Teoretyczne podstawy informatyki
zadanie 42

Jarosław Socha

1 czerwca 2024

1 Treść zadania

Zadanie 42

Zdefiniujmy schemat rekursji prostej tworzącej funkcję $f : N^{m+1} \to N$ za pomocą funkcji $g : N^m \to N$ i $h : N^{m+2} \to N$ w następujący sposób:

$$f(0, \bar{x}) = g(\bar{x}) \qquad \text{i} \qquad f(n+1, \bar{x}) = h(n, f(n, \bar{x}), \bar{x}), \ \text{lub}$$

$$f(0) = c \qquad \text{i} \qquad f(n+1) = h(n, f(n)).$$

Pokaż, że najmniejszy zbiór funkcji zawierających $I_{n,k}$ i zamknięty na operacje złożenia, minimum i rekursji prostej jest równoważny podanemu na wykładzie modelowi funkcji rekurencyjnych.

Wskazówka: W jedną stronę zdefiniuj za pomocą rekursji prostej funkcję zwracającą poprzednik (poprzednik 0 *to* 0*), następnie odejmowanie (zamiast liczb ujemnych zwracające* 0*), a wtedy dodawanie, mnożenie i funkcję charakterystyczną relacji mniejszości. W drugą stronę pokaż, że schemat rekursji prostej można zdefiniować przy pomocy funkcji dostępnych w modelu funkcji rekurencyjnych.*

2 Rozwiązanie

Najmniejszy zbiór funkcji zawierających $I_{n,k}$ i zamknięty na operacje złożenia, minimum i rekursji prostej nazwijmy R, a model funkcji rekurencyjnych F. Aby udowodnić że są równoważne pokażemy, że zawierają się w sobie.

3 $F \subseteq R$

Na początku zdefiniujemy funkcję poprzednika. Poprzednikiem zera jest zero, więc użyjemy funkcji stale równej zero. Otrzymujemy:

$$P(0) = 0$$

$$P(n+1) = I_{2,2}(P(n), n)$$

Następnie możemy zdefiniować odejmowaine na liczbach naturalnych używając funkcji poprzednika. Będziemy używać notacji prefiksowej dla podkreślenia struktury funkcyjnej:

$$-(m,0) = I_{1,1}(m)$$

$$-(m,n+1) = P(-(m,n))$$

Możemy następnie zdefiniować dodawanie i mnożenie z pomocą funkcji następnika:

$$+(m,0) = I_{1,1}(m)$$

$$+(m,n+1) = S(+(m,n))$$

$$\cdot(m,0) = 0$$

$$\cdot(m,n+1) = +(\cdot(m,n),m)$$

Pozostało tylko zdefiniować funkcję charakterystyczną relacji mniejszości

$$\chi_{<}(n,m) = 1 - (m - n)$$

4 $R \subseteq F$

Musimy zrealizować schemat rekursji prostej za pomocą funkcji z modelu, więc stworzymy ciąg używając modelu rekursji. Tworzymy ciąg długości $m+1$ którego elementy spełniają rekurencyjną zależność i wyciągamy jego m-ty element.

$$f(m,\bar{x}) = (\min_a (lh(a) = m+1 \ \land \ (a)_0 = g(\bar{x}) \ \land \ (\forall_{i<m}((a)_{i+1} = h(i,(a)_i,\bar{x})))_m$$

Obydwa modele zawierają się w sobie, więc są rónoważne.