Subject:
Year: Month: Date:

[illegible]
۹۳۱۳۱۰۲۲

(1

a. $\begin{cases} x(t) = e^{2t}u(1-t) \\ h(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \end{cases}$

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$

$h(\tau) = u(\tau) - 2u(\tau-2) + u(\tau-5)$

$x(\tau) = e^{2\tau}u(1-\tau)$

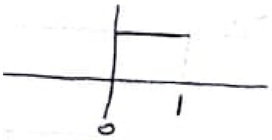
$\xrightarrow{x(t-\tau)}$

- $t > 4$: $y(t) = 0$
- $t-1 > 0$: $y(t) = 0$
- $t-1 < 0$: $\int_0^2 e^{2(t-\tau)}d\tau - \int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau = -\frac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\Big|_0^2 + \frac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\Big|_2^5 = e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{4t}(1+e^{-5})$
- $0 < t-1 < 2$: $\int_{t-1}^{2} e^{2(t-\tau)}d\tau - \int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau = \frac{-1}{2}e^{2(t-\tau)}\Big|_{t-1}^{2} + \frac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\Big|_2^3 = -e^{2(t-2)} + \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{2}e^{2(t-5)}$
- $2 < t-1 < 5$: $-\int_{t-1}^{5} e^{2(t-\tau)}d\tau = \frac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\Big|_{t-1}^{5} = \frac{1}{2}e^{2(t-5)} - \frac{1}{2}e^{2}$

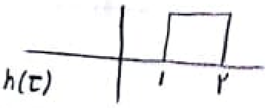
b. $\begin{cases} x(t) = u(t) - u(t-1) \\ h(t) = u(t-1) - u(t-2) \end{cases}$

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau$

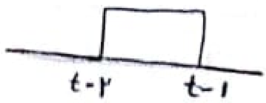
$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau-1)$



$h(t) = u(\tau-1) - u(\tau-2)$



$\xrightarrow{h(t-\tau)}$

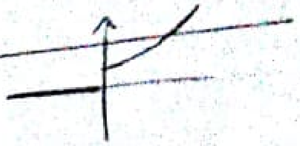


- $1 < t < 2 \longrightarrow t-1 > 0,\ t-2 < 0$: $\int_0^{t-1} 1 \times 1\, d\tau = \tau\Big|_0^{t-1} = t-1$
- $t-2 < 1,\ t-1 > 0 \longrightarrow 2 < t < 3$: $\int_{t-2}^{1} 1 \times 1\, d\tau = \tau\Big|_{t-2}^{1} = 1-(t-2) = 3-t$
- $t-1 < 0 \longrightarrow t < 0$: $y(t) = 0$
- $t-2 > 1 \longrightarrow t > 3$: $y(t) = 0$

Subject. Year. Month. Date.

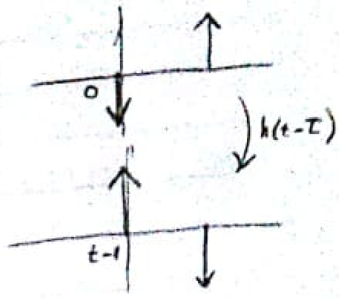
c. $\begin{cases} x(t) = e^{t} u(t) \\ h(t) = \delta(t+1) - \delta(t) \end{cases}$

$\bullet\ x(\tau) = e^{\tau} . u(\tau)$



$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . h(t-\tau)\, d\tau$

$\bullet\ h(\tau) = \delta(\tau+1) - \delta(\tau)$

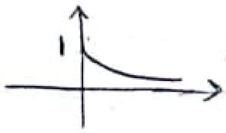


$\left.\begin{matrix} t>0 \\ t-1<0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow 0<t<1 \longrightarrow -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau} . \delta(\tau) d\tau$

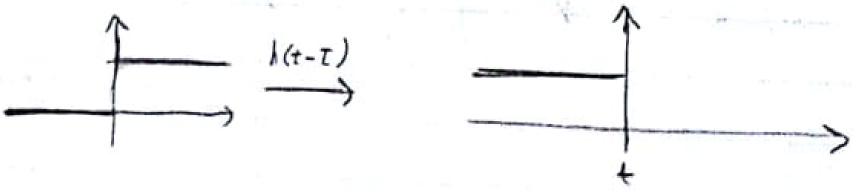
d. $\begin{cases} x(t) = e^{-at} u(t) \\ h(t) = u(t) \end{cases}$

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . h(t-\tau)\, d\tau$

$x(\tau) = e^{-a\tau} . u(\tau)$



$h(\tau) = u(\tau)$



$\begin{cases} \bullet\ t>0 : \int_{0}^{t} e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_{0}^{t} = \overset{y(t)}{-\frac{1}{a} e^{-at} + \frac{1}{a}} \\ .\ t<0 \ : \ y(t) = 0 \end{cases}$

