

بسمه تعالی



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده مهندسی عمران

عنوان  
تمرین ششم هیدرولوژی پیشرفته

نگارنده  
یسنا یگانه  
۴۰۰۲۰۸۷۳۳

استاد  
دکتر محمد دانش یزدی

## فهرست مطالب

فهرست مطالب .....	ب
فهرست شکل ها .....	ب
فهرست نمودارها .....	ب
۱ ساده سازی معادله ریچاردز .....	۱
۲ توسعه کد پایتون برای حل عددی معادله ریچاردز .....	۱
۳ ترسیم نمودار رطوبت خاک نسبت به فاصله از ابتدای ستون خاک .....	۳

## فهرست شکل ها

شکل ۱: محاسبات ساده سازی معادله ریچاردز [۱] - [۳] .....	۱
---	---

## فهرست نمودارها

نمودار ۱: رطوبت خاک در حالت ابتدایی .....	۳
نمودار ۲: رطوبت خاک در حالت نهایی .....	۳
نمودار ۳: رطوبت خاک در تمام زمان ها در یک نگاه .....	۴
نمودار ۴: انیمیشن تغییرات رطوبت در طول زمان .....	۴

## ۱ ساده سازی معادله ریچاردز

معادله کلی ریچاردز در حالت سه بعدی با توجه به قانون دارسی (  $q = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$  ) و اصل پیوستگی میم (  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla q$  ) به صورت زیر است (بر حسب رطوبت خاک - moisture based):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + k_z(\theta)$$

علامت با توجه به مبای مختصات  $z$  مثبت  $\uparrow$  و منفی  $\downarrow$  میگیرد.  $k_z(\theta)$  نشان دهنده رطوبت از دو ترم دوم و سوم که در راستای قائم و عمود بر صفحه می باشد صرف نظر کرده و معادله یک بعدی که با توجه به یک بعدی واقعی بودن جریان و تراوش رطوبت، از دو ترم دوم و سوم که در راستای قائم و عمود بر صفحه می باشد صرف نظر کرده و معادله یک بعدی در راستای افقی به فرم زیر ظاهر شود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

با توجه به اینکه معادله  $D_x(\theta)$  دارای مساله ثابت درون همسره مکان از مساله آمار خارج کردیم به فرم ساده تر زیر درآورد:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = D_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

diffusion معادله

شرایط مرزی B.C.  $\begin{cases} \theta(x=0, t) = \theta_0 \\ \theta(L, t) = \theta_1 \end{cases}$

شرایط اولیه I.C.  $\theta(x, 0) = \theta_1$

شکل ۱: محاسبات ساده سازی معادله ریچاردز [۱]-[۳]

## ۲ توسعه کد پایتون برای حل عددی معادله ریچاردز

در فرم گسسته سازی شده ی معادله ریچاردز برای ستون افقی خاک که به صورت زیر می باشد:

$$\theta_{i,j} = \lambda \theta_{i-1,j-1} + (1 - 2\lambda) \theta_{i,j-1} + \lambda \theta_{i+1,j-1} \quad (1)$$

ترم  $\lambda$  مطابق زیر است:

$$\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (2)$$

که فرضیات در نظر گرفته شده برای تعیین ضریب  $\lambda$  از قرار زیر است:

$\Delta t$ : گام زمانی برابر ۱ دقیقه در نظر گرفته شد، کل زمان بررسی انتقال رطوبت نیز برابر ۲ ساعت (۱۲۰ دقیقه) داخل کد در نظر گرفته شد.

