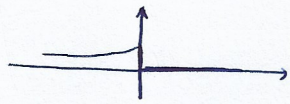
فصل دوم

تمرین سری دوم

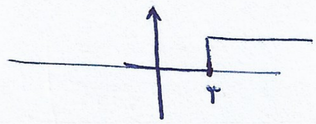
۱) با استفاده از کانولوشن پاسخ $y(t)$ را به ازای هر $x(t)$ و $h(t)$ داده شده حساب کنید

a) $x(t) = e^{2t} u(-t) \qquad h(t) = u(t-3)$

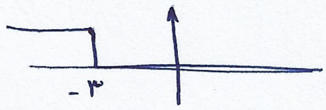


$x(\tau)$

$y(t) = x(t) * h(t)$

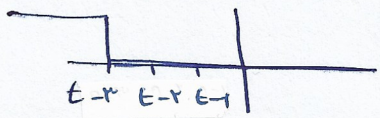


$h(\tau)$



$h(-\tau)$

$$t-3 < 0 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau =$$

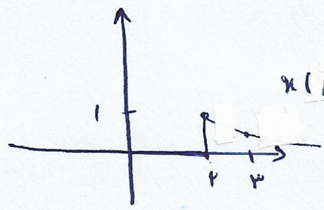


$h(t-\tau)$

$$\int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\, d\tau = \frac{e^{2\tau}}{2} \Big|_{-\infty}^{t-3} = \frac{e^{2t-6}}{2}$$

$$t-3 > 0 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] \qquad h[n] = u[n+2]$

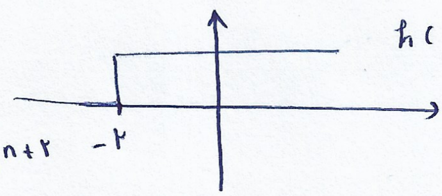


$x[k]$

$n+2 < 2 \Rightarrow x[k]\, h[n-k] = 0$

$n < 0$

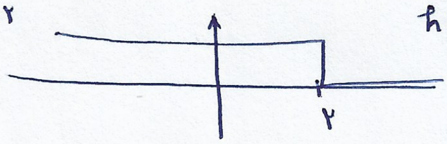
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = 0$$



$h(k)$

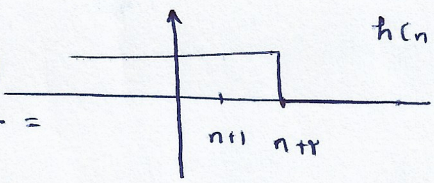
$n+2 \geq 2 \Rightarrow x[k]\, h[n-k] = \begin{cases} 0 & k < 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} & 2 \leq k \leq n+2 \\ 0 & k > n+2 \end{cases}$

$n \geq 0$



$h(-k)$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} =$$



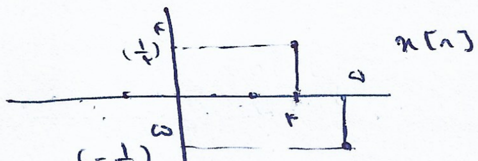
$h(n-k)$

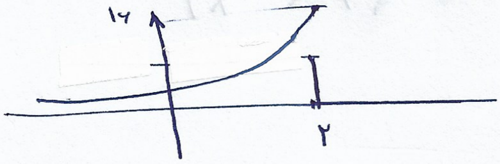
$k' = k-2$

$$\sum_{k'=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'} = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}{\frac{1}{2}} =$$

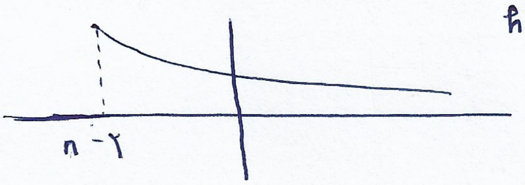
$$2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

c) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$ $\quad$ $h[n] = 4^n u[2-n]$