PAPCO

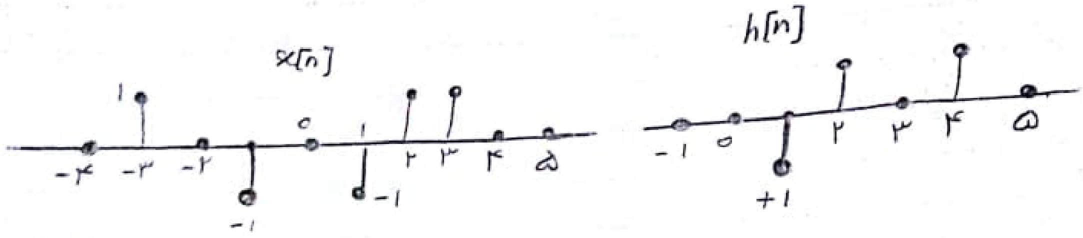
Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲)

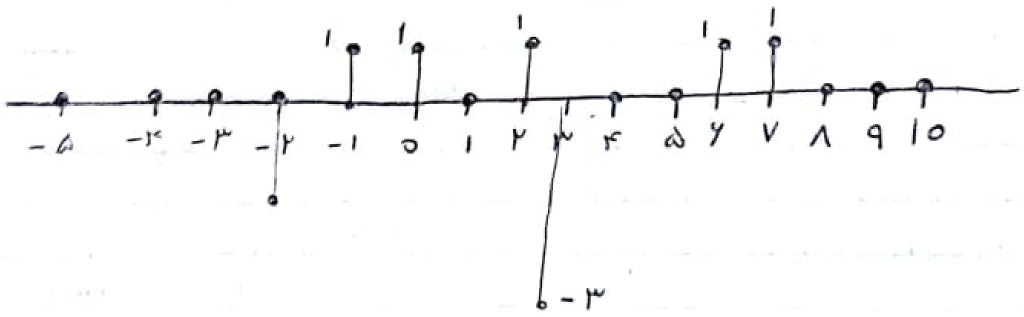
با توجه به اینکه $h[n]$ پاسخ ضربه‌ی یک سیستم LTI است، خروجی $y[n]$ به ازای ورودی $x[n]$، باید از روی کانولوشن $x[n]$ و $h[n]$ به دست آید.

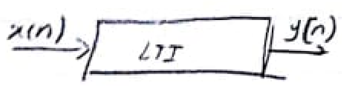
$y[n] = x[n] * h[n]$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

$$y[n] = \sum x[k]\,h[n-k]$$





$y[n] = x[n] * h[n]$

$$\begin{cases} n=7 \rightarrow 1\times1+0\times1=1 \\ n>7 \rightarrow y[n]=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
n<-3 : \ y[n]=0 \\
n=-3 : \ 1\times0=0 \\
n=-2 : \ 0\times0+(-1)\times1=-1 \\
n=-1 : \ 0\times-1+(-1)\times n+1\times1=1 \\
n=0 \rightarrow 0\times0+(-1\times-1)+0\times0+1\times1=0 \\
n=1 \rightarrow -1\times0+-1\times0+1\times-1+0\times0+1\times1=0 \\
n=2 \rightarrow 0\times1+-1\times-1+0\times1+0\times-1+1\times0+0\times1=1 \\
n=3 \rightarrow 0\times1+-1\times1+1\times-1+0\times0+1\times-1+0\times0+0\times1 \\
n=4 \rightarrow -1\times1+1\times1+0\times1+0\times1+0\times-1=0 \quad =-3 \\
n=5 \rightarrow 1\times1+0\times1+1\times-1+0\times0=0 \\
n=6 \rightarrow 0\times1+1\times1+0\times-1=1
\end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$A = \int_{-1.5}^{0.5} \left[(t+2t^2)\,\delta(3t^2-3) + \underbrace{e^{-\cos t + 2\sin t}\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}_{e^{-\cos\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{4}}} \right] dt$$

نکته : $\int x(t)\,\delta(t-m) = x(m)$ $\longrightarrow$ باید ریشه‌های تابع δ که در بازه‌ی انتگرال‌گیری قرار گرفته باشند تعیین و از این قاعده استفاده کنیم

$$\int_{-1.5}^{0.5} (t+2t^2)\,\delta(3t^2-3)\,dt + \int_{-1.5}^{0.5} e^{-\cos t + 2\sin t}\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right) dt$$

$\rightarrow \delta(3t^2-3) \;:\; 3(t^2-1)=0 \;:\; t=\pm 1 \;\rightarrow$ نقطه ۱- در بازه‌ی انتگرال‌گیری وجود دارد ✓

