



# سوال 1

$$\Delta(s) = 1 + kG(s)H(s) = 1 + \frac{k(s+3)}{(s(s+1)(s+2)(s+4))}$$

$$= s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+k)s + 3$$

قاعده 1: تعداد شاخه ها = تعداد قطب های حلقه بسته = 4 تا

قاعده 2: نقاط شروع = قطب های حلقه باز :  $s = 0, -1, -2, -4$

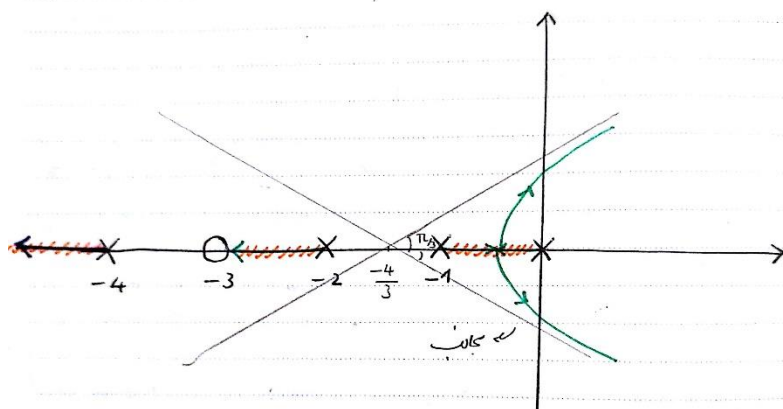
نقاط پایان = صفر های حلقه باز :  $s = -3$

قاعده 3: نقاط بین قطب 0 و 1، نقاط بین قطب 2 و 3، از قطب 4 تا بی نهایت (در شکل نشان داده شده)

قاعده 4: تعداد مجانب ها  $= 4 - 1 = 3$  تا

زاویه مجانب ها نسبت به محور حقیقی:  $\frac{(2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

نقاط تلاقی مجانب ها با محور حقیقی:  $\frac{(-4-2-1+0)-(-3)}{3} - \frac{4}{3}$



## سوال 2

با توجه به شکل تابع تبدیل حلقه باز دو قطب در -1 و -2 و دو صفر در 3 و 5 دارد. در نتیجه اگر سیستم را داری فیدبک واحد در نظر بگیریم، تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$

با استفاده از روابط زیر نقاط شکست را به دست می‌آوریم:

$$G(s)H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow A(s) = (s-3)(s-5), B(s) = (s+1)(s+2)$$

باید ریشه‌های عبارت زیر را به دست آوریم:

$$A'(s)B(s) - A(s)B'(s) = 0$$

$$\Rightarrow (2s-8)(s^2+3s+2) - (s^2-8s+15)(2s+3) = 0$$

$$\Rightarrow 11s - 26s - 61 = 0$$

$$s_{*1,2} = \frac{(26 \pm \sqrt{26^2 + 44 * 61})}{22} \Rightarrow \begin{cases} 3.81 \\ -1.45 \end{cases}$$

منحنی مکان هندسی ریشه‌ها در دو نقطه 3.81 و -1.45 به هم برخورد می‌کنند.

(A)

چند جمله‌ای مشخصه:

$$\Delta(s) = s^2 + s(k - 4) + 13 + 2k$$

قاعده 1: تعداد شاخه ها = تعداد قطب های چند جمله‌ای مشخصه = 2 تا

قاعده 2: شروع شاخه = از قطب های حلقه باز:

$$s^2 - 4s + 13 = 0 \Rightarrow \Delta(s) = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \begin{cases} 2 + 3j \\ 2 - 3j \end{cases}$$

پایان شاخه = صفر های حلقه باز = -2

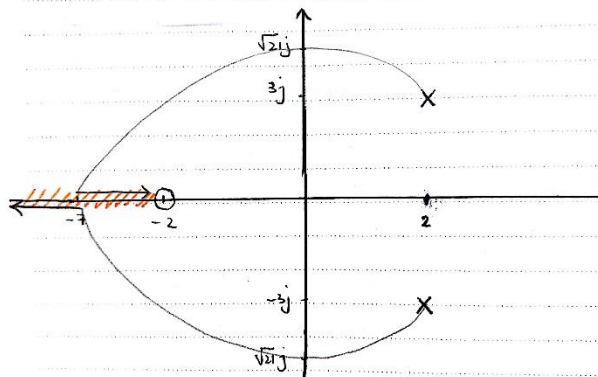
قاعده 3: مکان-ریشه روی محور حقیقی از سمت چپ صفر (-2) تا منفی بی‌نهایت است.