$h[n-k]$



$n-2 < 4 \Rightarrow n < 6$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k 4^{n-k} - \sum_{k=0}^{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k 4^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k 4^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^k - \sum_{k=0}^{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \times 4^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^k =$$

$$4^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k - \sum_{k=0}^{3} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \right) = 4^n \left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} - \left(-\frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{64} - \frac{1}{512}\right)\right)$$

$$4^n \left(\frac{8}{9} - \frac{455}{512} \right) = (0.217 \times 10^{-3}) \times 4^n$$

$k > n-2 \Rightarrow$

$n-2 > 4$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k u[k-4]\, 4^{n-k}\, u[2-n+k]$$

$$= 4^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k 4^{-k}\, u[k-4]\, u[2-n+k] =$$

$$= 4^n \sum_{k=4}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} u[2-n+k] = 4^n \sum_{k=4}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k u[2-n+k]$$

$$= 4^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \right) = 4^n \left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} - \frac{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^n}{1+\frac{1}{8}} \right) =$$

$$= 4^{n}\left(\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n}$$

۴) در مورد علیت، پایداری و حافظه دار بودن سیستم های LTI با پاسخ ضربه های زیر بحث کنید.

a) $h[n] = ۵^n u[۳-n]$

یعنی سیستم به ازای مقادیر کمتر از صفر، صفر باشد $h[n]\big|_{n<۰} = ۰$ شرط علی بودن

برای مقادیر کمتر از صفر، صفر نیست پس علی نیست $h[-1] = ۵^{-1} u[۴] = \frac{1}{۵}$

شرط لازم و کافی برای پایداری $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ محدود باشد

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ۵^k u[۳-k] = \sum_{k=-\infty}^{۳} ۵^k = \sum_{k=-۳}^{+\infty} ۵^{-k} = \frac{۵^۳}{1-\frac{1}{۵}} < \infty$$

پس سیستم پایدار است

$h[n]\big|_{n\neq ۰} = ۰$ شرط بی حافظه بودن

سیستم به ازای $n=1$ مقدار دارد پس حافظه دار است. $h[1] = ۵^1 u[۳-1] = ۵ \neq ۰$

b) $h[n] = ۰/۸^n u[n+۲]$

به ازای مقادیر $n=-1$ و $n=-۲$ صفر نیست $h[n]\big|_{n<۰} = ۰$ شرط علی بودن

پس سیستم غیر علی است

شرط کافی پایداری $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| (۰/۸)^n u[n+۲] \right| = \sum_{k=-۲}^{+\infty} (۰/۸)^k = \frac{(۰/۸)^{-۲}}{1-۰/۸} < \infty$$

سیستم پایدار است.

شرط بی حافظه بودن $\quad h[n]\Big|_{n\neq 0} = 0$

سیستم به ازای $n=1$ مقدار دارد پس حافظه دار است

c) $h(t) = e^{-4t}\, u(3-t)$

شرط علی بودن : سیستم به ازای مقادیر کمتر از صفر ، صفر باشد $\quad h(t)\Big|_{t<0} = 0$

$h(-1) = e^{4}\, u(4) = e^{4} \Rightarrow$ سیستم غیرعلی است

شرط پایداری $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ محدود باشد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-4t}\, u(3-t) \right| dt = \int_{-\infty}^{3} e^{-4t}\, dt = -\frac{1}{4} e^{-4t} \Big|_{-\infty}^{3} = \infty$$

درنتیجه سیستم ناپایدار است

شرط بی حافظه بودن $\quad h(t)\Big|_{t\neq 0} = 0$

$h(1) = e^{4}\, u(2) = e^{4} \Rightarrow$ سیستم حافظه دار است

d) $h(t) = t\, e^{-t}\, u(t)$

شرط علی بودن سیستم به ازای مقادیر کمتر از صفر ، صفر باشد

$h(t)\Big|_{t<0} = 0 \qquad h(t<0) = t\, e^{-t}\, \underbrace{u(t<0)}_{0} = 0$

سیستم علی است

شرط پایداری $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ محدود باشد

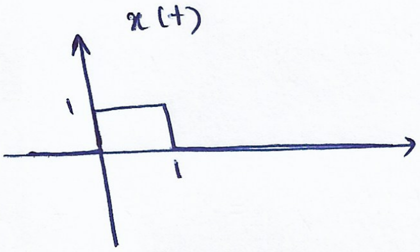
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| t\, e^{-t}\, u(t) \right| dt = \int_{0}^{+\infty} \left| t\, e^{-t} \right| dt = t\, e^{-t} - e^{-t} \Big|_{0}^{\infty} =$$

