تمرین سری سوم

۱) سری فوریه سیگنال های زیر را به دست آورید.

a) $x(t) = e^{-jt} \qquad T = 2\pi$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-jt} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-jt(1+k\omega_0)}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{-j(1+k\omega_0)}\, e^{-jt(1+k\omega_0)}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{-2\pi j(1+k\omega_0)}\left(e^{-j2\pi(1+k\omega_0)} - 1\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_0 = 1$$

$$= \frac{1}{-2\pi j\,(1+k)}\left(e^{-j2\pi(1+k)} - 1\right) = \frac{j}{2\pi(1+k)}\left(e^{-j2\pi(1+k)} - 1\right), \quad k \neq -1$$

می‌دانیم $e^{-2\pi j(n)} = 1$ پس a_k برای $k \neq -1$ برابر صفر و برای $k=-1$ برابر ۱ است

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 1 & k = -1 \end{cases}$$

b) $x(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \end{cases} \qquad T = 2 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\, e^{-jk\pi t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-jk\pi t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 -e^{-jk\pi t}\, dt =$$

$$-\frac{1}{2\pi jk}\left(1 - e^{+jk\pi}\right) + \frac{1}{2\pi jk}\left(e^{-jk\pi} - 1\right) = \frac{e^{-jk\pi} + e^{jk\pi}}{2\pi jk} - \frac{1}{\pi jk} =$$

$$\frac{\cos k\pi - 1}{2\pi jk} = \begin{cases} 0 & k \text{ زوج} & k \text{ is odd} \\ -\frac{1}{\pi jk} & k \text{ فرد} & k \text{ is even} \end{cases}$$

c) $x(t) = 2 + \sin\omega_0 t + 4\cos\omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$

$$x(t) = 2 + (-2j\, e^{j\omega_0 t} + 2j\, e^{-j\omega_0 t}) + 2\, e^{j\omega_0 t} + 2\, e^{-j\omega_0 t}$$

$$+ \frac{e^{j\frac{\pi}{4}} e^{2j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-2j\omega_0 t}}{2}$$

$\omega_0 =$ فرکانس پایه

$$= 2 + (2 - 2j)\, e^{j\omega_0 t} + (2j + 2)\, e^{-j\omega_0 t} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}} e^{2j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-2j\omega_0 t}}{2}$$

$a_0 = 2$ $\qquad a_1 = 2 - 2j$ $\qquad a_2 = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}$

$a_{-1} = 2 + 2j$ $\qquad a_{-2} = + \frac{e^{+j\frac{\pi}{4}}}{2}$

۲) سیگنال متناوب $x(t)$ با ضرایب سری فوریه a_k و دوره تناوب T را در نظر بگیرید به صورتی که $\int_T^{2T} x(t)\,dt = 2$. سیگنال $x_1(t)$ را با ضرایب سری فوریه b_k در نظر بگیرید به صورتی که $x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. a_k را برحسب b_k محاسبه کنید.

$$\int_T^{2\pi} x(t)\,dt = 2$$

$$x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow b_k = jk\omega_0 a_k$$

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x_1(t) \longleftrightarrow b_k$

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

برای $k \neq 0$

$$a_k = \frac{b_k}{jk\omega_0}$$

اگر $k = 0$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T^{2T} x(t)\,dt = \frac{2}{T}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{b_k}{jk(\frac{2\pi}{T})} & k \neq 0 \\ \dfrac{2}{T} & k = 0 \end{cases}$$

۳) درباره سیگنال $x(t)$ می‌دانیم که :

سیگنالی حقیقی

دارای تناوب پایه $T=6$

برای $k=0$ و $|k|>2$ ضرایب سری فوریه آن صفر و در $k=1$ ضریب سری فوریه آن

عددی حقیقی و مثبت است برای این سیگنال $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{6}{\pi}$ و $x(t) = -x(t-3)$

سیگنال $x(t)$ را به دست آورید.

