Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Лабораторна робота №7

Методи чисельного розв’язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь

Виконав
студент групи ІА-32:
Лось Я. В.

Перевірила:
Вітюк А.Є.

Київ 2024

Мета роботи: ознайомитись з ітераційними методами розв’язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання

1. Методами простих ітерацій і Ньютона розв’язати систему нелінійних рівнянь (див. свій варіант у файлі) (якщо існує декілька розв’язків, то знайти той з них, у якому значення невідомих є додатними). Початкове наближення визначити графічно.
2. Написати програму розв’язування поставленої задачі мовою Python всіма розглянутими вище методами.

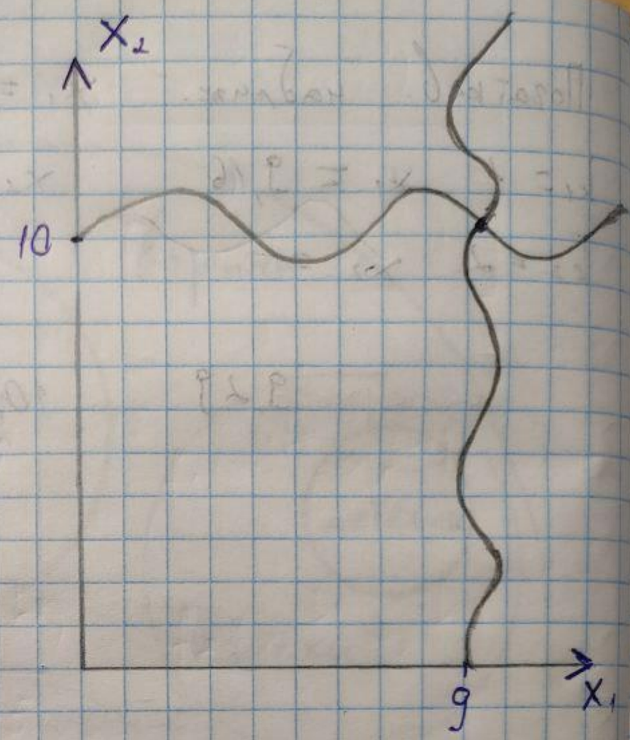
Аналітичний розв’язок

$$
\begin{aligned}
x_1 - \cos x_2 &= a \\
x_2 - \sin x_1 &= a
\end{aligned}
$$

Параметр a: 10

Система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - \cos x_2 = a \\ x_2 - \sin x_1 = a \end{cases}$$



Початкове наближення:

$x_1 = 9$

$x_2 = 10$

1) Метод простих ітерацій

$\varepsilon = 0{,}01$

Зведемо до вигляду:

$$x_1^{(k+1)} = f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)})$$
$$x_n^{(k+1)} = f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)})$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 + \cos x_2 \\ x_2 = 10 + \sin x_1 \end{cases}$$

$k_1 = 1:$ $x_1 = 9,16$ $x_2 = 10,4$

$k_2 = 2:$ $x_1 = 9,43$ $x_2 = 10,26$

$k_3 = 3:$ $x_1 = 9,33$ $x_2 = 9,99$

$k_4 = 4:$ $x_1 = 9,15$ $x_2 = 10,09$

$k_5 = 5:$ $x_2 = 9,21$ $x_2 = 10,27$

$k_6 = 6:$ $x_1 = 9,33$ $x_2 = 10,21$

$k_7 = 7:$ $x_1 = 9,26$ $x_2 = 10,16$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 9,26 \\ x_2 = 10,16 \end{cases}$

2) Метод Ньютона

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\det A_1^{(k)}}{\det J^{(k)}}$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\det A_2^{(k)}}{\det J^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$J^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$A_1^{(k)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

