گزارش تمرین

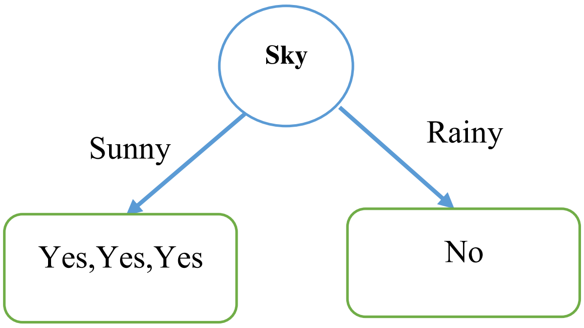
سوال اول

a

درخت تصمیمی که از آموزش ۴ مثال آموزشی EnoySport با الگوریتم hunt بدست می آید را بدست آورید. انتخاب معیار عدم خلوص بر عهده خودتان است.

Example	Sky	AirTemp	Humidity	Wind	Water	Forecast	EnjoySport?
1	Sunny	Warm	Normal	Strong	Warm	Same	Yes
2	Sunny	Warm	High	Strong	Warm	Same	Yes
3	Rainy	Cold	High	Strong	Warm	Change	No
4	Sunny	Warm	High	Strong	Cool	Change	Yes

برای درخت تصمیم ابتدا متغیرها را در ریشه قرار میدهیم و بر اساس مقادیری که دارند، برچسب ها را تقسیم بندی میکنیم



حال با توجه به اینکه، هر برگ دارای برچسب های یکسان است، دیگر نیازی به بررسی سایر ویژگی ها و بررسی مقدرا آنتروپی برای محاسبه بهترین ویژگی برای ریشه نداریم.

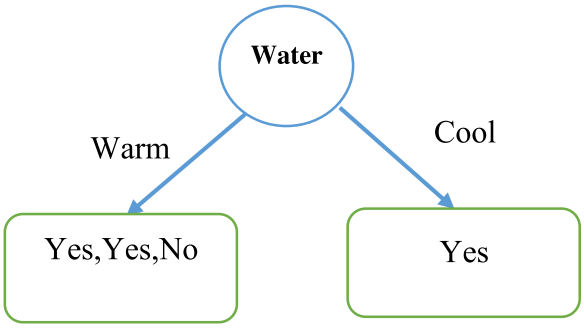
$$E_i = \frac{S_i}{S_T} \sum -P_i \log(P_i)$$

مقدار آنتروپی برای متغیر Sky که صفر است و به معنی جداسازی کامل داده ها بر اساس متغیر مربوطه است.

$$E = \frac{3}{4}\left[-(\frac{3}{3}\log(\frac{3}{3}) + \frac{0}{3}\log(\frac{0}{3}))\right] + \frac{1}{4}\left[-(\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1}) + \frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}))\right] = 0$$

این موضوع برای متغیر AirTemp نیز صادق است و میتوان با آن ویژگی نیز تمام داده ها را دسته بندی کرد بدون اینکه نیاز به متغیر دیگری باشد.

اما با سایر متغیرها، نمیتوان به تنهایی دسته بندی را انجام داد.



مقدار آنتروپی برای متغیر Water.

$$E = \frac{3}{4}\left[-(\frac{2}{3}\log(\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}))\right]+\frac{1}{4}\left[-(\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1})+\frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}))\right]$$
$$=\frac{3}{4}\left[-(\frac{2}{3}\log(\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}))\right]=0.4774$$

میبینیم که این متغیر نمیتواند آنتروپی را حداقل کند و برای دسته بندی کامل نیاز به سایر ویژگی ها دارد.

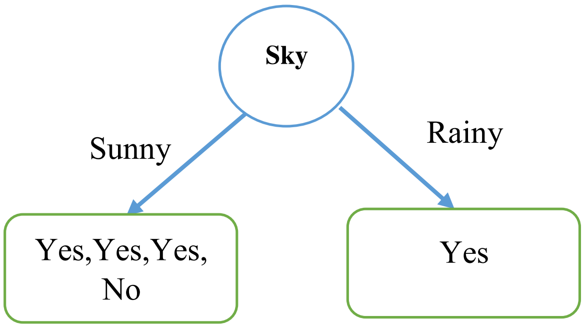
b

مثال آموزش زیر را به مجموعه اضافه کنید و درخت تصمیم حاصل با hunt را بدست آورید.

Sky	AirTemp	Humidity	Wind	Water	Forecast	EnjoySport?
Sunny	**Warm**	**Normal**	**Weak**	**Warm**	**Same**	**No**

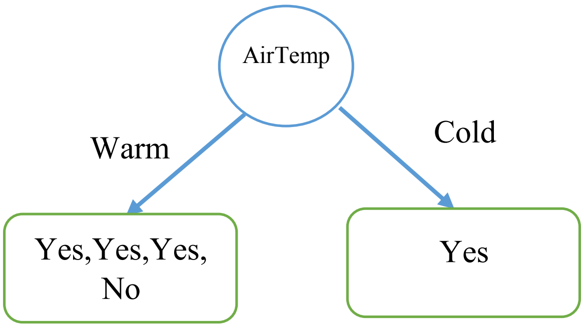
برای این قسمت تمامی متغیرها را بررسی میکنیم

متغیر sky



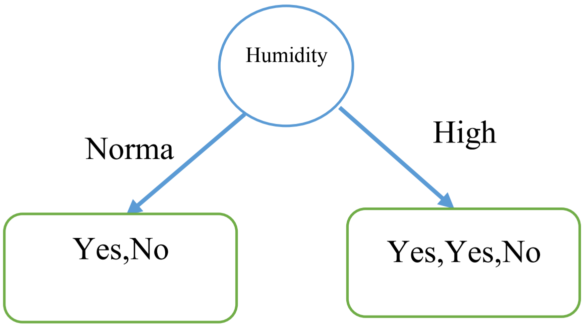
$$E = \frac{4}{5}\left[-(\frac{3}{4}\log(\frac{3}{4})+\frac{1}{4}\log(\frac{1}{4}))\right]+\frac{1}{5}\left[-(\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1})+\frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}))\right]$$
$$=\frac{4}{5}\left[-(\frac{3}{4}\log(\frac{3}{4})+\frac{1}{4}\log(\frac{1}{4}))\right]=0.4499$$

متغیر AirTemp



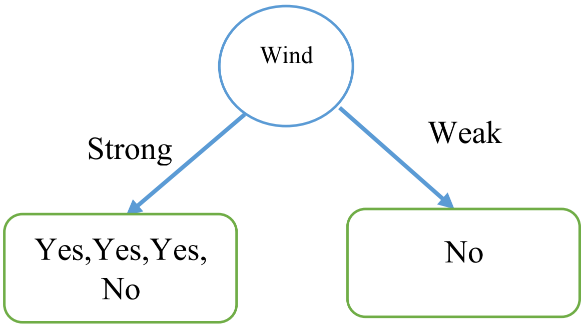
$$E = \frac{4}{5}\left[-(\frac{3}{4}\log(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4}\log(\frac{1}{4}))\right] + \frac{1}{5}\left[-(\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1}) + \frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}))\right]$$
$$= \frac{4}{5}\left[-(\frac{3}{4}\log(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4}\log(\frac{1}{4}))\right] = 0.4499$$

