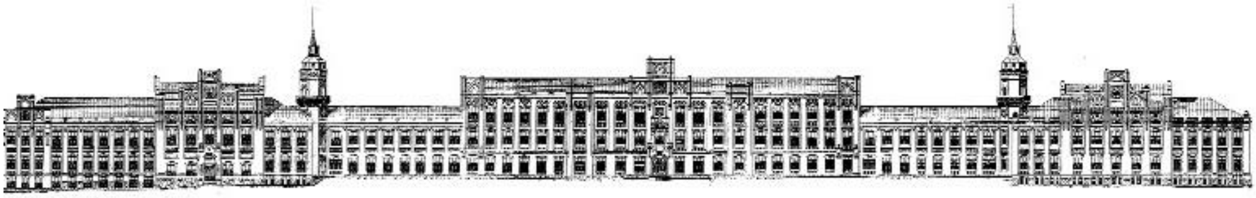

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Лабораторна робота №6

Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Виконав
студент групи ІА-32:
Лось Я. В.

Перевірила:
Вітюк А.Є.

Київ 2024

Мета роботи: ознайомитись з ітераційними методами розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Оцінити похибку, збіжність та продуктивність ітераційних методів.

Завдання

1. Методом Гауса розв’язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для матриці СЛАР обчислити визначник і обернену матрицю (див. свій варіант у окремому файлі).

2. Методом простих ітерацій і методом Зейделя розв’язати СЛАР з точністю ε = 0.01 (див. свій варіант у окремому файлі)

3. Написати програму розв’язування задач прямим методом Гауса-Жордана та Ітераційним методом Зейделя мовою Python.

Аналітичний розв’язок

18

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 - 7\cdot x_2 + 8\cdot x_3 - 4\cdot x_4 = 57 \\ -x_2 + 4\cdot x_3 - x_4 = 24 \\ 3\cdot x_1 - 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - x_4 = 28 \\ -9\cdot x_1 + x_2 - 4\cdot x_3 + 6\cdot x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -22\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - 6\cdot x_3 + 6\cdot x_4 = 96 \\ 3\cdot x_1 - 17\cdot x_2 - 3\cdot x_3 + 7\cdot x_4 = -26 \\ 2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 - 17\cdot x_3 + 5\cdot x_4 = 35 \\ -x_1 - 8\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 23\cdot x_4 = -234 \end{cases}$$

1. Метод Гауса

Варіант 18

1) Метод Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 57 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 24 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 28 \\ -9x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 12 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & 8 & -4 & 57 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 24 \\ 3 & -4 & 2 & -1 & 28 \\ -9 & 1 & -4 & 6 & 12 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} p_3 = p_3 - 3/2\, p_1 \\ p_4 = p_4 + 9/2\, p_1 \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & 8 & -4 & 57 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 24 \\ 0 & 6,5 & -10 & 5 & -57,5 \\ 0 & -30,5 & 32 & -12 & 268,5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} p_3 = p_3 + 6,5\, p_2 \\ p_4 = p_4 - 30,5\, p_2 \end{array}\right] =$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & 8 & -4 & 57 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 16 & -1,5 & 98,5 \\ 0 & 0 & -90 & 18,5 & -463,5 \end{array}\right) = \left[p_4 = p_4 + 5,625 p_3 \right] =$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & 8 & -4 & 57 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 16 & -1,5 & 98,5 \\ 0 & 0 & 0 & 10,0625 & 90,5625 \end{array}\right)$$

Зворотній хід:

$10,0625 x_4 = 90,5625 \Rightarrow$ | $x_4 = 9$

$16 x_3 - 1,5 x_4 = 98,5 \Rightarrow$ | $x_3 = 7$

$-x_2 + 4x_3 - x_4 = 24 \Rightarrow$ | $x_2 = -5$

$2x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 57 \Rightarrow$ | $x_1 = 1$

Визначник:

