linear control systems HW3 solutions

1. أ) $w_n^2 = 16$ r/s, $2\zeta w_n = 3 \Rightarrow \boxed{\zeta = 0.375}$ $\boxed{T_p = \dfrac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.847}$

$\boxed{w_n = 4}$

$\boxed{T_s = \dfrac{4}{\zeta w_n} = 2.667}$

$\%OS = e^{\dfrac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \wedge 100 =$

$= 28.06\%$

ب) $w_n^2 = 0.04$, $2\zeta w_n = 0.02 \Rightarrow \boxed{\zeta = 0.05}$ $\boxed{T_p = 15.73}$

$\boxed{w_n = 0.2}$ $\boxed{\%OS = 85.45\%}$

$\boxed{T_s = 400s}$

ج) $w_n^2 = 1.05 \times 10^7$, $2\zeta w_n = 1.6 \times 10^3 \Rightarrow \boxed{\zeta = 0.247}$ $\boxed{T_p = 0.001}$

$\boxed{w_n = 3240}$ $\boxed{\%OS = 44.92\%}$

$\boxed{T_s = 0.005}$

2. $\dfrac{V_c(s)}{V_i(s)} = \dfrac{1/cs}{1/cs + R} = \dfrac{0.703}{s + 0.703}$, $V_i(s) = 5/s$

$V_c(s) = \dfrac{5}{s}\left(\dfrac{0.703}{s+0.703}\right) = \dfrac{5}{s} - \dfrac{5}{s+0.703} \Rightarrow V_c(t) = 5 - 5e^{-0.703t}$

$T = \dfrac{1}{0.703} = 1.422$, $T_r = \dfrac{2.2}{0.703} = 3.129$, $T_s = \dfrac{4}{0.703} = 5.69$

3. $\zeta = \dfrac{-\ln(12\cdot3/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(12\cdot3/100)}} = 0\cdot5549$

$T_s = \dfrac{4}{\zeta W_n} \implies W_n = 7\cdot21$

$G(s) = \dfrac{W_n^2}{s^2 + 2\zeta W_n + W_n^2} = \dfrac{51\cdot96}{s^2 + 8s + 51\cdot96}$

---

4. تابع تبدیل حلقه بسته: $\quad T(s) = \dfrac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\dfrac{1386-K}{18}$	$\boxed{*\, K > 0}$
s^0	K	

$K < 1386 \rightarrow$ تم جواب های شرط اول (+) هستند $\rightarrow$ پایدار قسمت درستم منفی جبی

$\rightarrow$ پایدار

$K > 1386 \rightarrow$ ۲ تلب درستم صفر را ۱ قطب در $\rightarrow$ دو تغیر علامت
یک قطب در سمت جبی

$K = 1386 \rightarrow$ قطب موهومی $\rightarrow$ سطح صفر $\rightarrow$ سطح صفر

$\implies P(s) = 18s^2 + 1386$

$\dfrac{dP(s)}{ds} = 36s + 0$

$\Rightarrow$

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	36	
s^0	16386	

$\Rightarrow$ پایدار مرزی

---

5 $\quad T(s) = \dfrac{5K(s+4)}{5s^3 + 16s^2 + (12+5K)s + 20K}$

Routh Table:

s^3	5	$12+5K$
s^2	16	$20K$
s^1	$192-20K$	0
s^0	$20K$	0

a) برای پایداری $\rightarrow 0 < K < 9.6$

b) $K = 9.6$

c) $P(s) = 16s^2 + 192 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{12}$

$\frac{6}{=}$

Closed loop transfer func:

$$T(s) = \frac{5000}{s^2 + 75s + 5000}$$

a) $\omega_n = \sqrt{5000}$, $\zeta = 0.53$, $\%os = 14.01\%$

b) $T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{75/2} = 0.107 \text{ sec}$

c) مشتقیم از Type1 است وقتی e_{ss} در $u(t)$ صفر است

d) $k_v = \frac{5000}{75} = 66.67$, $e_{ss} = \frac{5}{k_v} = 0.075$

e) $e_{ss} = \infty \leftarrow$ نسبت به $Type1$ در شیب ثابت است