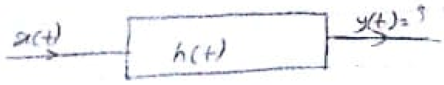
Subject یاسمن سادات میرمحمد
Date ۹۴۳۱۰۲۲

تمرین سری دوم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

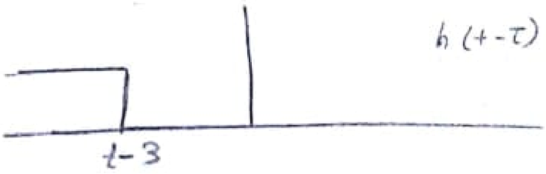
۱. پاسخ $y(t)$ را به ازای هر $x(t)$ و $h(t)$ محاسبه کنید.



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$a.\ \begin{cases} x(t) = e^{2t}.\,u(-t) \\ h(t) = u(t-3) \end{cases}$$

$$y(t) = \left[e^{2t}.\,u(-t)\right] * u(t-3)$$



$$t-3>0 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}d\tau = \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

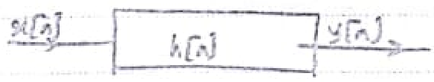
$$t-3<0 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}d\tau = \frac{1}{2}\cdot e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{t-3} = \boxed{\frac{e^{2(t-3)}}{2}}$$

Subject

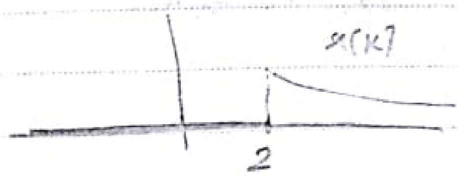
Date

b. $\begin{cases} x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot u[n-2] \\ h[n] = u[n+2] \end{cases}$



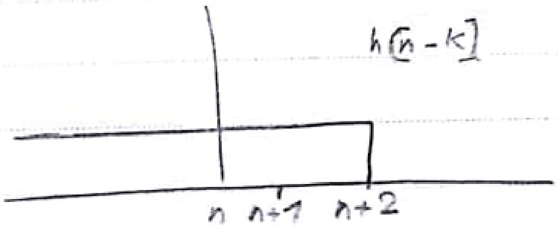
$y[n] = x[n] * h[n]$

$$y[n] = \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot u[n-2]\right] * u[n+2]$$



$$n+2 \geq 2 \longrightarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k] = 0$$

$$y[n] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2}$$



$y[n]$

$$\xrightarrow{k' = k-2} \quad y[n] = \sum_{k'=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k'}$$

$$y[n] = \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$y[n] = 2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

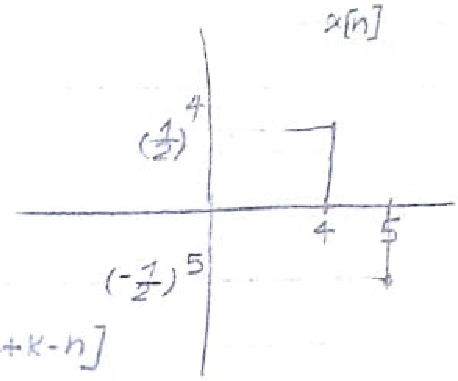
Scanned by CamScanner

Subject
Date

c. $\begin{cases} x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n-4] \\ h[n] = 4^n \cdot u[2-n] \end{cases}$

$y[n] = x[n] * h[n]$

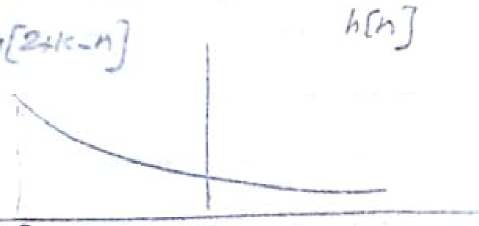
$$y[n] = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n-4]\right) * \left(4^n \cdot u[2-n]\right)$$



