Distribuição Weibull Unitária Complementar (CUW)

1. Introdução

A distribuição Weibull Unitária Complementar (CUW) é uma distribuição contínua definida no intervalo unitário $(0, 1)$, proposta como alternativa flexível para modelar proporções e dados limitados. A distribuição é parametrizada por dois parâmetros:

- $\mu \in (0, 1)$: parâmetro de mediana;
- $\gamma > 0$: parâmetro de forma.

2. Funções da Distribuição

Seja $Z \sim \text{CUW}(\mu, \gamma)$. As principais funções associadas a essa distribuição são:

2.1 Função de Distribuição Acumulada (CDF)

$$F_{CUW}(z) = 1 - 2^{-\left(\frac{\log(1-z)}{\log(1-\mu)}\right)^{\gamma}}, \quad 0 < z < 1 \tag{1}$$

2.2 Função de Densidade de Probabilidade (PDF)

$$f_{CUW}(z) = \frac{\gamma \log(2)}{1-z} \cdot [-\log(1-\mu)]^{-\gamma} \cdot [-\log(1-z)]^{\gamma-1} \cdot 2^{-\left(\frac{\log(1-z)}{\log(1-\mu)}\right)^{\gamma}}, \quad 0 < z < 1 \tag{2}$$

2.3 Função Quantílica

$$Q_{CUW}(u) = 1 - (1-\mu)\left(\frac{-\log(1-u)}{\log(2)}\right)^{1/\gamma}, \quad 0 < u < 1 \tag{3}$$

3. Geração de Números Aleatórios

Para gerar uma variável aleatória $Z \sim \text{CUW}(\mu, \gamma)$, utilizamos o método da inversa da CDF:

$$Z = Q_{CUW}(U) = 1 - (1-\mu)\left(\frac{-\log(U)}{\log(2)}\right)^{1/\gamma}, \quad U \sim \text{Uniform}(0, 1) \tag{4}$$

4. Estimação via Máxima Verossimilhança

Seja $z_1, z_2, \ldots, z_n$ uma amostra da CUW. A função de log-verossimilhança dos parâmetros μ e γ é dada por:

$$\ell(\mu,\gamma) = n \log\left(\gamma \log(2)[-\log(1-\mu)]^{-\gamma}\right) - \sum_{i=1}^{n} \log(1-z_i)$$
$$+ (\gamma-1)\sum_{i=1}^{n} \log[-\log(1-z_i)] - \log(2)[-\log(1-\mu)]^{-\gamma} \sum_{i=1}^{n} [-\log(1-z_i)]^{\gamma} \quad (5)$$

4.1 Estimador de μ com γ fixo

Para um valor fixo de γ, a estimativa de μ pode ser obtida por:

$$\hat{\mu}(\gamma) = 1 - \exp\left\{ -\left(\frac{\log(2)}{n} \sum_{i=1}^{n} [-\log(1-z_i)]^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \right\} \quad (6)$$

Substituindo esta expressão na log-verossimilhança original, obtemos a verossimilhança perfilada para γ, que pode ser maximizada numericamente.

5. Considerações Finais

A distribuição CUW possui propriedades matemáticas interessantes, como flexibilidade na forma da densidade, e é útil para modelar variáveis contínuas limitadas entre 0 e 1, como taxas e proporções. Seu uso em aplicações práticas, como o estudo da taxa de alfabetização em municípios, tem mostrado desempenho superior a distribuições clássicas como a beta, especialmente quando se deseja preservar a mediana como parâmetro central.