متغیر Humidity



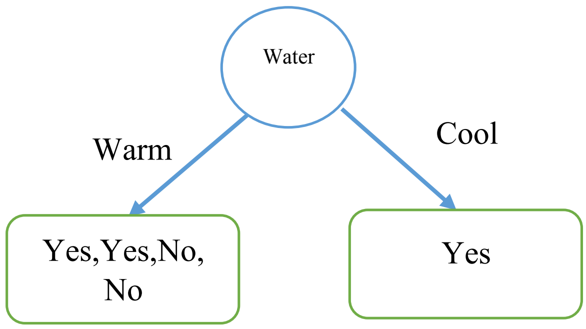
$$E = \frac{2}{5}\left[-(\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}))\right] + \frac{3}{5}\left[-(\frac{2}{3}\log(\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}))\right]$$
$$= 0.2773 + 0.3819 = 0.6592$$

متغیر Wind



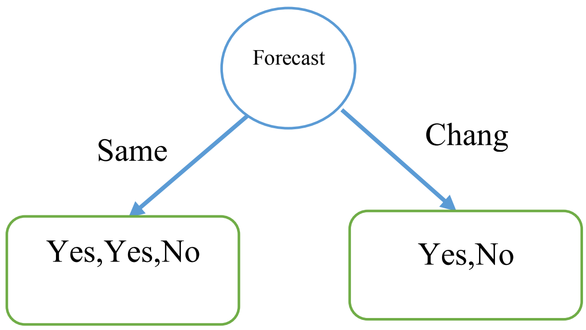
$$E = \frac{4}{5}\left[-(\frac{3}{4}\log(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4}\log(\frac{1}{4}))\right] + \frac{1}{5}\left[-(\frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}) + \frac{1}{1}\log(\frac{1}{1}))\right]$$
$$= 0.4499$$

متغیر Water



$$E=\frac{4}{5}\left[-(\frac{2}{4}\log(\frac{2}{4})+\frac{2}{4}\log(\frac{2}{4}))\right]+\frac{1}{5}\left[-(\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1})+\frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}))\right]$$
$$=0.5545$$

متغیر Forecast

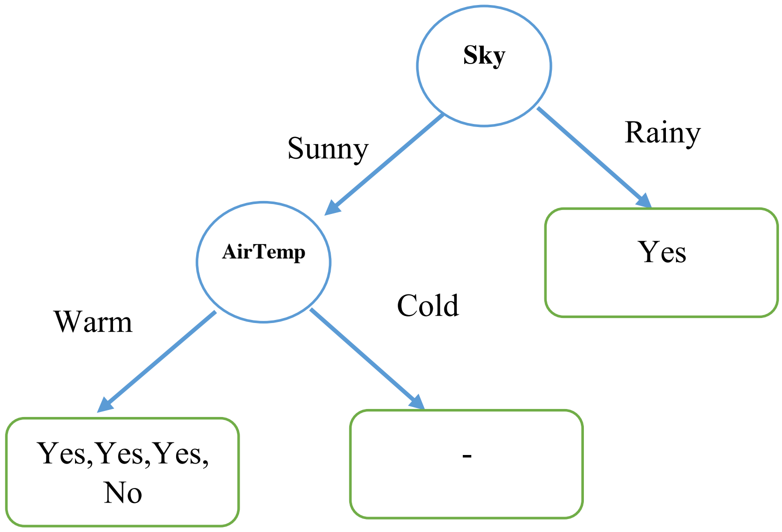


$$E=\frac{3}{5}\left[-(\frac{2}{3}\log(\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}))\right]+\frac{2}{5}\left[-(\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}))\right]$$
$$=0.2773+0.3819=0.6592$$

حال کمترین مقدار آنتروپی را انتخاب میکنیم که مربوط به ویژگی های Wind و Sky وAirTemp هستند. میتوان به صورت تصادفی یکی را انتخاب کرد. ما Sky را انتخاب میکنیم.

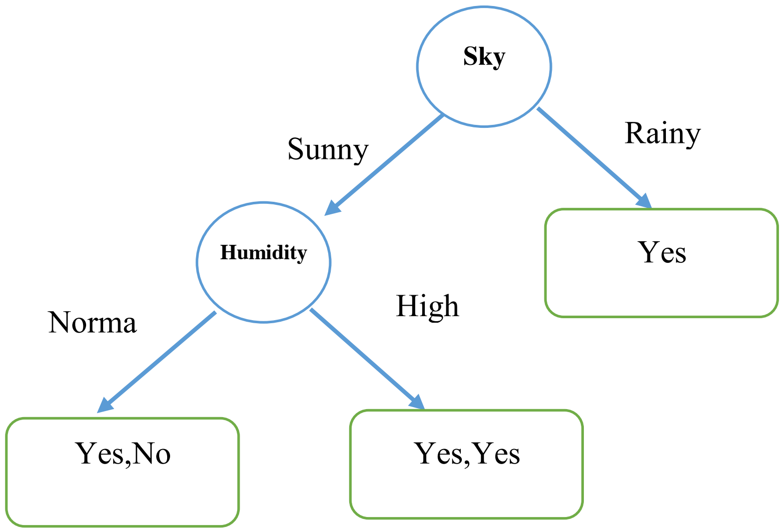
حال به سراغ زیرشاخه های متغیر Sky میرویم تا ببینیم کدام ویژگی باید به عنوان نودهای سطح دوم قرار بگیرند تنها نیاز است که شاخه سمت چپ را پیدا کنیم. شاخه سمت راست یک کلاسه است و دیگر نیازی به ویژگی دیگر ندارد.

متغیر AirTemp



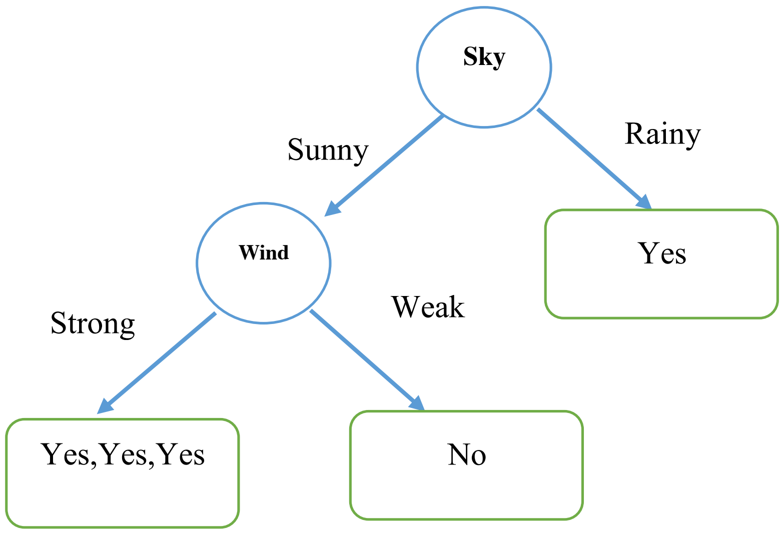
$$E=\frac{4}{4}\left[-(\frac{3}{3}\log(\frac{3}{3})+\frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}))\right]+\frac{0}{4}$$
$$=0.5623$$

متغیر Humidity



$$E=\frac{2}{4}\left[-(\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}))\right]+\frac{2}{4}\left[-(\frac{2}{2}\log(\frac{2}{2})+\frac{0}{2}\log(\frac{0}{2}))\right]$$
$$=0.3466$$

