Побудова апостеріорного оцінювача методом нев'язок

Курсова робота бакалавра
Яроцького Андрія

Науковий керівник: к. фіз.-мат. наук, доцент Вербицький В.В.

Одеса, 2018

Постановка задачи

Для краевой задачи

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

$$u(a) = 0, u(b) = 0, \tag{2}$$

где $q(x) \in C^0[a,b], q(x) \geq 0$ необходимо построить конечно-элементную аппроксимацию с использованием линейных непрерывных сплайнов на неравномерной сетке и апостериорный оценщик погрешности полученного решения.

Определим $S^{1,0}_{w_h}[a,b]$ - пространство линейных непрерывных на $[a,b]$ сплайнов, где $w_h = \{a = x_0, x_1, ...x_n = b\}$ - сетка, $h-$ шаг разбиения. При этом $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ - базис пространства $S^{1,0}_{w_h}[a,b]$.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1})/h_{i+1}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \in [a,b] \backslash [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -(x - x_1)/h_1, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \in [x_1, b], \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (x - x_{n-1})h_n, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \in [a, x_{n-1}], \end{cases}$$

Конечно-элементная аппроксимация краевой задачи (1),(2) сводится к СЛАУ
$$Ay = b, \tag{3}$$
где
$$a_{ii} = a(\varphi_i(x), \varphi_i(x)), i = \overline{1, n-1},$$
$$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = a(\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x))\ i = \overline{1, n-2},$$
$$b = [hf(x_1), hf(x_2), ..., f(x_{n-1}), f(x_n)]$$
$$y = \left[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}\right],$$
$$a(u, v) = \int\limits_a^b \alpha(x)u'v' + q(x)uvdx.$$
Решая СЛАУ (3), получаем приближенное решение задачи (1)-(2) в виде
$$u_h = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i(x). \tag{4}$$

На каждом конечном элементе (отрезке) I_i погрешность конечно-элементного решения u_h можно оценить с помощью величины

$$\eta_i = \frac{h_i}{\pi} ||(a(x)u_h')' - q(x)u_u + f(x)||_{2,I_i}.$$

Погрешность конечно-элементного решения на всем отрезке I определяется с помощью глобального оценщика:

$$\eta = \left(\sum_{i=1}^{N} \eta_i^2 \right)^{1/2}.$$

Имеет место следующая оценка:

$$||(u - u_h)'||_{2,I} \leq C_0 \eta. \tag{5}$$

В качестве тестового примера рассматривалась следующая задача Дирихле:

$$-(a(x)u(x)')' = f(x), \quad x \in (-2, 2),$$
$$u(-2) = 0, u(2) = 0,$$

где

$$a(x) = 1 + x^2$$

и правая часть выбрана так, чтобы точным решением была функция

$$u(x) = e^{x^2} - e^4.$$

Результаты вычислений

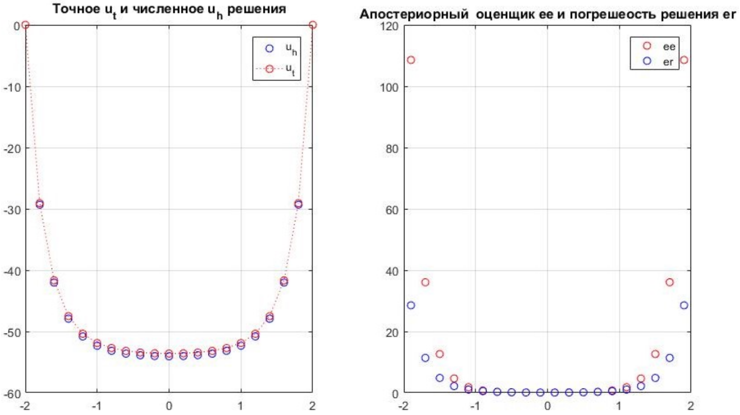

Рис.: Равномерная сетка с шагом $h = 0.2$.

Результаты вычислений

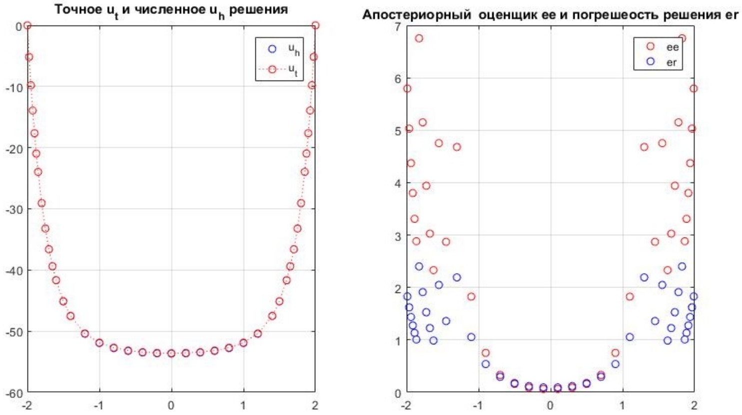

Рис.: Третье сгущение сетки

Результаты вычислений

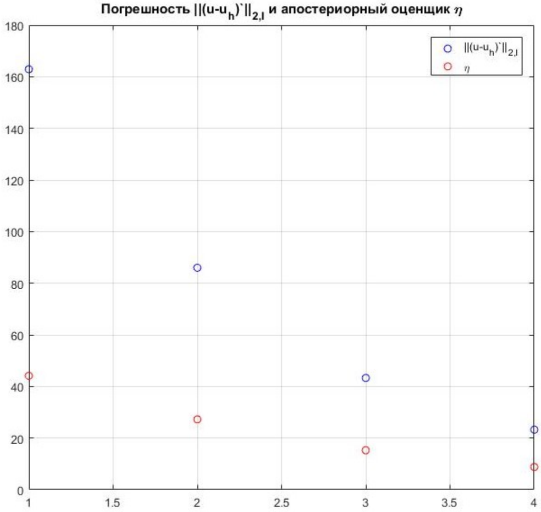

Рис.: Погрешность решения $||(u - u_h)'||_{2,I}$ и апостериорный оценщик η, вычисленные для различных сеток

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Для краевой задачи Дирихле для уравнения второго порядка построена конечно-элементная аппроксимацию с использованием линейных непрерывных сплайнов на неравномерной сетке.
- Построен апостериорный оценщик погрешности конечно-элементного решения краевой задачи.
- Написано программное приложение на языке пакета MATLAB, которое находит приближенное решение поставленной задачи, адаптируя сетки к структуре точного решения.