



Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Лабораторна робота №3
Метод сплайн-інтерполяції функції

Виконав
студент групи ІА-32:
Лось Я. В.

Перевірила:
Вітюк А.Є.

Київ 2024

Мета роботи: ознайомитись з методологією сплайн-інтерполювання функцій, зокрема побудови кубічного сплайну.

Завдання

1. Побудувати кубічний сплайн для функції, заданої у вузлах інтерполяції, припускаючи, що сплайн має нульову кривизну при $x = x_0$ й $x = x_4$. Обчислити значення функції в точці $x = X^*$.
2. Написати програму розв'язування задачі (див. свій варіант) мовою Python.

Аналітичний розв'язок

18.

$$X^* = 8$$

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---------|----------|---------|--------|--------|
| x_i | 0.0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 |
| f_i | -2.2026 | -0.19315 | 0.79464 | 1.5624 | 2.2306 |

| | | | | | |
|-------|---------|----------|---------|--------|--------|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x_i | 0 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 |
| f_i | -2,2026 | -0,19315 | 0,79464 | 1,5624 | 2,2306 |
| q_i | 0 | -9,66 | 0,66 | -1,1 | 0 |

$$h = x_i - x_{i-1} = 0,4 = \text{const}$$

$$x^* = 8$$

$$q_0 = q_4 = 0$$

$$q_{i-1} \frac{h}{6} + q_i \frac{2h}{3} + q_{i+1} \frac{h}{6} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

$$i=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{0,8}{3} q_1 + \frac{0,4}{6} q_2 = \frac{f_2 - f_1}{0,4} - \frac{f_1 - f_0}{0,4} = -2,55 \end{array} \right.$$

$$i=2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{0,4}{6} q_1 + \frac{0,8}{3} q_2 + \frac{0,4}{6} q_3 = \frac{f_3 - f_2}{0,4} - \frac{f_2 - f_1}{0,4} = -0,55 \end{array} \right.$$

$$i=3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{0,4}{6} q_2 + \frac{0,8}{3} q_3 = \frac{f_4 - f_3}{0,4} - \frac{f_3 - f_2}{0,4} = -0,25 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,8}{3} q_1 + \frac{0,4}{6} q_2 = -2,55 \\ \frac{0,4}{6} q_1 + \frac{0,8}{3} q_2 + \frac{0,4}{6} q_3 = -0,55 \\ \frac{0,4}{6} q_2 + \frac{0,8}{3} q_3 = -0,25 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} b_1 q_1 + c_1 q_2 = d_1 \\ a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 = d_2 \\ a_3 q_2 + b_3 q_3 = d_3 \end{array} \right.$$

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}} ; B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}} ; a_1 = c_3 = 0$$

$$A_1 = -0,25 ; B_1 = -9,55 ; A_2 = -0,27 ; B_2 = 0,36 ; A_3 = 0 ; B_3 = -1,1$$

$$q_3 = B_3 = -1,1$$

$$q_2 = A_2 q_3 + B_2 = 0,66$$

$$q_1 = A_1 q_2 + B_1 = -9,66$$

$$\bullet i=1 : S_1(x) = q_0 \frac{(0,4-x)^3}{6 \cdot 0,4} + q_1 \frac{(x-x_0)^3}{6 \cdot 0,4} + \left(\frac{y_0}{0,4} - q_0 \frac{0,4}{6} \right) \times$$

$$x(x_1-x) + \left(\frac{y_1}{0,4} - q_1 \frac{0,4}{6} \right) (x-x_0) = -4x^3 - 5,5(0,4-x) +$$

$$+ 0,16(0,4-x) \quad x \in [0; 0,4]$$

$$\bullet i=2 : S_2(x) = q_1 \frac{(x_2-x)^3}{6 \cdot 0,4} + q_2 \frac{(x-x_1)^3}{6 \cdot 0,4} + \left(\frac{y_1}{0,4} - q_1 \frac{0,4}{6} \right) \times$$

$$x(x_2-x) + \left(\frac{y_2}{0,4} - q_2 \frac{0,4}{6} \right) (x-x_1) = -4(0,8-x)^3 + 0,275(x-0,4)^3 +$$

