Subject — یاسمن سادات میرمجید — تمرین سری سوم سیگنال‌ها و سیستم‌ها
Date — ۹۴۳۱۰۳۲

۱) سری فوریه

a. $x(t) = e^{-jt}$ $\longrightarrow$ سیگنال متناوب $\longrightarrow$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-jt} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-jt(1+k\omega_0)}\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-j(1+k\omega_0)} \cdot e^{-jt(1+k\omega_0)}\Big|_0^{2\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{-2\pi j(1+k\omega_0)}\left(e^{-2\pi j(1+k\omega_0)} - 1\right)$$

$\xrightarrow{\omega_0 = 1}$ $a_k = \frac{1}{-2\pi j(1+k)}\left(e^{-2\pi j(1+k)} - 1\right)$ $\longrightarrow$ شرط مهم: $k+1 \neq 0$, $k \neq -1$

$\xrightarrow{\frac{1}{j} = -j}$ $\boxed{a_k = \frac{j}{2\pi(1+k)}\left(e^{-2\pi j(1+k)} - 1\right)}$

نکته

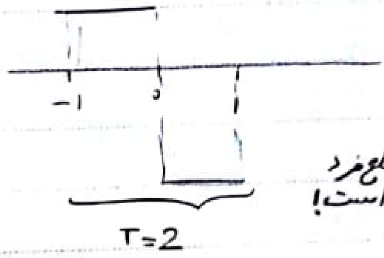
می‌دانیم $e^{j2\pi(0)} = 1$ $\longrightarrow$ $1+k=0$ $\rightarrow$ $k=-1$ $\longrightarrow$ حد a_k به ازای این مقدار به سمت ۱ میل می‌کند...

$$a_k: \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 1 & k = -1 \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

$$b = x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 0 \\ -1 & 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad T=2$$



تابع فرد است!

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_K = \frac{1}{2}\int_{0\ -1}^{2\ 1} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt \longrightarrow$$ بازه‌ی 0 تا 2 مناسب انتگرال‌گیری نیست، باید از 1- تا 1 باشند

$$a_K = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int_{-1}^{0} (+1)\cdot e^{-jK\pi t}}_{-\frac{1}{jK\pi}(1-e^{jK\pi})} + \underbrace{\int_{0}^{1} (-1)\cdot e^{-jK\pi t}}_{+\frac{1}{jK\pi}(e^{-jK\pi}-1)}\Big]$$

$$a_K = \frac{-1}{2\pi jK}\left(1 - e^{jK\pi}\right) + \frac{1}{2\pi jK}\cdot\left(-1 + e^{-jK\pi}\right)$$

$$a_K = \frac{e^{jK\pi} + e^{-jK\pi}}{2\pi jK} - \frac{1}{2\pi jK} - \frac{1}{2\pi jK}$$

$$a_K = \frac{e^{jK\pi} + e^{-jK\pi}}{2\pi jK} - \frac{1}{\pi jK} = \frac{\cos K\pi - 1 ?}{2\pi jK} : \begin{cases} 0 & K \text{ is even} \\ -\frac{1}{\pi jK} & K \text{ is odd} \end{cases}$$

Subject
Date

c. $x(t) = 2 + \sin w_0t + 4\cos w_0t + \cos(2w_0t + \frac{\pi}{4})$

$$x(t) = 2 + \frac{e^{jw_0t} - e^{-jw_0t}}{2j} + \frac{4(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t})}{2} + \frac{(e^{2jw_0t} + e^{-2jw_0t}) \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}$$

$$x(t) = 2 - 2je^{jw_0t} + 2j \cdot e^{-jw_0t} + 2 \cdot e^{jw_0t} + 2 \cdot e^{-jw_0t} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}(e^{2jw_0t} + e^{-2jw_0t})}{2}$$

$$x(t) = \underbrace{2}_{a_0} + \underbrace{(2-2j)}_{a_1} \cdot e^{jw_0t} + \underbrace{(2j+2)}_{a_{-1}} \cdot e^{-jw_0t} + \underbrace{\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}}_{a_2, a_{-2}}(e^{2jw_0t} + e^{-2jw_0t})$$

