



مدلسازی پدیده های آماری

دانشگاه صنعتی شریف

سال تحصیلی ۱۳۹۸-۱۳۹۹

یاسمن عسگری ۹۷۱۰۸۹۵۸

امتحان میانترم

سوال ۱

بخش اول: به طور کلی باید توضیح داد که افراد هنگام گرفتار شدن توسط بیماری در همان لحظه خود انتقال دهنده نخواهند بود، بلکه باید مدت زمانی بگذرد -هرچند اندک- که موجود بیماری را در بدن میزبان شروع به فعالیت کرده و به اصطلاح *contagious* شود. برای رفع این مشکل کافی است یک فیلد اضافی برای هر یک از نود ها در نظر بگیریم و نام آن را *next state* بگذاریم. در این فیلد، *state* گام زمانی بعدی را مشخص کرده و عملاً وضعیت بعدی را روی *State* کنونی اعمال نمی کنیم تا اگر فردی بیمار شد یا از دینامیک خارج شد-به هر نحوی من جمله واکسیناسیون، مرگ و میر طبیعی یا ناشی از بیماری، بهبودی-دیگر تاثیر نادرستی رو دینامیک نگذارد. این روش مشکل مطرح شده در صورت سوال را رفع می کند.

بخش دوم: مقایسه ی دینامیک روی شبکه یا میدان میانگین دو نگاه متفاوت از مسئله را می دهند. نگاه به شبکه، یک نگاه میکروسکوپی به مسئله است و ویژگی های درونی و رفتاری هر یک از *node* (گره) در رفتار نهایی سیستم بسیار تاثیر گذار است. اما نگاه به معادلات میدان میانگین، یک نگاه ماکروسکوپی به همه گیری یک پدیده ی آماری است. در واقع با نگاه کردن به هر یک از این دو، ویژگی هایی را از دست می دهیم و هم چنین به دست می آوریم و به نوعی یک *Trade-off* برقرار است که بسته به هدفی که داریم باید انتخاب کنیم. با ذکر یک مثال این چالش هارا بیشتر توضیح می دهیم: فرض کنید یک بیماری نوظهور در جامعه شیوع یافته است. در صورتی که از شبکه (نتورک) برای شبیه سازی کمک بگیریم به نوعی به فرآیند تصادفی رخ داده است و امکان وجود نتیجه های مختلف نیز وجود دارند در ضمن می توانیم گره هایی که با احتمال بالا آلوده خواهند شد را شناسایی کرده و آن ها را نسبت به وجود بیماری آگاهی دهیم. اما با نگاه به معادلات میدان میانگین می توانیم خود را برای آن بیماری در سطح کلان آماده کنیم مثلاً تعداد تخت های بیمارستانی، پزشک، دارو و ... چالش بعدی مقایسه ی این دو مدل، یکی کردن پارامتر ها و متغیر هاست. مثلاً برای یک *SIR* ساده در شبکه برای نرخ واگیری آنچه اهمیت دارد، احتمال گرفتن بیماری هنگام تماس با فرد بیمار است اما همین مسئله در میدان میانگین، به تعداد *contact* های موثر برای گرفتن بیماری گفته می شود.

بخش سوم: برای بررسی رفتار های همه گیری در جوامع، چندین روش مختلف به کار برده می شود که علاوه بر پیاده سازی های مختلف، دیدگاه های مختلفی را نمایش می دهند. همان طور که در بالاتر توضیح داده شد، میدان میانگین یک نگاه ماکروسکوپی و بررسی بیماری بر روی شبکه یک نگاه میکروسکوپی است. البته باید توجه کرد که در مدل شبکه که نام دیگر آن *agent-based* است، می توانیم رفتار های هر یک از نقش ها را نیز وارد کنیم. مثلاً برای پزشک، بیمار، ... یک رفتار مشخص در نظر بگیریم. یک دیدگاه میانی (مزوسکوپی) وجود دارد که نام آن *metapopulation* است. در این دیدگاه دسته هایی (گله، اجتماع، شهر، کشور) در نظر گرفته می شوند که در هر یک از این دسته ها، دینامیک در حال اجرا است اما این دینامیک ها علاوه بر اجرای مستقل با یکدیگر نیز تعامل دارند و ارتباط میان آن ها می تواند دینامیک هر یک را سریع تر یا کند تر کند. این دیدگاه یکی از پر کاربرد ترین دیدگاه های اجرای مدل های همه گیری است.

