

Методическая разработка

для проведения лекции

Занятие 7. Методы прогнозирования временных рядов и особенности их реализации в системах статистической обработки данных

Учебные вопросы занятия:

1. Типовые модели временных рядов
2. Методы прогноза временных рядов

Заключительная часть

Введение

Следует отметить, что к основным задачам моделирования временных рядов и прогнозирования их параметров относятся: выбор подходящей параметрической модели временного ряда - временной последовательности значений некоторой случайной величины, оценивание ее параметров, а также получение формул для прогноза параметров ряда (экстраполяции значений случайной величины на упреждающий момент времени). Важным моментом в моделировании временного ряда является то, что он, в отличие от классической модели случайного процесса, несет информацию обо всей генеральной совокупности его значений, является лишь одной из ее выборок. Поэтому для обеспечения состоятельности, достаточности и эффективности результатов обработки этих статистических данных необходимо выполнение для временного ряда условий стационарности и эргодичности, что достигается при выборе времени обработки много меньшем чем интервал корреляции значений ряда.

Под этапом выбора модели понимается обоснование некоторого класса стохастической модели и идентификации ее параметров на основе знания автокорреляционных и частных корреляционных функций элементов временного ряда, а также метода диагностической проверки модели. Далее проводится этап оптимального прогнозирования параметров потока требований на основе рекуррентных вычислений. Качество прогноза определяется временем упреждения и точностью. Время упреждения, в свою очередь, определяется временем запаздывания в принятии решений по изменению плана распределения ресурсов, а точность прогноза определяется вероятностью достижения заданной погрешности прогнозирования.

1. Типовые модели временных рядов

Модель линейной регрессии.

Наличие статистической зависимости значений одного случайного процесса в два различных момента времени $s(t_k)$, $s(t_{k-1})$ либо значений двух различных процессов в совпадающие моменты времени $z(t_k)$, $s(t_k)$ делает возможным введение следующих моделей изменения их состояния на основе уравнения прямой линейной (т.е. приближенной для негауссовского случая) регрессии, учитывающего лишь корреляционные связи процессов:

$$\begin{aligned} s(t_k) &\cong \alpha_{ss}s(t_{k-1}) + \beta_{ss}(t_k) \\ z(t_k) &\cong \alpha_{zs}s(t_k) + \beta_{zs}(t_k), \end{aligned} \quad (1)$$

где α_{ss} , α_{zs} – коэффициент регрессии $S(t_k)$ на $S(t_{k-1})$, либо Z на S ;

β_{ss} , β_{zs} – коэффициент сноса (масштабирования).

Коэффициенты уравнения регрессии в выражении (1) определяются на основе метода наименьших квадратов, т.е. оптимальны в смысле минимума среднеквадратического отклонения истинного значения процесса от полученного в модели, при этом дисперсия ошибки оценивания (моделирования) будет составлять величину, равную $\sigma_s^2(t_k)(1-r_{ss})$, $\sigma_z^2(1-r_{zs})$, т.е. зависящую лишь от степени коррелированности значений процесса. Первое уравнение в выражении (1) является уравнением авторегрессии, а второе – взаимной регрессии, при этом коэффициенты уравнений определяются на основе вычисленных по выборочным данным числовым характеристикам.

Учет влияния на текущее значение ряда более чем одного члена ряда и независимых случайных возмущений приводит к необходимости использования более сложных моделей – моделей авторегрессии, скользящего среднего и их комбинаций.

Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего (АРСС(p,q))

Достаточно общая модель временного ряда может быть представлена как результат действия определенного механизма обработки предшествующих членов ряда и некоторого числа членов возбуждающей белой последовательности, т.е. в виде объединенной модели авторегрессии и скользящего среднего:

$$s(k) = \sum_{i=1}^p a_i s(k-i) + \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon(k-j), \quad (2)$$

где a_i, b_j – параметры авторегрессии и скользящего среднего, оцениваемые по временному ряду на основе методов математической статистики;

$\varepsilon(k)$ – случайная белая гауссовская последовательность независимых величин с нулевым математическим ожиданием, дельта-функцией корреляции и известной дисперсией.

Если $q=0$, $b(0)=1$, то уравнение описывает модель *авторегрессии*, которая интерпретируется как механизм, генерирующий временной ряд, в котором наблюдение переменной $s(k)$ в некоторый момент k выражается через систематическую зависимость от той же самой переменной в p моментах времени,

непосредственно предшествующих k моменту плюс значение случайного возмущения $\varepsilon(k)$ в момент k .