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{-1} = 2-2j \\ a_1 = 2+2j \\ a_2 = \dfrac{e^{+j\frac{\pi}{4}}}{2} \\ a_{-2} = \dfrac{e^{+j\frac{\pi}{4}}}{2} \end{cases}$$

Subject

Date

2. $x(t)$ متناوب

a_K : ضرائب سری فوریه

T : دوره تناوب

$$\int_{T}^{2T} x(t)\,dt = 2$$

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow a_K \\ x_1(t) \longrightarrow b_K \end{cases} \quad ; \quad x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

اثبات : $x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow x(t) = \sum a_K \cdot e^{jK\omega_0 t} \longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum \underbrace{a_K \cdot jK\omega_0}_{b_K} \cdot e^{jK\omega_0 t}$

م* $\longrightarrow \boxed{b_K = jK\omega_0 a_K}$

$$K \neq 0 \rightarrow a_K = \frac{b_K}{jK\omega_0} \quad \text{I}$$

$$K = 0 \rightarrow a_K = \frac{1}{T}\int_T^{2T} x(t)\,dt = \frac{1}{T}(2) = \frac{2}{T} \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow[\text{II}]{\text{I}} a_K = \begin{cases} \dfrac{b_K}{jK(\frac{2n}{T})} & K \neq 0 \\ \dfrac{2}{T} & K = 0 \end{cases}$$

Subject

Date

.3 $x(t) = ?$

. $x(t) \rightarrow$ حقیقی

$T = 6$

$k = 0$ و $|k| > 2 \rightarrow a_k = 0$

$k = 1 \rightarrow a_k$ حقیقی و مثبت

. $x(t) = -x(t-3)$

. $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2(t)\, dt = \frac{6}{\pi}$

① . $T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} = 6 \rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{3}$ *

② . $x(t) = -x(t-3) \xrightarrow{*} \underbrace{x(t) = -x(t - \frac{T}{2})}$

انتظار فقط هارمونیک‌های فرد را نگه داشته است.

ω_0 و $3\omega_0$ و $5\omega_0$ و ...

③ . $|k| > 2$ و $k = 0 \rightarrow a_k = 0$ و $\begin{cases} k = -1 \rightarrow a_{-1} \\ k = 1 \rightarrow a_1 \end{cases} \rightarrow$ فقط دو جمله دارد

④ . $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2(t)\,dt = \frac{6}{\pi} \longrightarrow$ تعریف ضریب سری فوریه رو می‌نویسیم $\longrightarrow \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2(t)\,dt}_{\frac{6}{\pi}} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{\pi}$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}}$$

فقط به ازای a_{-1} و a_1 معتبر است $\longrightarrow$ مجموع ضرایب سری فوریه $= \frac{1}{\pi} \longrightarrow |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 = \frac{1}{\pi} \longrightarrow 2|a_k|^2 = \frac{1}{\pi}$

$$\longrightarrow a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{j\omega_0 t k} \quad (\omega_0 = \frac{\pi}{3})$$

$$x(t) = a_1 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}t} + a_{-1} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}t} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}t}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \cos(\frac{\pi}{3}t)$$

Subject
Date

۴. $x(t)$ یک سیگنال متناوب ⟵ $$a_k = \begin{cases} 2 & k=0 \\ (\frac{1}{2})^{|k|} & o.th \end{cases}$$

$a_k = ?$

A. $x(t)$ حقیقی است؟

B. $x(t)$ زوج است؟

C. $\frac{dx(t)}{dt}$ زوج است؟

(A) در معرفی حقیقی است که بخش موهومی آن صفر شود.

$$T = x+jy$$
$$T^* = x-jy \longrightarrow y=0 \longrightarrow T=T^*$$

یعنی conjucate عدد با خودش برابر شود.

