入試数学を研究しよう

東京大学　理科

やさしい理系お兄ちゃん

2023

Contents

CHAPTER 0

はじめに

0.1　本書の概要

0.2　本書の注意事項

ここでは，本書の書き方に関する注意事項を説明します．各大問の解説の節において，**黒字**で書かれている箇所は解答として最低限書けば十分であると考えている内容で，その他の記述や詳細な説明を青字で書いている．

CHAPTER 1

第1問

1.1 概要

本問の構成は,（１）で定積分の不等式評価を行い，得られた不等式を元に（２）で極限値を求める流れとなっています．このような形式の問題では，方針が立てにくいという点で（１）の不等式評価の方が難しい傾向にあります．なぜなら大抵の場合，不等式評価をした結果に対してはさみうちの原理を適用すれば（２）の極限値は求められるからです．そのため,（１）をクリアした受験生は（２）もクリアしていくと予想され，点数の差がつく問題であると考えられます．

1.2 問題

（１）正の整数 k に対し，

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

（２）正の整数 n に対し，

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$$

とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

1.3 解説

（１）A_k に関して，被積分関数が絶対値の形となっています．積分の計算をするためには絶対値を外す必要がありますが，本問では不等式評価をするのみであるので，一旦は置いておきます．絶対値の中に注目してみましょう．$\sin(x^2)$ は $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$ としたときの合成関数 $f(g(x))$ になっています．被積分関数が合成関数になっているとき，$t=g(x)$ と置換するとうまくいくことが多いです（経験則です）．

$t = x^2$ と置換する．積分区間を考えると $x > 0$ であることから，$x = \sqrt{t}$ であることが分かる．

$$\therefore \quad A_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

x	$\sqrt{k\pi} \to \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi \to (k+1)\pi$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ほら！積分区間，被積分関数の両方とも見た目がスッキリしたでしょう？次に考えるべきは，積分の不等式評価です．積分区間は $k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ となっています．これより t の最大値が $(k+1)\pi$ で最小値が $k\pi$ であることが分かります．したがって，$0 < k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ より

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqq \frac{1}{t} \leqq \frac{1}{k\pi} \qquad \therefore \quad \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{1}{\sqrt{t}} \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \cdots\cdots ①$$

が得られます．示すべき不等式の形が見えてきました！

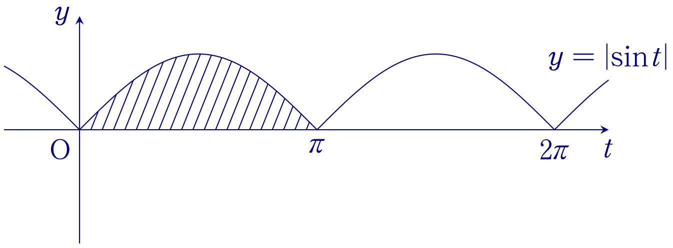
ゆえに（① と $|\sin t| \geqq 0$ より）

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt \leqq A_k \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt$$

被積分関数 $\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}$ のうち，分子の $\sqrt{t}$ の部分のみ不等式で評価をしました．分母の $|\sin t|$ も同様にやったらどうでしょう？より式が複雑になってしまいそうです．ここまで来たら，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = 2$ となることが示されれば証明完了ですね．周期性から，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt$ の値は $y = |\sin t|$ のお山 1 つ分（下図の斜線部）の面積と等しくなります．(お山 1 つ分の面積が 2 になることは覚えておきましょう！)



したがって，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \Big[-\cos t \Big]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$ となる．

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = 2$ であるから，（この程度の計算の過程は記述をしなくてよいと**個人的に**思います.）

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \blacksquare$$

（2）B_n は A_k と形は似ていますが，少々異なる部分があります．まずは，B_n を A_k を用いて表すことから始めましょう．慣れている人は素早く変形できるかもしれませんが，ここではそのような**プロ**の頭の中を覗いてみましょう．文字で一般化されている場合は，具体的な数字を当てはめることで考えやすくなります．ここで，B_n の $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は邪魔なので，それを除いた部分である $\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$ を $B_n{}'$ と置きます．

（i）$n = 1$ のとき

$$B_1{}' = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} |\sin(x^2)|\, dx = A_1$$

（ii）$n=2$ のとき

$$B_2{}' = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = A_2 + A_3$$

（iii）$n=3$ のとき

$$\begin{aligned} B_3{}' &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\ &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{4\pi}}^{\sqrt{5\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{5\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\ &= A_3 + A_4 + A_5 \end{aligned}$$

ここまで来れば見えてくるでしょう．

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} B_n{}' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$$

が得られます．

$B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，（1）で得られた不等式より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \cdots\cdots ②$$

この不等式 ② が得られたら，あとは両側の極限をとってはさみうつだけです（簡単なわけではないです）．まずは，形がシンプルな最右辺の極限を考えてみましょう．

② の最右辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right]_1^2 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots\cdots ③$$