$\Delta = 2 \cdot (-1) \cdot 16 \cdot 10,0625 = -322$

Знайдемо обернену матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -7 & 8 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3,5 & 4 & -2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3,5 & 4 & -2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6,5 & -10 & 5 & -1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -30,5 & 32 & -12 & 4,5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3,5 & 4 & -2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6,5 & -10 & 5 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -30,5 & 32 & -12 & 4,5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$
= \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -10 & 1,5 & 0,5 & -3,5 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 16 & -1,5 & -1,5 & 6,5 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -90 & 18,5 & 4,5 & -30,5 & 0 & 1
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -10 & 1,5 & 0,5 & -3,5 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -0,09375 & -0,09375 & 0,40625 & 0,0625 & 0 \\
0 & 0 & -90 & 18,5 & 4,5 & -30,5 & 0 & 1
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0,5625 & -0,4375 & 0,5625 & 0,625 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0,625 & -0,375 & 0,625 & 0,25 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -0,09375 & -0,09375 & 0,40625 & 0,0625 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 10,0625 & -3,9375 & 6,0625 & 5,625 & 1
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0,5625 & -0,4375 & 0,5625 & 0,625 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0,625 & -0,375 & 0,625 & 0,25 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -0,09375 & -0,09375 & 0,40625 & 0,0625 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -9/23 & 97/161 & 90/161 & 16/161
\end{array}\right) =
$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/23 & 36/161 & 50/161 & -9/161 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/23 & 4/161 & -16/161 & -10/161 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/23 & 149/322 & 37/322 & 3/322 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9/23 & 97/161 & 90/161 & 16/161 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/23 & 36/161 & 50/161 & -9/161 \\ -3/23 & 40/161 & -16/161 & -10/161 \\ -3/23 & 149/322 & 37/322 & 3/322 \\ -9/23 & 97/161 & 90/161 & 16/161 \end{pmatrix}$$

Перевірка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Метод простих ітерацій

2) Метод простих ітерацій

$$\begin{cases} -22\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 96 \\ 3x_1 - 17x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -26 \\ 2x_1 + 6x_2 - 17x_3 + 5x_4 = 35 \\ -x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 23x_4 = -234 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4{,}36 - 0{,}09x_2 - 0{,}27x_3 + 0{,}27x_4 \\ x_2 = 1{,}53 + 0{,}18x_1 - 0{,}18x_3 + 0{,}41x_4 \\ x_3 = -2{,}06 + 0{,}12x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}29x_4 \\ x_4 = -10{,}17 + 0{,}04x_1 + 0{,}35x_2 - 0{,}35x_3 \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}09 & -0{,}27 & 0{,}27 \\ 0{,}18 & 0 & -0{,}18 & 0{,}41 \\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0 & 0{,}29 \\ 0{,}04 & 0{,}35 & -0{,}35 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = (-4{,}36 \quad 1{,}53 \quad -2{,}06 \quad -10{,}17)$$

$$x^* = (-5 \;\; -2 \;\; -6 \;\; -9)^T$$

$$x^{(4)} = (-5{,}0016 \quad -1{,}9987 \quad -5{,}9974 \quad -9{,}0023)^T;\ \varepsilon^{(4)} < \varepsilon$$

Обчислювальний процес завершено за 4 ітерації.

3. Метод Зейделя

3) Метод Зейделя $\varepsilon = 0{,}01$

$$\begin{cases} -22x_1 - 2\cdot x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 96 \\ 3x_1 - 17x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -26 \\ 2x_1 + 6x_2 - 17x_3 + 5x_4 = 35 \\ -x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 22x_4 = -234 \end{cases}$$

$x^0 = \beta$

$$\begin{cases} x_1^0 = 96 \\ x_2^0 = -26 \\ x_3^0 = 35 \\ x_4^0 = -234 \end{cases}$$

Ітерація № 1

$x_1^1 = a_{15} + (a_{11}\cdot x_1^0 + a_{12}\cdot x_2^0 + a_{13}\cdot x_3^0 + a_{14}\cdot x_4^0) = -75{,}36$

$x_2^1 = a_{25} + (a_{21}\cdot x_1^1 + a_{22}\cdot x_2^0 + a_{23}\cdot x_3^0 \cdot a_{24}\cdot x_4^0) = -114{,}29$

$x_3^1 = a_{35} + (a_{31}\cdot x_1^1 + a_{32}\cdot x_2^1 + a_{33}\cdot x_3^0 + a_{34}\cdot x_4^0) = -120{,}09$

$x_4^1 = a_{45} + (a_{41}\cdot x_1^1 + a_{42}\cdot x_2^1 + a_{43}\cdot x_4^1 + a_{44}\cdot x_4^0) = -11{,}43$

Ітерація №2

$x_1^2 = 35,65$

$x_2^2 = 24,30$

$x_3^2 = 7,35$

$x_4^2 = -2,72$

Ітерація №3

$x_1^3 = -9,32$

$x_2^3 = -2,53$

$x_3^3 = -4,85$

$x_4^3 = -9,77$

. . .

Ітерація №6

$x_1^6 = -5,0067$

$x_2^6 = -2,004$

$x_3^6 = -6,002$

$x_4^6 = -9,001$

$x = [-5,0067;\ -2,004;\ -6,002;\ -9,001]$

Результат виконання програми

```
Результат за методом Гаусса-Жордана:  [ 1. -5.  7.  9.]
Результат за методом Зейделя:  [-5.00623881 -2.00393905 -6.00195542 -9.00096121]
```

Висновок: протягом виконання лабораторної роботи я ознайомився з ітераційними методами розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.