Subject ۹۴۳/۰۲۲ یاسمن سادات میرمحمد تمرین سری چهارم

Date

۱. با استفاده از رابطه‌ی صریح تبدیل فوریه و یا خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

a. $x(t) = e^{-3|t|} \sin(2t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t|} \cdot \sin(2t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$\longrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(3-j\omega)t} \cdot \sin(2t)\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(3-j\omega)t} \cdot \sin 2t \, dt$$

محاسبه‌ی این انتگرال دشواره!
از خاصیت تبدیل فوریه که می‌دانیم
استفاده می‌کنیم.
و کانولوشن

$* \longleftrightarrow \times$

حوزه زمان — حوزه فرکانس

$$X(\omega) = F\{e^{-3|t|}\} * F\{\sin 2t\}$$

$$X(\omega) = \frac{6}{9+\omega^2} * \frac{j}{2}\left(\delta(\omega-2) - \delta(\omega+2)\right)$$

* $\delta(t)$ همیشه در دو طرف خودش می‌اندازه سر بقیه

$$X(\omega) = \frac{j}{2}\left[\frac{6}{9+(\omega-2)^2} - \frac{6}{9+(\omega+2)^2}\right]$$

Subject
Date

$$b.\quad x(t)=\begin{cases}1-t^2 & 0<t<1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_0^1 (1-t^2).e^{-j\omega t}\,dt$$

$$X(\omega)=\int_0^1 e^{-j\omega t}-\int_0^1 \underbrace{t^2}_{u}\,\underbrace{e^{-j\omega t}dt}_{dv}$$

$$X(\omega)=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^1-\int_0 t^2.e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega)=\frac{e^{-j\omega}}{-j\omega}+\frac{1}{j\omega}-\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}.t^2\Big|_0^1-\int_0^1\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\times 2t\,dt\right]$$

$$X(\omega)=\frac{1}{j\omega}-\frac{e^{-j\omega}}{\omega^2}(2t)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}.2t\,dt$$

$$\int_0^1\frac{2}{j\omega}\underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{-j\omega t}dt}_{dv}=\frac{2}{j\omega}\cdot\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{\omega^2\times -j\omega}\cdot(e^{-j\omega}-1)$$

$$\boxed{X(\omega)=\frac{1}{j\omega}-\frac{2.e^{-j\omega}}{\omega^2}+\frac{2.e^{-j\omega}-3}{-j\omega^3}}$$

PaPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

c. $\frac{\sin 3t \cdot \cos t}{\pi t}$ $x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3t \cdot \cos t}{\pi t} \cdot e^{-j\omega t} dt$

ضرب تقسیم $\Rightarrow \underbrace{\frac{3 \sin 3t}{3 \pi t}}_{x'(t)} \cdot \underbrace{\cos t}_{h(t)}$ $x'(\omega) = \begin{cases} 1 & -3<\omega<3 \\ 0 & oth.w \end{cases}$

$H(\omega) = F\{\cos t\} = \frac{1}{2}\left(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\right)$

ضرب $\rightarrow$ $x(t) = x'(t) \cdot h(t) \xrightarrow{F} X(\omega) = x'(\omega) * H(\omega)$

$$x(\omega) = \frac{1}{2}\left[x'(\omega-1) + x'(\omega+1)\right]$$

$$x(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 2<\omega<4 \\ \frac{1}{2} & -4<\omega\leq 2 \\ 1 & -2\leq \omega \leq 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

$d.\ x(t) = t \cdot e^{-2|t-1|}$ $\qquad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-2|t-1|}$

استفاده از خواص :

$x(t) \rightarrow X(\omega)$ $\qquad e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Duality

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow (j\omega) X(\omega) \\ -jt\, x(t) \rightarrow \frac{d X(\omega)}{d\omega} \end{cases}$$

$e^{-a|t-1|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{\omega^2+a^2} \cdot e^{-j\omega}$

پس $\rightarrow$ $-jt \cdot e^{-2|t-7|} \xrightarrow{F} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{2\times 2 \cdot e^{-j\omega}}{2^2+\omega^2}\right)$