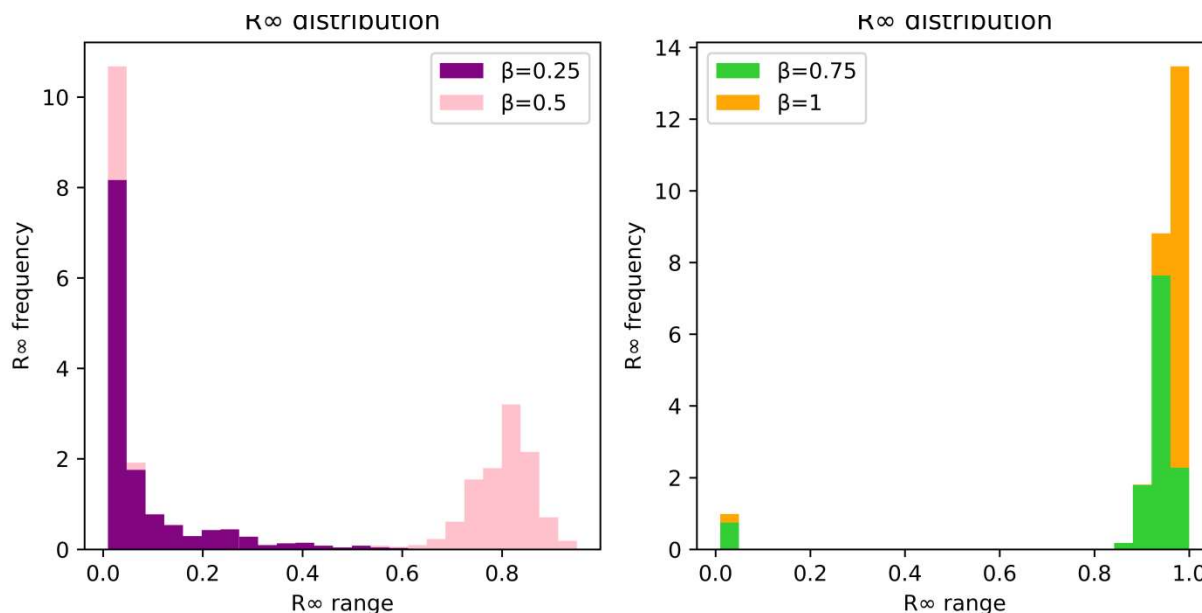
سوال ۲

تئوری: در این بخش دقیقاً ۴ گروه اصلی داریم: S برای افراد سالم، E برای افراد بیمار، I برای افراد مبتلا و R برای افراد بهبود یافته ها!

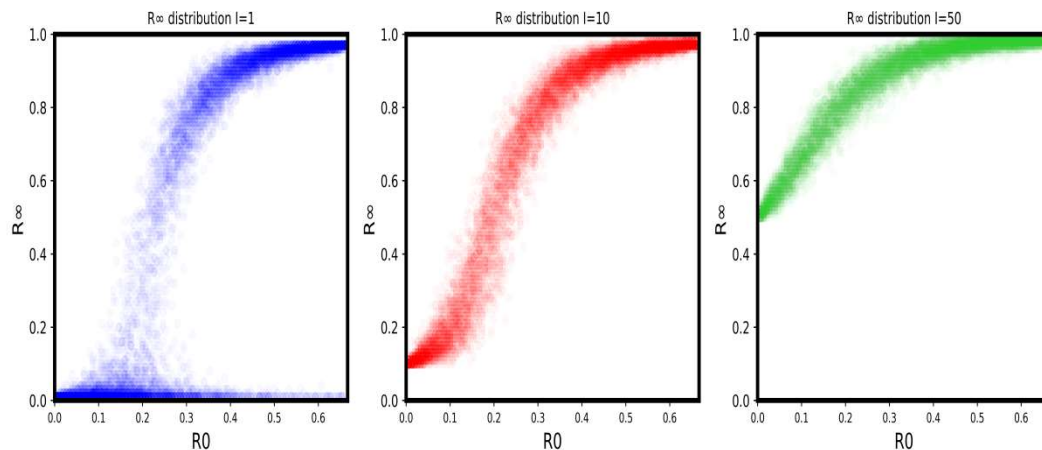
در هر مرحله الگوریتم حل مسئله وضعیت افراد بیمار را گرفته و با احتمالی افرادی که با آن ها در ارتباط است را بیمار کرده (β) و اگر تغییری در وضعیتشان رخ داد آن را در **next state** لحاظ می کنیم. سپس افراد E را با یک احتمالی به امی بریم که این احتمال برابر با σ است این وضعیت را نیز در **next state** می نویسیم. افراد I را هم با یک نرخ به سمت بهبودی یا مرگ (فرقی ندارد ولی بهبودی انرژی مثبت بیشتری دارد) برده و از دینامیک خارجشان می کنیم که این احتمال برابر با γ است این وضعیت را نیز در **next state** می نویسیم. در نهایت چون همه در **next state** نوشته شده اند دیگر مشکل سوال یک را نخواهیم داشت و **state** را **next state** برابر قرار می دهیم. پایان دینامیک را آنجا قرار می دهیم که مسئله به تعادل رسیده باشد و دیگر هیچ I و E نداشته باشیم و تمامی این دو گروه بهبود یافته باشند.

توضیحات: کد این بخش در فایل فرستاده شده به اسم Erdos-Renyi SEIR پیوست شده است. برای نوشتن آن از کتاب خانه ی **networkx** استفاده کردم و برای کشیدن نمودار ها نیز از **pyplot** در کتاب خانه ی **matplotlib** تعداد **node** را برابر ۱۰۰ و تعداد یال ها را برابر ۲۰۰ قرار داده ام در این صورت میانگین درجات رئوس ۴ خواهد شد.

بخش اول: یکی از مهم ترین نمودار هایی باید آن را رسم کنیم تاثیر R_0 در وضعیت تعادل بیماری است. چون که σ و γ اعدادی داشته شده هستند و ما از احتمال استفاده می کنیم ($0 \leq p \leq 1$) پس β را از صفر تا یک تغییر داده و تغییر فاز را مشاهده می کنیم. پس یکی از این نمودار ها، نمودار R_∞ بر حسب $\frac{\beta}{\gamma + \sigma}$ است. البته واضحاً برای تعداد اولیه ی بیمار متفاوت نتایج متفاوت خواهد بود که من برای تعداد بیمار اولیه ی ۱، ۱۰، ۵۰ نیز آن را نمایش داده ام. نمودار بعدی که علاقمندم آن را رسم کنم نمودار هیستوگرام R_∞ برای چند β است. به طور کلی این دو نمودار می توانند یک شمای کلی از شبکه ی مورد بررسی ارائه دهند.



