1.3　解説

（1）A_k に関して，被積分関数が絶対値の形となっています．積分の計算をするためには絶対値を外す必要がありますが，本問では不等式評価をするのみであるので，一旦は置いておきます．絶対値の中に注目してみましょう．$\sin(x^2)$ は $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$ としたときの合成関数 $f(g(x))$ になっています．被積分関数が合成関数になっているとき，$t=g(x)$ と置換するとうまくいくことが多いです（経験則です）．
$t=x^2$ と置換する．積分区間を考えると $x>0$ であることから，$x=\sqrt{t}$ であることが分かる．

$$\therefore\ A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

x	$\sqrt{k\pi}\to\sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi\to(k+1)\pi$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ほら！積分区間，被積分関数の両方とも見た目がスッキリしたでしょう？次に考えるべきは，積分の不等式評価です．積分区間は $k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ となっています．これより t の最大値が $(k+1)\pi$ で最小値が $k\pi$ であることが分かります．したがって，$0<k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ より

$$\frac{1}{(k+1)\pi}\leqq\frac{1}{t}\leqq\frac{1}{k\pi}\qquad\therefore\ \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\frac{1}{\sqrt{t}}\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\ \cdots\cdots ①$$

が得られます．示すべき不等式の形が見えてきました！
ゆえに（① と $|\sin t|\geqq 0$ より）

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt\leqq A_k\leqq\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt$$

被積分関数 $\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}$ のうち，分子の $\sqrt{t}$ の部分のみ不等式で評価をしました．分母の $|\sin t|$ も同様にやったらどうでしょう？より式が複雑になってしまいそうです．ここまで来たら，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=2$ となることが示されれば証明完了ですね．周期性から，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt$ の値は $y=|\sin t|$ のお山 1 つ分（下図の斜線部）の面積と等しくなります.（お山 1 つ分の面積が 2 になることは覚えておきましょう！）

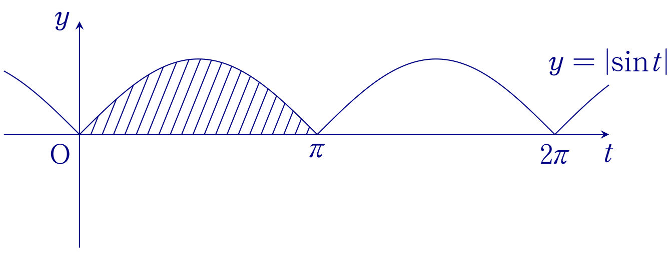

Figure 1.3.1: お山 1 つ分の面積

したがって，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=2$ となる．
$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=2$ であるから，（この程度の計算の過程は記述をしなくてよいと**個人的に**思います.）

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\quad\blacksquare$$

（2）B_n は A_k と形は似ていますが，少々異なる部分があります．まずは，B_n を A_k を用いて表すことから始めましょう．慣れている人は素早く変形できるかもしれませんが，ここではそのような**プロ**の頭の中を覗いて

みましょう．文字（B_n の n のこと）で一般化されている場合は，具体的な数字を当てはめることで考えやすくなります．ここで，B_n の $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は邪魔なので，それを除いた部分である $\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$ を ${B_n}'$ と置きます．

（ i ）$n = 1$ のとき

$$
{B_1}' = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = A_1
$$

（ ii ）$n = 2$ のとき

$$
{B_2}' = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = A_2 + A_3
$$

（iii）$n = 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
{B_3}' &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\
&= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{4\pi}}^{\sqrt{5\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{5\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\
&= A_3 + A_4 + A_5
\end{aligned}
$$

ここまで来れば見えてくるでしょう．

$$
B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}{B_n}' = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1} A_k
$$

が得られます．

$B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，（ 1 ）で得られた不等式より

$$
\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \cdots\cdots ②
$$

この不等式 ② が得られたら，あとは両側の極限をとってはさみうつだけです（簡単なわけではないです）．
まずは，形がシンプルな最右辺の極限を考えてみましょう．
② の最右辺について，区分求積法の原理より