قاعده 4:

تعداد مجانب ها:  $2 - 1 = 1$

زاویه مجانب با محور حقیقی:  $(2k + 1)\pi = \pi$

نقطه تلاقی مجانب با محور حقیقی:  $\frac{4 - (-2)}{1} = 6$



(B)

محاسبه نقطه تقاطع مکان هندسی ریشه ها با محور موهومی:

محور موهومی مرز ناپایداری است در نتیجه باید ببینیم سیستم حلقه بسته به ازای چه مقادیری از  $k$  در نقطه ناپایداری قرار می گیرد.

جدول روث-هرویتس را رسم می کنیم:

$s^2$	1	$13+2K$
$s$	$k-4$	0
1	$13+2k$	0

به ازای  $k$  بزرگتر از 4 هیچ تغییری علامتی در ستون اول نداریم و سیستم حلقه بسته پایدار است. و به ازای  $k=4$  سیستم در مرز ناپایداری قرار دارد. برای به دست آوردن محل تقاطع با محور موهومی ریشه های چند جمله ای کمکی را به دست می آوریم:

$$s^2 + 13 + 2k = 0 \xrightarrow{k=4} s = \pm j\sqrt{21}$$

(C)

بهره در نقطه تقاطع با محور موهومی در قسمت قبل به دست آمده.  $K=4$  است.

(D)

$$\frac{s+2}{s^2-4s+13} = \frac{A(s)}{B(s)} : \text{تابع تبدیل حلقه باز}$$

$$A'(s)B(s) - A(s)B'(s) = (s^2 - 4s + 13) - (s + 2)(2s - 4) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + 4s - 21 = 0 \Rightarrow s = \begin{Bmatrix} 3 \\ -7 \end{Bmatrix}$$

نقطه 3 غیر قابل قبول است زیرا روی مکان-ریشه قرار ندارد. در نتیجه مکان هندسی ریشه ها در نقطه 7- به هم برخورد می کنند.

(ه)

زاویه خروج از قطب های مختلط:

$\pi$  = مجموع زوایا از قطب های حلقه باز تا نقطه فرضی - مجموع زوایا از صفر های حلقه باز تا نقطه فرضی = شرط زاویه

$$\tan^{-1} \frac{3}{4} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \pi \rightarrow x = -233.14 \text{ rad} = 126.86 \text{ rad} = 2.21^\circ$$

## سوال 4

$$G(s) = \frac{4(s^2 + 1)}{s(s + a)} \Rightarrow \Delta(s) = 5s^2 + 4 + sa = 1 + \frac{as}{5s^2 + 4}$$

سیستم جدیدی که مکان هندسی ریشه ها را برای آن رسم می کنیم دارای تابع تبدیل حلقه باز  $\frac{s}{5s^2 + 4}$  است.

چند جمله ای مشخصه سیستم جدید به صورت زیر است:

تعداد شاخه ها = تعداد قطب ها = 2

$$5s^2 + 4 = 0 \rightarrow s = \begin{cases} j\sqrt{\frac{4}{5}} \\ -j\sqrt{\frac{4}{5}} \end{cases} \text{ شروع شاخه ها = قطب های حلقه باز:}$$

پایان شاخه ها = صفر های حلقه باز:  $s=0$

تعداد مجانب ها:  $2-1 = 1$

زاویه مجانب با محور حقیقی:  $(2k + 1)\pi = \pi$

نقطه تقاطع مجانب با محور حقیقی = 0

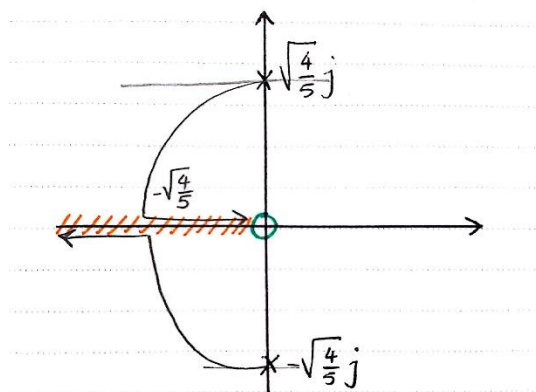
زاویه خروج از قطب مختلط:

$$\pi - (x + \pi) = \pi \Rightarrow x = -\pi$$

نقطه برخورد دو شاخه نیز برابر است جواب معادله زیر:

$$5s^2 + 4 - 10s^2 = 0 \rightarrow s = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$$

نقطه  $-\sqrt{\frac{4}{5}}$  فقط در مکان ریشه قرار دارد پس دو شاخه در این نقطه به هم برخورد می‌کنند.