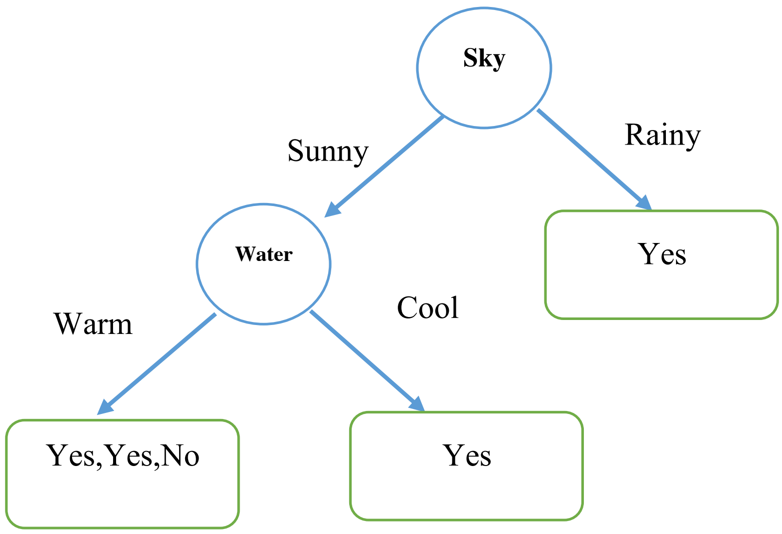
متغیر Wind



$$E=\frac{3}{4}\left[-(\frac{3}{3}\log(\frac{3}{3})+\frac{0}{3}\log(\frac{0}{3}))\right]+\frac{1}{4}\left[-(\frac{0}{1}\log(\frac{0}{1})+\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1}))\right]=0$$

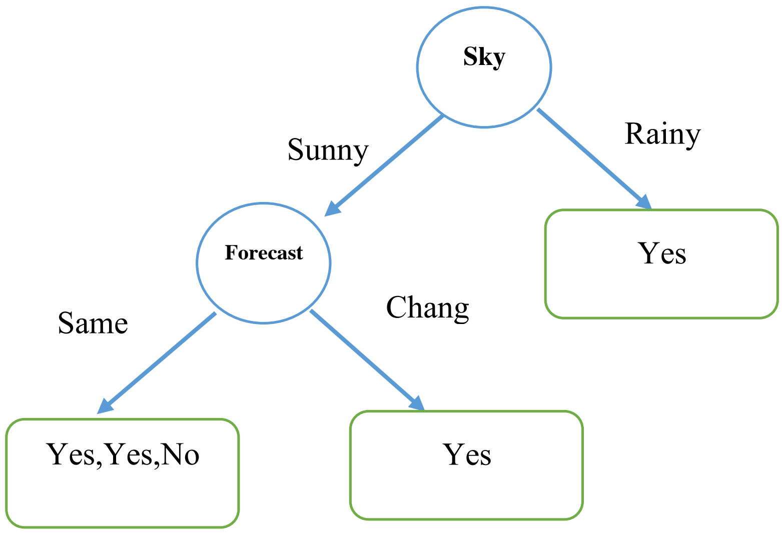
بدون محاسبات اضافه تر میتوان گفت که ویژگی Wind میتوان در ریشه سمت چپ قرار بگیرد و کار ساخت درخت تمام شده است چون تمام برگها یک کلاس را نشان میدهند.

متغیر Water



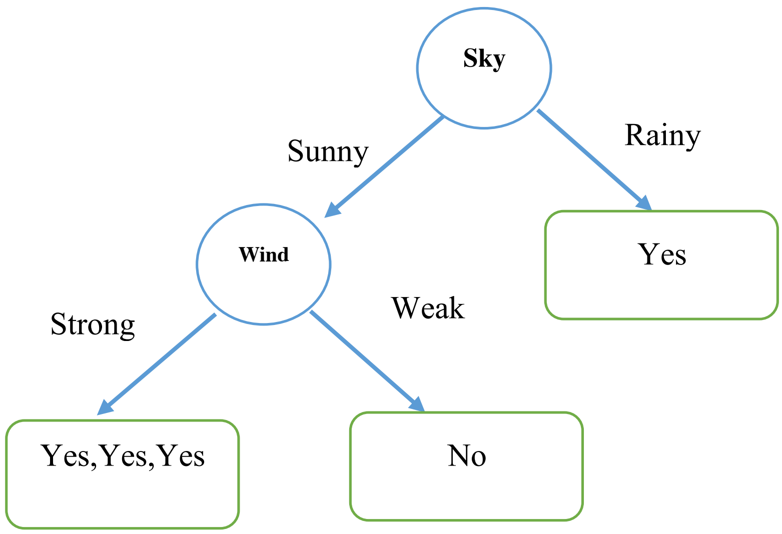
$$E=\frac{3}{4}\left[-(\frac{2}{3}\log(\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}))\right]+\frac{1}{4}\left[-(\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1})+\frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}))\right]$$
$$=0.4774$$

متغیر Forecast



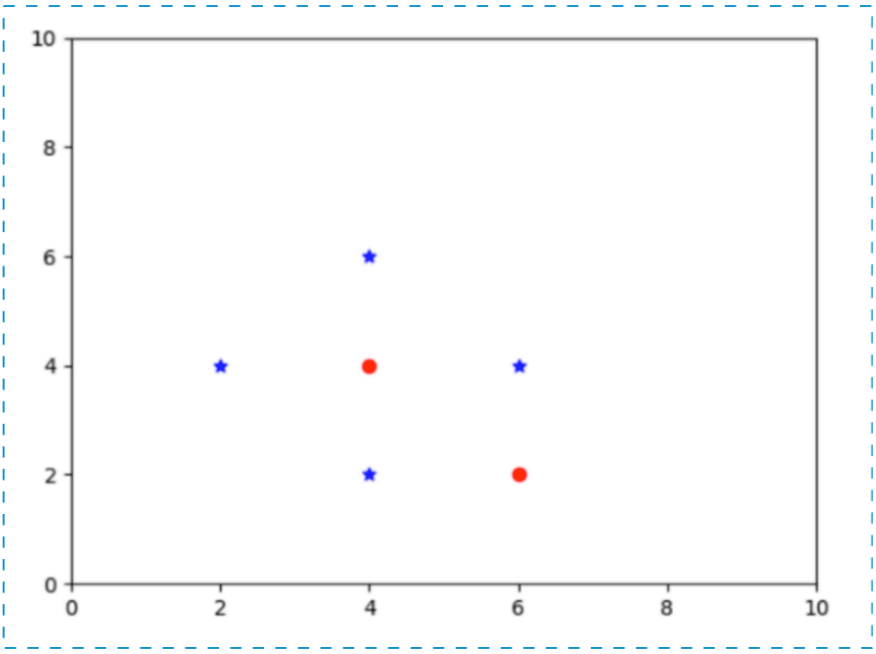
$$E = \frac{3}{4}\left[-(\frac{2}{3}\log(\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}))\right] + \frac{1}{4}\left[-(\frac{1}{1}\log(\frac{1}{1}) + \frac{0}{1}\log(\frac{0}{1}))\right]$$
$$= 0.4774$$

پس درخت نهایی به صورت زیر خواهد بود



سوال دوم

با در نظر گرفتن داده های نمایش داده شده در نمودار زیر به هر یک از سوالهای زیر پاسخ دهید. توجه کنید که داده های مشخص شده با رنگ یکسان در یک کلاس قرار دارند.



