1.4　研究

1.4.1　A_k は何を表しているか？

??節では，式変形により解き進めましたが，一体何を計算していたのでしょうか？まず，A_k の定積分がどの図形の面積を表すかを考えてみましょう．以下の図**??**に $y = |\sin(x^2)|$ のグラフを描画します．$y = |\sin(x^2)|$ は

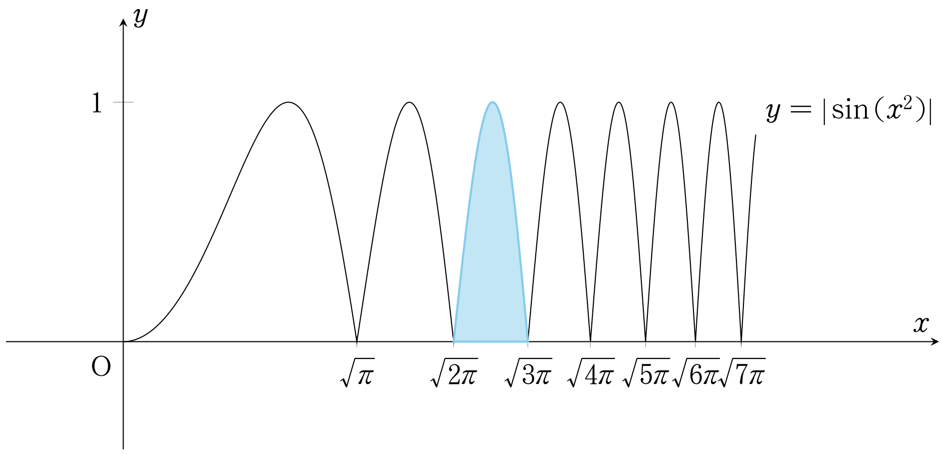
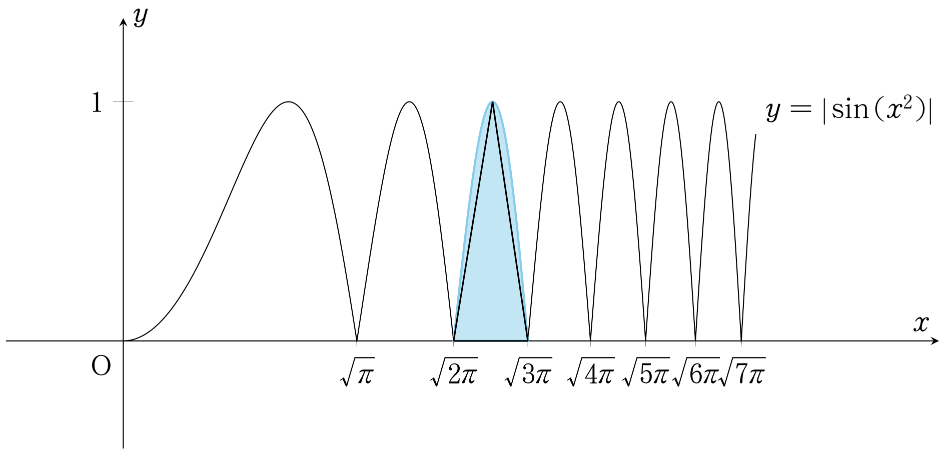


Figure 1.4.1_1: $y = |\sin(x^2)|$ の概形

$x = \sqrt{m\pi}$（m は 0 以上の整数）のときに $y = 0$ となり，お山が連なった形状となります．そのお山を左から順に 0 番目，1 番目，... としていくと，k 番目のお山の面積が A_k となるわけです．例として，水色で塗りつぶした部分が $A_2 = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$ に対応しています．

1.4.2　A_k を図形的に評価する

1.4.1 項で A_k が何を表しているかが分かりました．では，以下の図のように下から評価することはできないでしょうか？$k = 2$ の場合を考えてみましょう．



もし

$$(\text{三角形の面積}) \leqq A_2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{(2+1)\pi}} \leqq A_2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2} \leqq A_2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq A_2$$

が真であれば，下から評価できるということになります．要は，議論の流れとして

（i）$\dfrac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2} \leqq A_2$ である．

（ii）また，$\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq \dfrac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2}$ である．

（iii）したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq A_2$ である．

と言いたいわけです．（ i ）は図形より正しいとしてよいでしょう．しかしながら，（ii）に関して

$$\frac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3\pi}}=\frac{3\pi-\sqrt{6}\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}=\frac{(3-\sqrt{6})\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}<\frac{(3-2.4)\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}<\frac{0.6\cdot 3.2-2}{2\sqrt{3\pi}}<0$$

であるから，（ii）は成り立ちません．この例では $k=2$ のときを計算しましたが，すべての正の整数 k について同様の結果になります．よって，図形的に下から評価することは難しいでしょう．仮に，何らかの方法で下から評価することができても，上から評価するのはさらに難しいでしょう．