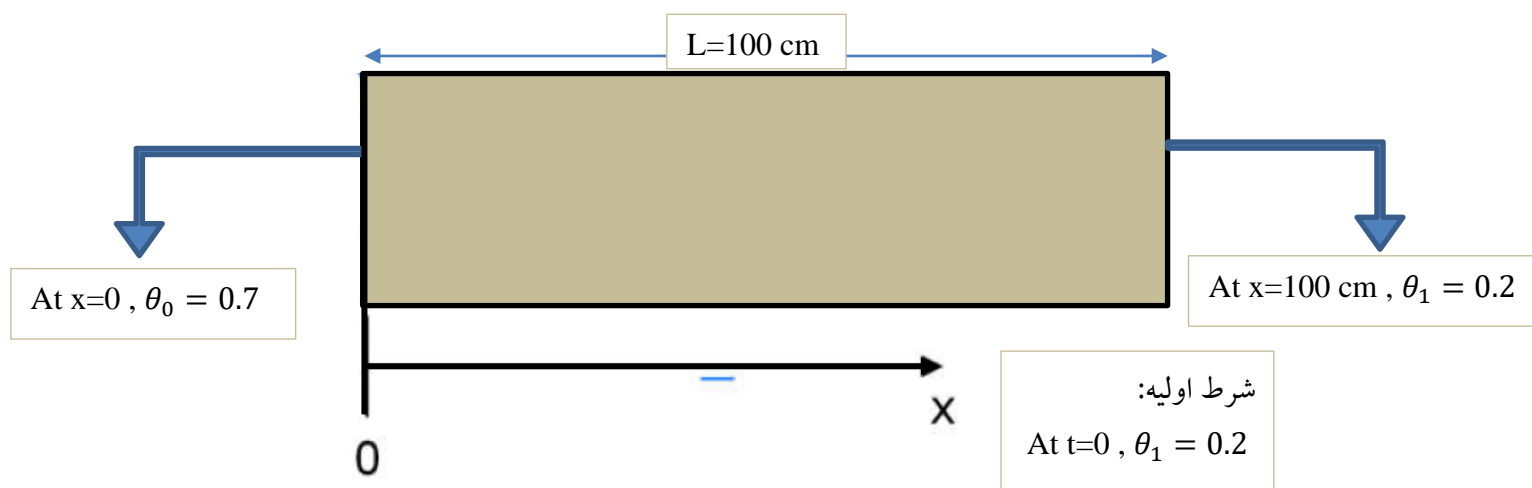
$\Delta x$ : گام مکانی برابر ۱ سانتی متر در نظر گرفته شد، کل طول تیر یعنی  $L$  نیز برابر ۱ متر (۱۰۰ سانتی متر) داخل کد در نظر گرفته شد.

$D$ : ضریب پخش آب در خاک که برابر  $0.4 \text{ cm}^2/\text{min}$  در نظر گرفته شد (در نظر گیری فرضیات مذکور در راستای ارضا شدن شرط  $0 \leq \lambda \leq 0.5$  می باشد).

با جایگذاری سه ترم مذکور، مقدار  $\lambda = 0.4$  محاسبه شد و داخل معادله (۱) جایگذاری شد:

$$\theta_{i,j} = 0.4 \times \theta_{i-1,j-1} + 0.2 \times \theta_{i,j-1} + 0.4 \times \theta_{i+1,j-1} \quad (3)$$

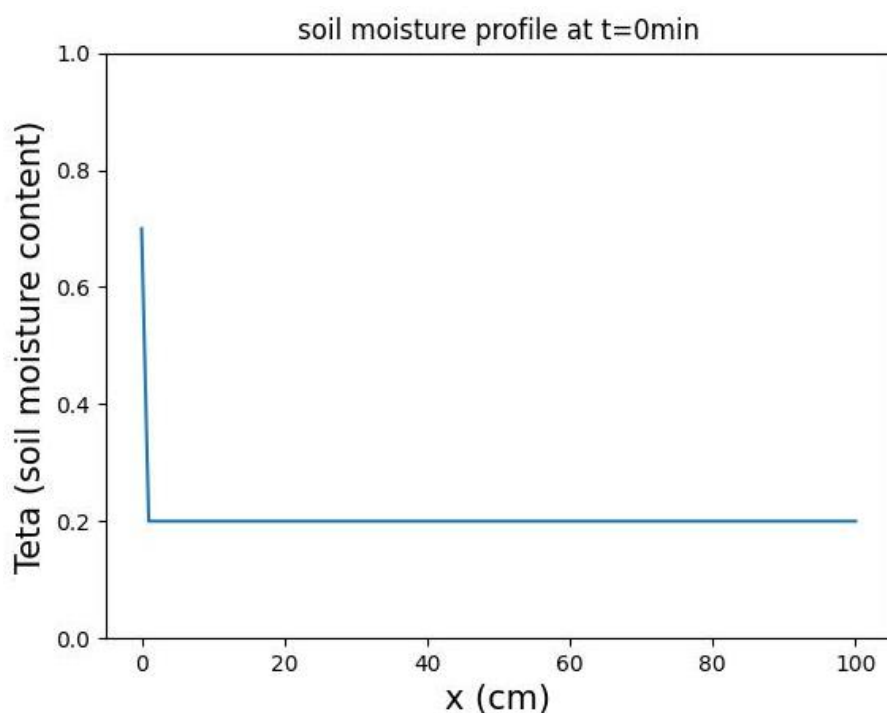
همچنین شرایط مرزی و اولیه تیر به صورت زیر در نظر گرفته شد:



