Subject: یاسمن سادات میرمجید
۹۴۳۱۶۲۲
Year. Month. Date.

Ex 1

تمرین سری اول درس سیگنالها و سیستم‌ها

(1

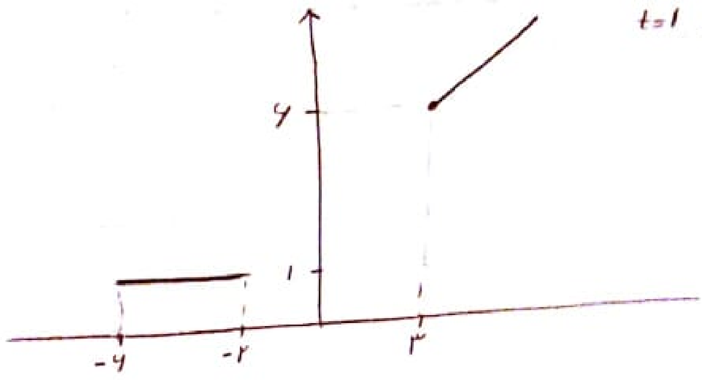
a. $x(t) = u(t+6) - u(t+2) + \delta(t) + 2t\,u(t-3)$

سیگنال پیوسته

$t=0 \quad x(t) = u(6) - u(2) + \delta(0) + 0$

$t=1 : \ x(t) = u(7) - u(3) + \delta(1) + 2u(-2)$

$t=0$

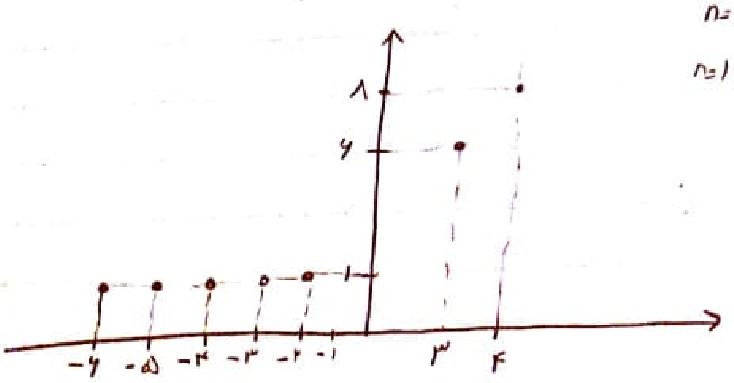


b. $x[n] = u[n+6] - u[n+2] + \delta[n] + 2n\,u[n-3]$

سیگنال گسسته

$n=0 : \ x[n] = u[6] - u[2] + \delta[0] + 0$

$n=1 : \ x[n] = u[7] - u[3] + \delta[1] + 2u[-2]$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹۴۳/۰۲۲

۲) انرژی سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

a. $y(t) = u(9-t^2)\sin(t)$ $\qquad 9-t^2 \geq 0 \longrightarrow -3 \leq t \leq 3$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} u(9-t^2)\sin^2(t)\,dt = 0 + \int_{-3}^{+3} \sin^2(t)\,dt = \int_{-3}^{+3} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2}\Big|_{-3}^{3} - \frac{\sin 2t}{4}\Big|_{-3}^{3}$$

$$= 3 - \frac{\sin 6}{4} + \frac{\sin 6}{4}$$

$$= 3$$

b. $y[n] = u[9-n^2]\sin[n]$ $\qquad 9-n^2 \geq 0 \longrightarrow -3 \leq n \leq 3$

$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} u[9-n^2]\sin^2[n] = \sum_{-3}^{+3} \sin^2[n] = \sin^2(-3) + \sin^2(-2) + \sin^2(-1) + 0 + \sin^2(1) + \sin^2(2) + \sin^2(3)$$

$$E_\infty = 2\sin^2(3) + 2\sin^2(2) + 2\sin^2(1)$$

عدداش تقریبی در صورتی نهایتا :

$$E = 2\times(2.714\times10^{-3}) + 2(1.21\times10^{-3}) + 0.3(3.054\times10^{-3})$$

$$E = (5.426 + 2.42 + 0.6)\times10^{-3}$$

$$E = 8.4288\times10^{-3}$$

همچو عددی میشه تنش =))

Subject:
Year: Month: Date: ( )

۱۳) کدام یک از سیگنال‌های زیر متناوب است و دوره تناوب آن چند است؟
(و اگر متناوب نیست بگید چرا نیست: دی)

a. $x(t) = \sin\left(\frac{5\pi t}{3}\right)$

سیگنال، زمان پیوسته است، پس با اینکه کسر گویا نیست، تابع متناوب است.

