Subject تمرین‌های سری اول درس کنترل خطی

Date یاسمن سادات میرمحمد ۹۴۳۱۰۲۲

1. تبدیل لاپلاس بگیرین و فلان =))

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

a) $f_1(t) = u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \underbrace{u(t)}_{1}\, dt \longrightarrow$ توی این بازه، تابع پله، مقدارش ۱

که $s>0$

$$\longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(\frac{-1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

b) $f_2(t) = t\cdot u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{t\cdot u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot t \cdot \underbrace{u(t)}_{1}\, dt$

حل انتگرال:

$$\longrightarrow \mathcal{L}\{t\cdot u(t)\} = \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot t\cdot dt}_{\frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\Big|_0^{\infty}} \longrightarrow = \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{e^{-st}\cdot}{s^3\cdot e^{st}}\Big|_{t\to\infty} \quad \text{Hop}$$

c) $f_3(t) = \sin\omega t\, u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{\sin\omega t\cdot u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot \sin\omega t\cdot \overbrace{u(t)}^{1}\, dt$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot(\sin\omega t)\, dt = \frac{e^{-st}}{\omega^2+s^2}(-s\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\Big|_0^{\infty} = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}$$

d) $f_4(t) = \cos\omega t\cdot u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{\cos\omega t\cdot u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot \cos\omega t\cdot \overbrace{u(t)}^{1}\, dt$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot\cos\omega t\cdot dt = \frac{e^{-st}}{\omega^2+s^2}(-s\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Subject
Date

e) $f_5(t) = e^{-at} \cdot \sin\omega t \cdot u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot \sin\omega t \cdot u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-at} \cdot \sin\omega t \cdot \overbrace{u(t)}^{1}\, dt$

با استفاده از قانون شیفت در حوزه‌ی فرکانس و تبدیل لاپلاس سینوس که در قسمت قبل به دست آوردیم:

$\underbrace{e^{-at}}_{\text{زمان}} \longrightarrow \underbrace{s+a}_{\text{لاپلاس}}$

$\sin\omega t \cdot u(t) \longrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2 + s^2}$

$e^{-at} \cdot \sin\omega t \cdot u(t) \longrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2 + (s+a)^2}$

$$\boxed{F(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + (s+a)^2}}$$

f) $F_6(t) = e^{-at} \cdot \cos\omega t \cdot u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot \cos\omega t \cdot u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-at} \cdot \cos\omega t \cdot \overbrace{u(t)}^{1}\, dt$

با استفاده از قانون شیفت در حوزه‌ی فرکانس:

$\cos\omega t \cdot u(t) \longrightarrow \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

$e^{-at} \cdot \cos\omega t \cdot u(t) \longrightarrow \dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

$$\boxed{F(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}}$$

g) $f_7(t) = 3 \cdot t^2 \cdot e^{-t} \cdot u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{3 \cdot t^2 \cdot e^{-t} \cdot u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-t} \cdot 3 \cdot t^2 \cdot \overbrace{u(t)}^{1}\, dt$

$\longrightarrow 3\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-(s+1)t}\, dt = 6\int \dfrac{t^2}{2} \cdot e^{-(s+1)t}\, dt$

مرطاشیر

$\int dt = t$

$\int t\, dt = \dfrac{t^2}{2}$

$\int \dfrac{t^2}{2}\, dt = \dfrac{t^3}{6}$

$\mathcal{L}\{e^{-t} \cdot u(t)\} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$

نکته: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)F^{(n)}(s)$

$\longrightarrow 3 \times (-1)^2 \Big(\overbrace{\mathcal{L}\{e^{-t} u(t)\}}^{\text{از قسمت های قبلی داریم:}}\Big)''$

$\longrightarrow 3 \times \left(\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)'' \longrightarrow 3 \times \left(\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)'' \longrightarrow$ دیگه حساب کردن مشتق دومش سخته :دی

جواب

Date

h) $f_8(t) = \sin t \cdot \cos t \cdot u(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{\sin t \cos t \cdot u(t)\} = \int_0^\infty \sin t \cos t \overbrace{u(t)}^{1} e^{-st}\, dt$