درنتیجه $\rightarrow$ $t \cdot e^{-2|t-7|} \xrightarrow{F} \boxed{\frac{-2\times 2j \cdot e^{-j\omega}(4+\omega^2) - 8a \cdot e^{-j\omega}}{-j(4+\omega^2)^2}}$

$X(\omega)$

$$X(\omega) = \frac{(4j(4+\omega^2) + 8\omega) \cdot e^{-j\omega}}{j(4+\omega^2)^2 \cdot j}$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

② عکس تبدیل فوریه

$a.\ X(\omega) = \omega \cdot e^{-|\omega|} \qquad \omega > 0$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\cdot e^{-|\omega|}\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} \omega\cdot e^{(jt+1)\omega}\,d\omega + \int_{0}^{\infty} \omega\cdot e^{(jt-1)\omega}\,d\omega\right]$$

می‌توان این انتگرال را حل کرد.

می‌توان هم از خواص استفاده کرد.

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad : \quad jt\cdot e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{2a}{\omega^2+a^2}\right)$$

Duality

$$\begin{cases} t\cdot e^{-a|t|} \longrightarrow \dfrac{4ja\omega}{(a^2+\omega^2)^2} \\ \dfrac{4jat}{(a^2+t^2)^2} \longrightarrow -2\pi(\omega)\cdot e^{-a|-\omega|} \end{cases}$$

$a = 1$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4jt}{(a^2+t^2)^2}\, u(t)$$

$F^{-1}\{X(\omega)\}$

$$b.\ X(\omega) = \begin{cases} e^{-\omega} & \omega > 0 \\ -e^{\omega} & \omega < 0 \end{cases} \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{0} -e^{\omega}\cdot e^{j\omega t}\,d\omega}_{\int_{-\infty}^{0} e^{(1+jt)\omega}\,d\omega} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\omega}\cdot e^{j\omega t}\,d\omega}_{\int_{0}^{\infty} e^{(-1+jt)\omega}\,d\omega}\right]$$

$$\frac{1}{jt+1}\cdot e^{(1+jt)\omega}\Big|_{0}^{\infty} \qquad \frac{1}{jt-1}\cdot e^{(-1+jt)\omega}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$\frac{1}{jt+1}\cdot(0-1) \qquad \frac{1}{jt-1}(0-1)$$

$$\frac{-1}{jt+1} \qquad \frac{-1}{jt-1}$$

$$\longrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1}{jt+1} + \frac{-1}{jt-1}\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\times\frac{-jt\cancel{+1}-jt\cancel{-1}}{(jt)^2-1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\times\frac{-2jt}{-t^2-1}$$

$$x(t) = \frac{-jt}{-\pi(t^2+1)} = \frac{jt}{\pi(t^2+1)} \longrightarrow x(t) = \frac{jt}{\pi(t^2+1)}\cdot u(t)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

خواص

c. $X(\omega) = \frac{2a - j\omega}{2a + j\omega}$ $\qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a - j\omega}{2a + j\omega} \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$

$$\frac{2a}{2a+j\omega} - \frac{j\omega}{2a+j\omega} = \frac{2a+j\omega-j\omega}{2a+j\omega} - \frac{j\omega}{2a+j\omega} = \frac{4a}{j\omega+2a} - \frac{j\omega+2a}{j\omega+2a}$$

$$X(\omega) = \frac{4a}{2a+j\omega} - 1$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = \left[4.a.e^{-2at} - \delta(t)\right] u(t)$$

خواص

d. $X(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sin 2\omega - j\cos 2\omega}{1+\frac{j\omega}{3}}\right\}$

$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$ $\qquad \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow (j\omega)X(\omega)$

$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} (j\omega)X(\omega)$ $\qquad (jt)x(t) \longrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$

$$F^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{2j}\right) - j\left(\frac{e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}}{2}\right)}{\frac{j\omega}{3}+1}\right\} = F^{-1}\left\{\frac{e^{2j\omega}}{1+\frac{j\omega}{3}}\right\} \times -j$$

$$x(t) = -t3j \cdot e^{-3(t+2)} \cdot u(t+2)$$

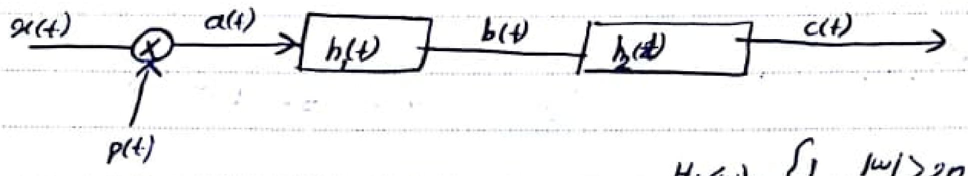
$$F^{-1}\{X(\omega)\} = \boxed{x(t) = -3jt \cdot e^{-3(t+2)} \cdot u(t+2)}$$