برای توضیح نمودار بالا باید گفت که هنگامی که β کم باشد امکان دارد که بیماری در همان لحظات اولیه ی پخش از بین برود و دینامیک به تعادل برسد. این موضوع برای زمانی که بتا را زیاد می کنیم کمتر اتفاق می افتد. در واقع باید گفت که افزایش β یک نمودار به سمت راست متمایل میشود که از آن نیز شهود کافی داریم.

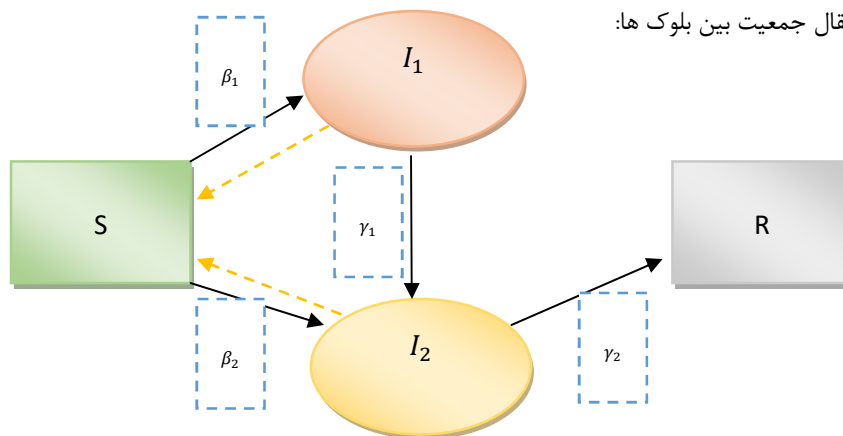


نمودار بعدی که به نظرم به شهود بسیار خوب از دینامیک به ما می دهد، نمودار بالا است. برای هر بتای مختلف، ۱۰۰ بار شبیه سازی کرده ام و تمامی نقطه ها را روی نمودار رسم کرده ام این کار را برای سه اولیه ی متفاوت انجام دادم و نتیجه را در نهایت گزارش کردم. نمودار سمت چپ به ما می گوید وقتی تنها یک فرد ناقل داشته باشیم، هم چنان احتمال این که دینامیک در لحظات اولیه خاتمه یابد وجود دارد به طوری که انگار دو نقطه ی جاذب برای مسئله وجود دارد یکی در نزدیک صفر و یکی در نزدیکی یک! اما با افزایش افراد اولیه ی ناقل این احتمال کاهش یافته و دینامیک معمولاً ادامه می یابد. آنچه مسئله و زیبایی ماجراست وجود یک فاز گذار (transition) برای بتاهای مختلف است. در این فاز R_∞ می تواند اعدادی بین ۰.۱ تا ۱ را بگیرد و به نوعی نتیجه ی نهایی را نمی توان از روی شرایط اولیه پیش بینی کرد. اما من تعداد بیماران ناقل را افزایش دادم و می بینیم اگر این تعداد از حدی بیشتر باشد دیگر تغییر فاز مشاهده نمی شود. مشابهت این نمودار با تغییر فاز نمودار R_∞ بر حسب R_0 در معادلات میانگین بسیار زیبا و خوشایند است!

بخش دوم: تفاوت خاصی میان این نمودار ها و نمودار هایی که در تمرین ۳ ارائه شد نمی باشد. البته کتاب یک مسئله ای را خود مطرح و سپس به توضیح آن می پردازد. این که دو نوع مدل SIR و SEIR تفاوتی از لحاظ نتیجه ی پایانی ندارند و آن چه این دو را متفاوت می کند زمان رسیدن دینامیک به تعادل است. به طور کلی وجود دوره نهان بیماری (incubation)، مد سازی را به دنیای واقعی مشابه تر می کند زیرا اغلب بیماری ها پس از آلوده شدن فرد بیمار تا ظهور علائم یا حتی ناقل شدن مدتی فاصله می اندازند (اشاره به نحوه ی تکثیر ویروس ها و کرم ها) و وجود گروه E شبیه سازی را در هر لحظه با دقت بیشتر انجام می دهد.

سوال ۳

بخش اول: برای بخش کافی است دینامیک SIR را برای جامعه ی مورد نظر اجرا کنیم. من در ابتدا معادلات را خیلی ساده نوشته بودم اما حالا تولد و مرگ طبیعی را هم به معادلات اضافه کردم. طبق صورت سوال نیازی به در نظر گرفتن مرگ ناشی از بیماری نیست .