① $n-2>4$ → $y[n] = \sum x[k]\, h[n-k]$
$k > n-2$

$$y[n] = \sum \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot u[k-4] \cdot 4^{n-k} \cdot u[2+k-n]$$

$$y[n] = 4^n \cdot \sum_{+4}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \cdot u[2+k-n]$$



$$y[n] = 4^n \sum_{4}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \cdot u[2+k-n]$$

$$y[n] = 4^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \right)$$

$$y[n] = 4^n \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} - \frac{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^n}{1+\frac{1}{8}} \right)$$

$$y[n] = 4^n \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^n$$

② $n-2<4$ → $y[n] = \sum \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot 4^{n-k}$

$$= \sum (-1)^k \cdot 2^{-k} \cdot 2^{2(n-k)} = \sum (-1)^k \cdot 2^{2n-3k}$$

$$= \frac{2^{2(n-6)}}{1-(-2^{-3})} = \frac{2^{2(n-6)}}{1+\frac{1}{8}}$$

$$\boxed{= \frac{8}{9} \cdot 2^{2(n-6)}}$$

با پاسخ ضربه های زیر

۲. علیت، پایداری، حافظه دار بودن سیستم های LTI زیر را بررسی کنید.

$a.\ h[n] = 5^n \cdot u[3-n]$

① علیت: شرط لازم و کافی: $h[n]\big|_{n<0} = 0$

$n=-1 \longrightarrow h[-1] = 5^{-1} \cdot \underset{1}{u[4]} \neq 0 \longrightarrow$ علی نیست!

Ⓑ پایداری

شرط کافی: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \longrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} 5^n \cdot u[3-n] \overset{?}{<} \infty$

$\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{3} 5^k = \sum_{k=-3}^{\infty} 5^{-k} = \dfrac{5^3}{\frac{4}{5}} =$ عدد محدود $\longrightarrow$ سیستم پایدار است!

Ⓒ حافظه دار بودن:

شرط لازم و کافی: $h[n]\big|_{n\neq 0} = 0 \xrightarrow{\text{یعنی}} h[n] = \alpha\,\delta[n]$

$n=2 \longrightarrow h[2] = 25 \cdot u[1] = 25$ ✓

به ازای $n \neq 0$ مقدار غیرصفر دارد پس حافظه دار است.

Subject

Date

b. $h[n] = 0/8^{n} \cdot u[n+2]$ $\qquad h[n]\big|_{n<0} = 0$ $\qquad$ شرط لازم و کافی : $\qquad$ Ⓐ علیت :

$n=-1 \longrightarrow (0/8)^{-1} \cdot \underbrace{u[1]}_{1} = \frac{10}{8} = 1/\cdot\cdot \neq 0 \longrightarrow$ علی نیست!

Ⓑ پایداری

شرط کافی : $\qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \longrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} (0/8)^{n} \cdot u[n+2] < \infty$

$$\sum_{K=\infty}^{+\infty} |(0/8)^{n} \cdot u[n+2]| = \sum_{K=-2}^{+\infty} (0/8)^{K} = \frac{(0/8)^{-2}}{0/2} = \text{عدد محدود}$$

$\downarrow$

سیستم پایدار است

Ⓒ حافظه‌دار بودن

شرط لازم و کافی : $\qquad h[n]\big|_{n\neq 0} = 0 \longrightarrow h[n] = \alpha\,\delta[n]$

$n=1 \longrightarrow h[n] = 0/8 \cdot u[3] = 0/8 \longrightarrow$ مقدار غیرصفر دارد

$\downarrow$

حافظه‌دار است

PAPCO

Subject
Date

c. $h(t) = e^{-6t} \cdot u(3-t)$ $\quad h(t)\big|_{t<0} = 0$ Ⓐ علیت:

$t=-1 \longrightarrow h(t) = e^{+6} \cdot \underbrace{u(4)}_{1} = e^{+6} \neq 0 \longrightarrow$ علی نیست!

Ⓑ پایداری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt < \infty \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-6t} \cdot u(3-t)\,dt < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-6t} \cdot u(3-t) \right| = \int_{-\infty}^{3} e^{-6t}\,dt = \frac{1}{6} e^{-6t}\Big|_{-\infty}^{3} = \infty$$ = نابدرود

↓

سیستم ناپایدار است.