متناوب $\longrightarrow \dfrac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \dfrac{6}{5}$

b. $x[n] = \sin\left(\frac{5\pi n}{3}\right)$

سیگنال، زمان گسسته است، و کسر بدست آمده گویا نیست.
پس باید مضرب صحیحی از آن را درنظر بگیریم:

متناوب $\longrightarrow \dfrac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \dfrac{6}{5}$

$T = \frac{6}{5} \times 5 = 6$

پس

c. $x(t) = \underbrace{e^{j\frac{4\pi}{7}t}} + \underbrace{e^{j\frac{\pi}{5}t}}$

سیگنال زمان پیوسته است، پس تابع متناوب است.

$T = \dfrac{2\pi}{\frac{4\pi}{7}} = \dfrac{7}{2}$

$T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$

باید ک.م.م دوره تناوب‌ها را بگیریم

$\dfrac{\frac{7}{2} \times 10}{1} = 35$

نشت-هم اولن: دی

D. $x[n] = \underbrace{e^{j\frac{4\pi}{7}n}} + \underbrace{e^{j\frac{\pi}{5}n}}$

$T = \dfrac{2\pi}{\frac{4\pi}{7}} = \dfrac{7}{2}$

$\boxed{T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10}$

چون سیگنال زمان گسسته است و کسر به دست آمده گویا نیست، باید مضرب صحیح آن را در نظر بگیریم

$\boxed{T_1 = 7}$

$T = T_1 * T_2$

$T = 70$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

e. $x[n] = e^{j\frac{n}{5}} + e^{j\frac{2}{9}\pi n}$

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi$ → گویاست

$T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{9}} = 9$ → گویا، چون سیگنال زمان گسسته است، پس متناوب است

$\longrightarrow T = T_1 + T_2 =$ گنگ‌اند دو، متناوب نیست

$T = 10\pi + 9$

f. $x[n] = \cos\left(\frac{3}{5}\pi n^2\right)$

$x[n+t] = x[n]$

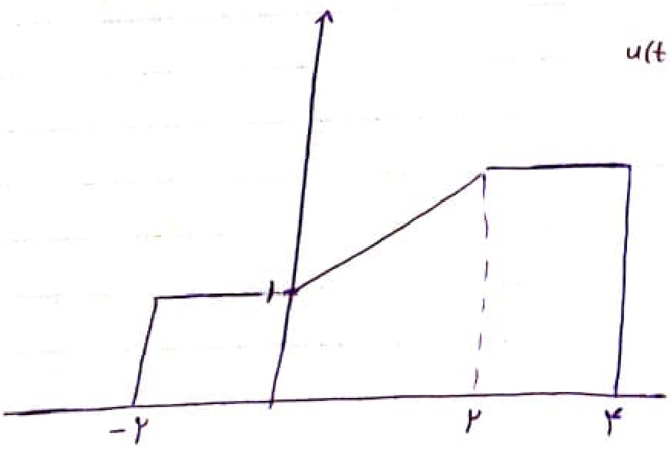
$\cos\left(\frac{3}{5}\pi(n+t)^2\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\pi n^2\right)$

$\frac{3}{5}\pi(n+t)^2 = 2k\pi \pm \frac{3}{5}\pi n^2 \longrightarrow (n+t)^2 = \dfrac{2k\pi \pm \frac{3}{5}\pi n^2}{\frac{3}{5}\pi} = \frac{10}{3}\pi \pm n^2$

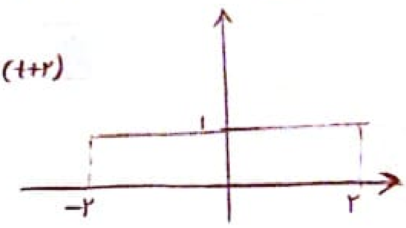
$\longrightarrow n+t = \pm\sqrt{\frac{10\pi}{3} \pm n^2} \longrightarrow t = T = \pm\sqrt{\frac{10\pi}{3} \pm n^2} - n$

(۴

الف) ضابطه سیگنال را برحسب $u(t)$ بدست آورید.

