vdash A \iff \vdash (\bigwedge T) \to A$. Заметим, что $T \vdash A \iff (\bigwedge T) \vdash A$. Значит, $T \vdash A \iff \vdash (\bigwedge T) \to A$ $\blacksquare$

Теорема 70.2 (Корректность исчисления предикатов)**.**

1. *Пусть T — теория первого порядка сигнатуры Ω, тогда для любой формулы A имеем: $T \vdash A \Longrightarrow T \models \overline{\forall} A$.*

2. *Для любый формулы A сигнатуры $\Omega \vdash A \Longrightarrow \models A$.*

71 Билет 71 (Исчисление предикатов с равенством)

Определение 71.1. *Исчисление предикатов с равенством в сигнатуре Ω определяется из обычного исчисления предикатов добавлением аксиом стандартной теории равенства Eq_Ω, а именно:*

1. $\forall x(x = x)$
2. $\forall x \forall y((x = y) \to (y = x))$
3. $\forall x \forall y \forall z(((x = y) \wedge (y = z)) \to (x = z))$
4. $\overline{\forall}((\vec{x} = \vec{y}) \to (P^n(\vec{x}) \to P^n(\vec{y})))$
5. $\overline{\forall}((\vec{x} = \vec{y}) \to (f^n(\vec{x}) = f^n(\vec{y})))$

72 Билет 72 (Противоречивые теории)

Определение 72.1. *Теория T сигнатуры Ω называется противоречивой, если для некоторой формулы A сигнатуры Ω $T \vdash_{PC_\Omega} A$ и $T \vdash_{PC_\Omega} \neg A$.*

Определение 72.2. *Теория T сигнатуры Ω с равенством называется противоречивой, если для некоторой формулы A сигнатуры Ω $T \vdash_{PC_\Omega^=} A$ и $T \vdash_{PC_\Omega^=} \neg A$.*

Лемма 72.1. *Если теория T сигнатуры Ω противоречива, то $T \vdash_{PC_\Omega} B$ для любой формулы B.*

Доказательство. Возьмём тавтологию $A \to (\neg A \to B)$, тогда из первого праивла вывода имеем $T \vdash (\neg A \to B)$. Применим первое правило вывода ещё раз: $P = \neg A$, $Q = B$, тогда $T \vdash B$. ∎

Утверждение 72.1.

1. *Если теория первого порядка выполнима, то она не противоречива.*
2. *Если теория первого порядка нормально выполнима (выполнима в нормальной модели), то она непротиворечива.*

Доказательство.

1. Предположим, что теория T противоречива. Пусть $M \models T$, рассмотрим произвольную формулу B, истинную в M. По лемме имеем $T \vdash \neg B$, а из леммы о корректности исчисления предикатов из билета 70 имеем, что $T \models \neg B \implies M \models \neg B$ — противоречие.

2. Аналогично, только используется пункт леммы для сигнатуры с равенством и аналогичный пункт теоремы о корректности.

■

73 Билет 73 (Теорема о существовании модели)

Определение 73.1. *Мощностью сигнатуры Ω назовём множество всех её символов. Обозначение: $|\Omega|$.*

Теорема 73.1.

1. *Пусть T — непротиворечивая в PC_Ω теория без равенства в сигнатуре Ω, тогда T имеет модель мощности $|\Omega|$ или счётную, если Ω конечна.*

2. *Пусть T — непротиворечивая в PC_Ω теория с равенством в сигнатуре Ω, тогда T имеет нормальную модель мощности $\leqslant |\Omega|$ или не более чем счётную, если Ω конечна.*

Доказательство.

1. Без доказательства.

2. По первому пункту теория $T \cup Eq_\Omega$ имеет модель M мощности $|\Omega|$ или счётную. По теореме о нормализации модели из билета 51 $M \equiv M_f$, где M_f — нормальная модель с носителем $\underline{M}/\approx$. Тогда $|M_f| \leqslant |M|$, значит, M_f — модель теории T нужной мощности.

■

74 Билет 74 (Теорема Гёделя о полноте)

Теорема 74.1.

1. *Для теории T и замкнутой формулы A сигнатуры Ω, если $T \models A$, то $T \vdash_{PC_\Omega} A$.*

2. *Для любой формулы A сигнатуры Ω, если $\models A$, то $\vdash_{PC_\Omega} A$.*

3. *Для теории с равенством T и замкнутой формулы A сигнатуры Ω, если $T \models_{\text{норм}} A$, то $T \vdash_{PC_\Omega} A$.*

4. *Для любой формулы A сигнатуры Ω с равенством, если $\models_{\text{норм}} A$, то $\vdash_{PC_\Omega} A$.*

Доказательство.

1. Пусть $T \nvdash A$, если $T \cup \{\neg A\}$ противоречива, то из теоремы дедукции из билета 70 для теории $T \cup \{\neg A\}$ и замкнутой формулы $\neg A$ из $T, \neg A \vdash A$, но тогда $T \vdash A$. Значит, эта теория непротивречива, тогда по теореме о существовании модели из билета 73 эта теория выполнима, а значит, $T \not\models A$, так как $T \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$.

2. По определению $\models A$ означает $\models \overline{\forall} A$. Тогда из первого пункта для $T = \varnothing$ имеем, что из $\models \overline{\forall} A$ следует $\vdash \overline{\forall} A$. Используя первый пункт леммы из билета 70, получим $\vdash A$.

3. Аналогично пункту 1, только используется второй пункт теоремы о существовании модели.

4. Аналогично с пунктом 2, как следствие пункта 3.