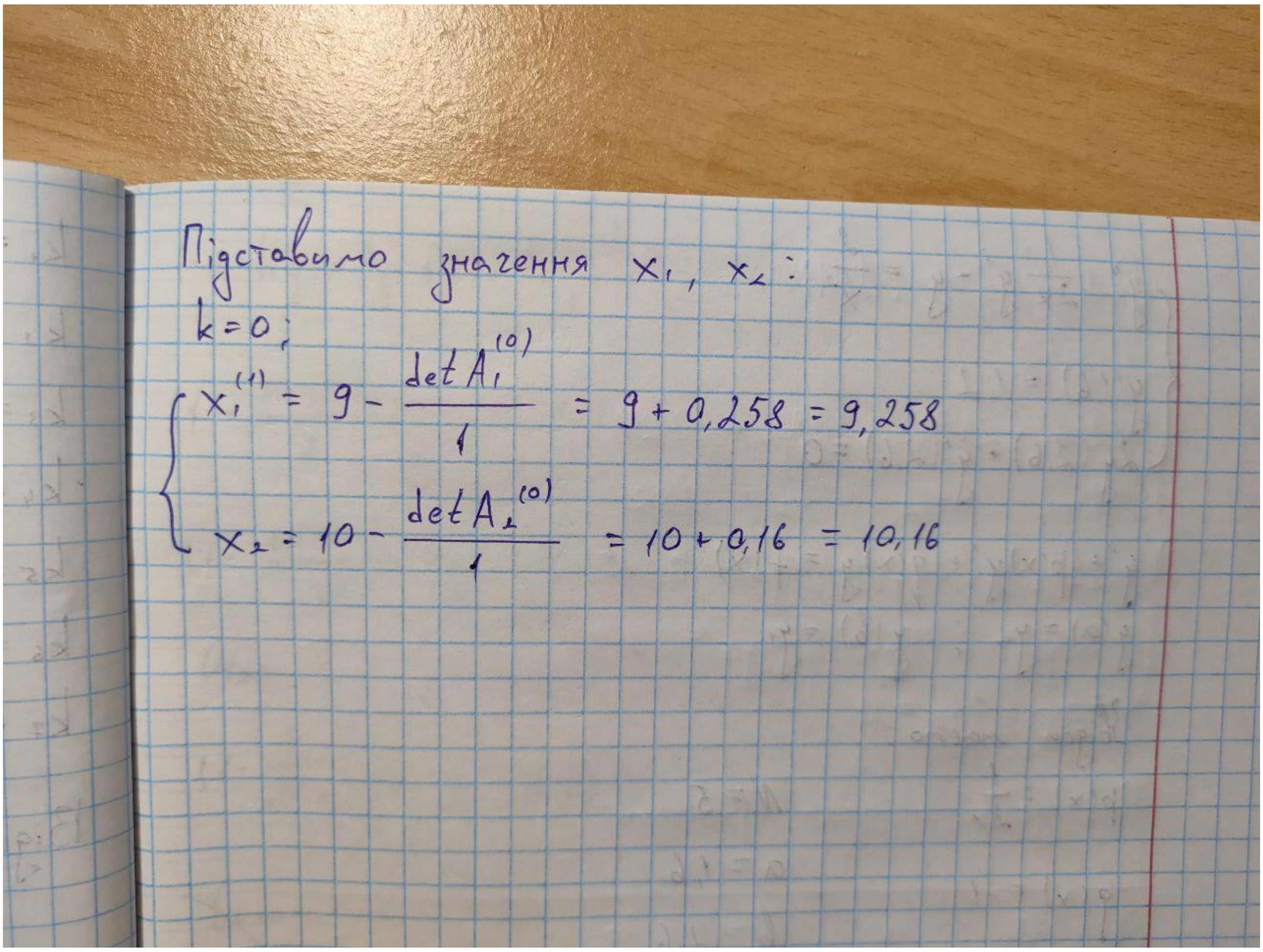
$$A_2^{(k)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x} & f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = x_1 - \cos x_2 - 10$$

$$f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = x_2 - \sin x_1 - 10$$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 1; \qquad \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = \sin x_2;$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = -\cos x; \qquad \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 1$$

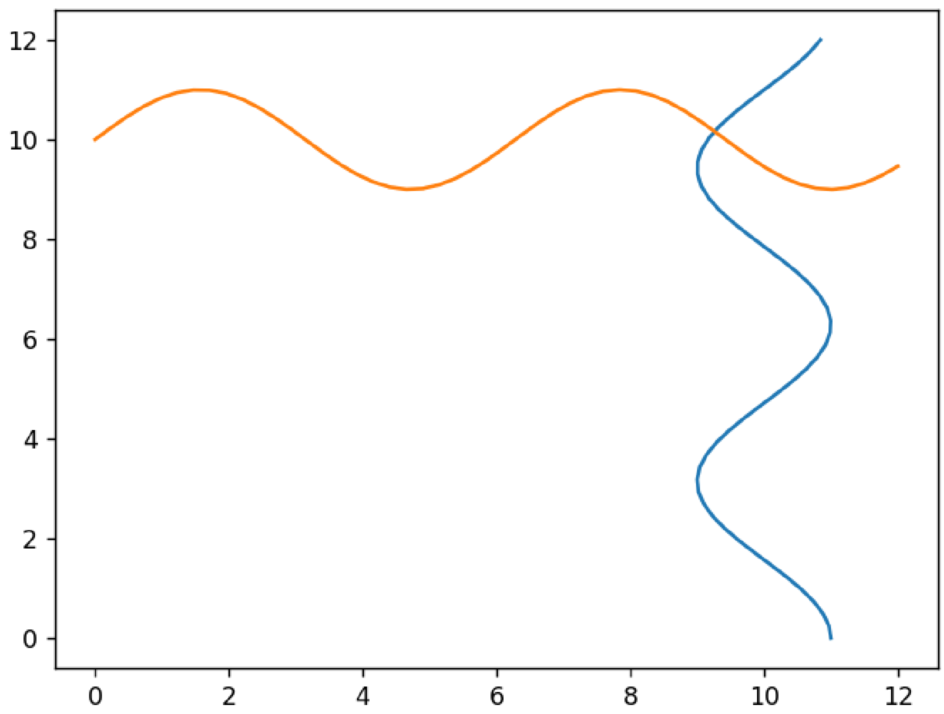


Підставимо значення x_1, x_2:

$k=0;$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 9 - \dfrac{\det A_1^{(0)}}{1} = 9 + 0{,}258 = 9{,}258 \\ x_2 = 10 - \dfrac{\det A_2^{(0)}}{1} = 10 + 0{,}16 = 10{,}16 \end{cases}$$

Результат виконання програми



```
Метод простих ітерацій: [ 9.26317138 10.15695782]
Метод Ньютона: [ 9.26061855 10.1634231 ]
```

Висновок: протягом виконання лабораторної роботи я ознайомився з ітераційними методами розв’язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.