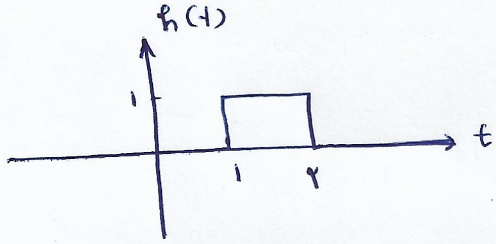
$0 - (-1) = 1 < \infty$ سیستم پایدار است

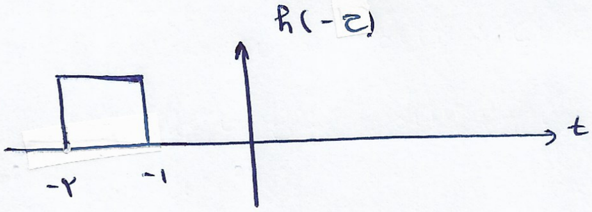
شرط بی حافظه بودن $\quad h(t)\Big|_{t\neq 0} = 0$

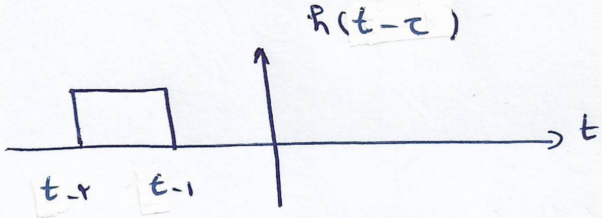
$h(1) = e^{1} \Rightarrow$ سیستم حافظه دار است

۳) حاصل کانولوشن دو سیگنال زیر را به دست آورید.









$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$t-1 < 0 \qquad y(t) = 0$

$t-1 > 0 \;\&\; t-2 < 0 \Rightarrow 1 < t < 2 \qquad y(t) = \int_{0}^{t-1} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$

$\int_{0}^{t-1} 1 \, d\tau = t-1$

$t-2 > 0 \;\&\; t-2 < 1 \Rightarrow 2 < t < 3 \qquad y(t) = \int_{t-2}^{1} 1 \, d\tau = -t+3$

$t-2 > 1 \Rightarrow y(t) = 0$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t-1 & 1 < t < 2 \\ -t+3 & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

۴) نشان دهید سیستم های معرفی شده معکوس یکدیگرند.

a) $h_1(t) = \delta(t) + \delta'(t) \qquad h_2(t) = e^{-t}u(t)$

اگر دو سیستم معکوس هم باشند حاصل کانولوشن آن ها برابر $\delta(t)$ خواهد بود

$$y(t) = h_1(t) * h_2(t) = \big(\delta(t) + \delta'(t)\big)\big(e^{-t}u(t)\big) = \delta(t) * e^{-t}u(t) + \delta'(t) * e^{-t}u(t) =$$

کانولوشن هر تابع با $\delta(t)$ خودش می‌شود

کانولوشن هر تابع با $\delta'(t)$ مشتق آن می‌شود.

$$y(t) = e^{-t}u(t) + \big(-e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t)\big) = e^{-t}\Big|_{t=0}\delta(t) = \delta(t)$$

$h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$ پس دو سیستم معکوس یکدیگرند

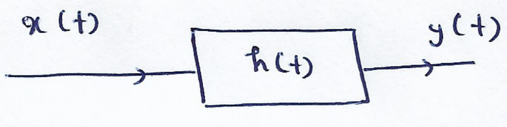
b) $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \qquad h_2[n] = u[n]$

$$y[n] = h_1[n] * h_2[n] = \big(\delta[n] - \delta[n-1]\big) * u[n] =$$

$$\big(\delta[n] * u[n]\big) - \big(\delta[n-1] * u[n]\big) = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$ پس دو سیستم معکوس یکدیگرند

۵) برای سیستم LTI با $h(t) = 4e^{4t}$ پاسخ به ورودی $x(t) = u(t)$ را بدست آورید.



