Teoretyczne podstawy informatyki
zadanie 57

Jarosław Socha

27 czerwca 2024

1 Treść zadania

Zadanie 57

Pokaż, że problem $3SAT_3$, tzn. problem $3SAT$ ograniczony tylko do formuł w których żadna zmienna nie występuje więcej niż 3 razy, jest NP-zupełny. *Wskazówka: zredukuj do tego problemu $3SAT$.*

2 Rozwiązanie

2.1 Należność do klasy NP

Problem $3SAT_3$ należy do klasy NP, ponieważ wystarczy niedeterministycznie odgadnąć wartościowanie, a następnie wielomianowo je sprawdzić, dokładnie tak jak w problemie $3SAT$.

2.2 NP-trudność

Aby udowodnić, że problem $3SAT_3$ jest NP-trudny, zredukujmy do niego problem $3SAT$. Weźmy instancję problemu $3SAT$, gdzie bez straty ogólności zmienna x powtarza się więcej niż 3 razy. Tworzymy nowe zmienne x_1, x_2, ..., x_n, gdzie n to liczba powtórzeń zmiennej. Następnie każdą zmienną x zastępujemy odpowiadającą jej x_i w następujący sposób:

$$(x \vee ...) \wedge (x \vee ...) \wedge (x \vee ...)...$$

$$\rightarrow$$

$$(x_1 \vee ...) \wedge (x_2 \vee ...) \wedge (x_3 \vee ...)...$$

Teraz wystarczy że wymusimy równoważność zmiennych x ze sobą i formuła będzie równoważna.

Weźmy na początku dwie zmienne, x_1 i x_2. Dodatkowy warunek jaki musimy zapisać to:

$$x_1 \iff x_2$$

$$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)$$

Co jest zgodne z koniunkcyjną postacią normalną. Aby dodać do tego zmienną x_3 nie możemy stworzyć klauzul odpowiadających $(x_1 \iff x_2) \wedge (x_2 \iff x_3)$, ponieważ zmienna zostałaby użyta więcej niż 3 razy. Zamiast tego zamkniemy równoważność w kole implikacji, to znaczy:

$$(x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_2 \Rightarrow x_3) \wedge (x_3 \Rightarrow x_1)$$

Dzięki temu włącznie z pierwotnym wystąpieniem mamy 3 wystąpienia każdego symbolu, a także są one sobie równoważne.

Dodanie kolejnego symbolu polega na włożeniu dodatkowej implikacji w ten cykl. Problem jest w postaci $3SAT_3$, więc redukcja jest poprawna. Każde powtórzenie symbolu dodaje jedną alternatywę do formuły, więc przyrost formuł nie będzie wykładniczy i zostajemy w klasie NP.

Problem należy do klasy NP i jest NP-trudny, a więc jest NP-zupełny.