4.3　解説

（１）点Pの座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2x = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x + y + z = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

より $\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (0,\ -1,\ 1)}$ ……(答)

（２）$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と書ける。$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= -s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (2s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= -4s + 2(2s-1) + 3(1-s) = 1 - 3s = 0 \end{aligned}$$

よって $s = \dfrac{1}{3}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}}$ ……(答)

（３）点Qから平面OHBに垂線を下ろし，その垂線と平面OHBの交点をMとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は1次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は実数 $t,\ u$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2t+u,\ u,\ u)$ と書ける。また，$\overrightarrow{\mathrm{QM}}$ は平面OAB上に垂直なので $\overrightarrow{\mathrm{OP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{QM}}$ であり，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{QM}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と書けるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QM}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1+k)\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{3}{2},\ -(1+k),\ 1+k\right)$$

よって

$$\begin{cases} 2t + u = \dfrac{3}{2} \\ u = -(1+k) \\ u = 1+k \end{cases}$$

なので，$t = \dfrac{3}{4}$, $u = 0$ だから $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。

点Mから直線OHに垂線を下ろし，その垂線と直線OHの交点をNとする。このとき図より，三角形OHB上の点のうち点Mからの距離が最小であるのは点N，最大であるのは頂点O, B, Hのいずれかである。さらに，三角形OHB上を点Xが動くとき，$\mathrm{QX}^2 = \mathrm{QM}^2 + \mathrm{MX}^2$ よりQXが最小，最大となる点はそれぞれMXが最大，最小となる点である。この最小値と最大値が r の最小値と最大値であり，Xが動くときQXは連続的に変化するので求める範囲は（最小値）$\leqq r \leqq$（最大値）の形で表される。

点Nは線分OH上にあるので実数 ℓ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と書け，$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \left(\ell\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \ell|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= \ell\left|\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\right|^2 - \frac{3}{4}(2,\ 0,\ 0)\cdot\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\ell - 2 = 0 \end{aligned}$$

即ち $\ell = \dfrac{3}{4}$ である。よって r^2 の最小値は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{QN}}|^2 &= \left|\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\right|^2 = \left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = \left|\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \frac{9}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{17}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2 = \left|\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \frac{9}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{17}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|^2 = \left|\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \frac{25}{144}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{35}{12}$$

より r^2 の最大値は $\dfrac{17}{4}$ である。以上より求める範囲は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{2} \leqq r \leqq \dfrac{\sqrt{17}}{2}}$ ……(答)