PAPCO

Subject:
Date

③ به ازای ورودی داده شده ، خروجی $c(t)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} \\ p(t) = \cos 4\pi t \end{cases} , \quad h_2(t) = \frac{\sin 5\pi t}{\pi t}$$



$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > 2\pi \\ 0 & |\omega| < 2\pi \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

$$h_2(t) = \frac{⑤ \sin 5\pi t}{⑤ \pi t} \longrightarrow \omega = 5\pi \longrightarrow H_2(\omega) = \begin{cases} 1 & -5\pi \le \omega \le 5\pi \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$h_{Final}(t) = h_1(t) * h_2(t) \xrightarrow{F} H_{Final}(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) = \begin{cases} 1 & 2\pi < \omega < 5\pi \\ 1 & -5\pi < \omega < -2\pi \\ 0 & \text{o.th} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(t) = x(t) \cdot p(t) = \overline{\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}} \cdot \overline{\cos 4\pi t} \longrightarrow \text{از اطلاعات صورت سئوال} \\ c(t) = a(t) * h_{Final}(t) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow F$$

$$C(\omega) = A(\omega) \cdot H_F(t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left(\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)\right) * \begin{cases} 1 & -\pi \le \omega \le \pi \\ 0 & \text{o.th w} \end{cases}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega - 4\pi) + (\omega + 4\pi)\right]$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$c(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -5\pi < \omega < -3\pi \\ \frac{1}{2} & 3\pi < \omega < 5\pi \\ 0 & \text{othw} \end{cases}$$

$$c(t) = F^{-1}\{c(\omega)\} \longrightarrow c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega$$

$$c(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-5\pi}^{-3\pi} \frac{e^{j\omega t}}{2} d\omega + \int_{3\pi}^{5t} \frac{e^{j\omega t}}{2} d\omega\right]$$

$$c(t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{-5\pi}^{-3\pi} + \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\Big|_{3\pi}^{5\pi}\right]$$

$$c(t) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{-e^{-5\pi jt}}{jt} + \frac{e^{-3\pi jt}}{jt} + \frac{e^{5\pi jt}}{jt} - \frac{e^{3\pi jt}}{jt}\right)$$

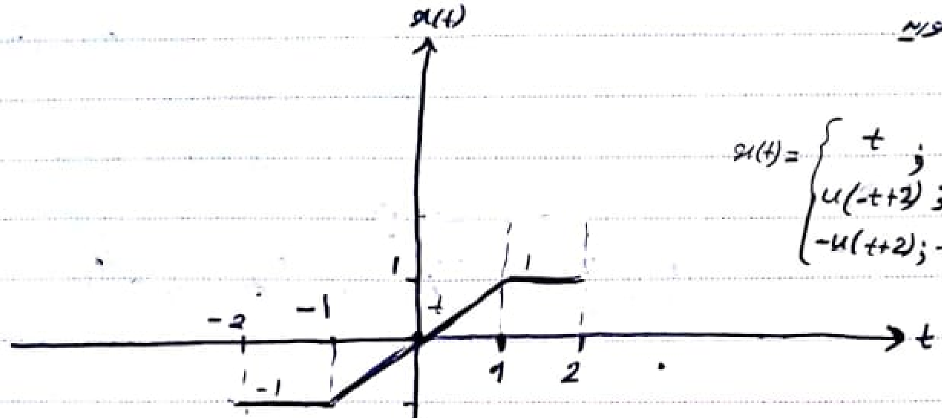
$$c(t) = \frac{1}{2\pi t} \cdot (\sin 5\pi t - \sin 3\pi t)$$

$$c(t) = \frac{2\cos 4\pi t \cdot \sin \pi t}{2\pi t}$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