Таким образом, текущее значение $s(k)$ выходного ряда выражается через линейную комбинацию из P предшествующих отсчетов, которые называют *предсказанными наблюдениями (прогнозом)*. С целью минимизации ошибки прогноза в процессе идентификации параметров авторегрессии целесообразно пользоваться критерием минимума среднеквадратической погрешности (дисперсии ошибки) прогноза. Заметим, что процесс авторегрессии будет стационарным только в случае, если его параметры лежат в определенном диапазоне. Например, если имеется только один параметр, то он должен находиться в интервале $-1 < a_1 < +1$. В противном случае, предыдущие значения будут накапливаться, и значения последующих $s(k)$ могут быть неограниченными, следовательно, ряд не будет стационарным. Если имеется несколько параметров авторегрессии, то можно определить аналогичные условия, обеспечивающие стационарность.

Частным случаем авторегрессионной модели является марковский процесс

$$s(k) = a(k/k-1)s(k-1) + \varepsilon(k).$$

При $p=0$ смешанная модель преобразуется в модель *скользящего среднего*, реализующую механизм учета динамики изменения значений возбуждающей последовательности $\varepsilon(k)$. В отличие от процесса авторегрессии, в процессе скользящего среднего текущее наблюдение ряда представляет собой сумму случайного компонента $\varepsilon(k)$ в данный момент и линейной комбинации значений случайных воздействий в предыдущие q моментов времени. Определение оптимального значения параметров скользящего среднего основано на учете корреляций значений случайных воздействий на глубину q шагов.

На этапе *идентификации* порядка модели необходимо решить, какое число параметров авторегрессии (p) и скользящего среднего (q) должно присутствовать в эффективной и *экономной* модели процесса. (*Экономность* модели означает, что в ней имеется наименьшее число параметров и наибольшее число степеней свободы среди всех моделей, которые подгоняются к данным). На практике очень редко бывает, что число параметров p или q больше 2. Встречаются и более сложные модели, например, учитывающие тренд. Основным ограничением при применении данной смешанной модели является стационарность моделируемого временного ряда.

2. Методы прогноза временных рядов

Экспоненциальное сглаживание

Предположим, что исследуется временной ряд $s(t)$. Выражение для прогноза очередного элемента ряда $\tilde{s}(t+1)$ на основе экспоненциального сглаживания имеет следующий вид:

$$\tilde{s}(t+1) = \alpha_s s(t) + \beta_s \tilde{s}(t), \quad (3)$$

где $\tilde{s}(t+1)$ – оценка элемента $s(t+1)$ в виде экспоненциальной средней, полученная в текущий момент времени;

$s(t)$ – элемент ряда, наблюдаемый на предыдущем этапе анализа;

$\tilde{s}(t)$ – оценка элемента $s(t)$, полученная на предыдущем этапе анализа;

α_s – коэффициент сглаживания, $\alpha_s = \text{const}$, $0 < \alpha_s < 1$;

$\beta_s = 1 - \alpha_s$.

Прогнозирование на основе экспоненциального сглаживания можно представить в виде обработки с помощью фильтра, на вход которого последовательно поступают дискретные элементы анализируемого фрагмента, а на выходе формируются прогнозируемые значения $\tilde{s}(t+1)$ в виде экспоненциальной средней. Вид импульсной характеристики фильтра определяется значением коэффициента сглаживания α_s , причем при меньшем α_s колебания значений элементов анализируемого фрагмента подавляются в большей степени.

Для проверки адекватности предлагаемой модели ряда на каждом шаге анализа используется ошибка прогнозирования, представляющая собой разность между наблюдаемым значением $s(t+1)$ анализируемого фрагмента и оценкой $\tilde{s}(t+1)$, полученной на основе экспоненциального сглаживания, следующего вида

$$e(t+1) = s(t+1) - \tilde{s}(t+1) = s(t+1) - \alpha_s s(t) - \beta_s \tilde{s}(t). \quad (4)$$

Используя выражение (4), ошибку прогнозирования $e(t+1)$ можно выразить через значения элементов ряда следующим образом

$$\begin{aligned} e(t+1) &= s(t+1) - \alpha_s s(t) - \alpha_s \beta_s s(t-1) - \beta_s^2 \tilde{s}(t-1) = \\ &= s(t+1) - \alpha_s s(t) - \alpha_s \beta_s s(t-1) - \alpha_s \beta_s^2 s(t-2) - \dots - \alpha_s \beta_s^j s(t-j) - \dots - \beta_s^t \tilde{s}(0) = \\ &= s(t+1) - \alpha_s \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^j s(t-j) - \beta_s^t \tilde{s}(0), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{s}(0)$ – величина, характеризующая начальные условия при $t=1$.