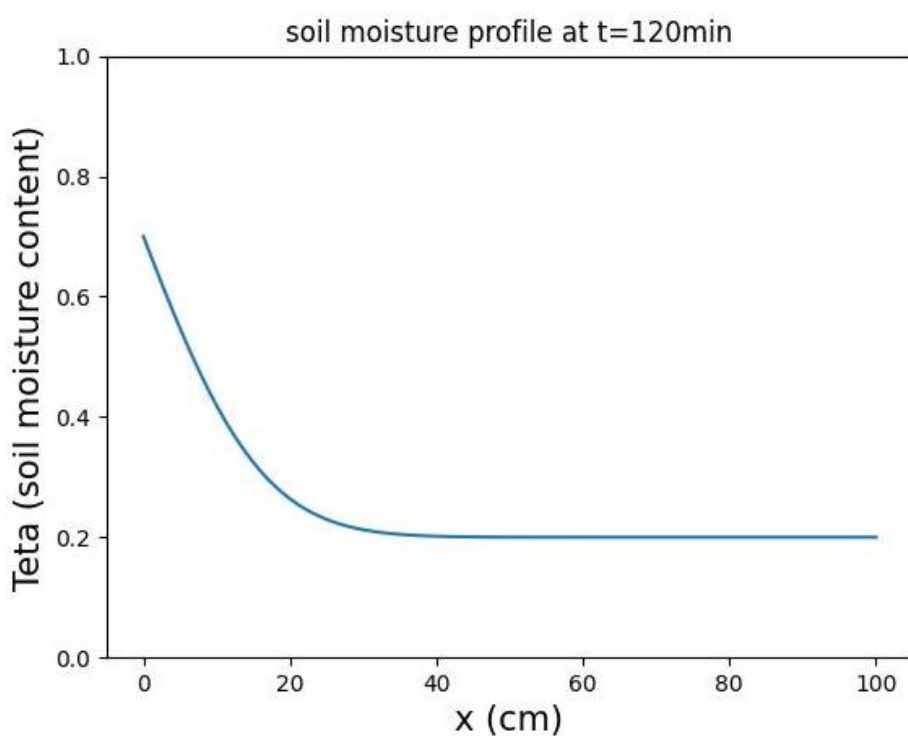
با توجه به معادله (3)، کد پایتون code.py توسعه داده شد که با فرض تقسیم بندی ستون افقی به ۱۰۰ سلول مساوی و به ازای هر گام زمانی، مقدار رطوبت هر سلول را با توجه به رطوبت زمان قبل همان سلول و سلولهای اطراف آن محاسبه می کند. برای دور اول محاسبات و پس از گذشت اولین گام زمانی، مقادیر رطوبت پیشین سلولها برابر شرایط مرزی در نظر گرفته شده می باشد. لازم به ذکر است که رطوبت در سلول ابتدایی و انتهایی همواره ثابت می ماند.

### ۳ ترسیم نمودار رطوبت خاک نسبت به فاصله از ابتدای ستون خاک

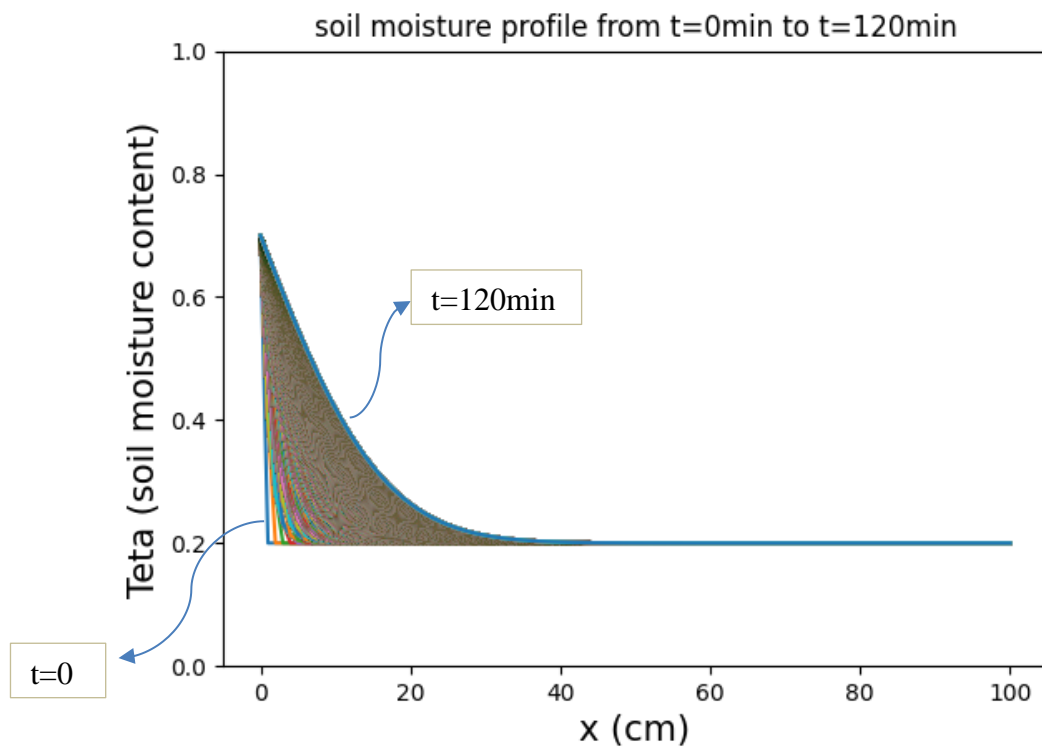
با استفاده از کد `code - graphs.py` نمودار رطوبت خاک نسبت به فاصله از ابتدای ستون خاک از زمان  $t=0$  تا زمان نهایی یعنی  $t=120 \text{ min}$  رسم گردید و تصاویر مربوط به آن به پیوست می‌باشد. برای حالت ابتدایی، انتهایی و تمام زمان‌ها در یک نگاه داریم:



