Teoretyczne podstawy informatyki
zadanie 47

Jarosław Socha

3 czerwca 2024

1 Treść zadania

Zadanie 47
Za pomocą wyrażeń z zadania 45 zdefiniuj operator `xor` i doprowadź go do postaci normalnej (skorzystaj z równoważności $(x \oplus y) \iff ((x \land \neg y) \lor (\neg x \land y))$). Sprawdź wyniki operatora dla wszystkich możliwych argumentów.

2 Rozwiązanie

Zdefiniowane w zadaniu powyżej termy które będą nam potrzebne to:

$$true = \lambda xy.x$$

$$false = \lambda xy.y$$

$$\textbf{not} = \lambda u.(\lambda xy.uyx)$$

$$\textbf{and} = \lambda uv.(\lambda xy.u(vxy)y)$$

$$\textbf{or} = \lambda uv.(\lambda xy.ux(vxy))$$

Używając notacji prefiksowej jaką mamy w lambda rachunku otrzymamy:

$$\oplus AB = \textbf{or}\ (\textbf{and}\ A(\textbf{not}\ B))(\textbf{and}\ (\textbf{not}\ A)B))$$

Dla lepszej czytelności, słowa kluczowe będziemy zastępować lambda rachunkiem dopiero gdy będą one potrzebne do redukcji. Rozwijając otrzymamy:

$$\textbf{or}\ (\textbf{and}\ A(\textbf{not}\ \mathtt{B}))(\textbf{and}\ (\textbf{not}\ \mathtt{A})\mathtt{B}) \rightarrow_{\mathtt{not}}$$

$$\textbf{or}\ (\textbf{and}\ A((\underline{\lambda u.}(\lambda x_0 y_0.uy_0x_0))\ \underline{B}))(\textbf{and}\ ((\underline{\lambda u.}(\lambda x_1 y_1.uy_1x_1))\ \underline{A})B) \rightarrow_{\beta}$$

$$\textbf{or}\ (\textbf{and}\ A(\lambda x_0y_0.By_0x_0))(\textbf{and}\ (\lambda x_1y_1.Ay_1x_1)B) \to_{and}$$

$$\textbf{or}\ ((\underline{\lambda uv.}(\lambda x_2y_2.u(vx_2y_2)y_2))\ \underline{A}\underline{(\lambda x_0y_0.By_0x_0)})((\underline{\lambda uv.}(\lambda x_3y_3.u(vx_3y_3)y_3))\ \underline{(\lambda x_1y_1.Ay_1x_1)}\underline{B}) \to_\beta$$

$$\textbf{or}\ (\lambda x_2y_2.A((\underline{\lambda x_0y_0.}By_0x_0)\underline{x_2}\underline{y_2})y_2)(\lambda x_3y_3.(\underline{\lambda x_1y_1.}Ay_1x_1)\underline{(Bx_3y_3)}\underline{y_3}) \to_\beta$$

$$\textbf{or}\ (\lambda x_2y_2.A(By_2x_2)y_2)(\lambda x_3y_3.(Ay_3(Bx_3y_3))) \to_{or}$$

$$(\underline{\lambda uv.}(\lambda x_4y_4.ux_4(vx_4y_4)))\ \underline{(\lambda x_2y_2.A(By_2x_2)y_2)(\lambda x_3y_3.(Ay_3(Bx_3y_3)))} \to_\beta$$

$$\lambda x_4y_4.(\underline{\lambda x_2}y_2.A(By_2x_2)y_2)\underline{x_4}((\underline{\lambda x_3y_3.}(Ay_3(Bx_3y_3)))\underline{x_4y_4}) \to_\beta$$

$$\lambda x_4y_4.(\underline{\lambda y_2.}A(By_2x_4)y_2)\underline{(Ay_4(Bx_4y_4))} \to_\beta$$

$$\lambda x_4y_4.(A(B(Ay_4(Bx_4y_4))x_4)(Ay_4(Bx_4y_4)))$$

Czyszcząc term i przemiaowując zmienne dostajemy:

$$\lambda uv.A(B(Av(Buv))u)(Av(Buv))$$

W tej postaci nie możemy już nic zredukować dopóki nie podstawimy A i B. Podstawmy zatem A i B dla każdej kombinacji $true$ i $false$.

Jeżeli przed dwoma termami mamy prawdę, to operacja β z nią związana pozostawi pierwszy term, a drugi usunie. Fałsz sprawi, że będzie na odwrót, więc zamiast rozpisywać operacje β możemy stosować te operacje, zamieniwszy uprzednio symbole A i B na T ($true$) i F ($false$).

2.1 $A = true\ B = true$

$$\lambda uv.T(T(Tv(\underline{Tuv}))u)(Tv(Tuv)) \to$$

$$\lambda uv.T(T(\underline{Tv(u)})u)(Tv(Tuv)) \to$$

$$\lambda uv.T(\underline{T(v)u})(Tv(Tuv)) \to$$

$$\lambda uv.T(v)(Tv(\underline{Tuv})) \to$$

$$\lambda uv.T(v)(\underline{Tv(u)}) \to$$

$$\lambda uv.\underline{T(v)(v)} \to$$

$$\lambda uv.v = false$$

2.2 $A = true\ B = false$

$$\lambda uv.T(F(Tv(\underline{Fuv}))u)(Tv(Fuv)) \to$$

$$\lambda uv.T(F(\underline{Tv(v)})u)(Tv(Fuv)) \to$$

$$\lambda uv.T(\underline{F(v)u})(Tv(Fuv)) \to$$

$$\lambda uv.T(u)(Tv(\underline{Fuv})) \to$$

$$\lambda uv.T(u)(\underline{Tv(v)}) \to$$

$$\lambda uv.\underline{T(u)(v)} \to$$

$$\lambda uv.u = true$$

2.3 $A = false\ B = true$

$$\lambda uv.F(T(Fv(\underline{Tuv}))u)(Fv(Tuv)) \to$$

$$\lambda uv.F(T(\underline{Fv(u)})u)(Fv(Tuv)) \to$$

$$\lambda uv.F(\underline{T(u)u})(Fv(Tuv)) \to$$

$$\lambda uv.F(u)(Fv(\underline{Tuv})) \to$$

$$\lambda uv.F(u)(\underline{Fv(u)}) \to$$

$$\lambda uv.\underline{F(u)(u)} \to$$

$$\lambda uv.u = true$$

2.4 $A = false\ B = false$

$$\lambda uv.F(F(Fv(\underline{Fuv}))u)(Fv(Fuv)) \to$$

$$\lambda uv.F(F(\underline{Fv(v)})u)(Fv(Fuv)) \to$$

$$\lambda uv.F(\underline{F(v)u})(Fv(Fuv)) \to$$

$$\lambda uv.F(u)(Fv(\underline{Fuv})) \to$$

$$\lambda uv.F(v)(\underline{Fv(v)}) \to$$

$$\lambda uv.\underline{F(v)(v)} \to$$

$$\lambda uv.v = false$$

Wyniki są zgodne z operacją XOR.

Na koniec możemy wykonać odwrotność β-redukcji, aby wyrzuciwszy A i B otrzymać ładną formułę logiczną w postaci normalnej

$$\lambda ab.(\lambda uv.a(b(av(buv))u)(av(buv)))$$