Таким образом, экспоненциальное сглаживание всегда требует предыдущего значения экспоненциальной средней. Когда процесс начинается, должна быть некоторая величина $\tilde{s}(0)$, которая может быть использована в качестве значения, предшествующего $\tilde{s}(1)$. Если есть прошлые данные к моменту начала сглаживания, то в качестве начального значения $\tilde{s}(0)$ можно использовать арифметическую среднюю всех имеющихся точек или какой-то их части. Когда для такого оценивания $\tilde{s}(0)$ нет данных, требуется предсказание начального уровня ряда.

Предсказание может быть сделано исходя из априорных знаний о процессе или на основе его аналогии с другими процессами. После k шагов вес, придаваемый начальному значению, равен $(1 - \alpha_s)^k$. Если есть уверенность в справедливости начального значения $\tilde{s}(0)$, то можно коэффициент α_s взять малым. Если такой уверенности нет, то параметру α_s следует дать большое значение, с таким расчетом, чтобы влияние начального значения быстро уменьшилось. Од-

нако большое значение α_s может явиться причиной большой дисперсии колебаний ряда $s(t)$. Если требуется подавление этих колебаний, то после достаточного удаления от начального момента времени значение α_s можно уменьшить.

Выбору величины постоянной сглаживания следует уделять особое внимание. Поиски должны быть направлены на отыскание оснований для выбора наилучшего значения. Нужно учитывать условия, при которых эта величина должна принимать значения, близкие то к одному крайнему значению, то к другому. Нетрудно заметить, что при $\alpha_s = 0$ $s(t) = s(0)$ представляет собой случай абсолютной фильтрации и полного отсутствия адаптации, а при $\alpha_s = 1$ приходим к наивной модели $\tilde{s}(t+1) = s(t)$, в соответствии с которой прогноз на любой срок равен текущему фактическому значению ряда. На практике эта модель из-за простоты пользуется особой популярностью.

Постоянная сглаживания характеризует скорость реакции модели ряда на изменения уровня процесса, но одновременно определяет и способность системы сглаживать случайные отклонения. Поэтому коэффициенту α_s следует присваивать то или иное промежуточное значение между 0 и 1 в зависимости от конкретных свойств динамического ряда. При этом очевидно также и то, что наилучшее значение α_s в общем случае должно зависеть от срока прогнозирования.

Рассмотрим реакцию модели на различного рода изменения стационарности процесса.

Первым и наиболее важным тестом является импульс. При этом анализ выражения (3) показывает, что модель с большей постоянной сглаживания реагирует на импульс сильнее, а этот эффект нежелателен.

При наличии существенных долговременных изменений структуры ряда необходимо добиваться, чтобы модель учитывала их как можно быстрее. При этом анализ выражения (3) показывает, что для скорейшего отражения произошедших изменений выгоднее брать большее значение α_s .

Влияние коэффициента сглаживания α_s на поведение ошибки прогнозирования

Влияние коэффициента сглаживания α_s проявляется через значения параметров ошибки при различных исходных данных. В рамках этой задачи последовательность значений случайной величины $\hat{s}(t+1)$ может быть представлена некоторым рядом, элементы которого определяются выражением следующего вида

$$s(t+1) = a_1 + \varepsilon(t+1), \quad (6)$$

где $a_1 = \text{const}$;

$\varepsilon(t+1)$ – случайные некоррелированные отклонения от a_1 , зависящие от характера ряда, с нулевым средним значением и дисперсией $D[\hat{s}]$.

С учетом того, что сумма коэффициентов $\alpha_s \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^j \rightarrow 1$, для очередного

элемента ряда, прогнозируемого на основе экспоненциального сглаживания, можно записать

$$\tilde{s}(t+1) = \alpha_s \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^j s(t-j) = \alpha_s \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^j (a_1 + \varepsilon(t-j)) = a_1 + \alpha_s \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^j \varepsilon(t-j). \quad (7)$$

Тогда в силу выражений (6) и (7) оценка математического ожидания ошибки прогнозирования может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{M}[\hat{e}] &= \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} e(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} (s(t+1) - \tilde{s}(t+1)) = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} (a_1 + \varepsilon(t+1) - a_1 - \alpha_s \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^j \varepsilon(t-j)) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Анализ выражения (8) показывает, что ошибка прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания имеет нулевое математическое ожидание и не зависит от значений коэффициента сглаживания α_s .