تناوب سیگنال $T=6$ است

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$$

تقارن نیم سیگنال

$$x(t) = -x(t-3) \Rightarrow x(t) = -x\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

پس فقط هارمونی های فرد در سیگنال حضور دارند

$$\omega_0 ,\ 3\omega_0 ,\ 5\omega_0 , \ldots$$

فقط ± 2 دایره $k=0$ اما چون فقط هارمونی های فرد قرار دارند پس فقط a_0 و a_1

و a_{-1} حضور دارند

a_1 عدد حقیقی و مثبت است

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{6}{\pi}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{6} \times \frac{6}{\pi} = \sum_{k=+2}^{k=2} |a_k|^2$$

$$|a_1|^2 + |a_0|^2 + |a_{-1}|^2 = \frac{1}{\pi}$$

$$|a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = \frac{1}{\pi} \qquad 2|a_1|^2 = \frac{1}{\pi} \qquad |a_1|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

$$|a_{-1}| = |a_1| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 t k} =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\frac{\pi}{3}tk} = a_1 e^{j\frac{\pi}{3}t} + a_{-1} e^{-j\frac{\pi}{3}t} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

۴) $x(t)$ یک سیگنال متناوب با ضرایب سری فوریه $a_k = \begin{cases} 2 & \text{for } k=0 \\ (\frac{1}{2})^{|k|} & \text{otherwise} \end{cases}$ است با استفاده از خواص ضرایب سری فوریه تعیین کنید

الف) آیا $x(t)$ حقیقی است؟

سیگنال $x(t)$ در صورتی حقیقی است که $x^*(t) = x(t)$ باشد ضرایب سری فوریه $x(t)$، a_k است پس ضرایب سری فوریه $x^*(t)$، a^*_{-k} است اگر a_k برابر با a^*_{-k} باشد سیگنال حقیقی است با توجه به اینکه $a_0 = 2$ و

$$a_k = (\frac{1}{2})^{|k|}$$

$$a^*_{-k} = (\frac{1}{2})^{|-k|} = (\frac{1}{2})^{|k|}$$

$$\left.\begin{aligned} &Real\{a_k\} = Real\{a_{-k}\} = (\tfrac{1}{2})^{|k|} \\ &Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_k = a^*_{-k}$$

پس سیگنال $x(t)$ حقیقی است

ب) آیا $x(t)$ زوج است؟

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد باید $a_k = a^*_{-k}$ حقیقی بودن باشد

و

$a_k = a_{-k}$ زوج بودن

آن گاه a_k باید فقط دارای بخش حقیقی بوده و نسبت به k زوج باشد که در اینجا داریم

$$\left.\begin{aligned} &Im\{a_k\} = 0 \\ &a_k = (\tfrac{1}{2})^{|k|} = a_{-k} = (\tfrac{1}{2})^{|-k|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $x(t)$ زوج است

ج) آیا $\frac{dx(t)}{dt}$ زوج است؟

وقتی از سیگنال مشتق بگیریم ضرایب سری فوریه آن به صورت زیر میشود

$$b_k = \begin{cases} 0 & k=0 \\ jk\omega_0 \times (\frac{1}{2})^{|k|} & k \neq 0 \end{cases}$$

آن گاه برای زوج بودن $\frac{dx(t)}{dt}$ باید $b_{-k} = b_k$ برابر باشد

$$b_{-k} = j(-k)\omega_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}$$

$$b_{-k} \neq b_k$$

$$b_k = jk\omega_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

پس $\frac{dx(t)}{dt}$ زوج نمی باشد

page 6

۵) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-۴|t|}$ در نظر بگیرید. ضرایب سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی های زیر به دست آورید.