④ مشتق‌گیری در تبدیل فوریه



$$x(t)=\begin{cases} t \ ; & -1\leq t\leq 1 \\ u(-t+2)\ ; & 1\leq t\leq 2 \\ -u(t+2)\ ; & -2\leq t\leq -1 \end{cases}$$

در بازه‌ی -1 تا -2 و 1 تا 2، مشتق صفر دارد

فقط در بازه‌ی -1 تا 1 مشتق مقدار دارد $\longrightarrow$ ①

$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow (j\omega)\,X(\omega)$$

$$t \xrightarrow{F} X(\omega)$$

$$1 \xrightarrow{F} \underbrace{(j\omega)\,X(\omega)}$$

$$X(\omega)=\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

$$X(\omega)=\frac{-1}{j\omega}\,e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}$$

$$X(\omega)=-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega}-e^{j\omega}\right)$$

$$(j\omega)\,\frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega}-e^{j\omega}\right)$$

$$=e^{j\omega}-e^{-j\omega}$$

تبدیل فوریه‌ی تابع $= e^{j\omega}-\frac{1}{e^{j\omega}}$

$$x(t)=\begin{cases} e^{j\omega}-\frac{1}{e^{j\omega}} & -1\leq t\leq 1 \\ 0 & \text{o.th} \end{cases}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=\begin{cases} 1 & -1<t<1 \\ -\delta(2-t) & t>1 \\ -\delta(t+2) & t<-1 \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject: $x(t)$
Date

(5) $x(t)$ را بیابید.

الف) داشتن تبدیل فوریه‌ی $X(j\omega)$

ب) $x(t)$ حقیقی

ج) $x(t)=0:\ t\leqslant 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\text{Real}\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}\,d\omega=|t|.e^{-|t|}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\text{Real}\{X(j\omega)\}}\cdot e^{j\omega t}\,d\omega=|t|e^{-|t|}$$

$\text{Real}\{X(j\omega)\}=X(j\omega)$ اگر فرض کنیم که باشد

$x(t)=|t|.e^{-|t|}$

$\boxed{\text{Real}\{X(j\omega)\}=X(j\omega)}$ میخواهیم ثابت کنیم که

الف . $x(t)\xrightarrow{F}X(\omega)$

ب . $\text{Re}\{X(\omega)\}=\text{Re}\{X(-j\omega)\}$

$\text{Im}\{X(\omega)\}=-\text{Im}\{X(-j\omega)\}$

بخش حقیقی تقارن زوج

بخش موهومی تقارن فرد

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}X(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

ج . $x(t)=0,\ t\leqslant 0$ ← سیستم علّی است!

← پس تبدیل فوریه‌ی سیگنال داده شده نشان قسمت حقیقی تبدیل فوریه‌ی کل است.

$$x_{even}(t)=\underbrace{\frac{x(t)+x(-t)}{2}}_{|t|.e^{-|t|}}\xrightarrow{F}\text{Real}\{X(\omega)\}$$

$$\begin{cases} t>0 \rightarrow x_{even}(t)=\dfrac{x(t)}{2}\longrightarrow x(t)=2\cdot|t|\cdot e^{-|t|} \\ t<0 \longrightarrow x(t)=0 \end{cases}$$

$$x(t)=\left[2|t|\cdot e^{-|t|}\right]u(t)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date:

⑥ فرض کنید $x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2K)$ وارد یک سیستم LTI با $\begin{cases} H(j\omega)=1 \\ -\frac{3\pi}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ می‌شود.

خروجی را محاسبه کنید.

(راهنمایی: تناوب سیگنال ورودی)

$x(t)=\sum\delta(t-2K) \longrightarrow \boxed{H(\omega)=1} \longrightarrow y(t)$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \longrightarrow Y(\omega)=X(\omega)$$

$$\delta(t)\xrightarrow{F}1$$

$$\delta(t-2K)\xrightarrow{F} e^{2Kj\cdot}\cdot X(\omega)$$

سری فوریه سیگنال متناوب ورودی $\longrightarrow$ $a_K=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\delta(t)\cdot\underbrace{e^{-jK\omega_0 t}}_{1}\,dt=\frac{1}{2}$

