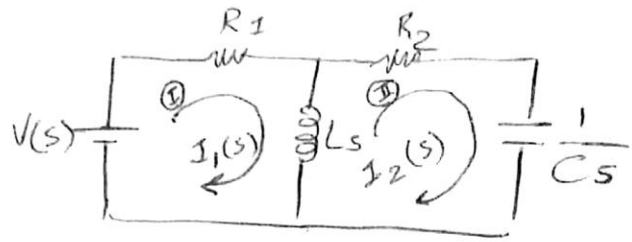
Subject: Linear Control Systems HW 2 Solutions
Year Month Date

۱)الف اولین گام در حل تبدیل مدار به تبدیل لاپلاس امپدانس ها و متغیرهای مدار تحت شرایط اولیه ی صفر است. یعنی ←



مدار فوق به 2 معادله برای حل نیاز دارد:

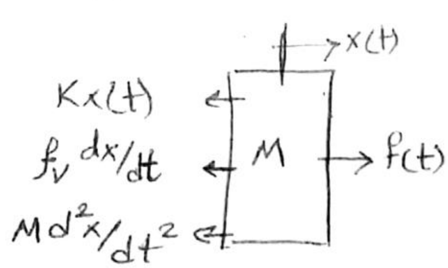
$$\text{I}: R_1 I_1(s) + Ls I_1(s) - Ls I_2(s) = V(s)$$

$$\text{II}: Ls I_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) + Ls I_1(s) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (R_1 + Ls) I_1(s) - Ls I_2(s) = V(s) \\ -Ls I_1(s) + \left(Ls + R_2 + {}^{1}/_{Cs}\right) I_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V(s) \longrightarrow \boxed{\frac{LCs^2}{(R_1+R_2)LCs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}} \longrightarrow I_2(s)$$

۱)ب حل را با رسم نمودار جسم آزاد مطابق شکل زیر آغاز می کنیم:



* تمام نیروهایی را که بر جرم اثر می کنند روی آن قرار می دهیم. فرض می کنیم جسم به سمت راست حرکت می کند بنابراین تنها نیروی اعمالی به سمت راست است و تمام نیروهای دیگر مانع حرکت می شوند و برخلاف جهت آن عمل می کنند. بنابراین فنر، میراکننده ویسکوز و نیروی ناشی از شتاب جهتی به سمت چپ دارند.

اکنون معادله دیفرانسیل حرکت را با استفاده از قانون نیوتون و جمع کردن و برابر صفر قرار دادن

تمام نیروهای نشان داده شده در شکل می نویسیم:

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+f_v\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=f(t)$$

$\Rightarrow$ laplace transform and zero initial state:

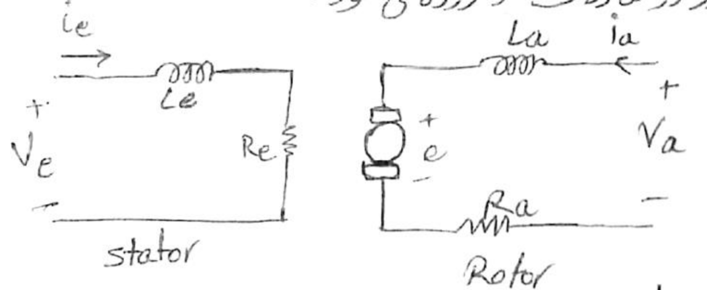
$$Ms^2X(s)+f_v sX(s)+KX(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow (Ms^2+f_v s+K)X(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=1/Ms^2+f_v s+K$$

۲) به طور کلی مدل موتور به دو صورت زیر نوشته می شود:

مدل اول: حالتی که جریان استاتور در معادلات آورده می شود.



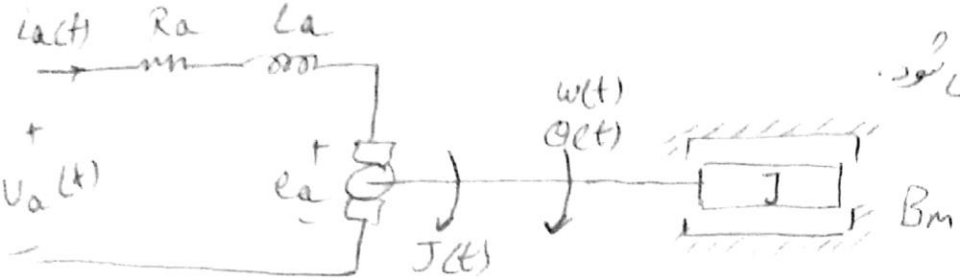
$$V_e(t)=L_e\frac{di_e}{dt}+R_e i_e \longrightarrow i_e/V_e=\frac{1/R_e}{1+\frac{L_e}{R_e}s}$$

$$V_a(t)=L_a\frac{di_a}{dt}+R_a i_a+e \longrightarrow \frac{i_a}{V_a-e(s)}=\frac{1/R_a}{1+\frac{L_a}{R_a}s}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tau_m=K_\varphi\,\varphi\,i_a=K\,i_e\,i_a\\ e=K_\varphi\,\varphi\,\omega=K\,i_e\,n(t)\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}\varphi=K_0 N i_e\\ K=K_\varphi K_0 N\end{array}$$