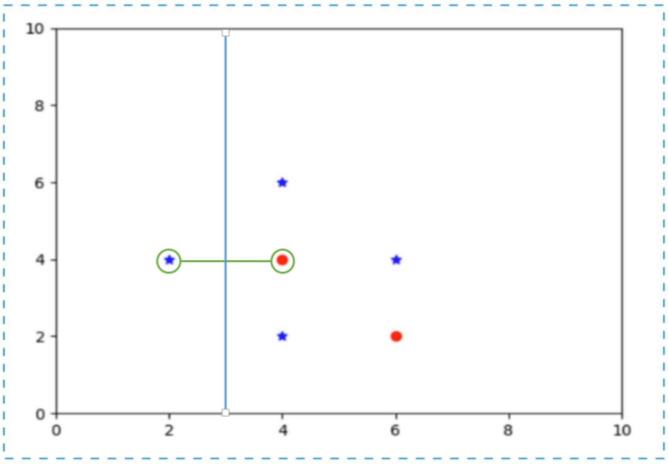
a

با استفاده از روش 1NN و با در نظر گرفتن متریک اقلیدسی، مرزهای تصمیم گیری را برای این مجموعه داده رسم کنید.

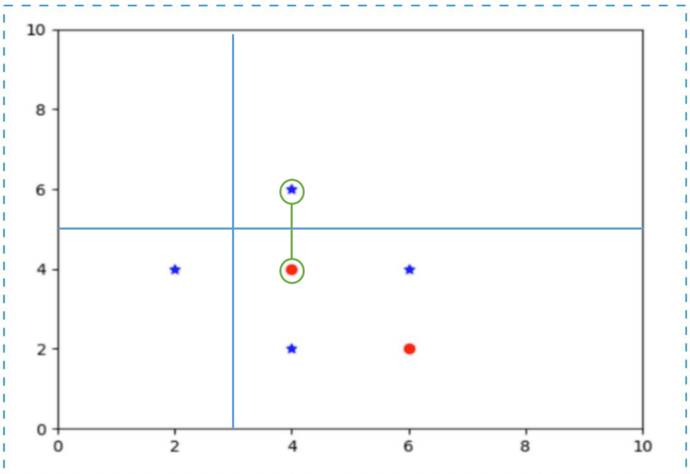
مطنقه ورنویی R_k برای هر نقطه P_k به این صورت تعریف میشود که مجموعه نقاط داخل X که فاصله انها با P_k بزرگتر از فاصله آنها تا نقطه P_j نباشد که اندیس j به معنی تمامی نقاط به جز k میباشد. یا به بیانی دیگر، هر نقطه x ، داخل مجموعه X ، باید فاصله اش با نقطه k ، کوچکتر مساوی با تمامی نقاط دیگر به جز وk باشد. به این ترتیب میتوان گفت که یک مرز تصمیم گیری بین هر دو نقطه بوجود می آید که نقاط صفحه را بین خود و سایر نقاط تقسیم میکنند.

$$R_k = \{x \in X \mid d(x, P_k) \leq d(x, P_j) \text{ for all } j \neq k\}$$

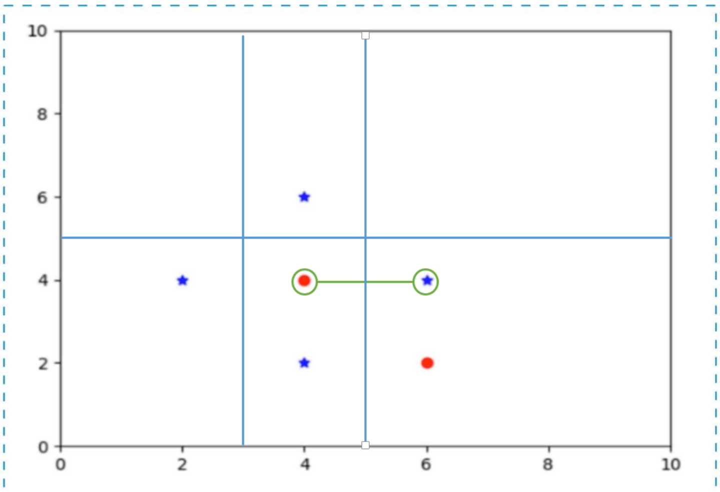
ابتدا نقطه قرمز مرکزی را در نظر میگیریم و مرز تصمیم گیری بین این نقطه تا نقاط دیگر را محاسبه میکنیم. مرز تصمیم گیری، خطی گذرنده از میان فاصله بین دو نقطه است.



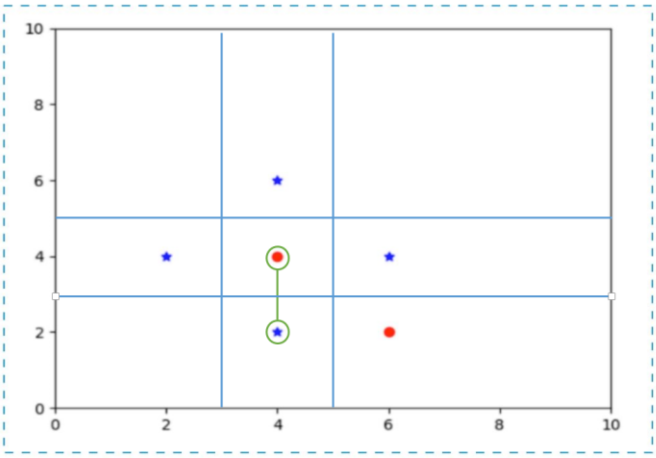
نقطه مرکزی با نقطه ای دیگر. حال دو خط در صفحه داریم که صفحه را به چهار قسمت تقسیم میکند.



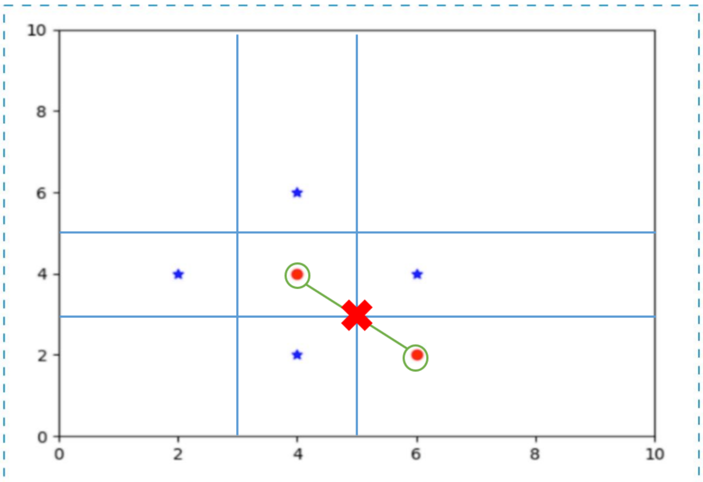
خطی دیگر در صفحه میکشیم



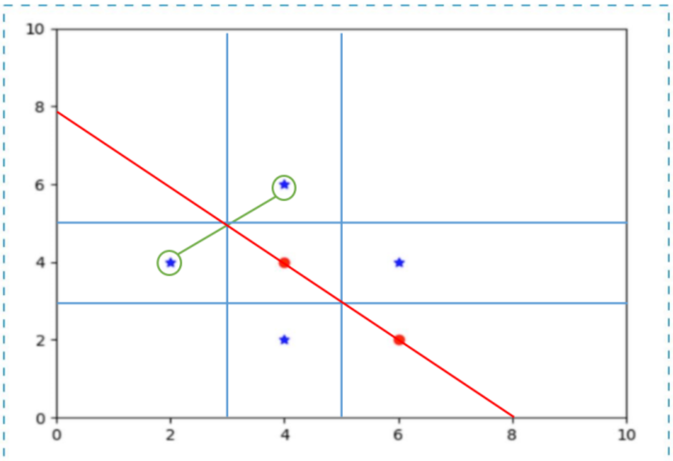
خط دیگری ترسیم میکنیم که جداکننده بین نقطه مرکزی و نقطه آبی رنگ پایین صفحه است