• دستگاه معادله ی دینامیکی:

- I. $\frac{dS}{dt} = -\beta_1 I_1 S - \beta_2 I_2 S$
- II. $\frac{dI_1}{dt} = \beta_1 I_1 S - \gamma_1 I_1$
- III. $\frac{dI_2}{dt} = \beta_2 I_2 S + \gamma_1 I_1 - \gamma_2 I_2$
- IV. $\frac{dR}{dt} = \gamma_2 I_2$

• R_0 این بیماری:

تئوری: واضحاً R_0 این بیماری دو مرحله ای با زمانی که هر یک از این مراحل به طور جداگانه وارد عمل شوند، متفاوت است. یک راه مناسب برای محاسبه ی R_0 این بیماری محاسبه ی S بر حسب زمان و دیگر متغیرهاست. من تلاش هایی در این باره کرده ام. ابتدا وضعیت های تعادل را پیدا کرده و سپس ماتریس ژاکوبین را تشکیل داده ام طبق تعاریف موجود در فصل ۲ اگر مقادیر ویژه ی این ماتریس را بیابیم و نقاط را جایگزین کنم می توانم جواب را بیابم!

ابتدا هر یک از معادلات بالا را برابر صفر قرار داده و نقاط مورد نظر را خواهم یافت. چند دسته جواب پیدا می کنم که تحلیل این که کدامیک می تواند جواب معادله باشد بسیار مهم است.

- I. $-\beta_1 I_1 S - \beta_2 I_2 S = 0$
- II. $\beta_1 I_1 S - \gamma_1 I_1 = 0$
- III. $\beta_2 I_2 S + \gamma_1 I_1 - \gamma_2 I_2 = 0$
- IV. $\gamma_2 I_2 = 0$

از معادله ی دوم خواهم داشت: $I_1 (\beta_1 S - \gamma_1) = 0$ که یکی از آن ها برای جامعه ی بدون بیماری $I_1 = 0$ است و دیگری برای جامعه ی با بیماری است: $S^* = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$ خواهد بود. حالا S^* را در هر یک از معادلات اول و سوم پیدا می کنیم. پس داریم:

$$S^* = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\beta_1}{\beta_1})}{(\beta_1)}$$

از آنجایی که $S^* = \frac{1}{R_0}$ است ما بین $R_0 = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$ و $R_0 = \frac{\beta_1}{(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\beta_1}{\beta_1})}$ هر یک بزرگتر بود جواب مسئله است. اگر بخواهم راستش را بگویم

ماتریس ژاکوبین آن محاسبه ی بسیار سختی دارد که من ساعت ها با آن کار کردم ولی نتایج بسیار بسیار بد به دست می آمدند:

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ \beta_1 I_1^* & \beta_1 S^* - \gamma_1 & 0 \\ \beta_2 I_2^* & \gamma_1 & \beta_2 S^* - \gamma_2 \end{pmatrix}$$

بنابراین با جست و جویی که در اینترنت کردم به راه مناسبی منتهای برای اوایل شیوع بیماری یافتم. ماتریس نسل جدید (new generation) می تواند به ما کمک کند. این ماتریس در یک مقاله ی تاریخی معرفی شده است و می تواند طی چند عملیات کوچک ما را به جواب رساند.

اگر برای I_1 و I_2 یک بردار به نام I در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} \end{pmatrix}$$

طبق اثبات مسئله باید آن را به شکل $\dot{I} = (F - V)I$ نوشت و چون I_1 و I_2 می توان تخمین زد: $S = 1$ در این صورت باید ابتدا ماتریس FV^{-1} به دست بیاوریم در آن صورت داریم: $R_0 = \rho(FV^{-1})$ که ρ بزرگ ترین ویژه مقدار ماتریس موردنظر است.

$$V^{-1} = \frac{1}{|V|} \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \text{ و داریم } |V| = \gamma_1 \gamma_2 \text{ بیابیم: } V = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ -\gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \text{ و } F = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 \\ \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \end{pmatrix}$$

حالا باید ضرب را محاسبه کنیم:

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 \\ \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\gamma_1} & 0 \\ \frac{\beta_2}{\gamma_2} & \frac{\beta_2}{\gamma_2} \end{pmatrix}$$

پس :

$$R_0 = \max \left\{ \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \frac{\beta_2}{\gamma_2} \right\}$$