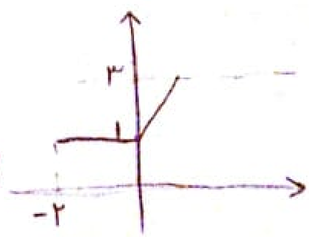


$u(t) \rightarrow u(t+2)$



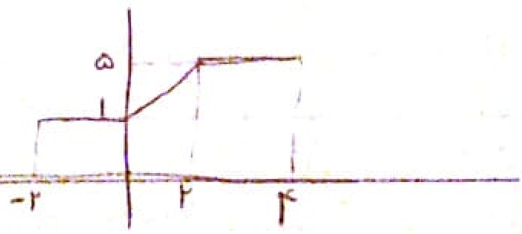
$u(t+2) + t\,u(t) - (t)u(t-2)$

$: \begin{cases} t=0: & u(2) \\ t=1: & u(3) + u(1) - u(-1) \end{cases}$



$u(t+2) + t\,u(t) - t\,u(t-2) + 2u(t-2) - 2u(t-4)$

$t=0: \quad u(2) + 2u(-2) - 2u(-4)$



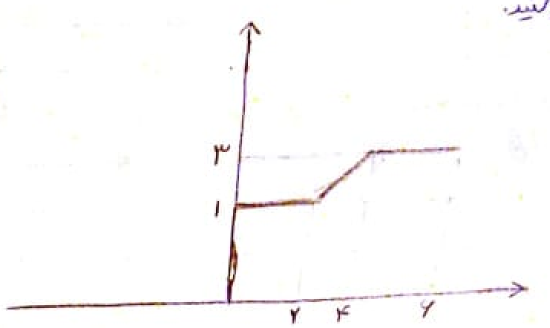
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۴)

ب) سیگنال‌های زیر را رسم کنید.

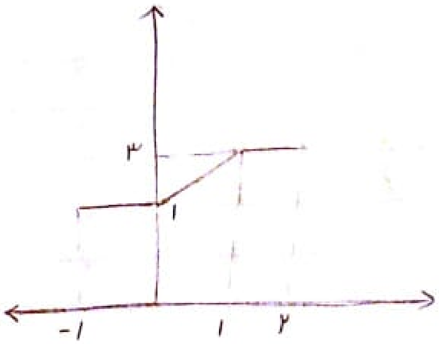
$a.\ x(t-۲)$

۲ واحد شیفت به سمت راست



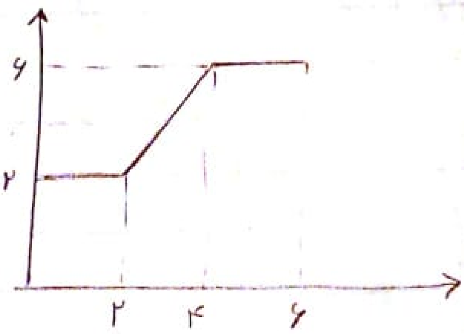
$b.\ x(۲t)$

دامنه‌ی سیگنال نصف می‌شود.



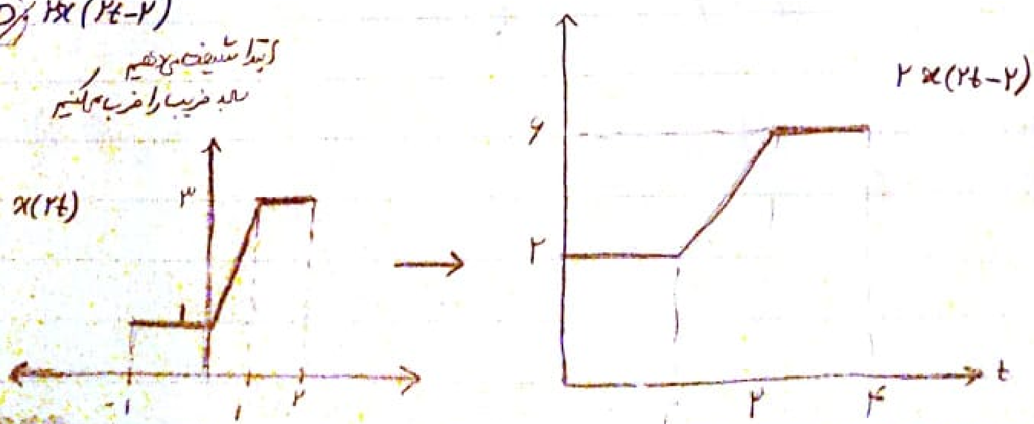
$c.\ ۲x(t-۲)$

سیگنال ۲ برابر می‌شود و همزمان



$D.\ ۲x(\overset{۲(t-۱)}{۲t-۲})$

ابتدا شیفت می‌دهیم
سپس ضریب را ضرب می‌کنیم



Subject.
Year. Month Date. ( )

۵) خطی و time-invariant بودن سیستم‌های زیر را بررسی نمایید (و دلیلش بگید :دی)

a. $y(t) = \sin(x(t))$

Ⓐ همگن بودن : خاصیت همگنی

$x_1(t) = \alpha x(t)$

$y_1(t) = \sin(\alpha x(t)) \neq \alpha y(t)$

$\downarrow$

خطی نیست!