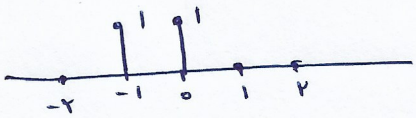
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\,4e^{4\tau}\,d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{t} 4e^{4\tau}\,d\tau = 4 \times \frac{1}{4} e^{4\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = e^{4t} - e^{-\infty} = e^{4t}$$

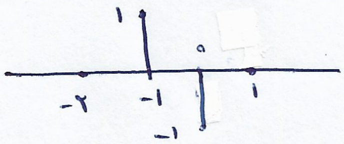
۶) دو سیستم LTI با پاسخ ضربه‌های $h_2[n]$ و $h_1[n]$ به صورت سری متصل شده‌اند.
$h_2[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$ و پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = u[n+1] - u[n-1]$ مطابق
شکل زیر است. $h_1[n]$ را بدست آورید.

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] = h_1[n] * (x[n] * h_2[n])$$

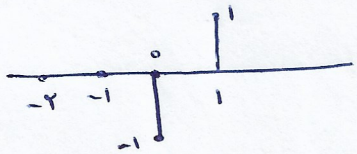
$x[n] * h_2[n]$



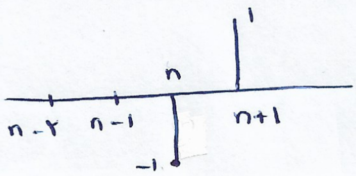
$x[n]$



$h[n]$



$h[-k]$



$h[n-k]$

$n+1 < -1 \qquad y[n] = 0$

$n+1 = -1 \qquad y[n] = 1$

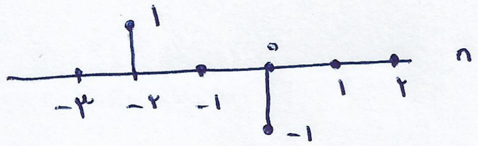
$n+1 = 0 \qquad y[n] = -1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$

$n+1 = 1 \qquad y[n] = (-1 \times 1) + (0 \times 1) = -1$

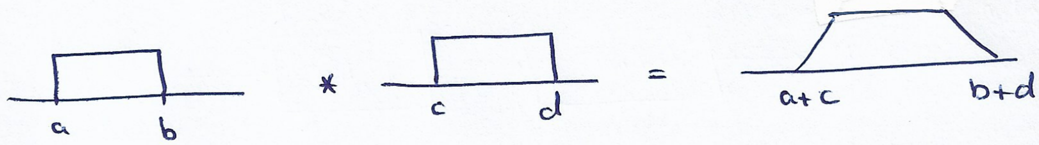
$n+1 = 2 \qquad y[n] = (-1 \times 0) + (1 \times 0) = 0$

$n+1 > 2 \qquad y[n] = 0$

$x[n] * h_2[n] =$



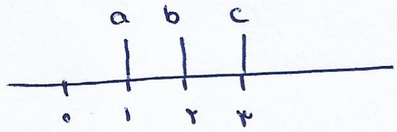
مرزهای شروع و پایان تابع خروجی حاصل جمع مرزهای اول و آخر دو تابع x و h اند یعنی



اکنون با داشتن $x[n] * h_2[n]$ ، دنبال دنباله‌ی $h_1[n]$ هستیم طوری که

$$y[n] = h_1[n] * (x[n] * h_2[n])$$

همان طور که از تابع $y[n]$ داریم شروع آن از $n=-1$ و پایان آن $n=3$ است و شروع $x * h_2$ از $n=-2$ و پایان آن $n=0$ است در نتیجه شروع $h_1[n]$ از $n=1$ و پایان آن $n=3$ است یعنی $h_1[n]$ به صورت زیر است