برای $x_1(t)$:

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$y(t) \longrightarrow b_k = a_k \, H(k\omega_0)$$

① $$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۴|t|} e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{۴t} e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-۴t} e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(۴-jk\omega_0)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-۴-jk\omega_0)t} dt =$$

$$\frac{1}{۴-jk\omega_0} e^{(۴-jk\omega_0)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-۴-jk\omega_0} e^{(-۴-jk\omega_0)t} \Big|_{0}^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{۴-jk\omega_0} + \frac{1}{۴+jk\omega_0} = \frac{۸}{۱۶ + k^۲\omega_0^۲} \qquad T_0 = 1$$

② $$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{1}{۲}}^{\frac{1}{۲}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = 1$$

①, ② $$b_k = a_k \, H(jk\omega_0) = \frac{۸}{۱۶ + k^۲\omega_0^۲} = \frac{۸}{۱۶ + k^۲ \times ۴\pi^۲}$$

$$\omega_0 = \frac{۲\pi}{T_0} = ۲\pi$$

$$y_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{۸}{۱۶ + ۴\pi^۲ k^۲} e^{jk۲\pi t}$$

برای $x_2(t)$ ، $T_0 = 1$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} 1\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \left.\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right|_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{e^{-jk\frac{\omega_0}{4}} - e^{jk\frac{\omega_0}{4}}}{-jk\omega_0} = \frac{1}{j\omega_0 k}(2j)\sin\left(k\frac{\omega_0}{4}\right) =$$

$$\frac{2\sin\left(\frac{k\omega_0}{4}\right)}{k\omega_0} = \frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{2\pi k} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$b_k = a_k H(jk\omega_0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \times \frac{8}{16 + k^2\omega_0^2} =$$

$$\frac{4k \times \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)}{16 + k^2\omega_0^2} = \frac{4\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)}{16 + 4k^2\pi^2}$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{4} & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \text{ زوج} \\ \frac{4\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)}{16+4k^2\pi^2} & k \text{ فرد} \end{cases}$$

$$y_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk2\pi t}$$

۶) سیگنال متناوب $x(t)$ با ضرایب سری فوریه a_k و دوره تناوب T را در نظر بگیرید. ضرایب سری فوریه سیگنال های زیر را برحسب a_k بیان کنید.

الف) $x(t-t_0)+x(t+t_0) \longrightarrow b_k$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

$x(t+t_0) \longrightarrow e^{jk\omega_0 t_0} a_k$

$$b_k = a_k\left(e^{jk\omega_0 t_0} + e^{-jk\omega_0 t_0}\right) = 2a_k \cos(k\omega_0 t_0)$$

ب) $\text{Even}\{x(t)\}$

$$\text{Even}\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x(-t) \longrightarrow a_{-k}$

$$b_k = \frac{a_k + a_{-k}}{2}$$

$x(-t) \longrightarrow$ ضرایب سری فوریه $= \frac{1}{T}\int_T x(-t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$

تغییر متغیر $-t = \tau$

$$\frac{1}{T}\int_T x(\tau)\, e^{jk\omega_0 \tau}\, d\tau = a_{-k}$$

ج) $x(t) \longrightarrow a_k$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow jk\omega_0 a_k$$

با هر بار مشتق گیری ضرایب سری فوریه در $jk\omega_0$ ضرب می شوند

$$\frac{d^2x(t)}{dt} \longrightarrow (jk\omega_0)^2 a_k \qquad b_k = -k^2\omega_0^2 a_k$$

د) $x(3t-1)$

تناوب $x(3t)$، $\frac{1}{3}$ تناوب $x(t)$ می باشد پس سیگنال $x(3t-1)$ با تناوب $\frac{T}{3}$ متناوب است. ضرایب سری فوریه $x(3t)$، a_k می باشد، ضرایب سری فوریه $x(3t-1)$ برابر می شود با $a_k e^{-jk\left(\frac{6\pi}{T}\right)}$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$$x(3t-1) \longrightarrow a_k e^{-jk\omega_{0\,\text{جدید}}}$$

$$\omega_{0\,\text{جدید}} = \frac{2\pi}{T_{\text{جدید}}} = \frac{6\pi}{3 \cdot \frac{T}{3}}$$