متناوب با دوره تناوب $T=2$ است

$$X(\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty}2\pi a_K\,\delta(\omega-K\omega_0)$$

$$X(\omega)=\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-K\omega_0)$$

$$Y(\omega)=X(\omega)\cdot\underbrace{H(\omega)}_{1} \longrightarrow Y(\omega)=\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-K\omega_0)$$

چون $X(\omega)$ به صورت مجموع سیگنال‌های پایه نوشته شده است و $F^{-1}\{Y(\omega)\}=y(t)$ $\longrightarrow$ $y(t)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{jK\omega_0 t}$

خروجی سیستم

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

7) پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI پایدار به صورت زیر است:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{6-\omega^2+5j\omega}$$

الف) یک معادله‌ی دیفرانسیل که رابطه‌ی ورودی - خروجی این سیستم را مشخص می‌کند بنویسید.

ب) پاسخ ضربه‌ی سیستم را بدست آورید. $h(t)$

ج) $y(t)$ را به ازای ورودی روبه‌رو بدست آورید ← $x(t) = e^{-4t}\cdot u(t) - t\cdot e^{-4t}\cdot u(t)$

د) $y(t)$ را به ازای ورودی $x_1(t) = e^{2t}$ بدست آورید.

ب)

$$\frac{-(j\omega+2)}{\underset{(j\omega-6)(j\omega+1)}{\omega^2-5j\omega+6}} = \frac{A}{j\omega-6} + \frac{B}{j\omega+1} \longrightarrow Aj\omega + A + Bj\omega - 6B = -j\omega - 2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A-6B=-2 \end{cases}$$

$$\ominus \quad 7B = 1 \longrightarrow \boxed{B=\frac{1}{7}}$$

$$A + \frac{1}{7} = -1 \longrightarrow A = -1-\frac{1}{7}$$

$$\boxed{A = \frac{-8}{7}}$$

$$\longrightarrow H(\omega) = \frac{\frac{-8}{7}}{j\omega-6} + \frac{\frac{1}{7}}{j\omega+1}$$

$$\boxed{h(t) = \left[-\frac{8}{7}\cdot e^{6t} + \frac{1}{7}\cdot e^{-t}\right]\cdot u(t)}$$

پاسخ ضربه: ب

الف)

معادله‌ی دیفرانسیل

$$\longrightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \longrightarrow \frac{j\omega+2}{-\omega^2+5j\omega+6} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$\longrightarrow (j\omega+2)X(\omega) = (-\omega^2+5j\omega+6)Y(\omega)$$

خاصیت مشتق

$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} (j\omega)X(\omega)$$

$$\longrightarrow (j\omega)X(\omega) + 2X(\omega) = \underset{(j\omega)^2}{\overset{j^2}{-\omega^2}}Y(\omega) + 5j\omega Y(\omega) + 6Y(\omega)$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} \boxed{\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t)}$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

(ج)

$$x(t) = e^{-4t}\cdot u(t) - t\cdot e^{-4t}\cdot u(t) \xrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{j\omega+4} - \frac{1}{(j\omega+4)^2}$$

تابع : $H(\omega) = \dfrac{j\omega+2}{(j\omega)^2+5j\omega+6} = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \dfrac{Y(\omega)}{(j\omega)^2+8j\omega+16-j\omega-4}$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+5j\omega+6}}_{H(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{(j\omega)^2+7j\omega+12}$$

$$\longrightarrow Y(\omega) = \frac{\cancel{(j\omega+2)}(j\omega+4)\cancel{(j\omega+3)}}{\cancel{(j\omega+3)}\cancel{(j\omega+2)}}$$

نکته

$$\frac{d\delta(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega$$

$$\delta(t) \xrightarrow{F} 1$$

$$\longrightarrow Y(\omega) = j\omega+4 \xrightarrow[F^{-1}]{y(t)} \boxed{y(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + 4\delta(t)}$$

(د)

$$x_1(t) = e^{2t} \xrightarrow{F} X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2-j\omega)t}\cdot dt = \frac{1}{2-j\omega} e^{(2-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2-j\omega}\Big[\underbrace{e^{\infty}}_{1} - \underbrace{e^{-\infty}}_{\frac{1}{e^{\infty}}=0}\Big]$$

$$\boxed{X_1(\omega) = \frac{1}{2-j\omega}}$$

$$\longrightarrow H(\omega) = \frac{Y_1(\omega)}{X_1(\omega)} \longrightarrow \frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+5j\omega+6} = \frac{Y_1(\omega)}{\frac{1}{2-j\omega}} \longrightarrow \boxed{Y_1(\omega) = \frac{2+j\omega}{2-j\omega}\cdot\frac{1}{(j\omega)^2+5j\omega+6}}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

8) سیستم LTI با سکون ابتدایی ←

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

الف) پاسخ ضربه را بدست آورید.