Ⓒ حافظه دار بودن:

$$h(t)\big|_{t\neq 0} = 0 \longrightarrow h(t) = \alpha\,\delta(t)$$

$t=1 \longrightarrow h(t) = e^{-6} \cdot u(2) =$ مقدار غیر صفر $\longrightarrow$ سیستم حافظه دار است.

P4PCO

Subject

Date

d. $h(t) = t \cdot e^{-t} \cdot u(t)$

Ⓐ علیت:

$h(t)\big|_{t<0} = 0$

$t=-1 \longrightarrow h(t) = -1 \cdot e^{1} \cdot (0) = 0$

$t=-2 \longrightarrow \quad = 0$

* چون رابطه‌ی تابع پاسخ ضربه به کار رفته است، علی است.

(تابع $u(t)$ باعث این مسئله است)

Ⓑ پایداری:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-t} \cdot u(t)\, dt \overset{?}{<} \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t \cdot e^{-t} \cdot u(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} |t \cdot e^{-t}|\, dt = -t \cdot e^{-t} - e^{-t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

= عدد محدود

$\downarrow$

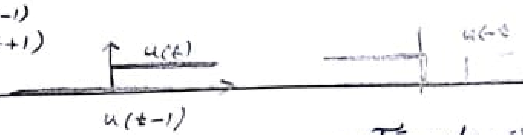
سیستم پایدار است

Ⓒ حافظه‌دار بودن:

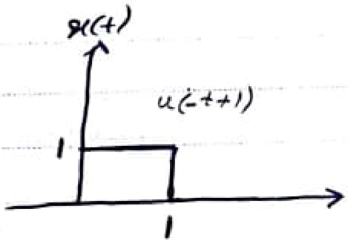
$h(t)\big|_{t \neq 0} = 0 \longrightarrow h(t) = \alpha\, \delta(t)$

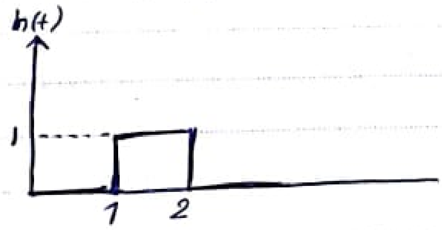
$t=2 \longrightarrow h(t) = 2 \cdot e^{-2} \longrightarrow$ عدد غیرصفر $\longrightarrow$ سیستم حافظه‌دار است

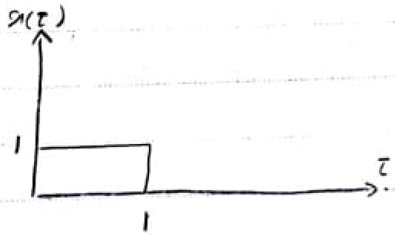
Subject
Date

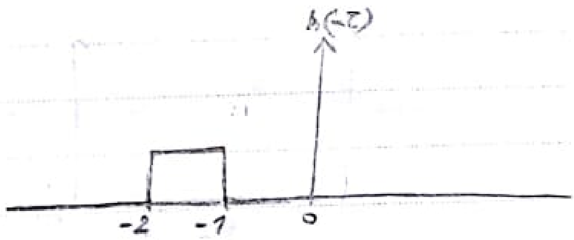


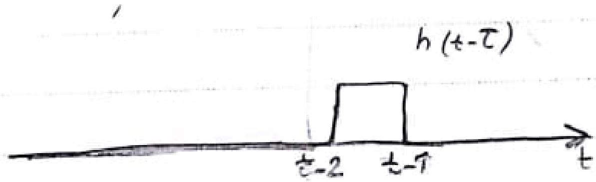
۳. حاصل کانولوشن سیگنال‌های زیر را بدست آورید.











