1.3　解説

（1）A_k に関して，被積分関数が絶対値の形となっています．積分の計算をするためには絶対値を外す必要がありますが，本問では不等式評価をするのみであるので，一旦は置いておきます．絶対値の中に注目してみましょう．$\sin(x^2)$ は $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$ としたときの合成関数 $f(g(x))$ になっています．被積分関数が合成関数になっているとき，$t=g(x)$ と置換するとうまくいくことが多いです（経験則です）．

$t=x^2$ と置換する．積分区間を考えると $x>0$ であることから，$x=\sqrt{t}$ であることが分かる．

$$\therefore\quad A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

x	$\sqrt{k\pi}\to\sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi\to(k+1)\pi$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ほら！積分区間，被積分関数の両方とも見た目がスッキリしたでしょう？次に考えるべきは，積分の不等式評価です．積分区間は $k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ となっています．これより t の最大値が $(k+1)\pi$ で最小値が $k\pi$ であることが分かります．したがって，$0<k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ より

$$\frac{1}{(k+1)\pi}\leqq\frac{1}{t}\leqq\frac{1}{k\pi}\qquad\therefore\quad\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\frac{1}{\sqrt{t}}\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\ \cdots\cdots①$$

が得られます．示すべき不等式の形が見えてきました！

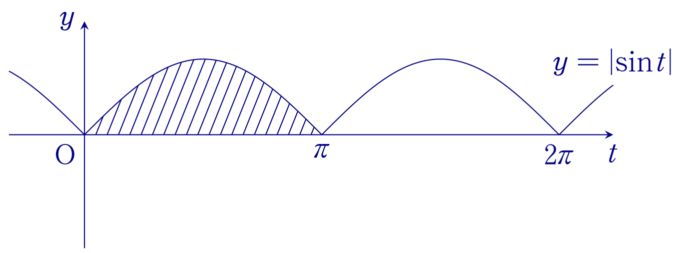
ゆえに（① と $|\sin t|\geqq 0$ より）

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\quad\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\quad\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt\leqq A_k\leqq\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt$$

被積分関数 $\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}$ のうち，分子の $\sqrt{t}$ の部分のみ不等式で評価をしました．分母の $|\sin t|$ も同様にやったらどうでしょう？より式が複雑になってしまいそうです．ここまで来たら，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=2$ となることが示されれば証明完了ですね．周期性から，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt$ の値は $y=|\sin t|$ のお山 1 つ分（下図の斜線部）の面積と等しくなります．（お山 1 つ分の面積が 2 になることは覚えておきましょう！）



したがって，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=2$ となる．

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=2$ であるから，（この程度の計算の過程は記述をしなくてよいと**個人的に**思います．）

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\quad\blacksquare$$

（2）B_n は A_k と形は似ていますが，少々異なる部分があります．まずは，B_n を A_k を用いて表すことから始めましょう．慣れている人は素早く変形できるかもしれませんが，ここではそのような**プロ**の頭の中を覗いてみましょう．文字（B_n の n のこと）で一般化されている場合は，具体的な数字を当てはめることで考えや

すくなります．ここで，B_n の $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は邪魔なので，それを除いた部分である $\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$ を $B_n{}'$ と置きます．

（i）$n=1$ のとき

$$B_1{}' = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = A_1$$

（ii）$n=2$ のとき

$$B_2{}' = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = A_2 + A_3$$

（iii）$n=3$ のとき

$$\begin{aligned}
B_3{}' &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\
&= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{4\pi}}^{\sqrt{5\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{5\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\
&= A_3 + A_4 + A_5
\end{aligned}$$

ここまで来れば見えてくるでしょう．

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} B_n{}' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$$

が得られます．

$B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，（1）で得られた不等式より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \cdots\cdots ②$$

この不等式 ② が得られたら，あとは両側の極限をとってはさみうつだけです（簡単なわけではないです）．まずは，形がシンプルな最右辺の極限を考えてみましょう．
② の最右辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \right]_1^2 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots\cdots ③$$

と... サクッと計算しましたが，すんなり受け入れられた方は次に進みましょう．計算の過程を詳細に説明します．lim，Σ，$\dfrac{1}{n}$ の形が見えたら区分求積法を考えましょう．よく見る区分求積法は

定理 1.3.1: 定積分と区分求積法

$0 \leqq x \leqq 1$ において連続な関数 $h(x)$ において

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\,dx$$

が成り立つ．

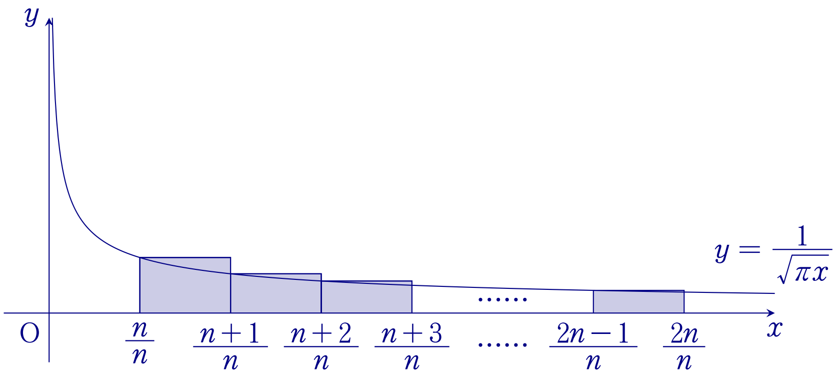
ですね．こちらの形に寄せていく（$1/n$ と k/n の形をつくる）と

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$

となります．この時点で定理 1.3.1 における $h(x)$ は $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ となることが分かります．問題なのは $k=n$ から $k=2n-1$ までの和であるシグマの扱いです．lim の中身を具体的に書き出すと

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{(n/n)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{((n+1)/n)\pi}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{((2n-1)/n)\pi}} \right) \cdots\cdots ④$$

④ 式は以下の網目部の面積を表しています.



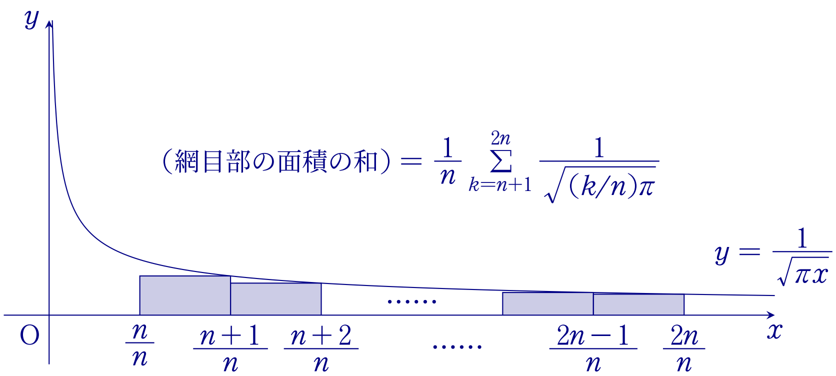
そして，$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で n 等分された長方形の横の長さ $1/n$ を無限に小さくしていく（$n \to \infty$ とする）と，面積は $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ に収束します.（詳細な議論は区分求積法を学んだ教材を復習してください.）したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

を得ます．それでは，続いて不等式 ② の最左辺について考えてみましょう.
② の最左辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

以下が参考図です.



②，③，⑤ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n = \boldsymbol{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}}$ となります. ……(答)