$\longrightarrow \int_0^\infty \frac{\sin 2t \cdot e^{-st}}{2}\, dt = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty \sin 2t \cdot e^{-st}\, dt}_{\text{محاسبه}} = \frac{1}{4} + s^2$

i.) $f_9(t) = (t-3) \cdot e^{t-3} \cdot u(t-3)$

$\rightarrow \mathcal{L}\{\underbrace{(t-3)}_{e^{-3t}} \cdot \underbrace{e^{t-3} \cdot u(t-3)}_{\frac{1}{s-}}\} = e^{-3t} \cdot \left(\frac{1}{s-3}\right)^3$

قضیه انتقال زمانی (شیفت)

j) $f_{10}(t) = (t \cdot e^{-at} \cdot 2t \cdot \cos t) \cdot u(t)$

$\mathcal{L}\{t \cdot e^{-at} \cdot 2t \cdot \cos t \cdot u(t)\} = \mathcal{L}\{2t^2 \cdot e^{-at} \cdot \cos t \cdot u(t)\}$

$\longrightarrow 2 \times (-1)^2 \cdot \left(\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot \cos t \cdot u(t)\}\right)''$

$\longrightarrow 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{s+a}{(s+a)^2 + w^2}\right)}_{\text{طبق قضیه جابجایی}}'' \longrightarrow$ دیگر مشتقش را ننوشتم طولانی شد

PAPCO

Subject
Date

$\cancel{L\{h(t)\} = H(s)}$

2. عکس تبدیل لاپلاس ⟵ $H(s)$ یک تابع خودش تعریف ⟵ $L\{H(s)\} = h(t)$

$$a)\ F_1(s) = \left(\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right)e^{-s}$$

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} \rightarrow \begin{cases} A(s^2+5s+6) - \\ B(s^2+4s+3) \xrightarrow{+} \\ C(s^2+2s+2) \end{cases}$$

$$(A+B+C)s^2 + (5A+4B+2C)s + ۲A+3B+2C = s^2+s+1$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \longrightarrow 2A+C=1 \\ 5A+4B+2C=1 \\ ۲A+3B+2C=1 \end{cases} \xrightarrow{\ominus} A-B=0 \longrightarrow A=B \xrightarrow{-2} \begin{cases} 9A+2C=1 \\ 2A+C=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9A+2C=1 \\ -4A-2C=-2 \end{cases}$$

$$5A=-1$$

$$\boxed{A=\frac{-1}{5}} = B,\ C = 1+\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{۵}(e^{-t}) + \left(-\frac{1}{۵}\right)(e^{-۲t}) + \frac{۷}{۵}(e^{-۳t})$$

$$b)\ F_2(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}\right\} := \frac{1}{s(s+2)^2}$$

$$\rightarrow A(s^2+2s+4) + B(s^2+2s) + Cs = 1 \longrightarrow (A+B)s^2 + (۲A+۲B+C)s + 4A = 1$$

$$\longrightarrow A+B=0$$

$$۲A+۲B+C=0 \longrightarrow C=0$$

$$4A=1 \longrightarrow A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{4s} + \frac{-1}{4(s+2)}\right\} = \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \left(-\frac{1}{4}\right)L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\boxed{L^{-1} = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{4}\cdot e^{-2t}}$$

Subject
Date

$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$

c) $x_3[n] = \dfrac{s^3 - 3s^2 + s + 2}{s} \cdot H(s)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s^2 - 3s + 1 + \frac{2}{s}\right) \cdot H(s)\right\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ s^2 \cdot H(s) - 3s\,H(s) + H(s) + \frac{2}{3} H(s) \right\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\{s^2 \cdot H(s)\} - 3\,\mathcal{L}^{-1}\{s \cdot H(s)\} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}_{h(t)} + \frac{2}{3}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}_{h(t)}$