Subject:
Year Month Date

حالت دوم: حالتی است که جریان استاتور در معادلات نوشته می شود و با فرض میدان مغناطیسی ثابت استاتور حل می شود.



$$V_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t)$$ ← Armature Circuit

Motor torque $J(t) = K_\tau\, i_a(t)$

Back EMF $e_a(t) = K_b\, \omega(t)$

→ Connection between mechanical/electrical parts

$$J\ddot{\theta}(t) + B\,\dot{\theta}(t) = J(t)$$ ← Mechanical equ.

$$\rightarrow \omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

با توجه به مدل 1 :
$$V_f = 5 I_f + 0.1 \frac{di_f}{dt} \Rightarrow V_f(S) = 5 I_f(S) + 0.1 S I_f(S)$$

$$\Rightarrow I_f(S) = \frac{V_f}{5 + 0.1S}$$

$$J = K_\varphi i_a = \underbrace{K i_a}_{K i_a = k_t} i_f$$

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + B_L \dot{\theta}_m + J_L \ddot{\theta}_m = k_t i_f$$

$$[S^2(J_m + J_L) + (B_m + B_L)S]\,\theta_m(S) = k_t \frac{V_f}{5 + 0.1S}$$

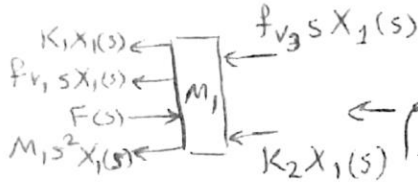
$$\Rightarrow \frac{\theta_m(S)}{V_f(S)} = \frac{k_t}{(5 + 0.1S)\,[(J_m + J_L)S^2 + (B_m + B_L)S]}$$

PAPCO

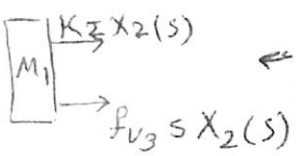
چون هر جرم می تواند در حالی که جرم دیگری ثابت نگه داشته شده است، در جهت افقی حرکت کند ۳)

پس این سیستم دو درجه آزادی است (Degrees Of Freedom). بنابراین برای توصیف این سیستم به دو معادله نیاز داریم. دو معادله از نمودار جسم آزاد هر جسم بدست می آید.

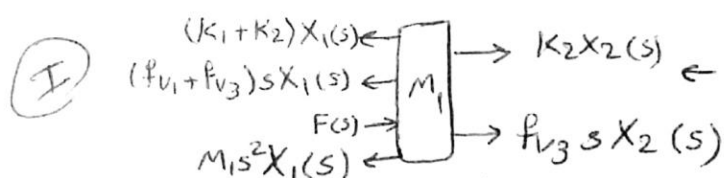
توجه داشته باشید که برای رسم نمودار آزاد مثلاً نیروهای وارد بر M_1 ناشی از: 1. حرکت خود جسم 2. حرکت M_2 است که از طریق سیستم به M_1 منتقل می شود. ما این دو منبع نیرو را به صورت مجزا بررسی می کنیم.



اگر M_2 ثابت و M_1 را به سمت راست حرکت دهیم ←

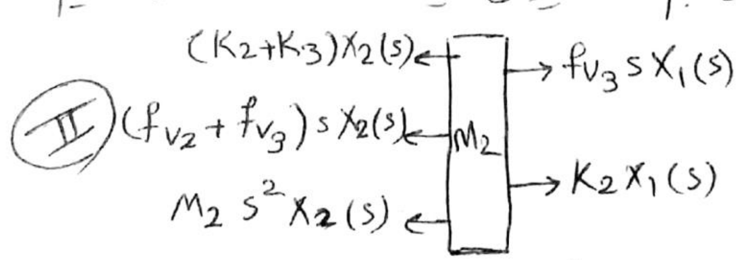


اگر M_1 ثابت و M_2 را به سمت راست حرکت دهیم ←



← طبق جمع آثار ←

همین مراحل را برای جسم M_2 نیز طی کنید. نهایتاً برای M_2 نیز خواهیم داشت:



اکنون تبدیل لاپلاس معادلات حرکت را از شکل های I و II به صورت زیر بدست می آوریم:

$$[M_1s^2+(f_{v_1}+f_{v_3})s+(K_1+K_2)]X_1(s)-(f_{v_3}s+K_2)X_2(s)=F(s)$$

$$-(f_{v_3}s+K_2)X_1(s)+[M_2s^2+(f_{v_2}+f_{v_3})s+(K_2+K_3)]X_2(s)=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نهایتاً ، تابع تبدیل $X_2(s)/F(s)$ ⇐

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{(f_{v_3}s + K_2)}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} [M_1 s^2 + (f_{v_1} + f_{v_3})s + (K_1 + K_2) & -(f_{v_2}s + K_2) \\ -(f_{v_2}s + K_2) & [M_2 s^2 + (f_{v_2} + f_{v_1})s + (K_1 + K_3) \end{vmatrix}$$