■

75 Билет 75 (Арифметика Пеано и её непротиворечивость)

Определение 75.1. *Арифметика Пеано — это теория первого порядка в сигнатуре* $\{0, 1, +, \cdot, =\}$ *с аксиомами:*

1. $\forall x(x + 1 \neq 0)$

2. $\forall x \forall y((x + 1 = y + 1) \to (x = y))$

3. $\forall x((x \neq 0) \to (\exists y(y + 1 = x)))$

4. $\forall x(x + 0 = x)$

5. $\forall x \forall y(x + (y + 1) = (x + y) + 1)$

6. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

7. $\forall x \forall y(x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$

8. $\overline{\forall}(A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x + 1)) \to \forall x A(x))$

Обозначение: PA.

Утверждение 75.1. *Теория* PA *непротиворечива.*

Доказательство. PA имеет стандартную модель $\mathbb{N}$ со стандартными интерпретациями. Легко видеть, что все аксиомы PA выполнены, тогда $\mathbb{N} \models PA$, то есть теория выполнима, а значит, по утверждению из билета 72 эта теория непротиворечива. ■

76 Теория Цермело, аксиомы объёмности, объединения, степени, выделения, классы, аксиома бесконечности, аксиома выбора

Определение 76.1. *Теория Цермело — теория сигнатуры* $\{\in, =\}$ *с аксиомами:*

1. *Аксиома объёмности*
2. *Аксиома свёртки*
3. *Аксиома бесконечности*
4. *Аксиома выбора*

Обозначение: Z.

Аксиома 76.1 (Аксиома пары)**.** $\forall x \forall y \exists z \forall u((u \in z) \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$ *(можем строить пары элементов)*

Аксиома 76.2 (Аксиома объёмности)**.** $\forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow \exists u((z \in u) \wedge (u \in x)))$ *(можем рассматривать объединение элементов)*

Аксиома 76.3 (Аксиома степени)**.** $\forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow (z \subseteq x))$ *(можем рассматривать множество всех подмножеств)*

Аксиома 76.4 (Схема аксиом выделения)**.** $\forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow ((z \in x) \wedge A(z, \dots)))$ *(*$A(z, \dots)$ *— произвольная формула). Эта аксиома является ослабленным вариантом аксиомы свёртывания.*

Аксиома 76.5 (Аксиома свёртывания)**.** *Пусть* φ *— некоторое свойство, тогда* $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi)$.

Определение 76.2. *Совокупность элементов назовём классом.*

Определение 76.3. *Класс, не являющийся множеством, называется собственным классом.*

Аксиома 76.6. $\exists x((\varnothing \in x) \wedge \forall y((y \in x) \to (y \cup \{y\} \in x)))$ *(существует бесконечное множество)*

Аксиома 76.7. $\forall x(x \text{ разбиение} \to \exists z \forall y((y \in x) \to \exists! u(u \in y \wedge u \in z)))$, *где* x разбиение $=$ $\forall y(y \in x \to y \neq \varnothing) \wedge \forall y \forall z((((y \in x) \wedge (z \in x)) \to (y = z)) \vee (y \cap z = \varnothing))$.

77 Билет 77 (Аксиоматическое исчисление, вывод в исчисления, его свойства)

Определение 77.1. *Алфавит — не пустое множество символов.*

Определение 77.2. *Словом в алфавите A длины n называется функция $f : n \to A$. A^∞ — множество всех слов в алфавите A.*

Определение 77.3. *Язык в алфавите A — некоторое подмножество A^∞.*

Определение 77.4. *Пусть Φ — формальный язык в алфавите Σ, тогда k-ое посылочное правило вывода над Φ — это подмножество Φ^{k+1}.*

Определение 77.5. *Пусть Q — k-посылочное правило вывода. Говорят, что слово β получается по правилу Q из слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta) \in Q$.*

Определение 77.6. *Аксиоматическое исчисление — это тройка $X = (\Phi, \mathcal{A}, \mathcal{R})$, где Φ — формальный язык, $\mathcal{A} \subseteq \Phi$, $\mathcal{R}$ — множество правил вывода на Φ.*

Определение 77.7. *$\mathcal{A}$ называется множеством аксиом исчисления X.*

Определение 77.8. *Вывод слова β в исчислении $X = (\Phi, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ из множества Γ — это последовательность слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = \beta$ из Φ, в которой каждое слово либо является аксиомой из $\mathcal{A}$, либо принадлежит Γ, либо получается из предыдущих слов по одному из правил вывода из $\mathcal{R}$.*

Определение 77.9. *$\Gamma \vdash_X \beta$, если существует вывод β из Γ в X.*

Свойства 7.

1. *Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_X \alpha$, то $\Gamma \vdash_X \alpha$.*
2. *Если $\Gamma \vdash_X \alpha$, то существует конечное $\Delta \subseteq \Gamma$, для которого $\Delta \vdash_X \alpha$.*
3. *Если $\Delta \vdash_X \Gamma$ и $\Gamma \vdash_X \alpha$, то $\Delta \vdash_X \alpha$.*

Доказательство.

1. Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_X \alpha$, то существует последовательность слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = \beta$, где каждое слово либо аксиома в $\mathcal{A}$, либо она принадлежит Δ, а значит, принадлежит Γ, либо она получается из предыдущих по одному из правил вывода из $\mathcal{R}$. Значит, данная последовательность будет нужной последовательностью слов.
2. В качестве Δ рассмотрим множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
3. Очевидно из третьего пункта определения.

■