$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(-\tau+1)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

1. $t-1<0 \longrightarrow \boxed{y(t)=0}$

2. $t-1>0$ & $t-2<0 \longrightarrow 1<t<2$

$$y(t)=\int_0^{t-1} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=\int_0^{t-1} 1\cdot d\tau = t-1$$

$$\boxed{y(t)=t-1}$$

3. $0<t-2<1 \longrightarrow 2<t<3$

$$y(t)=\int_{t-2}^{1} 1\,d\tau = -t+3$$

$$\boxed{y(t)=-t+3}$$

4. $t-2>1 \longrightarrow \boxed{y(t)=0}$

$$\text{①②③④} \longrightarrow y(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ 0 & t>3 \\ t-1 & 1<t<2 \\ -t+3 & 2<t<3 \end{cases}$$

P4PCO

Subject

Date

۴. نشان دهید سیستم‌های معرفی شده، معکوس یکدیگرند.

صورت سوال

نشان دهید $h_1 * h_2 = \delta(t)$

اگر دو سیستم سری شوند، سیستم همانی تشکیل می‌دهند

$$a.\begin{cases} h_1(t) = \delta(t) + \delta'(t) \\ h_2(t) = e^{-t} \cdot u(t) \end{cases}$$

$$[\delta(t) + \delta'(t)] * [e^{-t} \cdot u(t)] = \delta(t)$$

$$\underbrace{\delta(t) * e^{-t} \cdot u(t)}_{e^{-t} \cdot u(t)} + \underbrace{\delta'(t) * e^{-t} \cdot u(t)}_{\frac{d[e^{-t} \cdot u(t)]}{dt}} \overset{?}{=} \delta(t)$$

$$y(t) = \cancel{e^{-t} u(t)} + \left(\cancel{-e^{-t} u(t)} + e^{-t} \cdot \delta(t)\right) = e^{-t} \cdot \delta(t) \xrightarrow{t=0} \delta(t) \longrightarrow$$

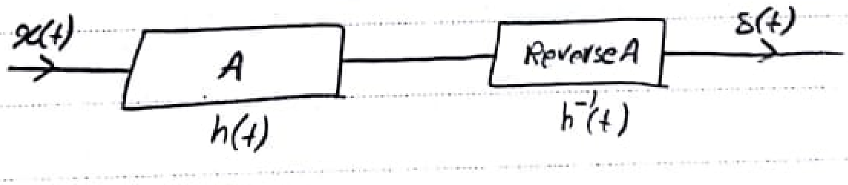
پس چون حاصل کانولوشن، $\delta(t)$ شده، دو سیستم معکوس یکدیگرند

$$b.\begin{cases} h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \\ h_2[n] = u[n] \end{cases}$$

$$(\delta[n] - \delta[n-1]) * u[n] \overset{?}{=} \delta[n]$$

$$\to \underbrace{\delta[n] * u[n]}_{u[n]} - \underbrace{\delta[n-1] * u[n]}_{u[n-1]} = u[n] - u[n-1] \overset{?}{=} \delta[n] \longrightarrow$$

پس چون حاصل کانولوشن، $\delta(t)$ شده، دو سیستم معکوس یکدیگرند



Subject

Date

۵. برای سیستم LTI با $h(t)=۴e^{۴t}$ پاسخ به ورودی $x(t)=u(t)$ را بدست آورید.

$$x(t)=u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=4\cdot e^{4t}} \longrightarrow y(t)=?$$

$\delta(t) \longrightarrow h(t)$

$u(t) \longrightarrow ?$

$$\rightarrow y(t)= x(t) * h(t)$$

$$\rightarrow y(t) = u(t) * (4.e^{4t})$$

$$y(t)= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cdot\cdot\, 4 \cdot e^{4(t-\tau)} d\tau$$