## سوال 5

(الف)

$$\Delta(s) = s^2(s + 2) + k = s^3 + 2s^2 + k$$

تعداد شاخه ها = 3 تا

شروع شاخه: قطب های حلقه باز:  $s=0$  مضاعف ،  $s=-2$

پایان شاخه ها: صفر های حلقه باز: -

تعداد مجانب ها = 3 تا

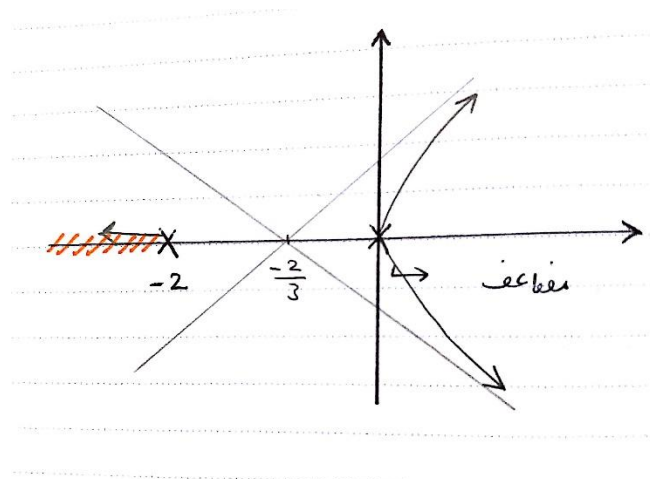
$$\frac{(2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$
 زاویه مجانب ها با محور حقیقی:

محل تقاطع مجانب ها با محور حقیقی:  $-2/3$

رسم جدول روث-هرویتس:

$s^3$	1	0
$s^2$	2	k
$s$	$-k/2$	0
1	k	

فقط به ازای  $k=0$  سیستم پایدار است. نمودار مکان هندسی آن به صورت زیر است:



(ب)

تبدیل می کنیم به مسیر حلقه بسته با فیدبک واحد. تابع تبدیل می شود:

$$\frac{1}{s^2(s+2) + k_t s}$$

$$\Delta(s) = s^2(s+2) + k_t s + 1 = 1 + \frac{k_t s}{s^3 + 2s^2 + 1}$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز می شود :



$$\frac{k_t s}{s^3 + 2s^2 + 1}$$

قاعده 1: تعداد شاخه ها = 3

قاعده 2: شروع شاخه = قطب های حلقه باز:  $0.1 + 0.6j$ ,  $0.1 - 0.6j$  و  $-2.2$

پایان شاخه ها = صفر های حلقه باز: 0

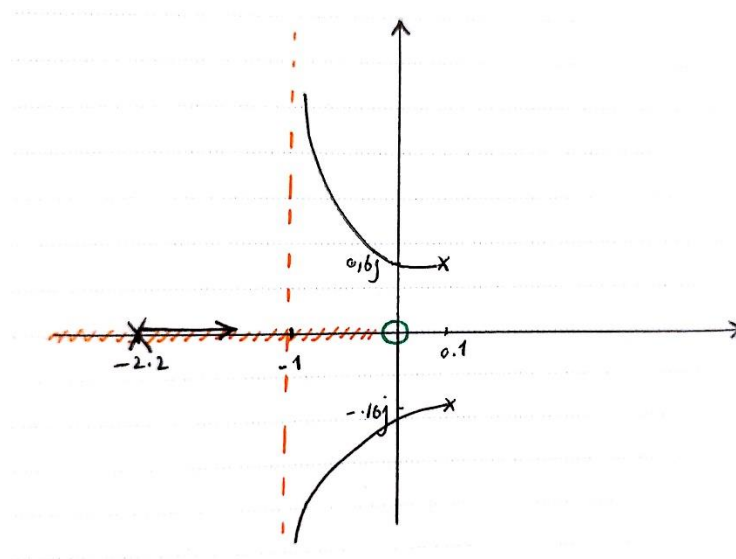
تعداد مجانب ها : 2 تا

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

زاویه مجانب ها با محور حقیقی:

نقطه تلاقی مجانب ها با محور حقیقی: -1

شکل:



$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + k_t s + 1$$

$s^3$	1	$K_T$
$s^2$	2	1
$s$	$(2k_t - 1)/2$	0
1	1	

$$\frac{2k_t - 1}{2} > 0 \Rightarrow k_t > \frac{1}{2}$$

به ازای  $k_t$  بزرگتر از  $\frac{1}{2}$  سیستم پایدار است.