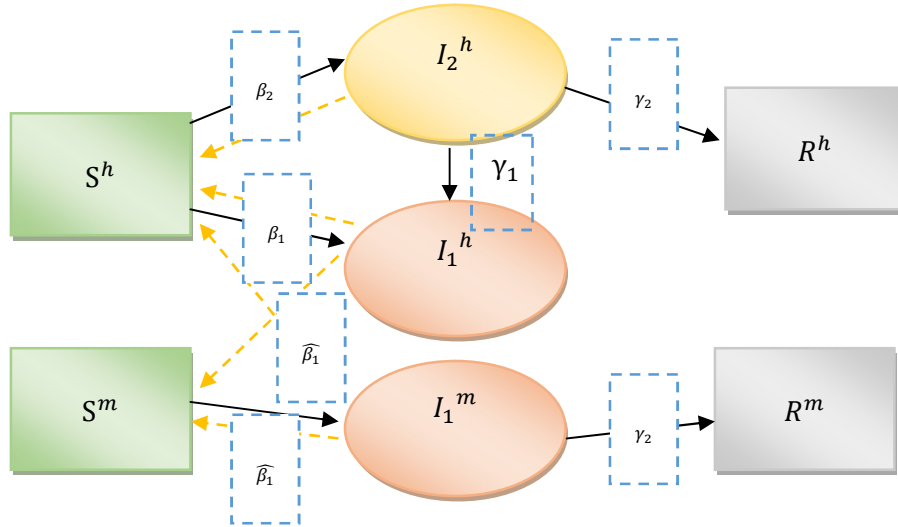
- ایمنی گله ای : واکسیناسیون

در کتاب و دو مقاله ای که پیوست کرده ام به این نکته اشاره دارند در صورتی که بخواهیم واکسیناسیون را انجام دهیم و این عمل به صورت تصادفی صورت بگیرد کافی است به اندازه ی $1 - \frac{1}{R_0}$ از جمعیت را واکسینه کنیم. این اعداد در واقع به معنی آن کسری است در پایان دینامیک تغییر کرده اند و دیگر سالم نیستند. اما اگر بخواهیم به صورت غیر تصادفی واکسینه کنیم می توانیم S و یا I_1 را نسبت به مرحله ی دوم واکسینه کنیم. البته چون دینامیک کوپل شده است این کار به راحتی انجام نمی گیرد و به وقت دیگری موکول می کنیم.

بخش دوم:

در این بخش با در نظر گرفتن پشه و انسان به عنوان دو میزبان که با توجه به شرایط مسئله عمل می کنند، رفتار هر یک را در طول زمان می نویسیم. انسان را با h یعنی حرف اول $human$ و پشه را با m حرف اول $mosquito$ نمایش می دهیم.

- شمای کیفی انتقال جمعیت بین بلوک ها:



- دستگاه معادله ی دینامیکی:

این چهار معادله ی اول برای انسان ها هستند:

- I. $\frac{dS^h}{dt} = -\beta_1 I_1^h S^h - \beta_2 I_2^h S^h - \hat{\beta}_1 I^m S^h$
- II. $\frac{dI_1^h}{dt} = \beta_1 I_1^h S^h + \hat{\beta}_1 I^m S^h - \gamma_1 I_1^h$
- III. $\frac{dI_2^h}{dt} = \beta_2 I_2^h S^h + \gamma_1 I_1^h - \gamma_2 I_2^h$
- IV. $\frac{dR^h}{dt} = \gamma_2 I_2^h$

این سه معادله نیز برای پشه ها هستند:

- $\frac{dS^m}{dt} = -\hat{\beta}_1 I_1^h S^m - \hat{\beta} I^m S^m$
- $\frac{dI_m}{dt} = \hat{\beta}_1 I_1^h S^m + \hat{\beta} I^m S^m - \gamma_2 I^m$
- $\frac{dR^m}{dt} = \gamma_2 I^m$

• R_0 این بیماری:

در ادامه مانند بخش پیش عمل می کنیم. ابتدا تمامی ناقل های این γ معادله را میگیریم و برای آن ها F و V را تشکیل می دهیم.

$$F = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\beta} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & -\hat{\beta}_1 \\ -\gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ -\hat{\beta}_1 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

حالا اول دترمینان ماتریس V را به دست آورده و در نهایت وارونش می کنیم.

$$|V| = \det \begin{vmatrix} \gamma_1 & 0 & -\hat{\beta}_1 \\ -\gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ -\hat{\beta}_1 & 0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 \gamma_2^2 - \hat{\beta}_1^2 \gamma_2 = \gamma_2 (\gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2)$$

سپس به سختی وارون میکنیم، ابتدا باید ماتریس minorها را یافته سپس علامت هر یک از درایه ها را چک کنیم بعد در آخر سر transpose کرده و در پایان پایان آن را بر دترمینان کلی تقسیم کنیم (ممنون از طراح سوال:))

ماتریس ماینور ها عبارت است از: $\begin{pmatrix} \gamma_2^2 & -\gamma_1 \gamma_2 & \gamma_2 \hat{\beta}_1 \\ 0 & \gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2 & 0 \\ \gamma_2 \hat{\beta}_1 & -\gamma_1 \hat{\beta}_1 & \gamma_1 \gamma_2 \end{pmatrix}$ حالا مثبت منفی هارا شطرنجی درست می کنیم:

$$\begin{pmatrix} \gamma_2^2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_2 \hat{\beta}_1 \\ 0 & \gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2 & 0 \\ \gamma_2 \hat{\beta}_1 & \gamma_1 \hat{\beta}_1 & \gamma_1 \gamma_2 \end{pmatrix}$$

حالا transpose می کنیم:

$$\begin{pmatrix} \gamma_2^2 & 0 & \gamma_2 \hat{\beta}_1 \\ \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2 & \gamma_1 \hat{\beta}_1 \\ \gamma_2 \hat{\beta}_1 & 0 & \gamma_1 \gamma_2 \end{pmatrix}$$

مرحله ی نهایی :

$$V^{-1} = \frac{1}{\gamma_2 (\gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2)} \begin{pmatrix} \gamma_2^2 & 0 & \gamma_2 \hat{\beta}_1 \\ \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2 & \gamma_1 \hat{\beta}_1 \\ \gamma_2 \hat{\beta}_1 & 0 & \gamma_1 \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2} \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & \hat{\beta}_1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 - \frac{\hat{\beta}_1^2}{\gamma_2} & \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_1 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

حالا اگر ضریب $\frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 - \hat{\beta}_1^2}$ را برابر مقدار ثابتی قرار دهیم و نامش را بگذاریم می توانیم باز نویسی کنیم:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \xi \gamma_2 & 0 & \xi \hat{\beta}_1 \\ \xi \gamma_1 & \frac{1}{\gamma_2} & \xi \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \hat{\beta}_1 \\ \xi \hat{\beta}_1 & 0 & \xi \gamma_1 \end{pmatrix}$$