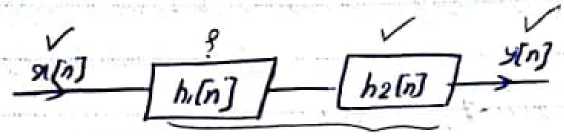
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) \cdot 4 \cdot e^{4\tau} d\tau$$ $\rightarrow$ شیفت $u(t)$ راحت‌تر است! $\rightarrow$ ۱ میشود!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} 4 \cdot e^{4\tau} d\tau = 4 \times \frac{1}{4} \cdot e^{4\tau} \Big|_{-\infty}^{t} = e^{4t} - \underbrace{e^{-\infty}}_{0} = e^{4t}$$

$$y(t)= e^{4t}$$

Subject
Date

۴. تمرین ۲۷۲

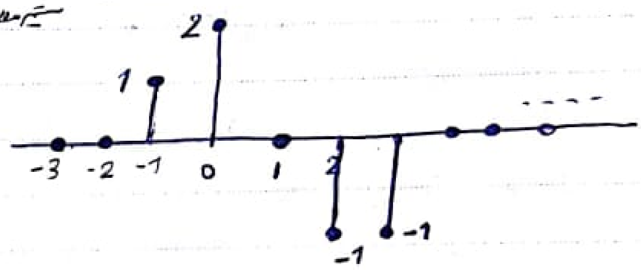


سیستم معادل: $\underbrace{h_1[n] * h_2[n]}_{h[n]}$

$h_1[n] = ?$

$h_2[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$

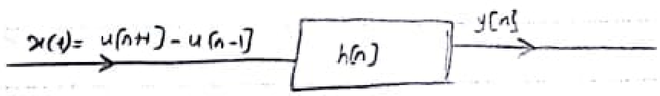
$x[n] = u[n+1] - u[n-1] \xrightarrow[(y[n])]{\text{پاسخ}}$



$y[n] = x[n] * \underbrace{h[n]}_{?}$

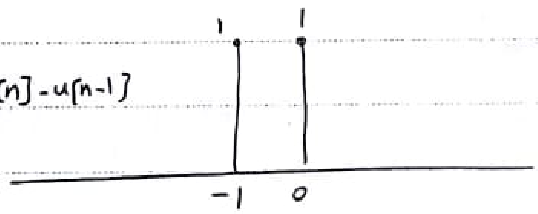
مجهول ← به دست می‌آوریم

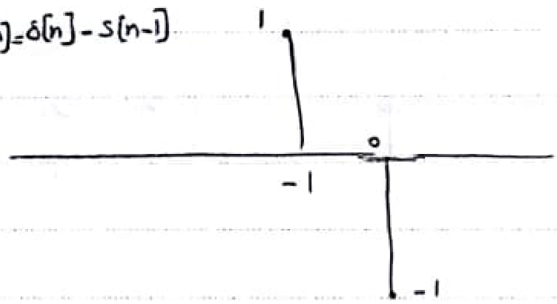
$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$



$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2(n) \xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}} y[n] = \underbrace{h_1[n]}_{\text{مجهول}} * \underbrace{(x[n] * h_2[n])}_{\text{معلوم}}$