Ⓑ نامتغیر با زمان

$x(t) \rightarrow y(t) = \sin(x(t))$

$x(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = \sin(x_1(t)) = \sin(x_1(t-t_0))$

$\longrightarrow y_1(t) = y(t-t_0) \longrightarrow$ Time invarient

b. $y(t) = ۳x(\frac{t}{۴})$

Ⓐ $x(t) \rightarrow y(t) = ۳x(\frac{t}{۴})$

$x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = ۳x_1(\frac{t}{۴})$

$y_1(t) = ۳x(\frac{t}{۴} - t_0) \neq y(t-t_0) \longrightarrow$ Time invariant نیست

Ⓑ خطی بودن

$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1(t) = ۳x_1(\frac{t}{۴}) \\ y_2(t) = ۳x_2(\frac{t}{۴}) \end{cases}$

$x_3 = x_1(t) + x_2(t)$

$y_3(t) = ۳(x_1(\frac{t}{۴}) + x_2(\frac{t}{۴}))$

$y_3(t) = y_1(t) + y_2(t) \longrightarrow$ خاصیت جمع‌پذیری دارد

همگن بودن : $x_1(t) = \alpha x(t) \longrightarrow y(t) = ۳x(\frac{t}{۴}) \longrightarrow$ همگنی دارد $\longrightarrow$ خطی

$y_1(t) = ۳x_1(\frac{t}{۴}) = ۳\alpha x(\frac{t}{۴}) = \alpha y(t)$

c. $y(t) = ۳x(\frac{t}{۴}) - 1$

Ⓐ Time invarient

$x(t) \rightarrow y(t) = ۳x(\frac{t}{۴}) - 1$

$x_1(t) \rightarrow x(t-t_0) \quad : \quad y_1(t)$

$: \quad y_1(t) = ۳x(\frac{t}{۴} - t_0) - 1 \neq y(t-t_0) \longrightarrow$ Time invariant نیست

Ⓑ همگن بودن

$x_1(t) = \alpha x(t) \longrightarrow y_1(t)$

$y_1(t) = \alpha ۳x(\frac{t}{۴}) - 1 \neq \alpha y(t)$

همگن نیست

Ⓐ و Ⓑ $\Leftarrow$ خطی نیست!

Subject:
Year: Month: Date: / /

d. $y(t) = \frac{d(x(t))}{dt}$

(A)

$x(t) \to y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$

$x_1(t) \to x(t-t_0) \quad ? \quad y_1(t) \to y_1(t-t_0)$

$y_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \frac{dx(t-t_0)}{dt} \longrightarrow y_1(t-t_0) = \frac{dx(t-t_0)}{dt}$ ✓ Time invariant

جمع‌پذیر بودن (B)

$x(t) \longrightarrow y_1(t) = \frac{d\,x_1(t)}{dt}$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \frac{d\,x_2(t)}{dt}$

$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = \frac{d}{dt}\left(x_1(t) + x_2(t)\right) = \underbrace{\frac{dx_1(t)}{dt}}_{y_1(t)} + \underbrace{\frac{dx_2(t)}{dt}}_{y_2(t)} = y_1(t) + y_2(t)$

خاصیت مشتق

✓ جمع‌پذیری

(C) حالا باید همگن بودن رو نشون بدیم:

input: $x_1(t) = \alpha\, x(t) \longrightarrow y_1(t)$

output: $y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \alpha \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{y(t)} = \alpha\, y(t)$

پس خاصیت همگنی هم داره

(B) و (C) ← خطی هم هست!

(A) ← LTI: ! o Time invariant

(A) $x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t)$

e. $y(t) = \begin{cases} 2x(t)+2 & t>0 \\ -4x(t)+3 & t<0 \end{cases} \longleftrightarrow y(t-t_0) = \begin{cases} 2x(t-t_0)+2 & t-t_0>0 \\ -4x(t-t_0)+3 & t-t_0<0 \end{cases}$

$y(t) \neq y(t-t_0) \longrightarrow$ ✗ Time invariant

(B) خطی بودن

$x(t) = \alpha\, x(t) \longrightarrow y(t)$

$y'(t) = \begin{cases} 2\alpha x(t)+2 & t>0 \\ -4\alpha x(t)+3 & t<0 \end{cases} \neq \alpha y(t) \xrightarrow{\times}$ پس خاصیت همگنی نداره

↓

خطی نیست!

