Существование двумерного инварантного подпространства для линейного оператора над $\mathbb{R}$, отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.
Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, тогда в некотором базисе V φ действует матрицей $Y = A_\varphi X$, где $X \in \mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ - корень характеристического многочлена.
Рассмотрим линейный оператор над полем $\mathbb{C}$, действующий при той же матрице $A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n Z \to A_\varphi Z$, соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то $\exists$ собственный вектор Z_0, отвечающий выбранному λ. Это значит, что $A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0$, $Z_0 = X_0 + iY_0$, где X_0 и $Y_0 \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow A_\varphi Z_0 = A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \Longrightarrow$
$\begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases}$ Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда
$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ подпространство $U = \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$ является инвариантным подпространством для φ.
Теперь докажем, что $\dim U = 2$.

Доказательство. Предположим, что $\dim U = 1$, то есть $y_0 = \mu x_0$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \Longrightarrow$ если $x_0 \neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ.
$A_{\varphi_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ имеет корни $\alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ - противоречие. □

Теорема. *Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторным пространстве имеет одномерное или двумерное подпространство.*

Доказательство. Если $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характерического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V$, $u_i \neq 0$, $\Longrightarrow \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.
Если $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $\exists U$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Вместо диаганализируемости можно использовать следующее утверждение:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_n & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, а $\beta_j \neq 0$, $j = \overline{1, m}$

0.1 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ такой, что $\varphi(v) = v$ $\forall v \in V$, называется тождественным оператором и обозначается Id.

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_mt^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ, если $f(\varphi) = a_0Id + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m = 0$, то есть $f(A_\varphi) = 0$
$\Longrightarrow A_{f(\varphi)} = f \cdot A_\varphi = a_0E + a_1A_\varphi + \ldots + a_mA_\varphi^m$.

Пример. $V = \mathbb{R}[t]_n$, $\varphi = \frac{d}{dt}$.
$\varphi^n(t^n) = n!$, $\varphi^{n+1} \equiv 0 \Longrightarrow$ для $\varphi = \frac{d}{dt}$ t^{n+1} - анулирующий многочлен.

Утверждение. *Если $dimV = n$, то $\exists$ многочлен степени $\leq n^2$, анулирующий φ.*

Доказательство. $\dim L(V) = n^2$, $L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \Longrightarrow$ операторы Id, φ, φ^2, $\ldots$, φ^{n^2} линейно зависимы, так как их больше $n^2 \Longrightarrow \exists\ a_0, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{F} : a_0Id + a_1\varphi + \ldots + a_{n^2}\varphi^{n^2} = 0 \Longrightarrow$ $a_0 + a_1t + \ldots + a_{n^2}t^{n^2}$ - многочлен анулирующий многочлен для φ □

Определение. Могочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица $P = (P_{ij}(\lambda))$, где $P_{ij}(\lambda)$ - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

Пример. $P = \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 2\lambda+1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2+\lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2$ - многочлен от λ с матричными коэффициентами.

Определение. Оператор $\varphi V \to V$ называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

Определение. Для матрицы $A = (a_{ij})$ присоединённой матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})$, то есть $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$.

Свойство. $A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$

Теорема. *Гамильтона-Кэли*
Характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ является анулирующим многочленом для линейного оператора φ, то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$, где 0 - нулевой оператор.
В матричной форме:
$\forall A \in M_n(\mathbb{F})$, $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Пусть A - данная матрица, $\chi_A(\lambda)|A - \lambda E| = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i\lambda^i$, $p_i \in \mathbb{F}$, $p_n = (-1)^n$.
$\chi_A(A) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_iA^i$(считаем, что $A^0 = E$).
Составим матрицу $\widehat{A - \lambda E} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} D_j\lambda^j$, где $D_j \in M_n(\mathbb{F})$.
Рассмотрим равенство: $(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda)E$.
$(A-\lambda E)\cdot\sum\limits_{j=0}^{n-1} D_j\lambda^j = \sum\limits_{j=0}^{n-1}(AD_j\lambda^j) - \sum\limits_{j=0}^{n-1} D_j\lambda^{j+1} = AD_0 + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(AD_j - D_{j-1})\lambda^j - D_{n-1}\lambda^n = \chi_A(\lambda)E =$ $(\sum\limits_{j=0}^{n} p_j\lambda^j)E$.

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях λ:
$\lambda^0 : E\cdot \Big| AD_0 = p_0 E$
$\lambda^1 : A\cdot \Big| AD_1 - D_0 = p_1 E$
$\vdots \Big|$
$\lambda^j : A^j\cdot \Big| AD_j - D_{j-1} = p_j E$
$\lambda^{j+1} : A^{j+1}\cdot \Big| AD_{j+1} - D_j = p_{j+1} E$
$\vdots \Big|$
$\lambda^n : A^n\cdot \Big| -D_{n-1} = p_n E$
Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени A и сложим.
$\Longrightarrow \chi_A(A)E = 0.$ $\square$