と... サクッと計算しましたが，すんなり受け入れられた方は次に進みましょう．計算の過程を詳細に説明します．lim，Σ，$\dfrac{1}{n}$ の形が見えたら区分求積法を考えましょう．よく見る区分求積法は

定理 1.3.1: 定積分と区分求積法

$0 \leqq x \leqq 1$ において連続な関数 $h(x)$ において

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\,dx$$

が成り立つ．

ですね．こちらの形に寄せていく（$1/n$ と k/n の形をつくる）と

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$

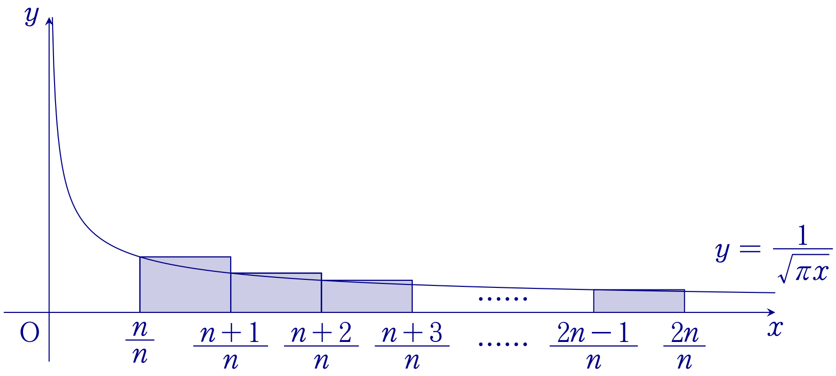
となります．この時点で定理 1.3.1 における $h(x)$ は $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ となることが分かります． 問題なのは $k=n$ から $k=2n-1$ までの和であるシグマの扱いです．lim の中身を具体的に書き出すと

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(n/n)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{((n+1)/n)\pi}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{((2n-1)/n)\pi}}\right) \cdots\cdots ④$$

④ 式は以下の網目部の面積を表しています．

そして，$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で n 等分された長方形の横の長さ $1/n$ を無限に小さくしていく（$n \to \infty$ とする）と，面積は $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ に収束します．(詳細な議論は区分求積法を学んだ教材を復習してください.）したがって

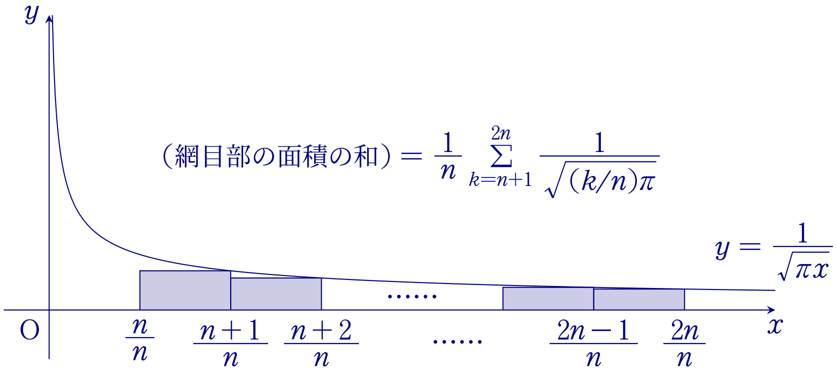
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$



を得ます．それでは，続いて不等式 ② の最左辺について考えてみましょう．
② の最左辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$
$$=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}\ \cdots\cdots ⑤$$

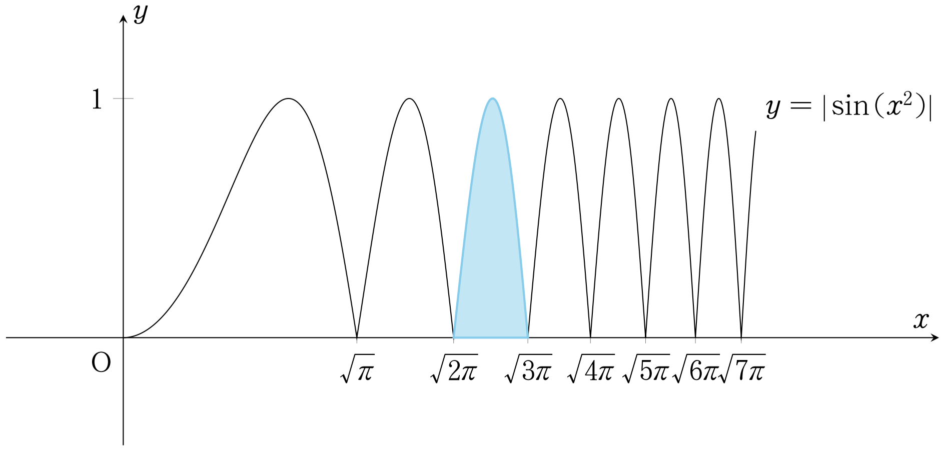
以下が参考図です．



②，③，⑤ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}B_n=\boldsymbol{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}}$ となります． ……(答)