پس خواهیم داشت: (شرط لازم: $(x(t)=x^*(t))$

می‌دانیم $\begin{cases} x(t) \longrightarrow a_k \\ x^*(t) \longrightarrow a_{-k} \end{cases} \xrightarrow[\text{تساوی}]{\text{شرط}} a_k = (a_{-k})^* \longrightarrow \begin{cases} a_k = \frac{1}{2}^{|k|} \\ a_{-k}^* = \frac{1}{2}^{|-k|} = \frac{1}{2}^{|k|} \end{cases}$

$$\longrightarrow \begin{cases} Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} = \frac{1}{2}^{|k|} \\ Im\{a_k\} = Im\{a_{-k}\} = 0 \end{cases} \longrightarrow a_k = a_{-k}^* \xrightarrow{\text{نتیجه}}$$ سیگنال $x(t)$ حقیقی است

(B) شرط زوج بودن: (1) $a_k = a_{-k}$ (ضرایب سری فوریه ی پالس‌های متقارن، برابر باشند)

(2) $x(t)$ حقیقی باشد (شرط قسمت قبلی سوال) ⟵ $a_k = a_{-k}^*$

(1) $Real\{a_k\} =$
$Im\{a_k\} = 0$

$\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $x(t)$ زوج است!

(2) $a_k = \frac{1}{2}^{|k|} = \frac{1}{2}^{|-k|} = a_{-k}$ ⟵ نسبت به k زوج است!

PAPCO

Subject:
Date

ادامه‌ی سؤال 4

(c)

$x(t) \rightarrow a_K$

$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow b_K$

$$b_K = \begin{cases} 0 & K=0 \\ jK\omega_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{|K|} & oth \end{cases}$$

برای زوج بودن این تابع باید : $\boxed{b_K = b_{-K}}$ باشد . (شرط حقیقی بودن آن مسلم است و دیگر آن را در نظر نمی‌گیریم)

$$\begin{cases} b_{-K} = \underbrace{j(-K)\omega_0 \cdot \frac{1}{2}^{|-K|}}_{-b_K} = -b_K \\ b_K = jK\omega_0 \cdot \frac{1}{2}^{|K|} \end{cases} \longrightarrow b_K \neq b_{-K}$$

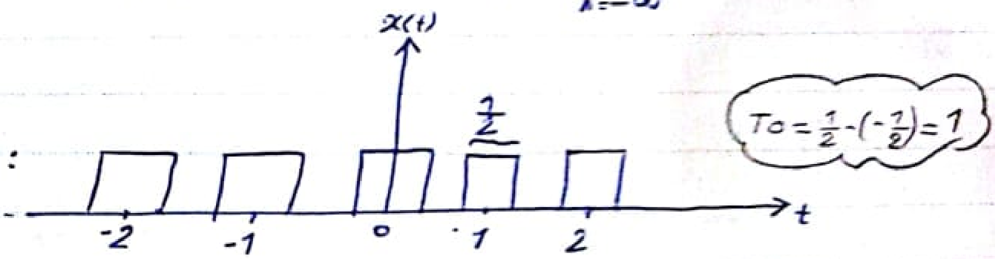
نتیجه :

مشتق تابع $x(t)$ زوج نیست !

LTI system $\longrightarrow h(t) = e^{-4|t|}$ .5

ضرایب سری فوریه‌ی خروجی : ? (برحسب [illegible]) $\qquad x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$

$x_2(t)$:



$$\left.\begin{array}{l} x(t) \to a_k \\ y(t) \to b_k \end{array}\right\} : \boxed{b_k = H(k\omega_0) \cdot a_k}$$

گام اول.

می‌دانیم $H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|t|} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

$$= \left[\int_{-\infty}^{0} e^{4t} \cdot e^{-jk\omega_0 t} + \int_{0}^{\infty} e^{-4t} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\right] dt$$

$$= \frac{1}{4-jk\omega_0} \cdot e^{(4-jk\omega_0)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-4-jk\omega_0} e^{(-4-jk\omega_0)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{4-jk\omega_0} + \frac{1}{4+jk\omega_0}$$

$$= \frac{4-jk\omega_0 + 4+jk\omega_0}{16+k^2\omega_0^2}$$

$$\boxed{H(k\omega_0) = \frac{8}{16+k^2\omega_0^2}}$$

تبدیل فوریه‌ی $h(t)$

Subject
Date

ادامه ی سئوال 5

گام دوم:

$$a_K = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\delta(t-n)}_{1}\cdot \underbrace{e^{-jk\omega_0 t}}_{1}\,dt$$

$$a_K = t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$a_K = 1$$

طبق گام اول و دوم داریم:

$$b_K = H(jK\omega_0)\cdot a_K$$

$$b_K = \frac{8}{16 + K^2\omega_0^2}\cdot(1) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$\xrightarrow[\text{خروجی}]{\text{حاصل}} \underbrace{y_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k\cdot e^{jk\omega_0 t}}_{\text{نمایش سیگنال خروجی (با نمایش سری فوریه)}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{8}{16+4\pi^2 k^2}\cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{8}{16 + k^2\cdot 4\pi^2}\cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Subject
Date

6. سیگنال متناوب x(t) ⟵ a_k, T

خواص سری فوریه سیگنال های زیر بر حسب a_K

A.

تاثیر شیفت زمانی :

$x(t) \to a_k$

$x(t-t_0) \to b_K$

$$\boxed{b_K = e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot a_K}$$

$$A.\ x(t-t_0) + x(t+t_0)$$

$$b_K' = e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot a_K \qquad b_K'' = e^{jk\omega_0 t_0} \cdot a_K$$

$$b_K = a_K \left(e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t_0}\right)$$

$$\boxed{b_K = 2a_K \cdot \cos(k\omega_0 t_0)}$$

$$B.\ \text{Even}\{x(t)\}$$

$$\text{even}\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$x(t) \to a_K$

$x(-t) \to b_K$

$$\boxed{b_K = a_{-K}}$$

$$\frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\} = \frac{1}{2}\{\underbrace{x(t)}_{a_K} + \underbrace{x(-t)}_{a_K}\}$$

$$x(t) \to a_K, \quad x(-t) \to \underbrace{a_{-K}}_{a_K}$$

$$b_K = \frac{a_K + a_{-K}}{2}$$

نکته: چون x(t) زوج است ، ضرائب سری فوریه ی آن ، نسبت به K زوج است . $a_K = a_{-K}$

و الگو متوجه مقلوب است

C. $\frac{d^2x(t)}{dt}$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow b_k$

$$\boxed{b_k = jk\omega_0 a_k}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum a_k . jk\omega_0 . e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt} = \sum \underbrace{a_k . (jk\omega_0)^2}_{b_k'} . e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{b_{k-new} = (jk\omega_0)^2 . a_k}$$

D. $x(3t-1)$

- اول شیفت (به اندازه ۱) $\longleftarrow$ $b_k' = e^{-jk\omega_0} . a_k$
- مقیاس بندی زمانی $\longleftarrow$ بجه ضرایب سری فوریه را تغییر نمی دهد

$$b_k'' = b_k' = e^{-jk\omega_0} . a_k$$

ω_0 جدید

$$b_k = e^{-jk\omega_0} . a_k \longrightarrow \boxed{b_k = e^{-jk\frac{4\pi}{T}} . a_k}$$

* سیگنال $x(3t-1)$ با دوره تناوب $T = \frac{1}{3}$ متناوب است.

$$\omega_{0\,جدید} = \frac{2\pi}{T_{جدید}} = \frac{2\pi}{\frac{T_{قدیمی}}{3}} = \frac{4\pi}{T_{قدیمی}}$$