نمودار ۱: رطوبت خاک در حالت ابتدایی

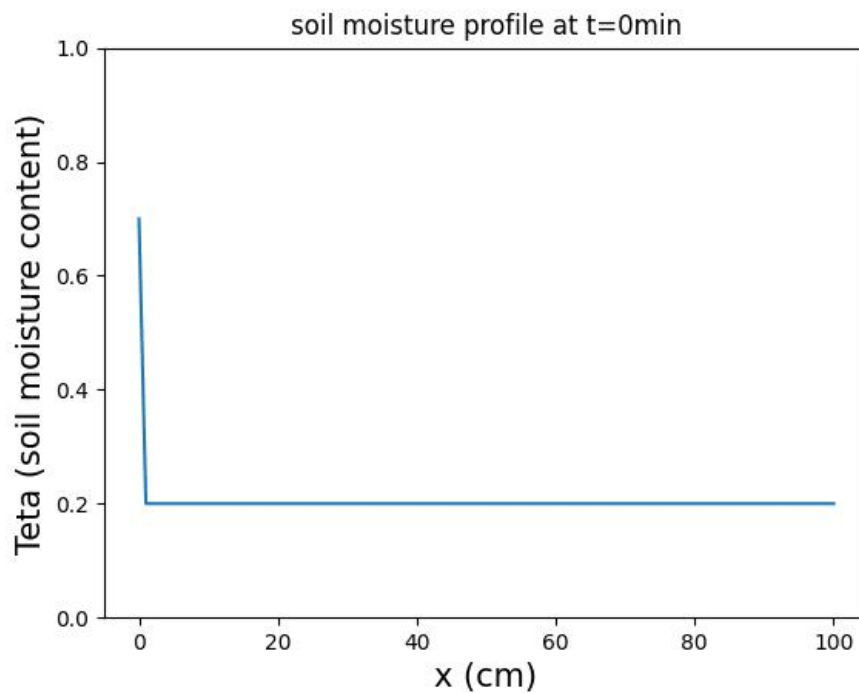


نمودار ۲: رطوبت خاک در حالت نهایی



نمودار ۳: رطوبت خاک در تمام زمان‌ها در یک نگاه

همچنین با استفاده از کد gif.py - code تغییرات رطوبت خاک از ابتدا تا زمان نهایی به صورت انیمیشن و فایل gif به نام moistureanimation.gif ذخیره گردید.



نمودار ۴: انیمیشن تغییرات رطوبت در طول زمان

## مراجع:

- [1] H. R. Z. Sanayei, G. R. Rakhshandehroo, and N. Talebbeydokhti, "Innovative Analytical Solutions to 1, 2 and 3D Water Infiltration into Unsaturated Soils for Initial-Boundary Value Problems," *Scientia Iranica*, vol. 0, no. 0, pp. 0–0, Aug. 2017, doi: 10.24200/sci.2017.4161.
- [2] Y. Pachepsky, D. Timlin, and W. Rawls, "Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils," *Journal of Hydrology*, vol. 272, no. 1–4, pp. 3–13, Mar. 2003, doi: 10.1016/S0022-1694(02)00251-2.
- [3] H. Zhu, T. Liu, B. Xue, Y. A., and G. Wang, "Modified Richards' Equation to Improve Estimates of Soil Moisture in Two-Layered Soils after Infiltration," *Water*, vol. 10, no. 9, p. 1174, Sep. 2018, doi: 10.3390/w10091174.