1.4 研究

1.3 節では，式変形により解き進めましたが一体何を計算していたのでしょう．まず，A_k の定積分がどの図形の面積を表すかを考えてみましょう．以下の図に $y=|\sin(x^2)|$ のグラフを描画します．また，$A_2=\int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}}|\sin(x^2)|\,dx$ に対応する部分を水色で塗りつぶします．$y=|\sin(x^2)|$ は $x=\sqrt{m\pi}$ (m は 0 以上の整数) のときに $y=0$ となります．したがって，お山が連なった形状となります．そのお山を左から順に 0 番目，1 番目，… としていくと，k 番目のお山の面積が A_k となるわけです．



y
1
y = |sin(x²)|
x
O
√π
√2π
√3π
√4π
√5π
√6π
√7π

CHAPTER 2

第2問

2.1　概要

2.2　問題

黒玉3個，赤玉4個，白玉5個が入っている袋から玉を1個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に12個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

（1）どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

（2）どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

2.3　解説

（1）12個の玉の並べ方は ${}_{12}\mathrm{C}_3\cdot{}_9\mathrm{C}_4 = \dfrac{12!}{3!9!}\cdot\dfrac{9!}{4!5!}$ 通りである。この値を N_1 とする。また，12個の玉の並べ方のうちのそれぞれが現れる確率はどの並べ方でも等しく $\dfrac{1}{N_1}$ である。

どの赤玉も隣り合わない並べ方は，黒玉と白玉合計8個をまず並べ，その両端または隙間の9箇所に重複がないように赤玉4個を入れることで得られる。したがって，その総数を N_2 とすると，

$$N_2 = {}_8\mathrm{C}_3\cdot{}_9\mathrm{C}_4 = \frac{8!}{3!5!}\cdot\frac{9!}{4!5!}$$

である。よって求める確率 p は

$$p = \frac{N_2}{N_1} = \frac{8!}{3!5!}\cdot\frac{9!}{4!5!}\cdot\frac{3!9!}{12!}\cdot\frac{4!5!}{9!} = \frac{8!9!}{5!12!} = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{9\cdot10\cdot11\cdot12} = \mathbf{\frac{14}{55}} \quad \cdots\cdots(答)$$

（2）赤玉が隣り合わず，さらに黒玉も隣り合わない並べ方の総数 N_3 を考える。(1)で黒玉と白玉だけを並べた段階において，隣り合う黒玉の状況によって場合分けする。

（i）どの黒玉も隣り合わない場合黒玉と白玉の並べ方は，白玉5個の間と両端の合計6箇所に重複がないように黒玉3個を入れればよいので ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通りである。この間のどこに赤玉を入れても黒玉が隣接することはないので，赤玉まで含めた並べ方は $20\cdot{}_9\mathrm{C}_4 = 20\cdot126 = 2520$ 通りである。

（ii）2個の黒玉が隣り合い，残りの1個とは隣り合っていない場合白玉5個の間と両端の合計6箇所のうち相異なる箇所に,「2個の黒玉」と「1個の黒玉」を1組ずつ入れることで黒玉と白玉の並べ方が作れる。この並べ方は $6\cdot5 = 30$ 通りである。「2個の黒玉」の間には赤玉を入れる必要があり，それ以外の8箇所には残り3個の赤玉をどこに入れても黒玉は隣接しないので，赤玉まで含めた並べ方は $30\cdot{}_8\mathrm{C}_3 = 30\cdot56 = 1680$ 通りである。

（iii）3 個の黒玉が連続して並ぶ場合白玉 5 個の間と両端の合計 6 箇所のうち 1 箇所に,「3 個の黒玉」を入れることで黒玉と白玉の並べ方が作れる。この並べ方は 6 通りである。「3 個の黒玉」の間 2 箇所にはどちらも赤玉を入れる必要があり，それ以外の 7 箇所には残り 2 個の赤玉をどこに入れても黒玉は隣接しないので，赤玉まで含めた並べ方は $6 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 = 6 \cdot 21 = 126$ 通りである。

よって，$N_3 = 2520 + 1680 + 126 = 4326$ であるから，

$$q = \frac{N_3}{N_2} = \frac{4326}{7056} = \mathbf{\frac{103}{168}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

2.4　研究

CHAPTER 3

第3問

3.1　概要

3.2　問題

a を実数とし，座標平面上の点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

（1）C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

（2）a は（1）で求めた範囲にあるとする。C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする。$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するような a の範囲を求めよ。

3.3　解説

3.4　研究

CHAPTER 4

第4問

4.1　概要

4.2　問題

座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 2,\ 3)$ を考える。

（1）$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

（2）点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

（3）点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O，H，B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。

4.3　解説

4.4　研究

CHAPTER 5

第5問

5.1　概要

5.2　問題

整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を考える。

（1）$g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

（2）a，b を実数とし，$h(x)=x^2+ax+b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a，b の組を求めよ。

5.3　解説

5.4　研究

CHAPTER 6

第6問

6.1 概要

6.2 問題

O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を S とする。
以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

（1）座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

（2）座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(iii) $\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない。

(v) 線分 NP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点に持つ。

6.3 解説

6.4 研究