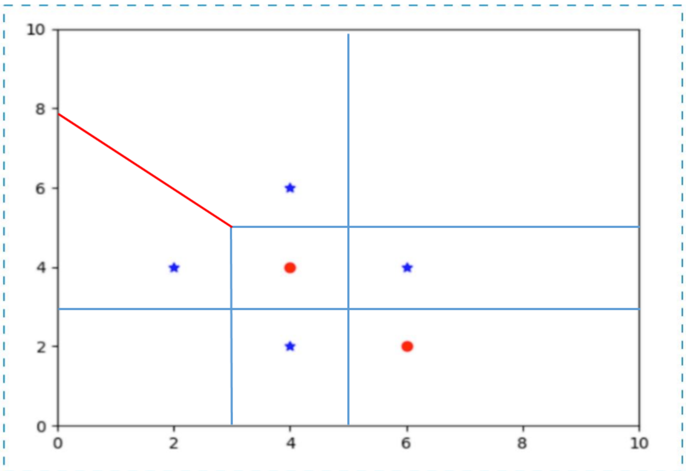
اما باید توجه داشت که دیگر نمیتوان بین نقطه قرمز مرکزی و نقطه قرمز کناری مرز تصمیم گیری گذاشت زیرا نقاط اطراف این دو به نقاط آبی رنگ نزدیک تر هستند و در نتیجه نمیتوان ناحیه ورنویی برای این دو نقطه متصور شد.



حال به بررسی نقاط آبی رنگ با یکدیگر میپردازیم. بین دو نقطه آبی در شکل زیر، یک خط جداکننده میتوان کشید. توجه شود که نقاط در ناحیه افقی بین ۰تا۴ و ناحیه عمودی ۵ تا ۱۰ ، تا قبل از این متعلق به دسته خاصی نبودند و باید این نقاط قابل برچسب گذاری به یک نقطه باشند.

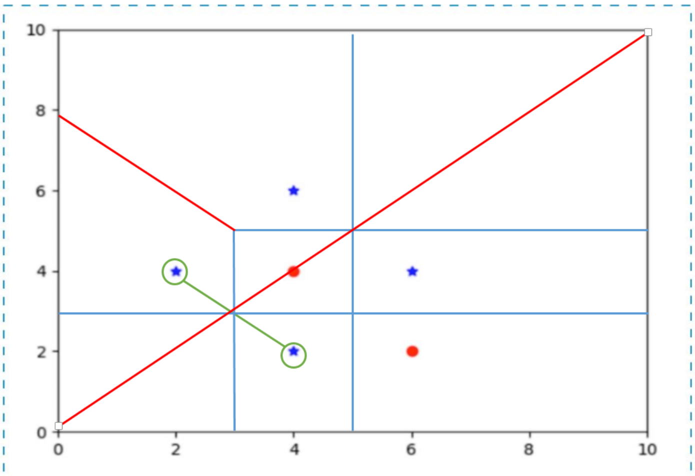


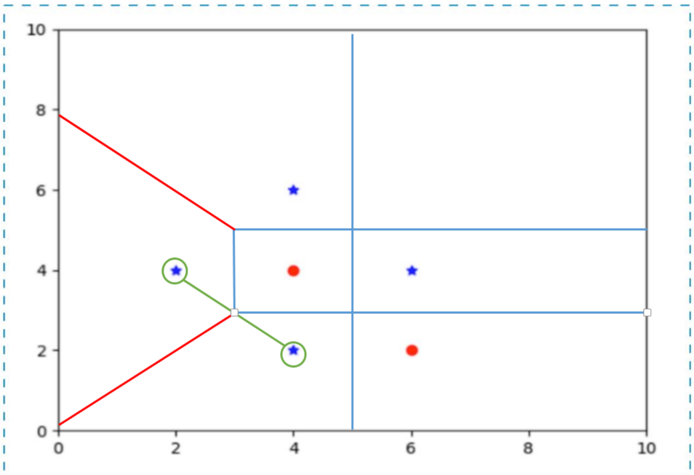
بعد از ترسیم خط قرمز رنگ، به دلیل تداخل خطوط ، باید ادامه خطوط را پاک کنیم. چون ناحیه سمت چپ بالا، هیچ نقطه ای را نمایندگی نمیکرد، در نتیجه باید آن ناحیه را تقسیم بندی کنیم. در شکل زیر میبینم که ناحیه خالی، تقسیم شده است.



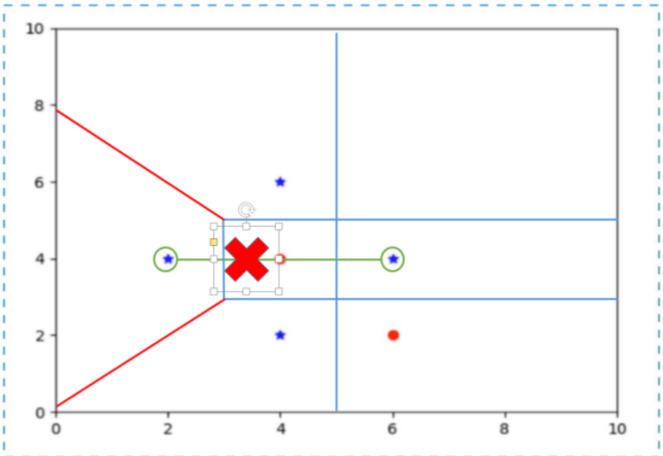
همین کار را با ناحیه های چپ پایین و راست بالا ، انجام میدهیم.

