Zadanie 3.2

Jarosław Socha

12 stycznia 2023

1 Treść zadania

Zadanie 4
Zbuduj PDA i gramatykę bezkontekstową dla języka

$$\{0,1\}^* \setminus \{ww \ : \ w \in \{0,1\}^*\}.$$

2 Gramatyka

Powyższy język możemy podzielić na dwa przypadki w zależności od długości słowa:

- Nieparzysta długość słowa
  Tworzymy słowo nieparzyste, które na środku ma 1 albo 0

$$S \to A|B$$

$$A \to 0|XAX$$

$$B \to 1|XBX$$

$$X \to 0|1$$

- Parzysta długość słowa
  Słowo ma parzystą długość $2n$, ale muszą istnieć takie $i < n$, że litery na pozycji i oraz $n+i$ są różne. Sprowadza się to do powyższej gramatyki, w której produkcje S zastąpimy produkcjami

$$S \to AB|BA$$

Sumarycznie gramatyka wygląda następująco

$$S \to A|B|AB|BA$$

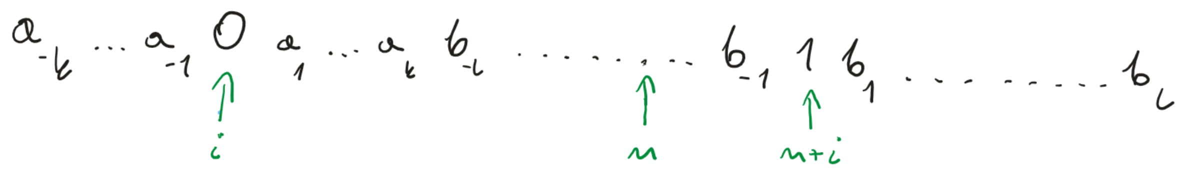
$$A \to 0|XAX$$

$$B \to 1|XBX$$

$$X \to 0|1$$

2.1 Dowód poprawności dla słów parzystej długości

Bez straty ogólności przyjmijmy, że słowo r na pozycji i ma 0, a na pozycji $n+i$ ma 1. Słowo wygląda następująco:



Gdzie $a_{\{-k,\dots,k\}}$ to nieterminale X wyprodukowane przez produkcję $A \to AXA$, a $b_{\{-l,\dots,l\}}$ to nieterminale X wyprodukowane przez produkcję $B \to BXB$. Zauważmy, że $k = i$, oraz z sumy:

$$2k + 1 + 2l + 1 = 2n$$

Otrzymujemy:

$$l = n - 1 - k = n - 1 - i$$

Zatem jeżeli chcemy otrzymać słowo, które różni się na pozycji i-tej, wystarczy wykonać i produkcji $A \to AXA$ oraz $n - i - 1$ produkcji $B \to BXB$, czyli dla każdego słowa istnieje jego wyprowadzenie.
Z drugiej strony, jeśli weźmiemy słowo o dowolnym k i l, to będzie istniała pozycja $i = k$ i pozycja $n + i = 2k + l + 1$ które różnią się od siebie, więc słowo należy do języka. Dla początkowej produkcji $S \to BA$ zamiast $S \to AB$ dowód przebiega analogicznie.

3 Konstrukcja automatu ze stosem

Automat to suma dwóch automatów, pierwszego sprawdzającego, czy długość ciągu jest nieparzysta, oraz drugiego działającego dla długości parzystej. Niedeterministycznie sprawdzamy, który automat rozpatrzeć. Stan początkowy to S, a symbol początkowy stosu to Z. Automat akceptuje pustym stosem.

$$\delta(S, \epsilon, Z) = \{(N, Z), (L_L, Z)\}$$

- Nieparzyste

	$(0/1, Z)$
N	(N, ZZ), (N, ϵ)

Automat niedeterministycznie zaakceptuje słowo nieparzystej długości.

- Parzyste

  Automat będzie odkładał na stos symbole X aż do pierwszego indeksu i, potem je ściągał, następnie znowu wkładał aż do $n+i$ po czym ściągał. Automat przejdzie do ostatniej sekcji tylko jeśli w jednym środku wystąpiła jedynka a w drugim zero, lub na odwrót. Środki (indeks i) są wybierane niedeterministycznie.

  Symbol początkowy stosu - Z, stan początkowy - L_L automat akceptuje pustym stosem.

	$(0, X)$	$(1, X)$	$(0, Z)$	$(1, Z)$
L_L	(L_L, XX),(L_{RA}, X)	(L_L, XX),(L_{RB}, X)	(L_L, XZ),(L_{RA}, Z)	(L_L, XZ),(L_{RB}, Z)
L_{RA}	(L_{RA}, ϵ)	(L_{RA}, ϵ)	(R_{LB}, X)	(R_{LB}, X)
L_{RB}	(L_{RB}, ϵ)	(L_{RB}, ϵ)	(R_{LA}, X)	(R_{LA}, X)
R_{LA}	(R_{LA}, XX)	(R_{LA}, XX),(R_R, X)		
R_{LB}	(R_{LB}, XX),(R_R, X)	(R_{LB}, XX)		
R_R	(R_R, ϵ)	(R_R, ϵ)		

Przykład działania: Ciąg wejściowy: 0100000000 Niedeterministycznie zgadujemy $i = 1$

Wejście	Stos		
	Z		
0	Z	X	
1	Z	X	
0	Z		
0	X		
0	X	X	
0	X	X	X
0	X	X	X
0	X	X	
0	X		
0	Akceptacja		