Subject:
Year: Month: Date:

f. $y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$

Ⓐ متغیر با زمان

$x[n] \longrightarrow y[n] \longrightarrow y[n] = x[n]\,x[n-1] \longrightarrow$ Time invarient ✓

$x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0] = x[n-n_0]\,x[n-n_0-1]$

Ⓑ خطی بودن

$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1[n]\,x_1[n-1]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2[n]\,x_2[n-1]$

$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow y_3[n] = x_3[n]\,x_3[n-1] = (x_1[n] + x_2[n])\,(x_1[n-1] + x_2[n-1])$

$= \underbrace{x_1[n]\,x_1[n-1] + x_1[n]\,x_2[n-1] + x_2[n]\,x_1[n-1] + x_2[n]\,x_2[n-1]}_{\neq\; y_1[n] + y_2[n]}$

جمع پذیری ×

خطی نیست ×

g. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

Ⓐ Time invarient ×

$x[n] = x[n-n_0] \longrightarrow y[n]$

$x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$

بازه ی اشتراک گیری اش عوض شده

Ⓑ

$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = \sum x_1[k]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = \sum x_2[k]$

$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \rightarrow \quad y[3] = \sum (x_1[k] + x_2[k]) = y_1[n] + y_2[n]$ جمع پذیری ✓

↓

خطی ✓

h. $y[n] = x[n] \cdot x[1]$

Ⓐ $y[n] = x[n]\,x[1]$

$x[n] = x[n-n_0] \rightarrow \underbrace{x[n-n_0]\,x[1]}_{y[n-n_0]}$ ✓ Time invarient

Ⓑ جمع پذیری

$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1[n]\,x_1[1]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2[n]\,x_2[1]$

$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow y_3[n] = \underline{x_3[n]}\;\underline{x_3[1]}$

$(x_1[n] + x_2[n])\,(x_1[1] + x_2[1]) \neq y_1[n] + y_2[n]$

↓

خطی نیست! ⟵ جمع پذیری ×

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۶) کدامیک از سیستم‌های زیر علّی است؟

* تعریف سیستم علّی:

رفتار سیستم در هر لحظه t، به ورودی فعلی و قبلی سیستم بستگی داشته باشند.

a. $y(t) = 4x(t+5)$ $\rightarrow$ غیرعلّی

در هر لحظه، رفتار سیستم به زمان‌های بعد از t_0 بستگی دارد.

(همیشه ۵ واحد جلوتر را در نظر می‌گیرد)

b. $y(t) = x(t)\,x(3-t) \rightarrow x(t)\,x(t+1) \longrightarrow$ غیرعلّی

پس به زمانی بعد از t_0 وابسته است

$t=0 \rightarrow y(0) = x(0)\,x(3)$

$t=1 \rightarrow y(1) = x(1)\,x(2) =$

$t_0 = 1$ $\quad t_0+1 = 1+1 = 2$

c. $y[n] = x[-|n|]$ $\qquad -|t_0| \leq t_0$

$-|t_0| \rightarrow$ به خود t_0 بستگی دارد $\rightarrow$ علّی

(در بدترین حالت به زمان‌های قبل از t_0 بستگی دارد)

۷) کدامیک از سیستم‌های زیر پایدار است؟

a. $y(t) = 4x(t) + 5 \rightarrow$ پایدار

$-m < x(t) < m \longrightarrow -4m < 4x(t) < 4m \rightarrow -4m+5 < \underbrace{4x(t)+5}_{y(t)} < 4m+5$

$\rightarrow -4m+5 < y(t) < 4m+5$ ✓

پس چون $y(t)$، در یک بازه‌ی محدود است، در نتیجه، سیستم پایدار است.

Subject:
Year. Month. Date.