$= h''(t) - 3\,h'(t) + h(t) + \frac{2}{3} h(t)$

$\boxed{= h''(t) - 3h'(t) + \frac{5}{3} h(t)}$

Subject

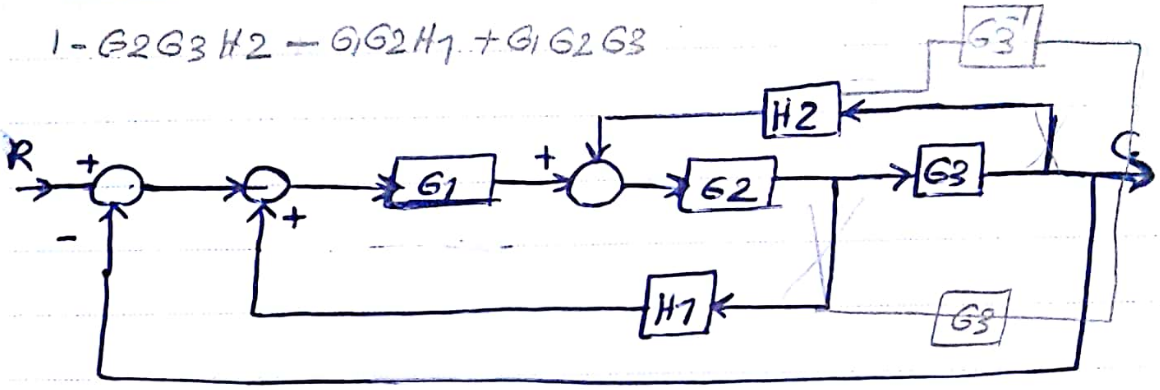
Date

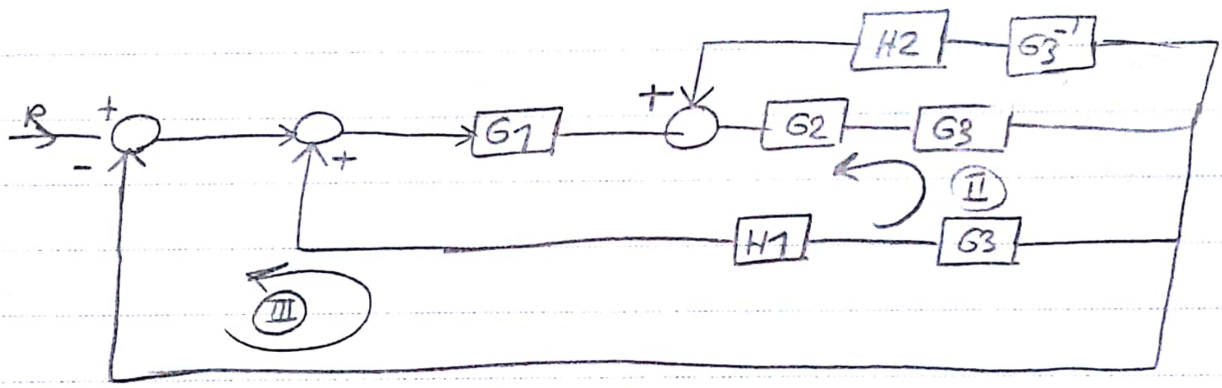
3. تابع $\frac{C}{R}$ (تابع تبدیل) را بدست آورید.

الف)

۱

$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3}$$




$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 G_3 H_1 + G_3 H_1 - G_2 G_3 H_2}$$

