

## 1.4 研究

### 1.4.1 $A_k$ は何を表しているか？

??節では、式変形により解き進めましたが、一体何を計算していたのでしょうか？まず、 $A_k$ の定積分がどの図形の面積を表すかを考えてみましょう。以下の図1.4.1に $y = |\sin(x^2)|$ のグラフを描画します。 $y = |\sin(x^2)|$ は

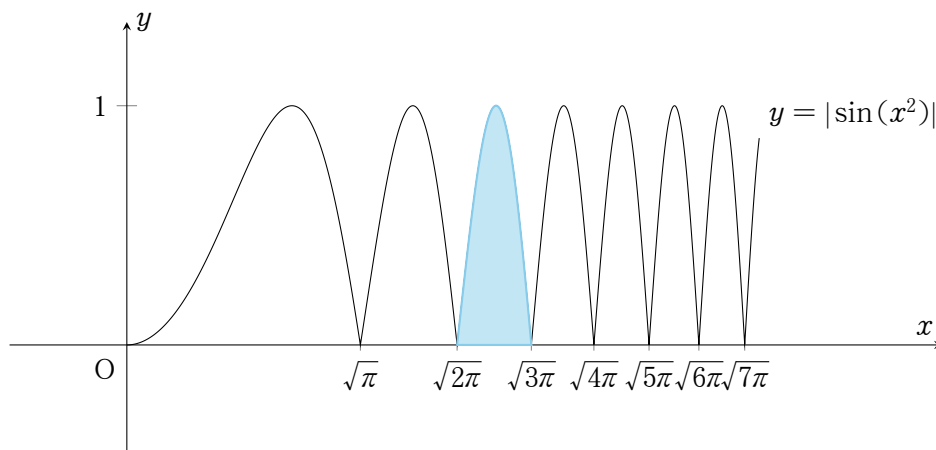


Figure 1.4.1:  $y = |\sin(x^2)|$  の概形

$x = \sqrt{m\pi}$  ( $m$  は 0 以上の整数) のときに  $y = 0$  となり、お山が連なった形状となります。そのお山を左から順に 0 番目, 1 番目, ... としていくと,  $k$  番目のお山の面積が  $A_k$  となるわけです。例として, 水色で塗りつぶした部分が  $A_2 = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)| dx$  に対応しています。

### 1.4.2 $A_k$ を図形的に評価する

1.4.1 項で  $A_k$  が何を表しているかが分かりました。では、以下の図のように下から評価する<sup>1</sup>ことはできないでしょうか？ $k = 2$  の場合を考えてみましょう。

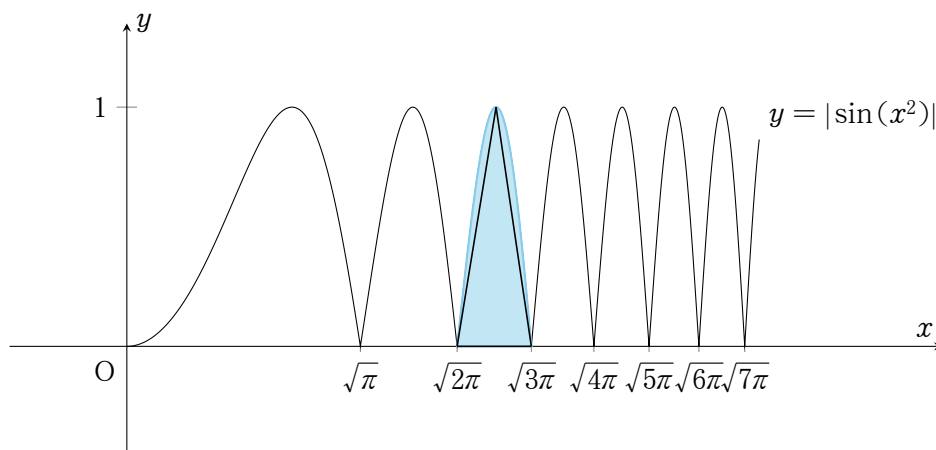


Figure 1.4.2:  $A_2$  の面積を三角形の面積で下から評価する

もし

$$(\text{三角形の面積}) \leq A_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2+1)\pi}} \leq A_2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\sqrt{3\pi} - \sqrt{2\pi}}{2} \leq A_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \leq A_2$$

<sup>1</sup>「下から評価する」とは、 $x \leq A_k$  もしくは  $x < A_k$  を満たす  $x$  を求めることです。同様に「上から評価する」という言い回しもあります。

が真であれば、下から評価できるということになります。要は、議論の流れとして

$$(i) \frac{\sqrt{3\pi} - \sqrt{2\pi}}{2} \leq A_2 \text{ である.}$$

$$(ii) \text{ また, } \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \leq \frac{\sqrt{3\pi} - \sqrt{2\pi}}{2} \text{ である.}$$

$$(iii) \text{ したがって, } \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \leq A_2 \text{ である.}$$

と言いたいわけです。(i)は図形より正しいとしてよいでしょう。しかしながら、(ii)に関して

$$\frac{\sqrt{3\pi} - \sqrt{2\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3\pi}} = \frac{3\pi - \sqrt{6}\pi - 2}{2\sqrt{3\pi}} = \frac{(3 - \sqrt{6})\pi - 2}{2\sqrt{3\pi}} < \frac{(3 - 2.4)\pi - 2}{2\sqrt{3\pi}} < \frac{0.6 \cdot 3.2 - 2}{2\sqrt{3\pi}} < 0$$

であるから、(ii)は成り立ちません。この例では  $k = 2$  のときを計算しましたが、すべての正の整数  $k$  について同様の結果になります。よって、図形的に下から評価することは難しいでしょう。仮に、何らかの方法で下から評価することができても、上から評価するのはさらに難しいでしょう。

### 1.4.3 もう一度置換！

??節における(1)の解説の途中で以下の不等式が得られました。

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}} \dots\dots ①$$

そして、 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2 \dots\dots (*)$ であることを用いて与不等式を証明しました。しかし、この(\*)は思い付きましたでしょうか？思いつかなかった方は続けてお読みください。複雑な積分では、積分区間を簡単にすることが大事な方針の1つとなります。不等式①の両側とも積分区間は  $k\pi$  から  $(k+1)\pi$  となっております。これを0から  $\pi$  となるように置換してみましょう。

$t$	$k\pi \rightarrow (k+1)\pi$
$s$	$0 \rightarrow \pi$

となって欲しいので...  $s = t - k\pi$  と置換すればよさそうですね。したがって、 $ds = dt$  より、不等式①は

$$\int_0^\pi |\sin(s + k\pi)| \cdot \frac{ds}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \int_0^\pi |\sin(s + k\pi)| \cdot \frac{ds}{2\sqrt{k\pi}}$$

ここで

$$|\sin(s + k\pi)| = |\pm \sin s| = |\pm 1| \cdot |\sin s| = |\sin s| = \sin s$$

$$\rightarrow \text{注 } k \text{ が偶数のとき } |\sin(s + k\pi)| = \sin s, \quad k \text{ が奇数のとき } |\sin(s + k\pi)| = -\sin s$$

$$\rightarrow \text{注 } \text{積分区間より } 0 \leq s \leq \pi \text{ で, } \sin s \geq 0 \text{ なので } |\sin s| = \sin s$$

であるから

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \int_0^\pi \sin s ds \leq A_k \leq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^\pi \sin s ds$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \left( \because \int_0^\pi \sin s ds = [-\cos s]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2 \right)$$

が得られます。このように積分区間が簡単になるように置換をしていきましょう。