$x(n) * h_2[n]$





$n+1 < -1 \xrightarrow{n<2} y[n] = 0$

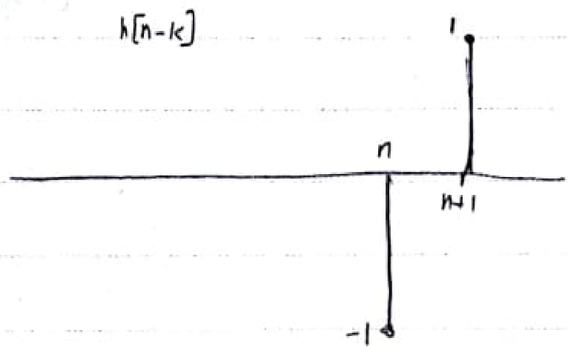
$n+1 = -1 \xrightarrow{n=-2} y[n] = 1$

$n+1 = 0 \xrightarrow{n=-1} y[n] = -1\times1 + 1\times1 = 0$

$n+1 = 1 \xrightarrow{n=0} y[n] = -1\times1 + 0\times1 = -1$

$n+1 = 2 \xrightarrow{n=1} y[n] = -1\times0 + 1\times0 = 0$

$n+1 > 2 \xrightarrow{n>1} y[n] = 0$



PAPCO

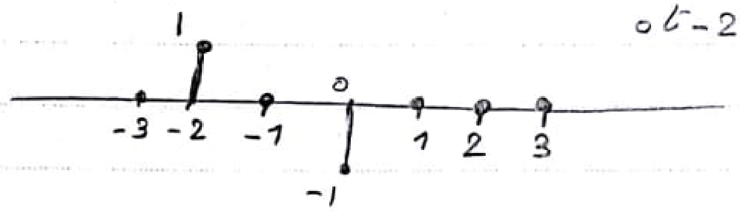
Scanned by CamScanner

Subject ۹۴۳۲۰۲۲
Date یاسمن صداقت میرمحمد

ادامه‌ی سؤال 6

$x[n]*h_2[n] = \delta[n+2]-\delta[n]$

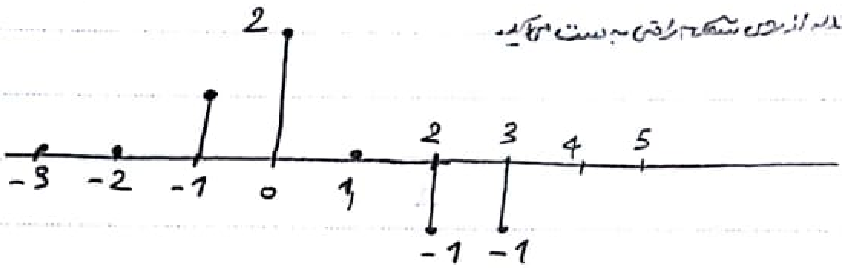
دامنه: 0 تا -2



دامنه‌ی تابع $y[n]$ ⟵ 3 تا -1

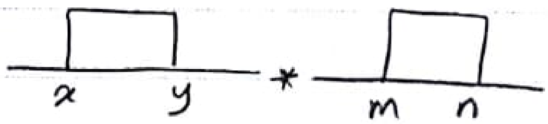
$y[n]=\delta[n+1]+2\delta[n]-\delta[n-2]-\delta[n-3]$

معادله از روی شکل طراحی به دست می‌آید.



$\underbrace{y[n]}_{-1 \text{ تا } 3} = h_1[n] * \underbrace{(x[n]*h_2[n])}_{-2 \text{ تا } 0}$

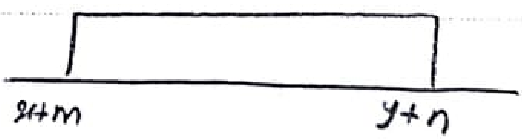
در کانولوشن، مرزهای اول و آخر دو تابع با هم جمع می‌شوند ↓



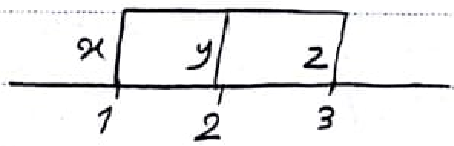
پس دامنه‌ی $h_1[n]$:

$x-2=-1 \rightarrow x=+1$

$y+0=3 \rightarrow y=3$



$h_1[n]=x\delta[n-1]+y\delta[n-2]+z\delta[n-3]$



پس در این بازه سه مقدار مجهول داریم که باید آن‌ها را پیدا کنیم.

$\rightarrow y[n]=h_1[n]*(\delta[n+2]-\delta[n]) = \delta[n+1]+2\delta[n]-\delta[n-2]-\delta[n-3]$

$\rightarrow y[n]=(x\delta[n-1]+y\delta[n-2]+z\delta[n-3])*(\delta[n+2]-\delta[n]) = \delta[n+1]+2\delta[n]-\delta[n-2]-\delta[n-3]$

(ادامه صفحه‌ی بعد)

Subject
Date

$\longrightarrow x\,\delta[n-1] * \delta[n+2] + y\,\delta[n-2] * \delta[n+2] + z\,\delta[n-3] * \delta[n+2]$
$- x\,\delta[n-1] * \delta[n] - y\,\delta[n-2] * \delta[n] - z\,\delta[n-3] * \delta[n]$

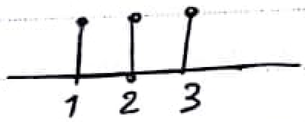
$=$

$x\,\delta[n+1] + y\,\delta[n] + z\,\delta[n-1] - x\,\delta[n-1] - y\,\delta[n-2] - z\,\delta[n-3]$