زمان اجرای فوت و فن آخر است:

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi\gamma_2 & 0 & \xi\hat{\beta}_1 \\ \xi\gamma_1 & \frac{1}{\gamma_2} & \xi\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\hat{\beta}_1 \\ \xi\hat{\beta}_1 & 0 & \xi\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\gamma_2\beta_1 & 0 & \xi\beta_1\hat{\beta}_1 \\ \xi\beta_2\gamma_1 & \frac{\beta_2}{\gamma_2} & \beta_2\xi\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_1\hat{\beta}\xi & 0 & \hat{\beta}\xi\gamma_1 \end{pmatrix}$$

حالا باید مقادیر ویژه ی این ماتریس را بیابیم:

$$(\xi\gamma_2\beta_1 - \lambda)\left(\frac{\beta_2}{\gamma_2} - \lambda\right)(\hat{\beta}\xi\gamma_1 - \lambda) - (\xi\beta_1\hat{\beta}_1)\left(\frac{\beta_2}{\gamma_2} - \lambda\right)(\hat{\beta}_1\hat{\beta}\xi) = 0$$

یکی از جواب ها بدیهی است که $0 = \left(\frac{\beta_2}{\gamma_2} - \lambda\right)$ است یعنی $\lambda = R_0^2$ پس مابقی جواب هارا به دست می آوریم:

$$(\xi\gamma_2\beta_1 - \lambda)(\hat{\beta}\xi\gamma_1 - \lambda) - (\xi\beta_1\hat{\beta}_1)(\hat{\beta}_1\hat{\beta}\xi) = 0$$

این معادله را بازنویسی می کنیم:

$$\lambda^2 - (\xi\gamma_2\beta_1 + \hat{\beta}\xi\gamma_1)\lambda + (\xi^2\gamma_2\beta_1\hat{\beta}\gamma_1 - \xi^2\hat{\beta}\beta_1\hat{\beta}_1^2) = 0$$

دو ریشه ی این معادله ی درجه ۲ برابر است با:

$$\lambda = \frac{(\xi\gamma_2\beta_1 + \hat{\beta}\xi\gamma_1) \pm \sqrt{(\xi\gamma_2\beta_1 + \hat{\beta}\xi\gamma_1)^2 - 4(\xi^2\gamma_2\beta_1\hat{\beta}\gamma_1 - \xi^2\hat{\beta}\beta_1\hat{\beta}_1^2)}}{2}$$

البته می توان ساده تر نیز کرد:

$$\lambda = \frac{(\xi\gamma_2\beta_1 + \hat{\beta}\xi\gamma_1) \pm \sqrt{(\xi\gamma_2\beta_1 - \hat{\beta}\xi\gamma_1)^2 + 4(\xi^2\hat{\beta}\beta_1\hat{\beta}_1^2)}}{2}$$

پس جواب این بخش برابر است با:

$$R_0 = \max \left\{ \frac{(\xi\gamma_2\beta_1 + \hat{\beta}\xi\gamma_1) + \sqrt{(\xi\gamma_2\beta_1 - \hat{\beta}\xi\gamma_1)^2 + 4(\xi^2\hat{\beta}\beta_1\hat{\beta}_1^2)}}{2}, \frac{\beta_2}{\gamma_2} \right\}$$

• ایده هایی برای بخش امتیازی:

برای این بخش چندین ایده را مطرح می کنم که واضحاً نمی دانم که کدام یک بهتر عمل می کند

۱- این که $\hat{\beta}_1$ را مضربی از β_1 بگیریم این واضحاً مسئله را آسان تر می کند.

۲- می توانیم نرخ S^m را با توجه به تعداد زیاد پشه ها ۱ گرفته و مسئله را بازنویسی کنیم

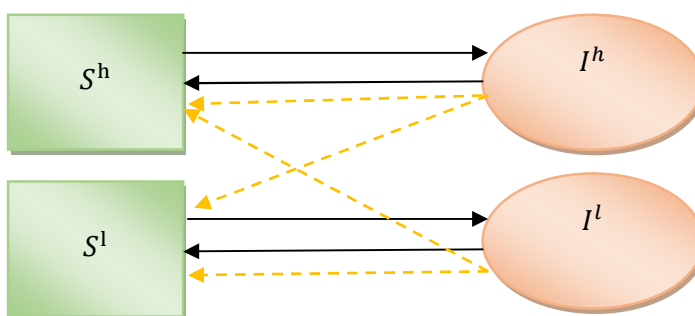
۳- می توانیم بگوییم که گرفتن پشه ها از یکدیگر بسیار به ندرت اتفاق می افتد و این ترم از معادله را حذف کنیم.

سوال ۴

به علت ضیق وقت، هرگونه خلاقیتی که می‌خواستیم انجام دهیم را به زمان دیگری موکول می‌کنیم و از ساده‌ترین موجود قابل انجام استفاده می‌کنیم. معادلات را از تمرین قبلی می‌آوریم:

در این جا گروه با ریسک بالا همان گروه کادر درمان هستند و افراد با ریسک پایین، افراد نرمال جامعه! این دینامیک یک دینامیک SIS است بنابراین یک امکان واگیری مجدد برای هر یک از گروه‌ها وجود دارد.

