入試数学を研究しよう

東京大学　理科

やさしい理系お兄ちゃん

2023

Contents

0 はじめに **3**
0.1 本書の概要 . . . 3
0.2 本書の注意事項 . . . 3

1 第 1 問 **4**
1.1 概要 . . . 4
1.2 問題 . . . 4
1.3 解説 . . . 4
1.4 研究 . . . 7

2 第 2 問 **8**
2.1 概要 . . . 8
2.2 問題 . . . 8
2.3 解説 . . . 8
2.4 研究 . . . 8

3 第 3 問 **9**
3.1 概要 . . . 9
3.2 問題 . . . 9
3.3 解説 . . . 9
3.4 研究 . . . 9

4 第 4 問 **10**
4.1 概要 . . . 10
4.2 問題 . . . 10
4.3 解説 . . . 10
4.4 研究 . . . 10

5 第 5 問 **11**
5.1 概要 . . . 11
5.2 問題 . . . 11
5.3 解説 . . . 11
5.4 研究 . . . 11

6 第 6 問 **12**
6.1 概要 . . . 12
6.2 問題 . . . 12
6.3 解説 . . . 12
6.4 研究 . . . 12

CHAPTER 0

はじめに

0.1　本書の概要

0.2　本書の注意事項

ここでは，本書の書き方に関する注意事項を説明します．各大問の解説の節において，**黒字**で書かれている箇所は解答として最低限書けば十分であると考えている内容で，その他の記述や詳細な説明を青字で書いている．

CHAPTER 1

第1問

1.1 概要

本問の構成は，（１）で積分の不等式評価を行い，それを元に（２）で極限値を求める流れとなっています．このような形式の問題では，（１）の不等式評価の方が難しい傾向にあります．なぜなら大抵の場合，不等式評価をした結果に，はさみうちの原理を適用すれば（２）の極限値は求められるからです．そのため，（１）をクリアした方は（２）もクリアしていくと予想され，点数の差がつく問題であると考えられます．

1.2 問題

（１）正の整数 k に対し，

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

（２）正の整数 n に対し，

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

1.3 解説

（１）A_k に関して，被積分関数が絶対値の形となっています．積分の計算をするためには絶対値を外す必要がありますが，本問では不等式評価をするのみであるので，一旦は置いておきます．絶対値の中に注目してみましょう．$\sin(x^2)$ は $f(x) = \sin x$，$g(x) = x^2$ としたときの合成関数 $f(g(x))$ になっています．被積分関数が合成関数になっているとき，$t = g(x)$ と置換するとうまくいくことが多いです（経験則です）．
$t = x^2$ と置換すると

$$A_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

x	$\sqrt{k\pi} \to \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi \to (k+1)\pi$

$$\frac{dt}{dx} = 2x = 2\sqrt{t}$$

ほら，積分区間，被積分関数の両方とも見た目がスッキリしたでしょう？次に考えるべきは，積分の不等式評価です．積分区間は $(0<)\ k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ となっています．これは，t の最大値が $(k+1)\pi$ で最小値が $k\pi$ であることを表しています．したがって，$0 < k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ より

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqq \frac{1}{t} \leqq \frac{1}{k\pi} \qquad \therefore\ \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{1}{\sqrt{t}} \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \cdots\cdots ①$$

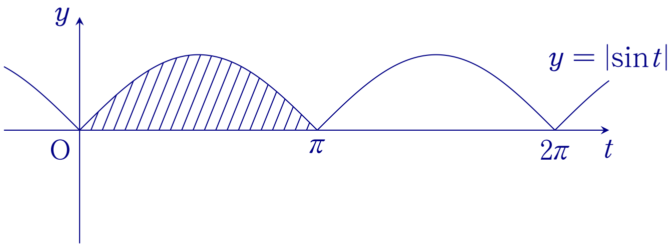
が得られます．見えてきましたか？
ゆえに（① と $|\sin t \geqq 0|$ より）

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt \leqq A_k \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt$$