ناحیه چپ پایین

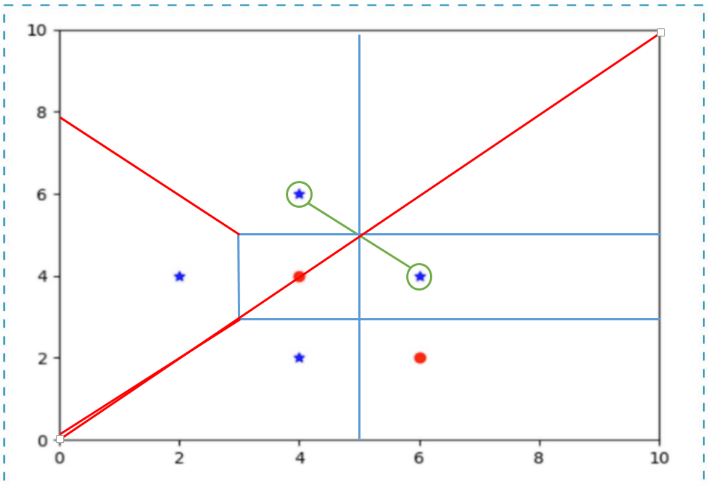




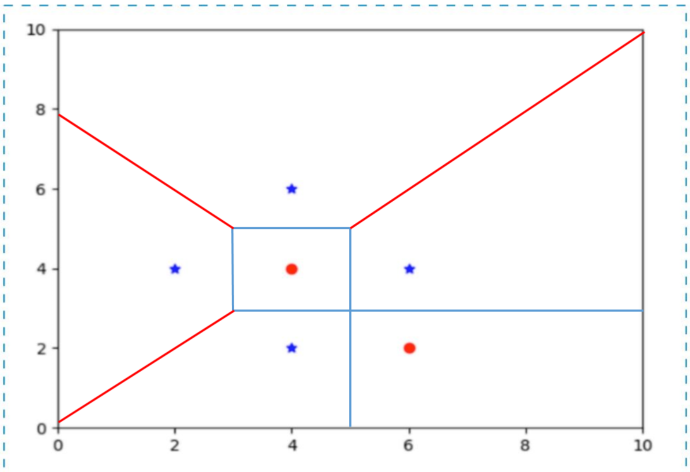
توجه شود که دو نقطه آبی در شکل زیر، را مرز تصمیم گیری برایشان نمیگذاریم چون این دو نقطه فاصله زیادی با یکدیگر دارند و میبینیم که نقطه قرمز بین این دو میباشد و در نتیجه با فرض ناحیه ورنونی که در ابتدای سوال ذکر کردیم تناقض دارد. پس ناحیه ای متصور نمیشویم



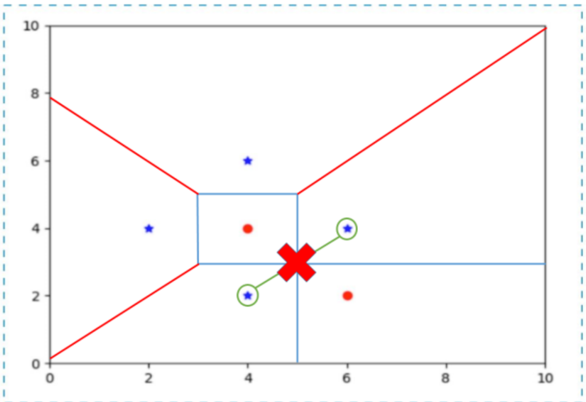
ناحیه راست بالا



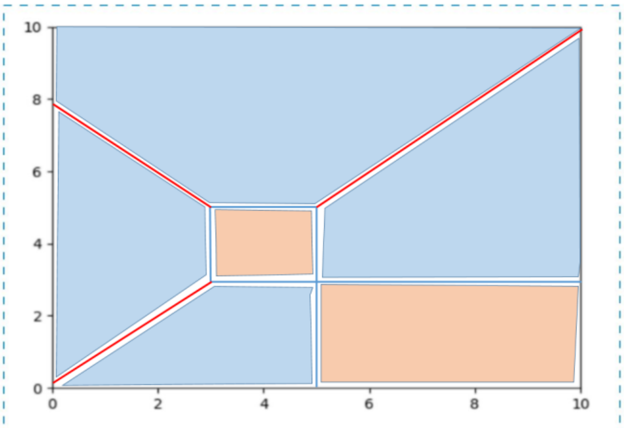
بعد از تقسیم بندی نهایی.



توجه شود که بین این دو نقطه آبی، مرز تصمیم نمیگذریم چون اولا ناحیه خالی وجود ندارد و دوم اینکه بین این دو نقطه، نقطه قرمز پایین را داریم که قبلا نقاط را در مرز خود دسته بندی کرده است. پس نقاط اطراف این دو نقطه آبی، در ناحیه هایی که قبلا کشیده ایم دسته بندی میشوند.



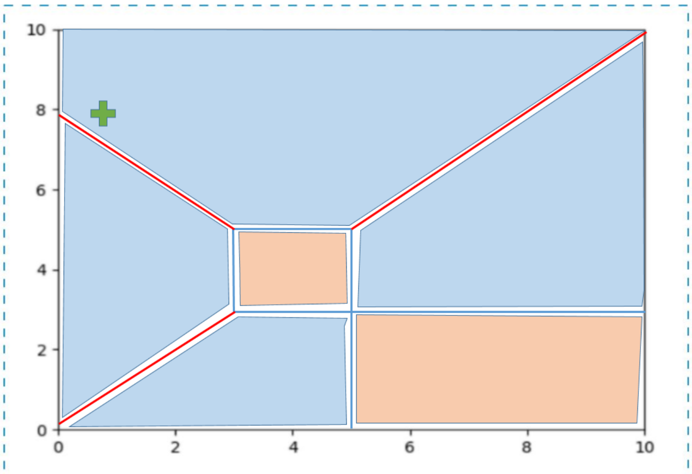
و در پایان نواحی مربوط به دو کلاس با رنگ های آبی و نارنجی ترسیم شده اند



b

با در نظر گرفتن متریک اقلیدسی و با استفاده از روش 1NN ، نقطه (1,8) را به کدام کلاس نسبت خواهید داد؟

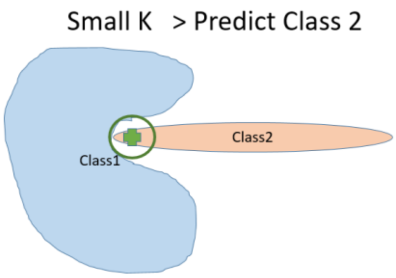
با توجه به منطقه مربوط به کلاس نقاط ستاره آبی رنگ، این نقطه در کلاس نقاط آبی یا محدوده آبی قرار میگیرد.

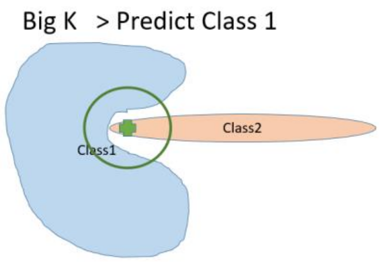


c

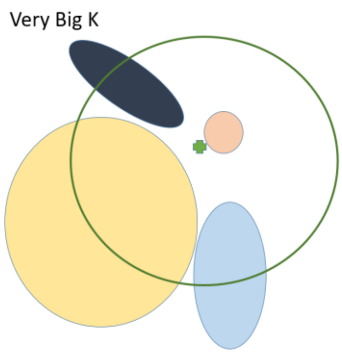
توضیح دهید در صورتی که از الگوریتم KNN با مقادیر K خیلی بزرگ استفاده شود چه اتفاقی رخ خواهد داد؟

مقدار K بزرگ به معنی انتخاب تعداد بسیار زیادی از همسایگان یک نقطه میباشد. توزیع داده ها معمولا به این صورت است که داده های یک کلاس در کنار یکدیگر قرار دارند. پس اگر مقدار K بسیار بزرگ انتخاب شود این احتمال وجود دارد که داده های کلاسهای دیگر نیز در روند تصمیم گیری انتخاب شوند.





و اگر مقدار K بسیار بزرگ انتخاب شود، میتوان گفت که برچسب همیشه برابر با کلاسی است که بیشترین پراکندگی را دارد.



d

آیا از الگوریتم KNN میتوان برای رگرسیون استفاده کرد؟ توضیح دهید.