- شمای کیفی انتقال جمعیت بین بلوک‌ها:



- دستگاه معادله‌ی دینامیکی:

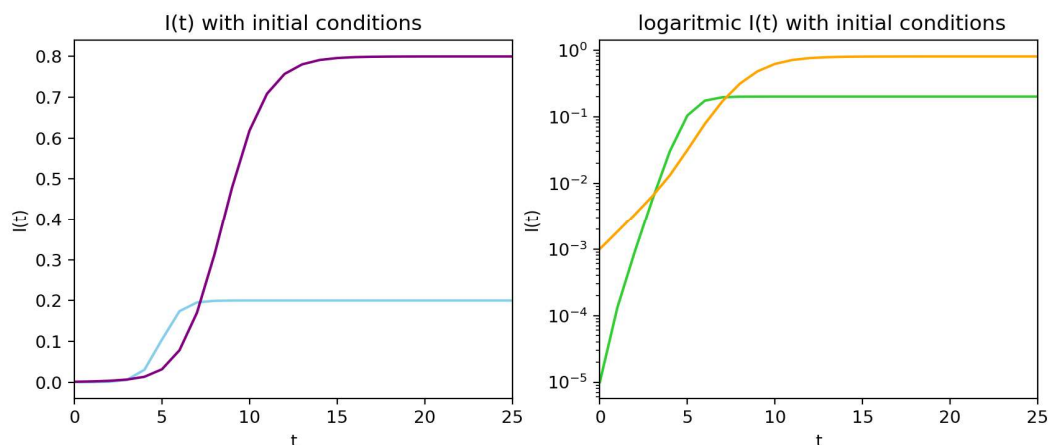
$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \frac{dI_h}{dt} = \beta_{hh}S_hI_h + \beta_{hl}S_hI_l - \gamma I_h \\ \text{ii.} \quad & \frac{dI_l}{dt} = \beta_{ll}S_lI_l + \beta_{lh}S_lI_h - \gamma I_l \\ \text{iii.} \quad & S_h = n_h - I_h \\ \text{iv.} \quad & S_l = n_l - I_l \end{aligned}$$

در این بخش به این نکته نیز توجه داریم که $\gamma = \sigma S_h$ می‌باشد. این ساده‌ترین مدلی است که می‌تواند مسئله را حل کند.

- حل به ازای یک دسته شرایط اولیه:

$$\beta = \begin{pmatrix} 10 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \quad n_h = 0.2, n_l = 0.8 \quad \sigma = 1$$

توضیحات: برای حل این بخش ابتدا معادلات دیفرانسیل را حل کرده و سپس با استفاده از کتابخانه‌ی `scipy.integrate` را `solve_ivp` می‌گیریم و سپس یک نمودار از جواب I_h و I_l نمایش می‌دهیم.



• امتیازی

در تمرین آخر به طور مفصل روش انجام این کار را توضیح داده ام. اما به اختصار دوباره مروری بر این روش میکنیم. در ابتدای شیوع بیماری ها، می توانیم یک فاز گذر در نظر بگیریم که در این فاز: $S_h \approx n_h$ و $S_l \approx n_l$ در این صورت می توانیم ماتریس لرا به شکل زیر ایجاد کنیم:

$$\begin{pmatrix} \frac{dI_h}{dt} \\ \frac{dI_l}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{hh}n_h - \gamma_h & \beta_{hl}n_h \\ \beta_{lh}n_l & \beta_{ll}n_l - \gamma_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_h \\ I_l \end{pmatrix}$$

هم چنین داریم:

$$R_0^l = \left(\frac{\beta_{hl}n_h + \beta_{ll}n_l}{\gamma} \right) \quad R_0^h = \left(\frac{\beta_{hh}n_h + \beta_{hl}n_l}{\gamma} \right)$$

در نهایت $I_h \propto \exp(\lambda t)$ و $I_l \propto \exp(\lambda t)$. که در این صورت λ بزرگ ترین مقدار ویژه ی این ماتریس است. پس:

$$I_h^s + I_l^s = 1 \quad \frac{I_h^s}{I_l^s} = \frac{\lambda[0]}{\lambda[1]}$$

حالا R_0 را می یابیم. برای ایجاد ایمنی در این دینامیک، کافی است محاسبه کنیم به ازای ایمن (خارج کردن از دینامیک) کردن هر یک از گروه پرریسک، چه تعداد از گروه کم ریسک را ایمن کنیم که $R_0 < 1$ صدق کند. سپس نقطه ی بهینه را می یابیم. اما به طور شهودی می توان گفت که نقطه ی اپتیموم نسبت به واکسیناسیون تصادفی درصد بیشتری از گروه پرریسک بالا را واکسینه می کند و به طور کلی با هزینه ی کمتر (اگر هزینه ها برابر باشد) مسئله را حل می کند.

سوال ۵

بخش ۱:

دو پارامتری که در تحلیل این نمودار های داده شده بسیار اهمیت می یابند، تاثیر تغییرات فصلی R_0 و میزان ایمنی افراد در جامعه است (جمع تاثیرات ایزوله و قرنطینه کردن). این دو پارامتر به ترتیب $immunity$ و $seasonality$ هستند. اگر بخواهیم اهمیت کاربردی آن را متوجه شویم لازم به ذکر است که توضیح دهیم نمودار $I(t)$ بسیار اهمیت دارد. زیرا سیاست گذار ها برای فرآیندهای مقابله ای و کنترلی یک پاندمی یا در ابعاد پایین تر شیوع یک بیماری به طور جزئی، باید تعداد کلی بیمار ها و وضعیت آن ها را بدانند تا برای ابعاد اقتصادی، سیاسی، بهداشت-کادر درمان، امکانات بیمارستانی- و خیلی پارامتر دیگر تصمیم گیری کنند.