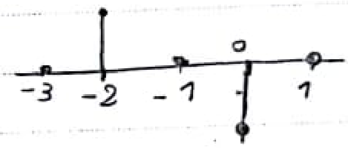
باید ضرایب را حدس بزنیم ...

$$\begin{cases} x = 1 \\ z - x = 0 \rightarrow z = 1 \\ y = 1 \text{ یا } 2 \end{cases}$$

$y = 1$

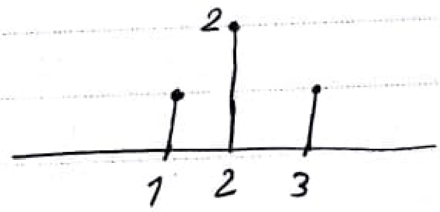


$*$

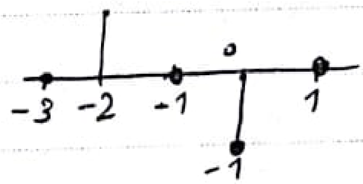


$\neq y[n]$

$y = 2$

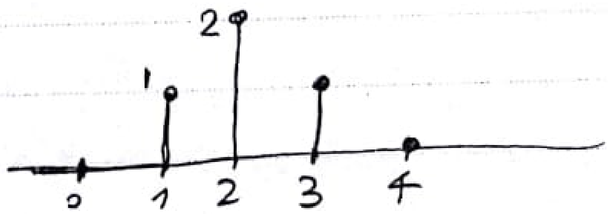


$*$



$= y[n]$ ✓

$\xrightarrow{\text{پس}}$ $h_1[n] =$



Subject
Date

$y[0]=0 \rightarrow h[0]=0$

۱.۷ با فرض برقراری سکون ابتدایی، معادله‌ی تفاضلی مرتبه اول زیر، پاسخ ضربه سیستمی $\overbrace{\text{پاسخ ضربه سیستمی}}^{h[n]}$ را که رابطه ورودی، خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید.

$$y[n]+2\cdot y[n-1]=x[n]$$

$h[n]$، پاسخ ضربه‌ی سیستم است، یعنی اگر $x[n]=\delta[n]$ باشد $\longrightarrow y[n]=h[n]$

یعنی:

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$x[n]=\delta[n]$

$$y[n]+2\cdot y[n-1]=\delta[n]$$

$\rightarrow n<0 \rightarrow \delta[n]=0 \longrightarrow \boxed{y[n]=0}$ (I) $\quad n<0$

$n=0 \rightarrow y[n]=y[0]=\delta[0]-2y[-1] \xrightarrow{\text{(I)}} y[0]=1-0=1 \longrightarrow \boxed{y[0]=1}$

$n=1 \rightarrow y[1]+2y[0]=\delta[1] \longrightarrow y[1]=0-2 \longrightarrow \boxed{y[1]=-2}$

$n=2 \rightarrow y[2]+2y[1]=\delta[2] \longrightarrow y[2]=0-2\times-2 \longrightarrow \boxed{y[2]=4}$

$n=3 \rightarrow y[3]+2y[2]=\delta[3] \longrightarrow y[3]=0-2\times4 \longrightarrow \boxed{y[3]=-8}$

$n=4 \rightarrow y[4]+2y[3]=\delta[4] \longrightarrow y[4]=0-2\times-8 \longrightarrow \boxed{y[4]=16}$

با تکرار این الگو $\longrightarrow$ $y[n]=(-2)^n\cdot u[n]$

PAPCO

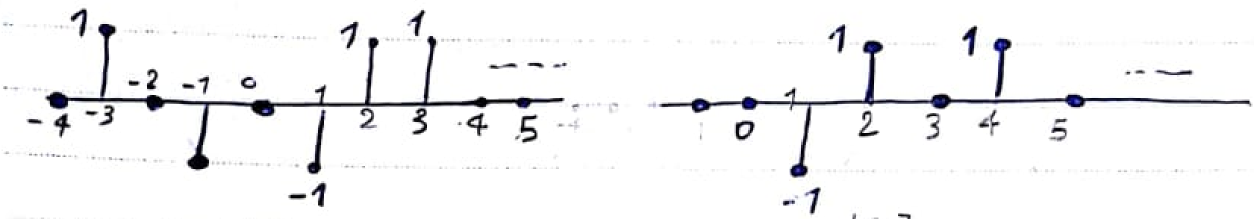
Subject
Date ۹۴/۳/۰۲۲

۸. کانولوشن دو سیگنال زیر را محاسبه کنید.