و ما به دنبال مقادیر مجهول a و b و c هستیم

$$h_1[n] * (h_2[n] * x[n]) = h_1[n] * (\delta[n+2] - \delta[n]) =$$

$$\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3] \Rightarrow$$

$$(a\delta[n-1] + b\delta[n-2] + c\delta[n-3]) * (\delta[n+2] - \delta[n]) =$$

$$\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3] \Rightarrow$$

$$a\delta[n-1] * \delta[n+2] + b\delta[n-2] * \delta[n+2] + c\delta[n-3] * \delta[n+2]$$

$$- a\delta[n-1] * \delta[n] - b\delta[n-2] * \delta[n] - c\delta[n-3] * \delta[n] =$$

$$a\delta[n+1] + b\delta[n] + c\delta[n-1] - a\delta[n-1] - b\delta[n-2] - c\delta[n-3]$$

$$= \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

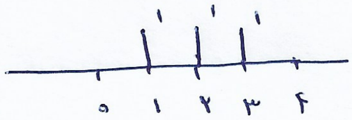
$a = 1$

$c - a = 0 \Rightarrow c = 1$

$b=1$ است یا $b=2$

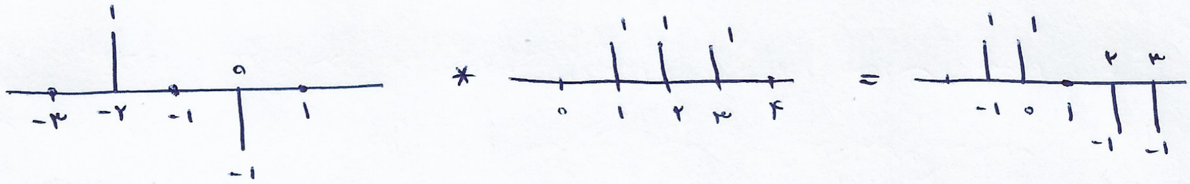
حال با امتحان کردن درمی یابیم که آیا b=1 است یا b=2

$b=1 \rightarrow h_1$



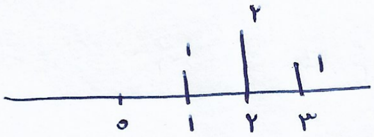
$$x*(h_1*h_2) = (x*h_1)*h_1 \overset{?}{=} y(n)$$

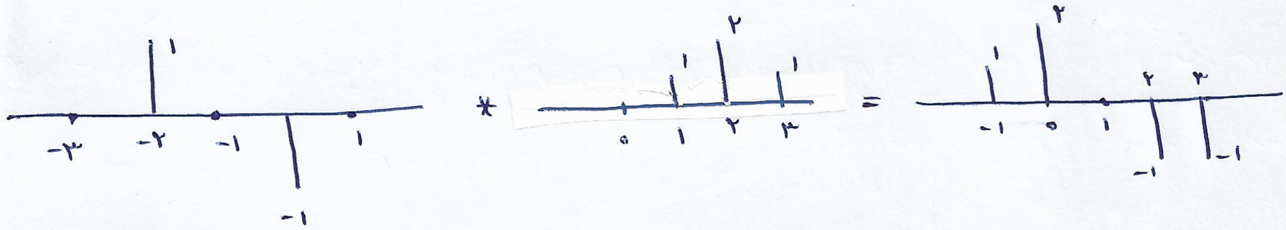
آیا



$\neq y[n]$

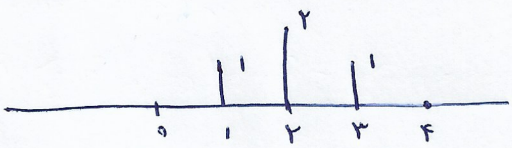
$b=2 \quad h_1$





$= y[n]$

پس b=2 است و $h_1[n]$ مطابق روبرو است



۷) با فرض برقراری سکون ابتدایی در معادله تفاضلی مرتبه اول زیر پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی - خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید.