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right]_1^2 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots\cdots ③
$$

と… サクッと計算しましたが，すんなり受け入れられた方は次に進みましょう．計算の過程を詳細に説明します．lim，Σ，$\dfrac{1}{n}$ の形が見えたら区分求積法を考えましょう．よく見る区分求積法は

定理 1.3.1: 定積分と区分求積法

$0 \leqq x \leqq 1$ において連続な関数 $h(x)$ において

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\,dx
$$

が成り立つ．

ですね．こちらの形に寄せていく（$1/n$ と k/n の形をつくる）と

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}
$$

となります．この時点で定理 1.3.1 における $h(x)$ は $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ となることが分かります．問題なのは

$k=n$ から $k=2n-1$ までの和であるシグマの扱いです．lim の中身を具体的に書き出すと

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(n/n)\pi}}+\frac{1}{\sqrt{((n+1)/n)\pi}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{((2n-1)/n)\pi}}\right)\cdots\cdots ④$$

④ 式は以下の網目部の面積を表しています．

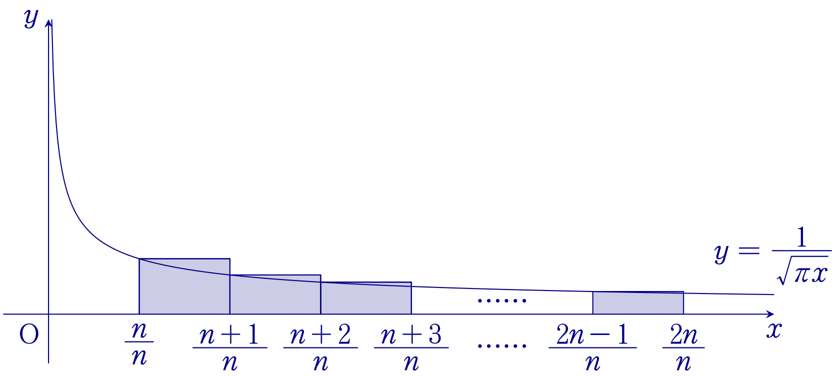

Figure 1.3.2: 区分求積法

そして，$1\leqq x\leqq 2$ の範囲で n 等分された長方形の横の長さ $1/n$ を無限に小さくしていく（$n\to\infty$ とする）と，面積は $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ に収束します.（詳細な議論は区分求積法を学んだ教材を復習してください.）したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

を得ます．それでは，続いて不等式 ② の最左辺について考えてみましょう．
② の最左辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$
$$=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}\quad\cdots\cdots ⑤$$

以下が参考図です．

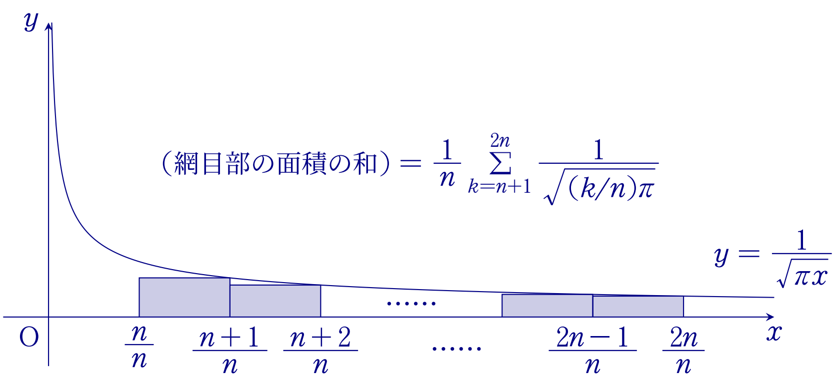

Figure 1.3.3: 区分求積法

よって，②，③，⑤ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\boldsymbol{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}}\quad\cdots\cdots(答)$$