(b.) $y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$ $\quad x(t)=2t^2 \rightarrow y(t)=4t$ $\rightarrow$ پایدار

مشتق محدوده نداره

$t \to 0$

$t \to 0^+ \rightarrow 0^+$ $\rightarrow$ Bounded

$t \to 0^- \rightarrow 0^-$

C. $y(t) = \frac{\sin(x(t))}{x(t)} \rightarrow$ پایدار

یک تابع محدود : $\sin(x(t)) \rightarrow$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

if $x(t) \to 0$ (میل می‌کند) $\longrightarrow$ $\sin(x(t)) \to 0$ (میل می‌کند) $\longrightarrow$ Hop $\Rightarrow$ $\lim_{x(t)\to 0} \frac{\sin(x(t))}{x(t)} = \lim_{x'(t)\to 0} \frac{x'(t)\cos(x(t))}{x'(t)} = 1$

پس جواب در این بازه، محدود است، پایدار است.

D. $y[n] = (n-1)x[n] \longrightarrow$ ناپایدار

$-m < x[n] < m$

محدود

$y[n] = \underbrace{(n-1)}_{\infty}\ \underbrace{x[n]}_{\text{محدود}} = \infty$ $\longrightarrow$ پس کل عبارت نامحدود است $\longrightarrow$ سیستم ناپایدار است

$\infty \downarrow$ نامحدود

$(n \to \infty)$

Subject:
Year. Month. Date. / /

۸) معکوس‌پذیری :

a. $y(t) = 2x(\frac{t}{2}) \rightarrow$ معکوس‌پذیر

← برای معکوس‌پذیر بودن باید یک به یک باشد.
یعنی به ازای خروجی‌های متمایز، ورودی‌های متمایز داشته باشیم.

$y_0(t_1) = y(t_2) \longrightarrow 2x(\frac{t_1}{2}) = 2x(\frac{t_2}{2}) \longrightarrow x(\frac{t_1}{2}) = x(\frac{t_2}{2}) \longrightarrow t_1 = t_2$ ✓

معکوس‌پذیر است

b. $y[n] = |x[n]| \rightarrow$ معکوس‌ناپذیر

$x[n] = 5 \longrightarrow |x[n]| = 5$

$x[n] = -5 \longrightarrow |x[n]| = 5$

$\longrightarrow$ مثال نقض! دو ورودی متفاوت، خروجی یکسان می‌دن $\longrightarrow$ یک به یک نیست $\longrightarrow$ معکوس‌پذیر نیست

c. $y[n] = \begin{cases} x[n-2] & n > 10 \\ 3x[n+8] & n < 1 \\ 0 & 1 \leq n \leq 10 \end{cases} \longrightarrow$ معکوس‌ناپذیر

$n > 10 \qquad y[n_1] = y[n_2] \Rightarrow x[n_1 - 2] = x[n_2 - 2] \Rightarrow n_1 - 2 = n_2 - 2 \Rightarrow n_1 = n_2$ ✓

$n < 1 \qquad y[n_1] = y[n_2] \Rightarrow 3x[n_1 + 8] = 3x[n_2 + 8] \Rightarrow n_1 + 8 = n_2 + 8 \Rightarrow n_1 = n_2$

$1 \leq n \leq 10 \qquad y[n_1] = y[n_2] = 0 \rightarrow$ به ازای همه‌ی ورودی‌ها همین خروجی رو می‌ده $\rightarrow$ یک به یک نیست

پس در کل تابع یک به یک نیست و معکوس‌پذیر نیست.

Subject: Month. Date

Year

۱۹) فرکانس کدوم سیگنال بیشتره ؟ = ۱۱

a.
$$\begin{cases} x_1(t) = e^{j\frac{5\pi}{4}t} & \checkmark \\ x_2(t) = e^{j\frac{3\pi}{4}t} \end{cases}$$

• سیگنال زمان پیوسته است

↓

پس هر چقدر w ↑ ، فرکانس بالاتر می‌رود.

$$w_1 = \frac{5\pi}{4} \qquad w_2 = \frac{3\pi}{4} \longrightarrow w_1 > w_2$$

فرکانس w_1 بیشتر است

b.
$$\begin{cases} x_1[n] = e^{j\frac{5\pi}{4}n} & \checkmark \\ x_2[n] = e^{j\frac{3\pi}{4}n} & \checkmark \end{cases}$$

• سیگنال زمان گسسته است

↓

فرکانس‌هایی که حول مضارب فرد π هستند، بزرگترند

$$\underbrace{\left|\frac{5\pi}{4} - \pi\right|}_{+\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\left|\frac{3\pi}{4} - \pi\right|}_{+\frac{\pi}{4}} \longrightarrow w_1 = w_2$$

فرکانس هر دو برابر است

یاسمن سادات میرمحمد

۹۴۳۳۱۰۲۲

Scanned by CamScanner