ب) وارون این سیستم ← سکون ابتدایی دارد و با معادله دیفرانسیل توصیف میشود. این معادله را بیابید.
پاسخ ضربه ی سیستم معکوس را $(g(t))$ بیابید.

الف)

$$\to y''(t)+6y'(t)+9y(t)=x''(t)+3x'(t)+2x(t)$$

$$\xrightarrow{F} (j\omega)^2Y(\omega)+6(j\omega)Y(\omega)+9Y(\omega)=(j\omega)^2X(\omega)+3(j\omega)X(\omega)+2X(\omega) \quad \text{I}$$

$$\xrightarrow[\text{برای هر ورودی فرضی}]{\text{طرفین}} Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega) \quad \text{II}$$

$$\text{I}: \left[(j\omega)^2+6j\omega+9\right]\cdot Y(\omega)=\left[(j\omega)^2+3j\omega+2\right]X(\omega) \xRightarrow{\text{II}} H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}{(j\omega)^2+6j\omega+9}$$

$$\to H(\omega)=\frac{(j\omega)^2+3j\omega+2}{(j\omega)^2+6j\omega+9}=\frac{A}{j\omega+3}+\frac{B}{(j\omega)^2+6j\omega+9} \to \underbrace{A(j\omega)^2+6Aj\omega+9A+Bj\omega+3B}_{=(j\omega)^2+3j\omega+2}$$

$$\to \begin{cases} A=1 \\ 6A+B=3 \to B=-3 \\ 9A+3B=2 \to 9A-9=2 \to 9A=11 \to A=\frac{11}{9} \end{cases} \to H(\omega)=\frac{-3}{j\omega+3}+\frac{\frac{11}{9}}{(j\omega+3)^2}$$

$$\to \boxed{h(t)=\left[-3\cdot e^{-3t}+t\cdot e^{-3t}\right]\cdot u(t)}$$

ب) برای سیستم معکوس:

$$h(t)*h_I(t)=\delta(t) \qquad \to \boxed{h(t)} \to \boxed{h_I(t)} \to$$

$$\downarrow \text{ضربه}$$

$$H(\omega)\cdot H_I(\omega)=1 \to H_I(\omega)=\frac{1}{H(\omega)}=\frac{1}{\frac{(j\omega)^2+3j\omega+2}{(j\omega)^2+6j\omega+9}}=\frac{(j\omega)^2+6j\omega+9}{(j\omega)^2+3j\omega+2}$$

ضرایب دقیقا برعکس هستند

$$\to \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{(j\omega)^2+6j\omega+9}{(j\omega)^2+3j\omega+2} \to Y(\omega)\left[(j\omega)^2+3j\omega+2\right]=X(\omega)\left[(j\omega)^2+6j\omega+9\right]$$

$$\to \boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+6\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)}$$

P4PCO

Subject:
Date

$$\underset{I}{H}(\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 9}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} \longrightarrow \frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 9}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} + \frac{7}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

$$H_I(\omega) = \frac{7}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{A}{(j\omega + 2)} + \frac{B}{j\omega + 1}$$

$$\rightarrow A j\omega + A + B j\omega + 2B = 7 \longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \rightarrow A = -B \rightarrow \boxed{A = -7} \\ A + 2B = 7 \rightarrow -B + 2B = 7 \rightarrow \boxed{B = 7} \end{cases}$$

$$\rightarrow H_I(\omega) = \frac{-7}{(j\omega + 2)} + \frac{(7)}{j\omega + 1}$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} h_I(t) = \left[-7 \cdot e^{-2t} + (7) \cdot e^{-t}\right] \cdot u(t)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner