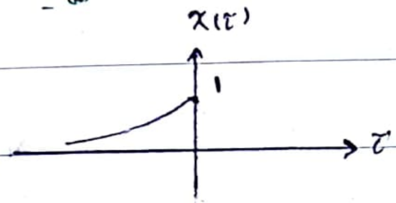
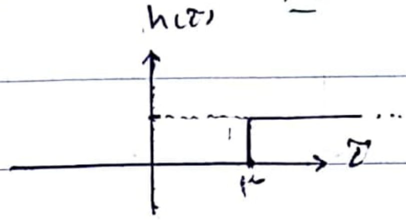
1_ a) $x(t) = e^{2t} u(-t)$, $h(t) = u(t-3)$ → همین مثال را توی کلاس حل کردیم.

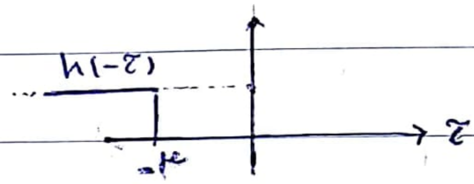
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

→ قدم اول :

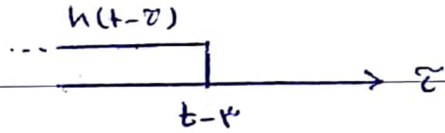




→ قدم دوم :
(رسم h(-τ))



→ قدم سوم :
(رسم h(t-τ))



→ قدم آخر :
(بررسی نواحی انتگرال)

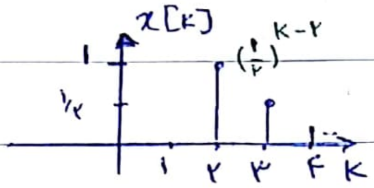
$$y(t) = \begin{cases} t-3 \geq 0 : & \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2} \\ t-3 < 0 : & \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)} \end{cases}$$

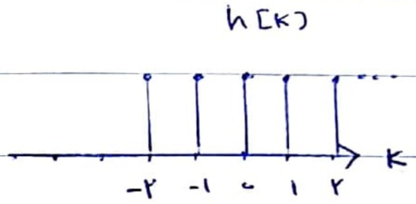
Scanned by CamScanner

$$1-b)\quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] \quad , \quad h[n] = u[n+2]$$

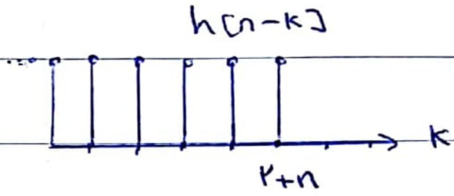
$$\hookrightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

→ قدم اول :
(رسم h, x)





→ قدم دوم رسم :



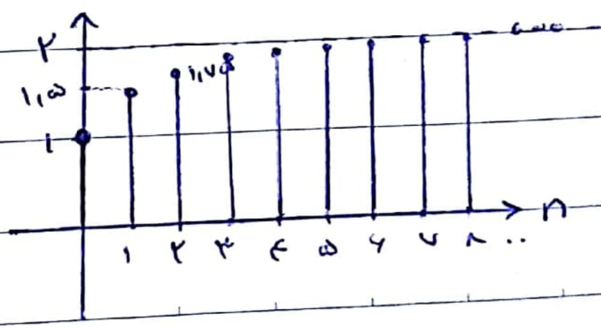
$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} n+2<2 : & 0 \\ n+2 \geq 2 : & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^{k} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

جمع دنباله‌های هندسی

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} n<0 : & 0 \\ n \geq 0 : & 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{cases}$$

└→ شکل: صرفاً برای درک بهتر.
برای جواب سوال نیاز نیست



Scanned by CamScanner

$$1-c)\quad x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4] \quad , \quad h[n] = 4^n u[n-2]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k u[k-4] \times \underbrace{4^{n-k}}_{4^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^k} u[n+2-k]$$

$$= 4^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \times u[k-4] \times u[k-(n-2)]$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} n-2 > 4: & 4^n \displaystyle\sum_{k=n-2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \\ n-2 \leq 4: & 4^n \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \end{cases}$$

برای جمع تصاعد هندسی:

$$\sum_{k=m}^{n} a r^k = \frac{a(r^m - r^{n+1})}{1-r}$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} n > 6: & 4^n \times \dfrac{\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-2} - \overbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)^{+\infty}}^{0}}{1+\frac{1}{8}} = 4^n \times \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-2} \times \frac{8}{9} \\ n \leq 6: & 4^n \times \dfrac{\left(-\frac{1}{8}\right)^{4} - \overbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)^{+\infty}}^{0}}{1+\frac{1}{8}} = 4^n \times \left(-\frac{1}{8}\right)^{4} \times \frac{8}{9} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

← به طور کلی نکاتی که برای حل این تمرین باید بدانیم: با داشتن پاسخ ضربه‌ی یک سیستم LTI، می‌توانیم خواص آن را بررسی کنیم:

۱) علیت: برای سیستم LTI علیت درصورتی برقرار است که:

گسسته: برای $n<0$ ← $h[n]=0$

پیوسته: برای $t<0$ ← $h(t)=0$

۲) پایداری: پاسخ ضربه مطلقاً جمع‌پذیر باشد

گسسته: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$

پیوسته: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$

۳) حافظه‌دار بودن: سیستم‌های LTI فقط درصورتی بی‌حافظه هستند که:

گسسته: برای $n \neq 0$: $h[n]=0 \Rightarrow h[n]=K\delta[n] \Rightarrow y[n]=Kx[n]$ که $K=h[0]$

پیوسته: برای $t \neq 0$: $h(t)=0 \Rightarrow h(t)=K\delta(t) \Rightarrow y(t)=Kx(t) \Rightarrow K=h(0)$

$2-a)$ $h[n] = 5^n u[3-n]$

علیت → for $n<0$: $h[n] \neq 0 \Rightarrow$ غیرعلی

پایداری → $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{-\infty}^{3} 5^n$ ← محدود $\Rightarrow$ پایدار

حافظه → $h[n] \neq K\delta[n]$: شرط بی‌حافظه بودن را ندارد $\Rightarrow$ حافظه‌دار

$2-b)$ $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

علیت → for $n<0$, $h[n] \neq 0 \Rightarrow$ غیرعلی

پایداری → $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{-2}^{+\infty} (0.8)^n$ ← محدود $\Rightarrow$ پایدار

$\frac{(0.8)^{-2}}{0.2}$

حافظه → مثل بالایی $\Rightarrow$ حافظه‌دار

Scanned by CamScanner

۲-c) $h(t) = e^{-4t} u(۳-t)$

علیت $\rightarrow$ for $t<0$, $h(t) \neq 0 \Rightarrow$ غیرعلی

پایداری $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{3} e^{-4t} dt \rightarrow \infty \Rightarrow$ ناپایدار

حافظه $\rightarrow h(t) \neq K\delta(t)$ شرط بی‌حافظه بودن را ندارد $\Rightarrow$ حافظه‌دار

۲-d) $h(t) = t e^{-t} u(t)$

علیت $\rightarrow$ for $t<0$: $h(t) = 0 \Rightarrow$ علی

پایداری $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{0}^{+\infty} |t e^{-t}| dt = \int_{0}^{\infty} t e^{-t} dt$

انتگرال جزء به جزء : $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$

$$= -te^{-t}\Big|_0^{\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} -e^{-t} dt}_{+e^{-t}\big|_0^{+\infty}} = e^{-t}(-1-t)\Big|_0^{\infty}$$

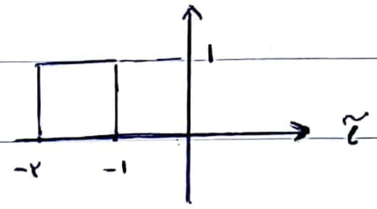
$$= \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{-1-t}{e^{t}}}_{0} - \frac{-1}{e^{0}} = +1 \Rightarrow \text{پایدار}$$

حافظه $\rightarrow$ مثل بالایی

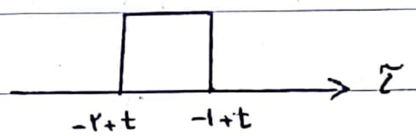
Scanned by CamScanner

۳ـ گام اول: در صورت سوال داده شده، فقط کافیه که محورها رو از t به τ تغییر بدیم.

گام دوم: $h(-\tau)$:

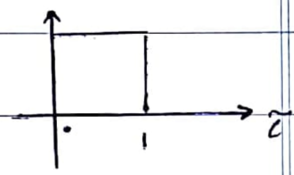


گام سوم: $h(t-\tau)$:



گام آخر: بررسی سطوح اشتراک:

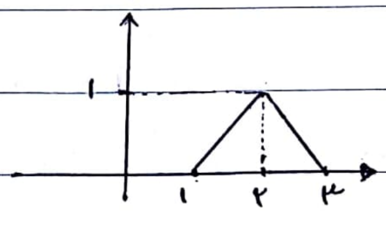
$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad , \quad x(\tau):$$



$\Rightarrow$

- $-1+t<0$ ($t<1$): 0 $\rightarrow$ اشتراکی ندارند
- $1 \le t < 2$: $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ تا حدودی دامنه مشترک دارند.
- $t = 2$: " و " کاملاً یکدیگر را می‌پوشانند
- $2 < t \le 3$: " و " تا حدودی دامنه مشترک دارند.
- $t > 3$: $\rightarrow$ اشتراکی ندارند.

جواب: $y(t)$:



Scanned by CamScanner

پاسخ ضربه ی
۴) نکته ی این سؤال اینه که اگر پاسخ ضربه ی سیستم LTI، h_1 باشه، برای اینکه h_2 سیستم معکوس سیستم اول باشه، لازمه که: $h_1 * h_2 = \delta(t)$

(← ضمناً [نکته ی تکمیلی درس تا اضافی] اگر سیستم LTI معکوس پذیر باشه، سیستم معکوس اون هم LTI هست.)

پس توی این سؤال کافیه اثبات کنیم: $h_1 * h_2 = \delta(t)$

a) $h_1(t) = \delta(t) + \delta'(t) \quad h_2(t) = e^{-t}u(t)$

$\Rightarrow h_1 * h_2 = \delta(t) * e^{-t}u(t) + \delta'(t) * e^{-t}u(t)$

[← می دونیم که ، $\delta(t) * x(t) = x(t)$]

$= e^{-t}u(t) + (e^{-t}u(t))'$

$= \cancel{e^{-t}u(t)} + (\cancel{-e^{-t}u(t)}) + e^{-t}\delta(t) = \delta(t)$ ✓ معکوس هم هستن.

$\underbrace{e^{0}}_{1} \times \delta(t)$

b) $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad h_2[n] = u[n]$

$\Rightarrow h_1 * h_2 = (\delta[n] * u[n]) - (\delta[n-1] * u[n])$

$= u[n] - u[n-1]$

$= \delta[n]$ ✓ ← معکوس هم هستن.

۵) برای حل این سؤال، ساده تره اگه به مفهوم پاسخ پله فکر کنیم: خروجی سیستم در صورتی که ورودی پله باشه. و می دونیم که پاسخ پله و پاسخ ضربه با هم رابطه دارند:

$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$

$, h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

$\Rightarrow y(t) = s(t) \; , \; h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 4e^{4t} \Rightarrow y(t) = e^{4t}$

Scanned by CamScanner

تعویض

۹). $x[n] * h_1[n] * h_2[n] = y[n]$

$$h_1 * (x[n] * h_2[n]) = h_1 * \big((u[n+1] - u[n-1]) * (\delta[n+1] - \delta[n])\big)$$

$$= h_1[n] * (u[n+2] - u[n+1] - u[n] + u[n-1])$$

$$= \underbrace{h_1[n] * \delta[n+2]}_{h_1[n+2]} - \underbrace{h_1[n] * \delta[n]}_{h_1[n]}$$

$$\Rightarrow y[n] = h_1[n+2] - h_1[n]$$

for $n \leq -2$: $0 = h_1[n+2] - h_1[n]$

$n = -1$: $1 = h_1[1] - h_1[-1]$

$n = 0$: $2 = h_1[2] - h_1[0]$

$n = 1$: $0 = h_1[3] - h_1[1]$

$n = 2$: $-1 = h_1[4] - h_1[2]$

$n = 3$: $-1 = h_1[5] - h_1[3]$

$n = 4$: $0 = h_1[6] - h_1[4]$

$n = 5$: $0 = h_1[7] - h_1[5]$ $\rightarrow$ در واقع از $n = 4$ به بعد

در n های فرد مقدار صفر، و در n های زوج $\underline{1}$

Scanned by CamScanner

$\rightarrow y[n] + 2y[n-1] = x[n]$

۷) سکون ابتدایی یعنی اگر $n<n_0 : x[n]=0$ ، داشته باشیم: $n<n_0 : y[n]=0$

و ضربه فقط در $n=0$ مقدار دارد. یعنی: $n<0 : \delta[n]=0$

پس در صورت سکون ابتدایی، باید: $n<0 : h[n]=0$

حالا در رابطه ی ورودی - خروجی سیستم جایگذاری می کنیم:

$n=0 : h[0] + 2\overbrace{h[-1]}^{\text{صفر}} = \overbrace{\delta[0]}^{\text{یک}} \Rightarrow h[0]=1$

$n=1 : h[1] + 2h[0] = \overbrace{\delta[1]}^{\text{صفر}} \Rightarrow h[1] = -2\overbrace{h[0]}^{\text{یک}} = -2$

$n=2 : h[2] + 2h[1] = \overbrace{\delta[2]}^{\text{صفر}} \Rightarrow h[2] = -2h[1] = +4\overbrace{h[0]}^{\text{یک}} = +4$

$n=3 : h[3] + 2h[2] = \overbrace{\delta[3]}^{\text{صفر}} \Rightarrow h[3] = -8\overbrace{h[0]}^{\text{یک}} = -8$

ضمناً از $n\geq 1$ به بعد، مقدار ضربه صفره $h[n]=-2h[n-1]$

میشه. پس به رابطه ی بازگشتی به دست آوردیم و با توجه

به مقادیر اولیه ای که به دست آوردیم می توانیم بنویسیم:

$$h[k] = -2h[k-1] = -2(-2h[k-2]) = \dots = (-2)^k \quad : \quad k \geq 0$$

پس در نهایت:

$$h[n] = \begin{cases} n\geq 0 : & (-2)^n = (-2)^n u[n] \\ n<0 : & 0 \end{cases}$$