$$y[n] + ۲\, y[n-1] = x[n]$$

پاسخ ضربه : $x[n] = \delta[n]$

سکون ابتدایی : اگر $x[n]=0$ برای $n<n_0$ $\Rightarrow$ $y[n]=0$ برای $n<n_0$

برای $n=0$ $\qquad y[n] = y[0] = \delta[0] - ۲\, y[-1]$

ورودی $\delta[n]$ برای $n<0$ صفر است پس $y[n]$ برای $n<0$ ، صفر است

$$y[0] = \delta[0] - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y[0] = 1$$

$n=1$ $\qquad y[1] + ۲\, y[0] = \delta[1]$

$$y[1] + ۲ \times 1 = 0 \qquad y[1] = -۲$$

$n=۲$ $\qquad y[۲] + ۲\, y[1] = \delta[۲]$

$$y[۲] - ۴ = 0 \qquad y[۲] = ۴$$

$n=۳$ $\qquad y[۳] + ۲\, y[۲] = \delta[۳]$

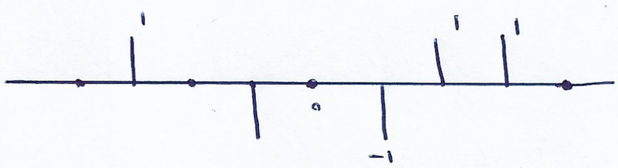
$$y[۳] + ۲ \times ۴ = 0 \qquad y[۳] = -۸$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = (-۲)^n\, u[n]$$

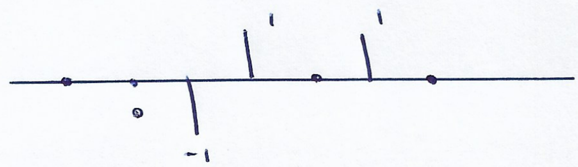
$$h[n] = (-۲)^n\, u[n]$$

۸) کانولوشن دو سیگنال زیر را محاسبه کنید.

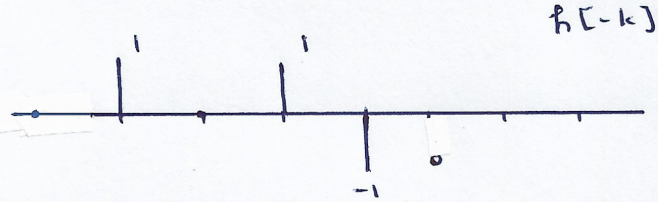
$x[n]$



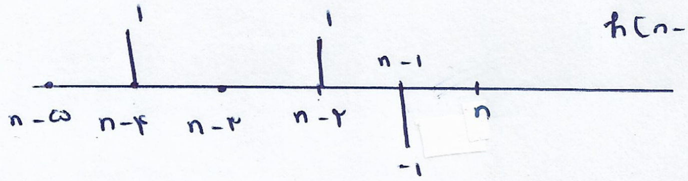
$h[k]$



$h[-k]$



$h[n-k]$



$n-1=-۳ \Rightarrow n=-۲ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = -1$

$n-1=-۲ \Rightarrow n=-1 \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = 1$

$n-1=-1 \Rightarrow n=۰ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = 1$

$n-1=۰ \Rightarrow n=1 \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = 1-1=۰$

$n-1=1 \Rightarrow n=۲ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = 1$

$n-1=۲ \Rightarrow n=۳ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = (-1\times 1)+(1\times -1)+(1\times -1) = -۳$

$n-1=۳ \Rightarrow n=۴ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = -1+1=۰$

$n-1=۴ \Rightarrow n=۵ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = 1-1=۰$

$n-1=۵ \Rightarrow n=۶ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = 1$

$n-1=۶ \Rightarrow n=۷ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = 1$

$n-1=۷ \Rightarrow n=۸ \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = ۰$

$x[n] * h[n] =$