$K = [(-7+1), \dots, (7+10-1)] = [-6, 16]$

بازه‌ی K

$x[k]$

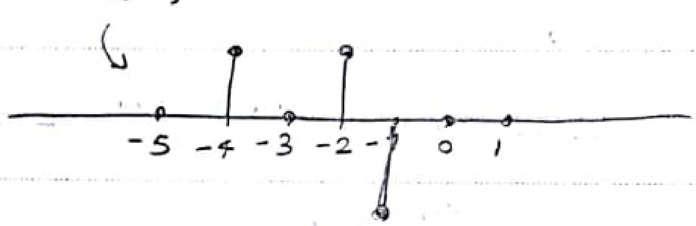


$x[k]$ $h[k]$

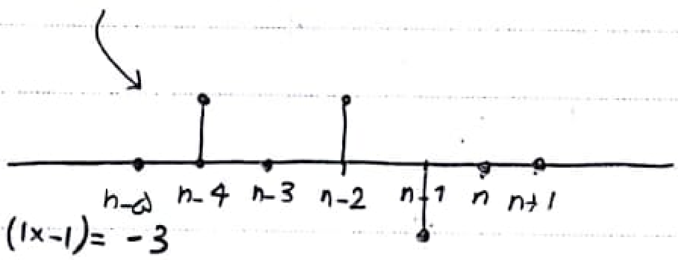
$[0, 1, 0, -1, 0, -1, 1, 1, 0, 0]$ $[0, 0, -1, 1, 0, 1, 0]$

از h استفاده می‌کنیم و به ترتیب آن را روی سیگنال $x[k]$ حرکت می‌دهیم تا حاصل کانولوشن به دست آید.

$h[-k]$



$h[n-k]$



$n-1=-4 \xrightarrow{n=-3} y(n)=0$

$n-1=-3 \xrightarrow{n=-2} y[n]=1$

$n-1=-1 \xrightarrow{n=0} y(n)=-1\times-1=1$

$n-1=0 \xrightarrow{n=1} y[n]=1-1=0$

$n-1=1 \xrightarrow{n=2} y[n]=1$

$n-1=2 \xrightarrow{n=3} y(n)=(-1\times1)+(1\times-1)+(1\times-1)=-3$

$n-1=3 \xrightarrow{n=4} y[n]=-1+1=0$

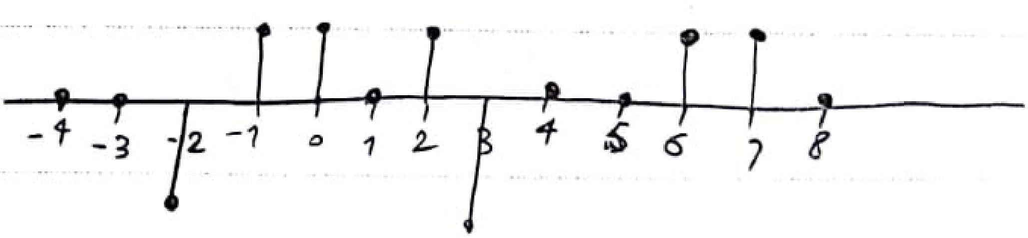
$n-1=4 \xrightarrow{n=5} y[n]=1-1=0$

$n-1=5 \xrightarrow{n=6} y(n)=1$

$n-1=6 \xrightarrow{n=7} y[n]=1$

$n-1=7 \xrightarrow{n=8} y[n]=0$

$y[n]$



PAPCO