Оценка дисперсии ошибки прогнозирования может быть получена следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{D}[\hat{e}] &= M[(e(t) - \tilde{M}[\hat{e}])^2] = M[(\hat{e}(t))^2] = \\ &= \tilde{D}[s(t+1)] + \alpha_s^2 \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^{2j} \tilde{D}[s(t-j)] - 2\alpha_s \sum_{j=0}^{t-1} \beta_s^j \tilde{R}_s(j+1). \end{aligned} \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что дисперсия ошибки прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания зависит от коэффициента сглаживания α_s и степени корреляции элементов ряда.

Прогнозирование временных рядов на основе адаптивной фильтрации

Существенный недостаток процедуры прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания состоит в отсутствии возможности ее адаптации к изменяющейся структуре ряда. В силу этого обстоятельства в рамках различных задач прогнозирования временных рядов предлагается использовать модель адаптивной фильтрации.

Процедура прогнозирования элементов $\tilde{s}(t+1)$ на основе адаптивной фильтрации состоит в вычислении взвешенной суммы предыдущих наблюдений $s(t)$. В общем виде выражение для адаптивной фильтрации элементов НГС может быть представлено следующим образом

$$\tilde{s}(t+1) = \sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1), \quad (10)$$

где $\tilde{s}(t+1)$ – прогнозируемый элемент в виде взвешенного среднего значения;

w_j – весовые коэффициенты j -го наблюдения, образующие импульсную характеристику фильтра;

$s(t-j+1)$ – элементы, наблюдаемые в j -е моменты;

λ – число наблюдений, используемое для прогнозирования.

С учетом авторегрессионного характера выражения (10) модель прогнози-

рования на основе адаптивной фильтрации также именуется адаптивной моделью авторегрессии порядка λ .

Структурная схема устройства прогнозирования на основе адаптивной фильтрации представлена на рисунке 1.

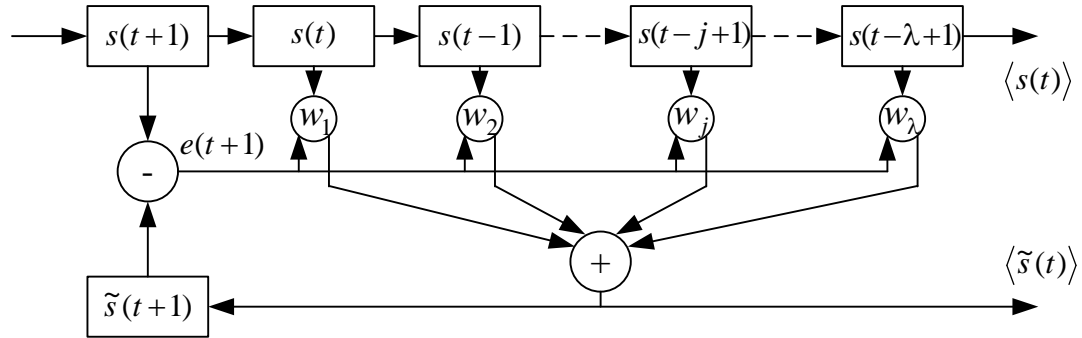


Рисунок 1 – Структурная схема устройства прогнозирования на основе адаптивной фильтрации

В рамках предложенной модели предполагается, что прогнозирование следующего элемента ряда реализуется путем взвешенного суммирования λ предыдущих элементов, причем в идеальном случае по мере возрастания переменной t значение λ должно адаптироваться к структуре ряда.