$\rightarrow \delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \;:\; t=\frac{\pi}{4} \;\rightarrow$ در این نقطه مقدار دارد $\longrightarrow$ این نقطه در بازه‌ی انتگرال‌گیری قرار ندارد ✗

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری مقادیر}} A = (t+2t^2)\Big|_{t=-1} \;:\; -1+2(1) = 2 \;\rightarrow\; \boxed{A=2}$$

(نکته‌ی سوال :
باید ریشه‌های تابع δ بررسی بشوند که اگر در بازه‌ی انتگرال‌گیری قرار دارند ، از قاعده‌ی ذکر شده‌ی: $\int x(t)\,\delta(t-m)=x(m)$
استفاده شود)

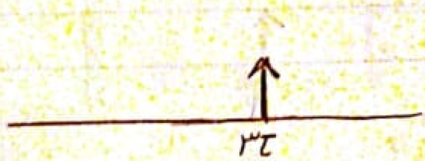
(۴

input : $x(t) = \delta(2t-2\tau)$
output : $y(t) = \delta(t-3\tau)$

- Linearity ✓
  LTI (✗)

- $x(t) = \delta(2t-2\tau) = \delta(2(t-\tau))$ → $t=\tau$ → ریشه

- $y(t) = \delta(t-3\tau)$ → $t=3\tau$ → ریشه



حالا باید نگاه کنیم چه بلایی سر تابع آمده ← می‌بینیم که τ به 3τ تبدیل شده ← یعنی سه برابر شده

نتیجه : $\underbrace{y(t) = x(\frac{t}{3})}$ ⟵ تابع x، به ازای $t=\tau$ و $t=3\tau$، یک جواب داده.

(۵

تمام سیستم‌های بی‌حافظه، علّی هستند

① علّی: خروجی در هر لحظه، تابع ورودی در آن لحظه و لحظات قبل باشند.

② پایدار: Bounded input, Bounded output.

③ حافظه‌دار بودن: ورودی در هر لحظه، خروجی را تغییر کند.

$a.\ h[n] = 5^n u[3-n]$

① $|h[n]| = 0 \rightarrow n=-1: \ \frac{1}{5} \times u[4]$ → علّی نیست

② $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| \rightarrow$ محدود باشد $: \ \sum_{-\infty}^{4} 5^n = 1325 + 125 + 25 + 5 + \cdots \rightarrow \frac{125}{1-\frac{1}{5}} = R$ ↓ محدود است → سیستم پایدار است

③ $h[n] = K u[3-n] \rightarrow n=0: \ K \rightarrow$ حافظه‌دار است

$b.\ h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$

① علّی $\rightarrow n=-1: \ h[-1] = (\frac{1}{2})^{-1} u[1] \quad 2 \neq 0 \rightarrow$ غیرعلّی

② پایدار $\rightarrow \sum |h[n]| = \sum_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \sum_{0}^{\infty} 2^n \rightarrow$ نامحدود → سیستم پایدار نیست

$4 \times \sum_{0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$

③ حافظه‌دار بودن: $n=-1: \ \underset{\neq 0}{2} \rightarrow$ حافظه‌دار

$c.\ h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$

① علّی $\rightarrow$ $n<0 \rightarrow u[n]=0$ و $u[n-1]=0 \rightarrow \underbrace{[(-\frac{1}{2})^n + (1.01)^n] \times 0 = 0}_{n<0} \rightarrow$ علّی

② پایدار $\rightarrow \begin{cases} 0 & n<0 \\ (-\frac{1}{2})^n & n=0 \\ (-\frac{1}{2})^n + (1.01)^n & n\geq 1 \end{cases} \rightarrow \sum \underbrace{|(-\frac{1}{2})^n + (1.01)^n|}_{\text{نامحدود!}} \rightarrow$ پایدار نیست!

③ حافظه‌دار بودن $\rightarrow n=-1 \rightarrow 2 + \cancel{(1.01)^{-1}}(0) = \underset{\neq 0}{2} \rightarrow$ حافظه‌دار

Subject: Year. Month Date. ( )

d. $h(t) = e^{2t} u(-1-t)$

(1) علّی $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{ll} t=-1 & : e^{-2}\times 1 = 0 \\ t=-2 & : e^{-4} \end{array}\right\} \neq 0 \rightarrow$ غیرعلّی

(2) پایدار $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{2t} u(-1-t)| dt = \int_{-\infty}^{-1} e^{2t} dt = \frac{e^{2t}}{2} \Big|_{0}^{-1} = \frac{1}{2} e^{-2}$ محدود $\rightarrow$ پایدار است