Date

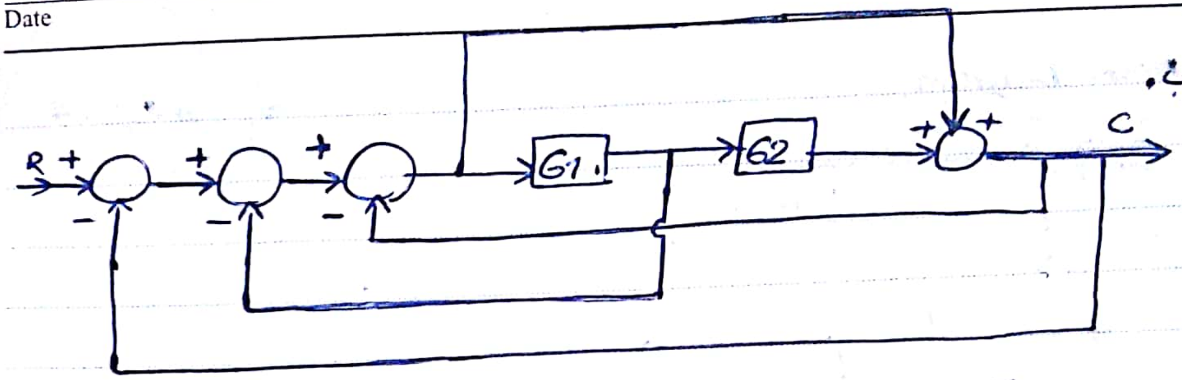
۷) یاسمن سادات میرمجید

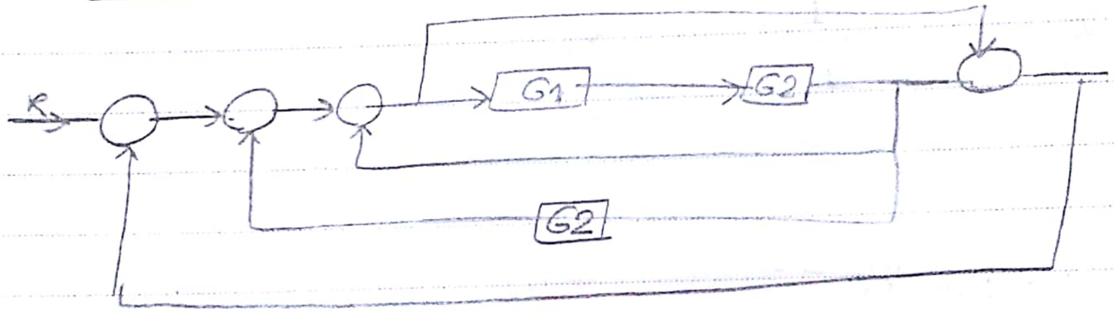
Subject

Date

ادامه سوال 3

ب.




$$\text{تابع تبدیل} = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2^2}$$

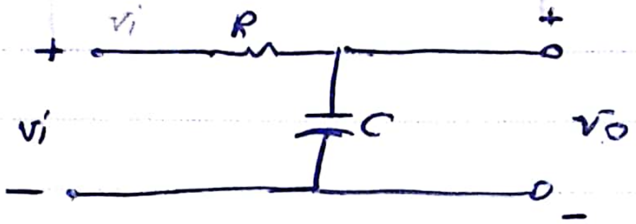
H نداریم. ← پس از ساده‌سازی، $G_2$ در حکم H است.

Subject
Date

$v_i$ : ورودی
$v_o$ : خروجی
. 4

## Block Diagram

متناظر با مدار

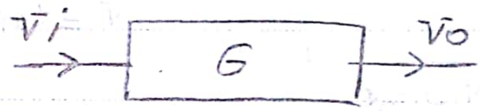



تابع تبدیل $= \frac{V_o}{V_i}$

اول باید ورودی و خروجی را مشخص کنیم.

با جمع ولتاژهای داخل حلقه‌ی مدار (به شرط اینکه شرایط اولیه صفر در نظر گرفته شود) داریم:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{C}s + RS^2 - V_i}{V_i} = \frac{S}{CV_i} + \frac{RS^2}{V_i} - 1$$