بخش ۲:

در دو نمودار بالا اثر تغییرات فصلی در نظر گرفته نشده ولی در دو نمودار پایین این اثر را در نظر گرفتیم. تفاوت شاخص هنگام مشاهده ی این ۴ نمودار دیده می شود. هنگام در نظر گرفتن تغییرات فصلی، پیک نمودار کاهش می یابد اما در عین حال مدت زمان بیشتری را در جامعه باقی خواهد ماند. این نیز به نوعی یک $trade-off$ است. زیرا از یک رو فشار روی کادر درمان کمتر می شود و این نکته ی بسیار مهم و خوبی است اما از رویی دیگر تاثیرات اقتصادی و سیاسی ناشی از $flatten$ شدن نمودار بسیار خطرناک است (اشاره به مقاله ۳). این که بفهمیم یک بیماری نوظهور دقیقاً چه قدر $seasonality$ دارد نیاز به حضور حداقل دوسال در جامعه دارد تا رفتار هایش را بشناسیم. (مثال سرخک و آنفولانزا)

بخش ۳:

قرنطینه به طور کلی به معنی خارج کردن افراد مشکوک به ابتلا از دینامیک است. این افراد به دسته های مختلفی تقسیم می شود. همکاری که در محل کار خود ارتباط نزدیکی با یکدیگر دارند و افرادی از آن ها دچار بیماری می شوند. در این صورت علاوه بر ایزوله کردن بیماران نیاز است که این افراد نیز دیگر ارتباطی با بقیه نداشته باشند تا از شیوع هرچه بیشتر جلوگیری کنند. دسته ی دیگر می توانند اعضای یک خانواده یا دوستان صمیمی باشد که با آن ها ارتباط نزدیکی داریم. در صورت ابتلا هر یک از آن ها نیاز است خودمان را قرنطینه کنیم. اما من باب مقایسه نمودار ها از این لحاظ باید گفت که تاثیر قرنطینه باید با تاثیر ایزوله کردن همراه باشد. اگر افراد بیمار را ایزوله نکنیم ولی قرنطینه انجام بگیرد م چنان تفاوت چندانی دیده نمی شود. ولی تاثیر زیبای این موضوع هنگامی است که حدود بیش از ۵۰ درصد را ایزوله کنیم. در این صورت نمودار ها به سمت از بین رفتن می کنند. تاثیر قرنطینه هنگام در نظر گرفتن $seasonality$ بیشتر و موثر تر است.

بخش ۴:

ایزوله کردن یا شناسایی افراد بیمار و خارج کردن آن ها از دینامیک بسیار اهمیت دارد. همان طور که در نمودار ها پیداست هنگامی که به خوبی بیماران شناسایی می شوند، نمودار $flatten$ می شود و راه کار های مناسبی را برای عکس العمل کادر درمان در اختیار می گذارد. اما تاثیر تغییرات فصلی اگر در نظر گرفته شوند، به ما یک قانون کلی مناسب از رفتار سیستم نمی دهد. این که پیک نمودار روی پیک نمودار $seasonality$ رخ دهد نیز خطرناک است.

- بخش ۵:

این که دقیقاً چه سیاست کنترلی روی بیماری انجام شود بسته به زمانی که از شروع دینامیک گذشته باشد، دارد. نکته ی قابل توجه این است که زمان واکنش به بیماری باید بسیار سریع و ضربتی باشد و هرگونه تاخیر در این موضوع می تواند نتایج هنگفتی به بار داشته باشد. اما به راهکار کلی مناسب با نگاه به نحوه ی کنترل بیماری توسط سنگاپور و کره جنوبی، قرنطینه کردن افراد مشکوک و ایزوله کردن افراد بیمار و هم چنین *contact tracing* است. اما اگر در *early stage* بیماری باشیم می توانیم افراد بیمار را تا ظرفیت بیمارستان ها، بستری کرده و آن ها را از دینامیک خارج کنیم. به طور کلی میزان سخت گیری در اجرای ترکیبی هر یک از این سناریو ها و همچنین *acceptance* مردم و همراهی شان بسیار در شیوع بیماری موثر است. هم چنین این که دقیقاً از چه سناریویی استفاده شود بستگی بسیار زیادی به اهداف سیاست گذاران در طولانی مدت دارد.

- بخش ۶:

نکته ی قابل توجه ای که در این مسئله وجود دارد این است که تناوب *seasonality* از کجا شروع شود. شناسایی این که دقیقاً پیک آن نسبت به زمان اولیه ی شیوع چه قدر فاصله دارند نیز حائز اهمیت است. و در نهایت باید باز هم تاکید کرد که همکاری مردم و دولت در حل مشکل شیوع بیماری باید همزمان باشد و همه باید بدانند که:

بنی آدم/عضای یک پیکرند	که در آفرینش ز یک گوهرند
چون عضوی به درد آورد روزگار	دگر عضوهارا نماند قرار
تو کز محنت دیگران بی غمی	نشاید که نامت نهند آدمی