بله. میتوان از KNN برای رگرسیون استفاده کرد. به این صورت که هنگامی که یک داده تست را به الگوریتم میدهیم، فاصله اقلیدسی این نمونه تست را با تمامی داده های آموزشی محاسبه میکنیم. سپس K نقطه آموزشی که کمترن فاصله با نقطه تست دارند را پیدا میکنیم. مقدار خروجی برای نقطه تست برابر است با میانگین مقدار خروجی نقاط آموزشی انتخاب شده

$$Y_{test} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} Y_{train_i}$$

سوال سوم

در یک مسئله دسته بندی دو کلاسه که با وجود فقط یک ویژگی تعریف شده است، اطلاعات زیر برای هر کلاس داده شده است.

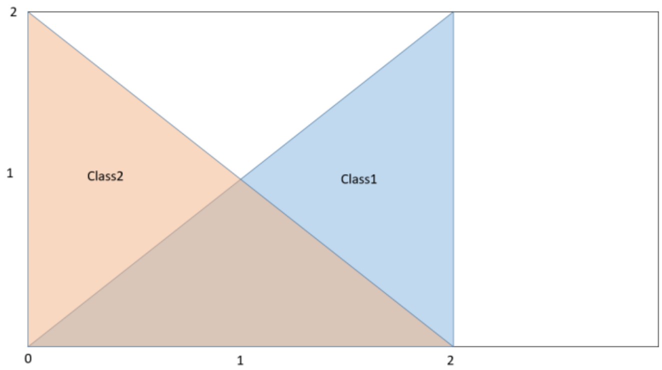
$$p(x|w_1) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$p(x|w_2) = \begin{cases} 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

با فرض آنکه احتمالهای اولیه دو کلاس با هم برابر باشند یا $p(w_1) = p(w_2)$ ، به هر یک از سوالات زیر پاسخ دهید:

a

تابع توزیع را برای هر کلاس رسم کنید.



b

نحوه جداسازی این دو کلاس را با استفاده از قانون بیز بطور خلاصه توضیح دهید.

احتمال خطا را چنین میتوان گفت که

$$p(error|x) = \begin{cases} p(w_1|x) & if \;\; we \;\; decide \;\; w_2 \\ p(w_2|x) & if \;\; we \;\; decide \;\; w_1 \end{cases}$$

پس با توجه به قاعده بیز خواهیم داشت

$$p(error|x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(error|x)p(x)dx$$

و طبق رابطه بالا، تصمیم گیری به صورت زیر است.

ما نمونه را به عنوان کلاس اول در نظر میگیریم اگر $p(w_1|x) > p(w_2|x)$ باشد. یعنی احتمال وجود آن نمونه در کلاس با توجه به توزیع احتمالاتی آن بیشتر باشد. حال از قاعدهٔ بیز استفاده میکنیم. نمونه در کلاس اول قرار میگیرد اگر $p(w_1)p(x|w_1) > p(w_2)p(x|w_2)$.

پس برای هر دو کلاس میتوان چنین گفت که

$$\frac{P(x|w_1)}{P(x|w_2)} \underset{<_{w_2}}{\overset{\ge^{w_1}}{}} \frac{P2}{P1}$$

و اگر خطای دسته بندی را با $\varepsilon(x)$ نشان دهیم، به ازای خطای دو کلاس خواهیم داشت و باید خطای دسته بندی حداقل شود.

$$\varepsilon(x) = P_1\varepsilon_1(x) + P_2\varepsilon_2(x)$$

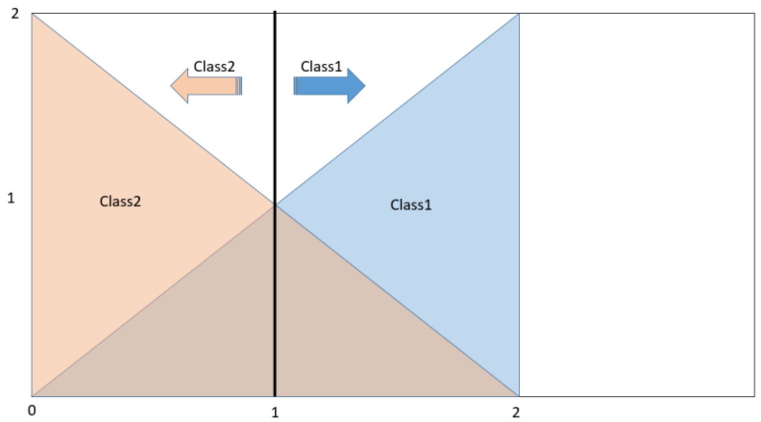
بخش امتیازی

مرز جداکننده این دو کلاس را بدست آورید و آنرا در شکل نمایش دهید

برای پیدا کردن حد بیز، می‌توان از خطای کلاس‌بندی بیز استفاده کرد.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x) &= P_1\varepsilon_1(x) + P_2\varepsilon_2(x) = P_1\int p_1(x)dx + P_2\int p_2(x)dx \\
&= 0.5\int_0^1 2x dx + 0.5\int_0^1 (2-2x)dx = \frac{1}{2}\left[(x^2)_0^1 + (2x - x^2)_0^1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + (2-1)\right] = \frac{1}{2}[2] = 1
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه بالا، نقطه جداکننده در ۱ قرار دارد.



سوال چهارم

ویژگی افراد را در جدو زیر در خصوص تایید یا رد اعطای وام در یک بانک خصوصی در نظر بگیرید.

Features	Values
Income	Low, Medium, High
Education	HS, BS, MS, PhD
Dept	Low, Medium, High
Decision	Yes, No

جدول زیر، مجموعه داده های اموزشی به منظور یادگیری این مسئله را نمایش میدهد.

Example	Income	Education	Dept	Decision
1	High	HS	Low	Yes
2	Low	HS	Medium	Yes
3	Low	BS	High	Yes
4	Low	MS	Low	No
5	Medium	MS	High	Yes
6	Medium	MS	Low	No
7	High	MS	Medium	No
8	High	PhD	High	No

a

با فرض استقلال ویژگی های مذکور، با استفاده از الگوریتم دسته بندی بیز ساده یا naïve bayes classifier ، چه برچسبی برای داده زیر پیش بینی میکنید؟

$$< (Income = Low, Education = MS, Debt = High), ? >$$

احتمال اینکه یک داده در یک کلاس قرار بگیرد به صورت زیر است

$$P(Class_1 | X) = \frac{P(X | Class_1) P(Class_1)}{P(X)}$$

$$P(Class_2 | X) = \frac{P(X | Class_2) P(Class_2)}{P(X)}$$

پس احتمال هر کدام که بیشتر باشد، در آن کلاس قرار میگیرد. پس نیاز به محاسبه $P(X)$ نیست چون میتوان از هر دو رابطه بالا حذف کرد. زیرا به دنبال حداکثر هستیم. پس داریم

$$Max(P(X | Class_1) P(Class_1), P(X | Class_2) P(Class_2))$$

با توجه به جدول احتمالات در بخش c و باتوجه به قاعده بیز ساده که استقلال ابعاد را فرض میکند داریم:

ابتدا محاسبه برای کلاس Yes

$$
\begin{aligned}
&P(Yes \mid Income = Low, Education = MS, Debt = High) \\
&= P(Yes)P(Income = Low \mid Yes)P(Education = MS \mid Yes)P(Debt = High \mid Yes) \\
&= \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{4} * \frac{2}{3} = \frac{4}{48}
\end{aligned}
$$