Основным условием адекватности рассматриваемой модели считается равенство математических ожиданий наблюдаемой и прогнозируемой случайных величин

$$\tilde{M}[\hat{s}(t+1)] = \tilde{M}[\hat{\tilde{s}}(t+1)]. \quad (11)$$

Ошибка прогнозирования $e(t+1)$ может быть представлена в виде разности между значением $s(t+1)$ анализируемого фрагмента, наблюдаемым в текущий момент времени, и значением прогноза $\tilde{s}(t+1)$, полученным в предыдущий момент времени, следующим образом

$$e(t+1) = s(t+1) - \tilde{s}(t+1) = s(t+1) - \sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1). \quad (12)$$

Тогда квадрат ошибки прогнозирования можно представить как

$$\begin{aligned} [e(t+1)]^2 &= [s(t+1) - \sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1)]^2 = \\ &= [s(t+1)]^2 - 2s(t+1) \sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1) + [\sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1)]^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Анализ выражения (13) показывает, что квадрат ошибки прогнозирования является квадратической функцией вектора весовых коэффициентов $\langle w_j \rangle_{\lambda}$. При некоторых значениях весовых коэффициентов вектора $\langle w_j \rangle_{\lambda}$ в момент времени $t+1$ функция $[e(t+1)]^2$ может принимать минимальное значение, равное нулю, т.е.

$$[s(t+1)]^2 - 2s(t+1)\sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1) + [\sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1)]^2 = 0. \quad (14)$$

Следует учитывать, что уравнение (14) со многими неизвестными имеет множество решений. Один из методов получения искомого вектора $\langle w_j \rangle_{\lambda}$ состоит в решении оптимизационной задачи на основе используемой в теории фильтрации системы уравнений Винера-Хопфа.

Также следует отметить, что ошибка прогнозирования $e(t+1)$ рассчитывается на основе весовых коэффициентов вектора $\langle w_j \rangle_{\lambda}$, полученного в предыдущий момент времени. Однако эти весовые коэффициенты не являются оптимальными для следующего момента времени в силу того, что случайные величины анализируемого фрагмента, наблюдаемые в этот момент, могут принимать другие значения. Указанное обстоятельство приводит к тому, что ошибка прогнозирования отклоняется от нулевого значения, а также обуславливает необходимость коррекции элементов вектора весовых коэффициентов $\langle w_j \rangle_{\lambda}$ таким образом, чтобы минимизировать значение ошибки $e(t+1)$.

Для коррекции весов предлагается использовать следующую процедуру.

В рамках этой процедуры используется метод наискорейшего спуска для коррекции импульсной характеристики фильтра в пределах анализируемого участка локальной стационарности. Для этого в каждой точке поверхности, размерность которой определяется числом весовых коэффициентов w_j , $j = 1(1)\lambda$, вычисляется вектор, указывающий направление движения в сторону совокупности весовых коэффициентов, оптимальной с точки зрения минимума среднеквадратической ошибки. Корректировка весовых коэффициентов осуществляется по следующему правилу

$$\langle w_j \rangle_{\lambda}^{(t+1)} = \langle w_j \rangle_{\lambda}^{(t)} - k_g \text{grad}((e(t+1))^2), \quad (15)$$

где $\langle w_j \rangle_{\lambda}^{(t)}$ – вектор весовых коэффициентов, используемый на текущем этапе процедуры прогнозирования;

$\langle w_j \rangle_{\lambda}^{(t+1)}$ – вектор весовых коэффициентов, используемый на следующем этапе процедуры прогнозирования;

k_g – коэффициент, определяющий скорость движения в направлении, обратном градиенту ($k_g > 0$).

В соответствии с выражением (15) корректировка весов осуществляется путем добавления к каждому весовому коэффициенту, используемому на предыдущем этапе прогнозирования, поправки, получаемой умножением коэффициента k_g на градиент, взятый с отрицательным знаком, который указывает наискратчайший путь достижения минимума исследуемой функции $[e(t+1)]^2$.

Компоненты градиента находятся путем дифференцирования квадрата ошибки по весам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e(t+1))^2}{\partial w_1} &= 2e(t+1) \frac{\partial e(t+1)}{\partial w_1} = -2e(t+1)s(t), \\ &\dots, \\ \frac{\partial(e(t+1))^2}{\partial w_\lambda} &= -2e(t+1)s(t-\lambda+1). \end{aligned} \quad (16)$$

В результате для градиента в целом имеет место выражение следующего вида

$$\text{grad}((e(t+1))^2) = -2e(t+1)(s(t), s(t-1), \dots, s(t-\lambda+1)). \quad (17)$$

Выражение (17) определяет способ корректировки весовых коэффициентов

$$\langle w_j \rangle_\lambda^{(t+1)} = \langle w_j \rangle_\lambda^{(t)} + 2k_g e(t+1) \langle s(t), s(t-1), \dots, s(t-\lambda+1) \rangle. \quad (18)$$