$$+ 0,16(0,8-x) + 1,9(x-0,4) \quad x \in [0,4; 0,8]$$

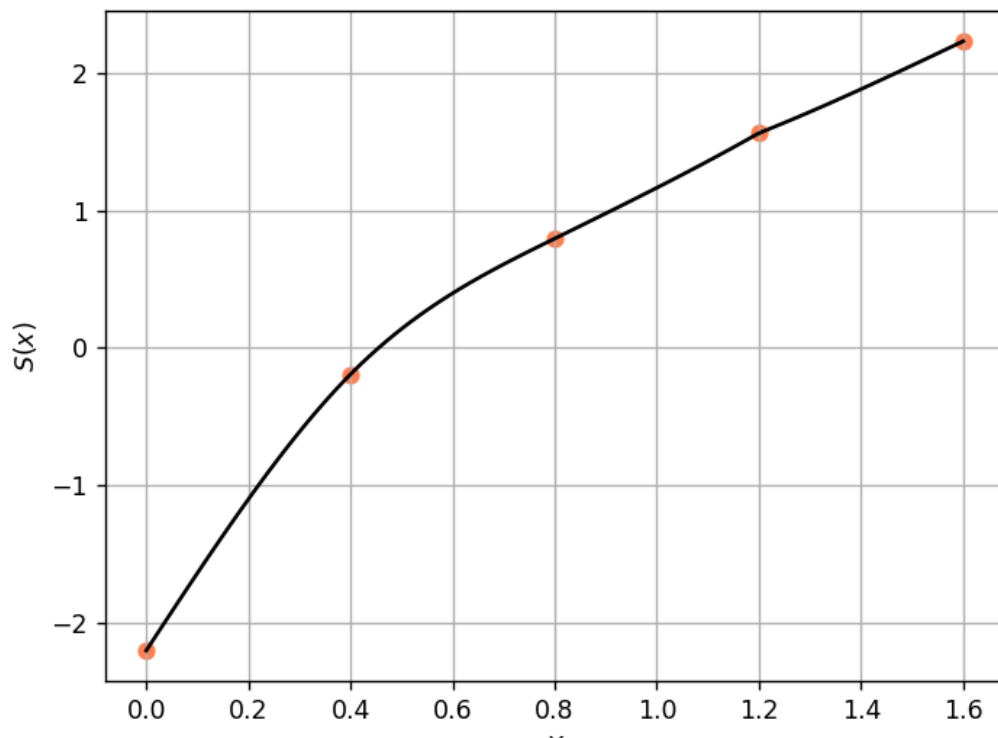
$$\bullet i=3 : S_3(x) = q_2 \frac{(x_3-x)^3}{6 \cdot 0,4} + q_3 \frac{(x-x_2)^3}{6 \cdot 0,4} + \left(\frac{y_2}{0,4} - q_2 \frac{0,4}{6} \right) \times$$

$$x(x_3-x) + \left(\frac{y_3}{0,4} - q_3 \frac{0,4}{6} \right) (x-x_2) = 0,275(1,2-x)^3 +$$

$$- 0,46(x-0,8)^3 + 1,94(1,2-x) + 3,98(x-0,8) \quad x \in [0,8; 1,2]$$

$$\begin{aligned}
 \bullet i = 4 : S_4(x) &= q_3 \frac{(x-x_1)^3}{6 \cdot 0,4} + q_4 \frac{(x-x_3)^3}{6 \cdot 0,4} + \left(\frac{y_1}{0,4} - q_3 \frac{0,4}{6} \right) x \\
 &\times (x_4 - x) + \left(\frac{y_4}{0,4} - q_4 \frac{0,4}{6} \right) (x - x_3) = -0,46 (1,6 - x)^3 + \\
 &+ 3,98 (1,6 - x) + 5,58 (x - 1,2) \quad x \in [1,2; 1,6] \\
 x^* &= 8 > x_4 \\
 S_4(8) &\approx 182
 \end{aligned}$$

Результат виконання програми



Розрахунок сплайна за допомогою інтерполяції в точці $X = 8$: 181.350481311475

Висновок: протягом виконання лабораторної роботи я ознайомився з методологією сплайн-інтерполювання функцій, зокрема побудови кубічного сплайну.