سپس محاسبه برای کلاس No

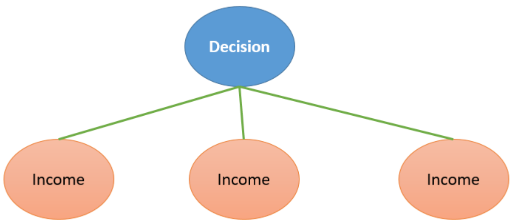
$$
\begin{aligned}
&P(No \mid Income = Low, Education = MS, Debt = High) \\
&= P(No)P(Income = Low \mid No)P(Education = MS \mid No)P(Debt = High \mid No) \\
&= \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{3}{4} * \frac{1}{3} = \frac{3}{48}
\end{aligned}
$$

با توجه به مقادیر احتمال بدست آمده، داده خواسته شده در کلاس Yes قرار میگیرد.

b

نمایش گرافی مدل مورد استفاده را ارائه دهید

در روش بیز ساده، ویژگی ها از هم مستقل هستند و میتوان گفت که تمامی ویژگی ها تنها با خروجی در ارتباط هستند.



c

جدول احتمالاتی گره های گراف را رسم کنید

جدول احتمال اولیه برای Decision

	Yes	No
Decision	1/2	1/2

جدول احتمال برای ویژگی Incomde

	Yes	No
Low	2/3	1/3
Medium	1/2	1/2
High	1/3	2/3

جدول احتمال برای ویژگی Education

	Yes	No
HS	1	0
BS	1	0
MS	1/4	3/4
PhD	0	1

جدول احتمال برای ویژگی Dept

	Yes	No
Low	1/3	2/3
Medium	1/2	1/2
High	2/3	1/3

سوال پنجم

یک مسئله کلاس بندی دو کلاسه (تست آزمون فرضیه باینری) را در نظر بگیرید. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ویژگی های اندازه گیری شده باشند که بر اساس آنها بین دو کلاس ۰ و ۱ تصمیم گیری میشود و داشته باشیم:

$$
\begin{aligned}
&for \;\; all \;\; i \in \{1,2,\ldots,n\}; x_i \,|\, H_0 \sim N(0,\delta) \\
&for \;\; all \;\; i \in \{1,2,\ldots,n\}; x_i \,|\, H_1 \sim N(m,\delta)
\end{aligned}
$$

a

تست نسبت درست نمایی را نوشته و تا حد ممکن ساده کنید.

با توجه به اینکه n مشاهده داریم و میتوانیم این مشاهدات را مستقل فرض کنیم پس خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&H_0 : x_1, \ldots, x_n \overset{iid}{\sim} N(0,\delta) \\
&H_1 : x_1, \ldots, x_n \overset{iid}{\sim} N(m,\delta), m \neq 0
\end{aligned}
$$

حال تست نسبت درسنمایی را به صورت زیر مینویسیم

$$
\log\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i - m)^2/2}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i)^2/2}} \right)
$$

حال رابطه را ساده میکنیم

$$
\log\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i - m)^2/2}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i)^2/2}} \right) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i - m)^2}{2} + \frac{x_i^2}{2} = m \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{nm^2}{2}
$$

$$
m \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} \gamma_1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} \frac{\gamma_1}{m} = \gamma_2
$$

مقدار γ_2 ، یک حد آستانه برای تست فرضیه دو توزیع ذکر شده است

b

فرمول کلی P_{FA} و P_D را بنویسید.

احتمال P_{FA} به صورت زیر نوشته میشود. مقدار γ_2 حدا آستانه تصمیم گیری است.

$$
P_{FA} = P(H_0 > \gamma \,|\, \mu = 0) = \int_{\gamma_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x^2}{2})} dx
$$

احتمال P_M را برای خلاف فرضیه P_{FA} در نظر میگیریم.

$$P_M = (H_0 > \gamma \mid \mu = m) = \int_{-\infty}^{\gamma_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} dx$$

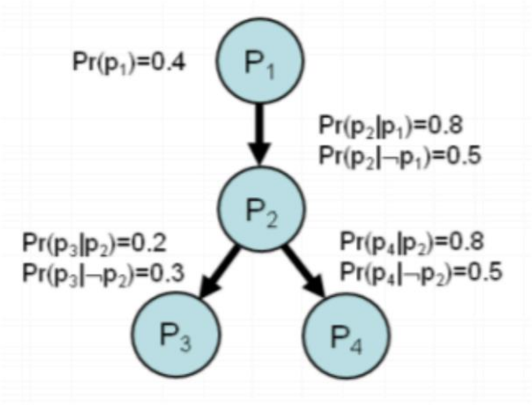
و در نهایت احتمال تشخیص را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$P_D = 1 - P_M = 1 - \int_{-\infty}^{\gamma_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} dx = \int_{\gamma_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} dx$$

سوال ششم

با استفاده از قوانین احتمال که تا کنون آموخته اید، با توجه به مدل گرافی زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

دقت کنید که متغیرهای تصادفی p1 تا p4 از نوع دو تایی با مقادیر true و false هستند و عملگر ¬ به معنی not منطقی است.



a

$\Pr(\neg p_3)$

$$\begin{aligned}\Pr(\neg p_3) &= \Pr(\neg p_3 \mid p_2)\Pr(p_2) + \Pr(\neg p_3 \mid \neg p_2)\Pr(\neg p_2)\\ &= (1-\Pr(p_3 \mid p_2))\Pr(p_2) + (1-\Pr(p_3 \mid \neg p_2))\Pr(\neg p_2)\\ &= 0.8\Pr(p_2) + 0.7\Pr(\neg p_2)\end{aligned}$$

مقادیر $\Pr(p_2)$ و $\Pr(\neg p_2)$ به طور جداگانه حساب میکنیم

$$\begin{aligned}\Pr(\neg p_2) &= \Pr(\neg p_2 \mid p_1)\Pr(p_1) + \Pr(\neg p_2 \mid \neg p_1)\Pr(\neg p_1)\\ &= (1-\Pr(p_2 \mid p_1))\Pr(p_1) + (1-\Pr(p_2 \mid \neg p_1))\Pr(\neg p_1)\\ &= 0.2 * 0.4 + 0.5 * 0.6 = 0.08 + 0.3 = 0.38\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(p_2) &= \Pr(p_2 \mid p_1)\Pr(p_1) + \Pr(p_2 \mid \neg p_1)\Pr(\neg p_1)\\ &= 0.8 * 0.4 + 0.5 * 0.6 = 0.32 + 0.3 = 0.62\end{aligned}$$

حال ادامه رابطه قبلی

$$\begin{aligned}\Pr(\neg p_3) &= 0.8\Pr(p_2) + 0.7\Pr(\neg p_2)\\ &= 0.8 * 0.62 + 0.7 * 0.38 = 0.762\end{aligned}$$

b

$\Pr(p_2 \mid \neg p_3)$

با توجه به گراف میبینیم که متغیر p2 هیچ وابستگی به مقادیر p3 ندارد. پس رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی میکنیم. مقدار احتمال p2 را نیز در سوال قبلی بدست آورده بودیم.

$$\Pr(p_2 \mid \neg p_3) = \Pr(p_2) = 0.62$$