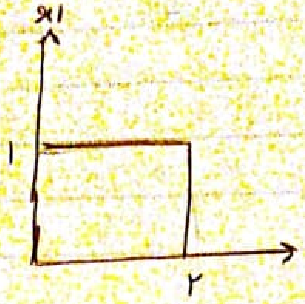
(3) حافظه دار بودن $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} t=0 \rightarrow 0 \\ t=1 \rightarrow 0 \\ t=-3 \rightarrow h(-3) = \underbrace{e^{-6} u[2]}_{\neq 0} \end{array}\right\} \rightarrow$ حافظه دار

e. $h(t) = e^{-2t} \cdot u(t+50)$

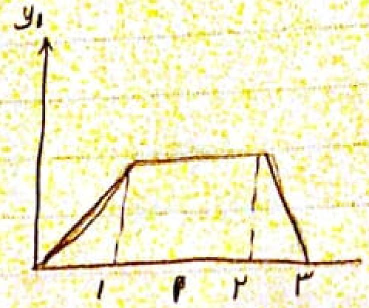
(1) علّی $\rightarrow h(-3) = e^{6} \neq 0 \rightarrow$ غیرعلّی

(2) پایدار $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2t} u(t+50)| = \int_{-50}^{+\infty} e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{-2} \Big|_{-50}^{+\infty} = \frac{e^{100}}{2}$ $\rightarrow$ محدود است $\rightarrow$ پایدار است

(3) حافظه دار بودن $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} e^{-2t} u(t+50) \\ t=0 \rightarrow 1 \\ h(-4) = e^{+8} u(46) \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ حافظه دار

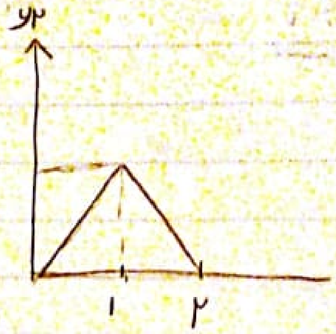


input



output

input



output

x2، اسکیل زمانی x1 است.

$$\begin{cases} x_1 = x(t) \\ x_2 = x(2t) \end{cases} \longrightarrow \boxed{x_2(t) = x_1(2t)} \longrightarrow$$

ولی از خاصیت اسکیل کردن نمی‌شود به صرف LTI بودن استفاده کرد.

$$: x_1(t) = x_2(t) + x_2(t-1) \xrightarrow{LTI} y_1(t) = y_2(t) + y_2(t-1)$$

از روی شکل

$$\begin{cases} 2 \leq t \leq 3 \rightarrow y_1(t) = y_2(t) = t \\ 1 \leq t \leq 2 \rightarrow y_1(t) = y_2(t) + y_2(t-1) = 1 \\ 0 \leq t < 1 \rightarrow y_1(t) = y_2(t-1) = 3 - t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 & t \\ 1 < t < 2 & 2 - t \end{cases}$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

(۷

$$\text{if} \quad z(t) = x(t) * y(t) \longrightarrow x(kt) * y(kt) = \frac{1}{|k|} z(kt)$$

$$z(t) = x(t) * y(t) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau$$

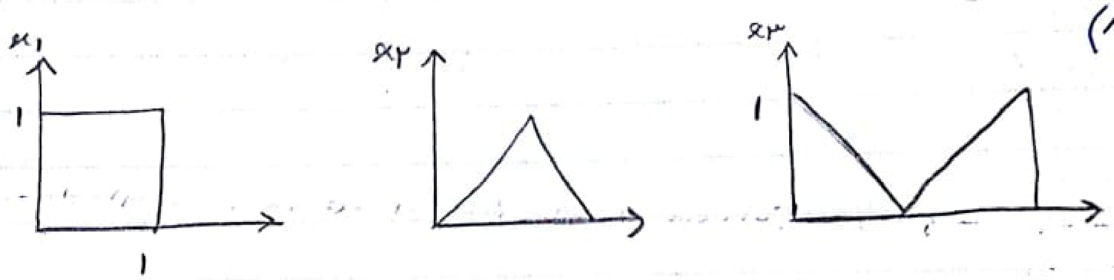
$$x(kt) * y(kt) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(k\tau) y(kt - k\tau) \frac{1}{k} d\tau$$

$\longrightarrow$ چون سیستم LTI است و خاصیت خطی دارد ، میتوانیم K را بیرون بکشیم

$$k\tau = m \longrightarrow A = \frac{1}{k} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(m) y(kt - m)\, dm}_{z(t)}$$

$$\longrightarrow \boxed{x(kt) * y(kt) = \frac{1}{k} z(t)}$$

(۸



$$\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \\ x_3(t) \to ? \end{cases}$$

$x_3(t)$ را باید برحسب $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بنویسیم .

یک رابطه‌ی خطی ساده بین آن‌ها برقرار است .

$$x_3(t) = x_2(t) - x_1(t) - x_1(t-1)$$

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان است ، پس:

LTI

$$y_3(t) = y_2(t) - y_1(t) - y_1(t-1)$$

Scanned by CamScanner