Влияние коэффициента k_g на процедуру адаптации можно проанализировать путем вычисления прогнозируемого значения элемента ряда $\tilde{s}(t+1)$ на основе модифицированного вектора весовых коэффициентов $\langle w_j \rangle_\lambda^{(t+1)}$ в некоторый момент времени. С учетом этого пересчитанное значение ошибки прогнозирования можно представить как

$$\begin{aligned} (e(t+1))^* &= s(t+1) - \sum_{j=1}^{\lambda} (w_j^t + 2k_g e(t+1)s(t-j+1))s(t-j+1) = \\ &= s(t+1) - \sum_{j=1}^{\lambda} w_j^t s(t-j+1) - \sum_{j=1}^{\lambda} 2k_g e(t+1)(s(t-j+1))^2 = \\ &= e(t+1) - 2k_g e(t+1) \sum_{j=1}^{\lambda} (s(t-j+1))^2 = e(t+1)(1 - 2k_g \sum_{j=1}^{\lambda} (s(t-j+1))^2). \end{aligned} \quad (19)$$

где $e(t+1)$ – ошибка, полученная на основе вектора весовых коэффициентов $\langle w_j \rangle_\lambda^{(t)}$.

Пусть коэффициент k_g принимает значения

$$k_g = \frac{\alpha_r}{2 \sum_{j=1}^{\lambda} (s(t-j+1))^2}, \quad (20)$$

где α_r – некоторый регуляровочный коэффициент.

Тогда для ошибки прогнозирования на основе модифицированного вектора весовых коэффициентов $\langle w_j \rangle_\lambda^{(t+1)}$ можно записать

$$(e(t+1))^* = e(t+1)(1 - \alpha_r). \quad (21)$$

Анализ выражения (21) показывает, что ошибка прогнозирования $(e(t+1))^*$ на основе модифицированного вектора весовых коэффициентов $\langle w_j \rangle_\lambda^{(t+1)}$ принимает меньшее значение по сравнению с $e(t+1)$ при соблюдении условия $0 < \alpha_r < 2$.

Таким образом, α_r представляет собой параметр адаптации фильтра, определяющий его реакцию на полученную ошибку, который корректирует элементы вектора весовых коэффициентов $\langle w_j \rangle_\lambda$ с целью минимизации ошибки прогнозирования.

Вследствие априорной неопределенности относительно динамических свойств анализируемых изображений значение параметра адаптации α_r , оптимальное с точки зрения минимума ошибки прогнозирования $((e(t+1))^* = 0)$, может быть определено на основе выражения (21) при $e(t+1)(1-\alpha_r) = 0$, что достигается в случае $\alpha_r = 1$.

Для анализа ошибки прогнозирования $e(t+1)$ в различных условиях следует получить оценки числовых характеристик указанной случайной величины.

С учетом допущения (11) оценка математического ожидания ошибки прогнозирования может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{M}[\hat{e}(t+1)] &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (s(t+1) - \sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1)) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} s(t+1) - \\ &- \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{\lambda} w_j s(t-j+1) = \tilde{M}[\hat{s}(t+1)] - \tilde{M}[\sum_{j=1}^{\lambda} w_j \hat{s}(t-j+1)] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Анализ выражения (22) показывает, что ошибка прогнозирования $e(t+1)$ при таком подходе имеет нулевое математическое ожидание и при представленных допущениях не зависит от исходных данных.

Оценка дисперсии ошибки прогнозирования определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{D}[\hat{e}(t+1)] &= \tilde{M}[(\hat{e}(t+1) - \tilde{M}[\hat{e}(t+1)])^2] = \tilde{M}[(e(t+1))^2] = \\ &= \tilde{D}[\hat{s}(t+1)] + \tilde{D}[\sum_{j=1}^{\lambda} w_j \hat{s}(t-j+1)] - 2\tilde{R}_s(t+1). \end{aligned} \quad (23)$$

Анализ выражения (23) позволяет сделать вывод о том, что значение оценки дисперсии ошибки прогнозирования определяется значением оценок дисперсии элементов анализируемого ряда, а также зависит от степени корреляции его элементов.

Заключительная часть.

Подвожу итоги занятия.

Рекомендованная литература:

1. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003.
2. Статистические методы обработки результатов наблюдений / под ред. Р.М. Юсупова. – Л.: МО СССР, 1984.