Teoretyczne podstawy informatyki
zadanie 21

Jarosław Socha

1 kwietnia 2024

1 Treść zadania

Zadanie 21

Zdecyduj czy następujący problem jest rekurencyjny: *czy dla maszyny Turinga M istnieje słowo wejściowe, dla którego M się zatrzymuje?* Czy jest on rekurencyjnie przeliczalny?

2 Rozwiązanie

Udowodnimy, że problem nie jest rekurencyjny dowodem nie wprost. Załóżmy, że istnieje taka maszyna Turinga M_L, że jeśli istnieją dane, dla których M się zatrzymuje, to $M_L(M) = tak$, a jeśli takie dane nie istnieją to $M_L(M) = nie$. Oznaczałoby to, że język z polecenia jest rozstrzygalny.

Weźmy dowolną maszynę Turinga M oraz dowolne dane x.

Zdefiniujmy maszynę Turinga M' następująco:

$$M'(y) \quad = \quad if(y == x) \quad then \quad M(x) \quad else \quad \nearrow$$

Czyli jeśli dane początkowe to x, to maszyna zwraca wynik maszyny M na tych danych, a w przeciwnym wypadku się zapętla.

Rozważmy co stanie się, gdy jako wejście maszyny M_L ustalimy maszynę M'.

- $M_L(M') = tak$
  Maszyna zwróciła wynik *tak*, co oznacza zgodnie z definicją M_L, że istnieją dane, dla których M' się zatrzymuje. Zauważmy, że tymi danymi musi być x, ponieważ dla każdych danych różnych od x maszyna M' się zapętla. Oznacza to, że jeśli $M_L(M') = tak$, to maszyna M zatrzymuje się dla danych x.
- $M_L(M') = nie$
  Maszyna zwróciła wynik *nie*, więc nie istnieją takie dane, dla których maszyna kiedykolwiek się zatrzyma, czyli dla każdych danych się zapętla. Zapętla się w szczególności dla x, co oznacza, że maszyna M na danych x nigdy nie kończy działania

Zauważmy, że wzięliśmy dowolną maszynę M i dowolne dane x. W pierwszym przypadku dowiadujemy się, że M zatrzymuje się na danych x, w drugim że M nie zatrzymuje się dla danych x, czyli rozstrzygnęliśmy problem stopu. Nie może to być prawdą, ponieważ problem stopu jest nierozstrzygalny, więc założenie, że istnieje taka maszyna M_L która rozstrzyga L musi być błędne, czyli język L nie jest rozstrzygalny.