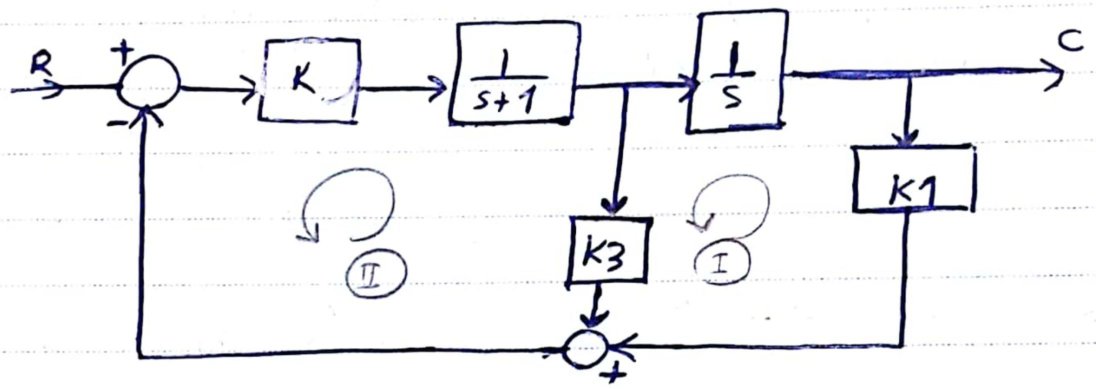



$$-V_i + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = V_o$$

Subject
Date

5 ـ تابع تبدیل حلقه بسته ی سیستم ⟵ $\frac{6}{(s+2)(s+3)}$

$$\begin{cases} K_1 = ? \\ K_2 = ? \\ K = ? \end{cases}$$




$$\frac{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+1}}{1-\frac{1}{s}\cdot K_1\cdot K3 + K\cdot K3\cdot\frac{1}{s+1}} = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = 6 - \frac{K_1K3}{s} + \frac{6\,K\cdot K3}{s+1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} - \frac{6K\cdot K3}{s+1} + \frac{K_1K3}{s} = 6$$

$$\frac{1-6K\cdot K3(s)(s+2)(s+3)+K_1K3(s+1)(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = 6$$

PAPCO

* سیستمی پایدار است، که قطب‌های آن (ریشه‌های مخرج تابع تبدیل)، در نیم‌صفحه‌ی چپ قرار داشته باشند.
و هیچ قطبی در سمت راست وجود نداشته باشند

6. پایداری معادلات زیر را بررسی کنید.

الف)

$$F(s) = \frac{2(s+3)}{s^2+2s+5}$$

$s^2+2s+5=0 \longrightarrow$ ریشه حقیقی ندارد $\longrightarrow \Delta = 4-20 = -16$

$\frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $\nearrow \frac{-2+4j}{2} = -1+2j \longrightarrow Re\{s\} = -1$

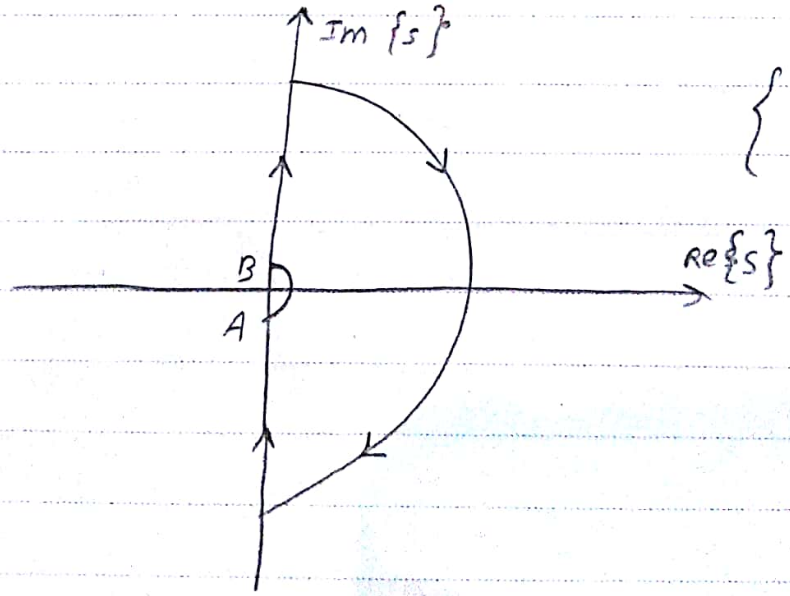
$\searrow \frac{-2-4j}{2} = -1-2j \longrightarrow Re\{s\} = -1$

پایدار ✓

ب)

$$F(s) = \frac{2(s-3)}{s^2-2s-3}$$

$s^2-2s-3=0 \longrightarrow (s-3)(s+1)=0 \longrightarrow \begin{cases} s=3 \\ s=-1 \end{cases}$




$\begin{cases} Re\{s\}=3 \\ Re\{s\}=-1 \end{cases}$

ناپایدار ✗