被積分関数 $\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}$ のうち，分子の $\sqrt{t}$ の部分のみ不等式で評価をしました．分母の $|\sin t|$ も同様にやったらどうでしょう？より式が複雑になってしまいそうです．ここまで来たら，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = 2$ となることが示れば証明完了ですね．$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt$ は $y = |\sin t|$ のうち，下図の斜線部のようにお山 1 つ分の面積と等しくなります.（お山 1 つ分の面積が 2 になることは覚えておきましょう！）



したがって，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \Big[-\cos t \Big]_0^{\pi} = -(-1)-(-1) = 2$ となる．
$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = 2$ であるから，（この程度の計算の過程は記述をしなくてよいと**個人的に**思います.）

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \blacksquare$$

（2）B_n は A_k と形は似ていますが，少々異なる部分があります．したがって，B_n を A_k を用いて表すことから始めましょう．慣れている人は素早く変形できるかもしれませんが，ここではそのような**プロ**の頭の中を覗いてみましょう．文字で一般化されている場合は，具体的な数字を当てはめることで考えやすくなります．
ここで，B_n の $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は邪魔なので，それを除いた $\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$ を $B_n{}'$ と置きます．

（i）$n=1$ のとき

$$B_1{}' = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} |\sin(x^2)|\, dx = A_1$$

（ii）$n=2$ のとき

$$B_2{}' = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\, dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\, dx + \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\, dx = A_2 + A_3$$

（iii）$n=3$ のとき

$$B_3{}' = \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{4\pi}}^{\sqrt{5\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{5\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\
&= A_3 + A_4 + A_5
\end{aligned}
$$

ここまで来れば見えてくるでしょう．

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} B_n{}' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$$

が得られます．

$B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，（1）で得られた不等式より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \cdots\cdots ②$$

この不等式②が得られたら，あとは両側の極限をとりはさみうつだけです（簡単なわけではないです）．まずは，形がシンプルな最右辺の極限を考えてみましょう．

②の最右辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right]_1^2 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots\cdots ③$$

と… サクッと計算しましたが，すんなり受け入れられた方は次に進みましょう．計算の過程を詳細に説明します．lim，Σ，$\dfrac{1}{n}$ の形が見えたら区分求積法を考えましょう．よく見る区分求積法は

定理 1.3.1: 定積分と区分求積法

$0 \leqq x \leqq 1$ において連続な関数 $h(x)$ において

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\,dx$$

が成り立つ．

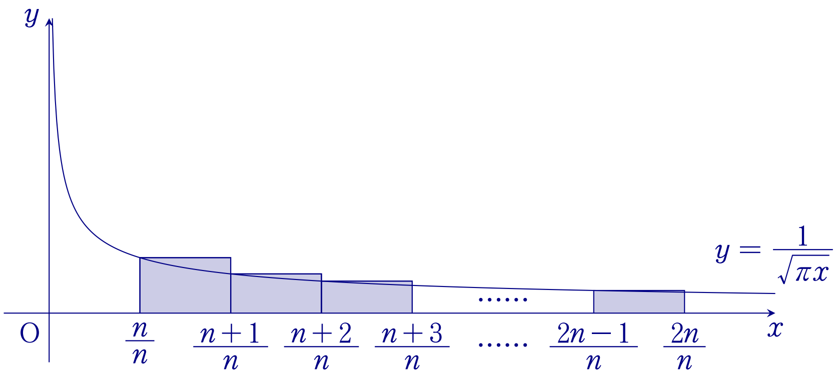
ですね．こちらの形に寄せていくと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$

となります．この時点で定理 1.3.1 における $h(x)$ は $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ となることが分かります． 問題なのは $k = n$ から $k = 2n-1$ までの和であるシグマの扱いです．lim の中身を具体的に書き出すと

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(n/n)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{((n+1)/n)\pi}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{((2n-1)/n)\pi}} \right) \cdots\cdots ④$$

④式は以下の網目部の面積を表しています．



そして，$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で n 等分された長方形の横の長さを無限に小さくしていく（$n \to \infty$ とする）と，

面積は $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ に収束します.（詳細な議論は区分求積法を学んだ教材を復習してください.）したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

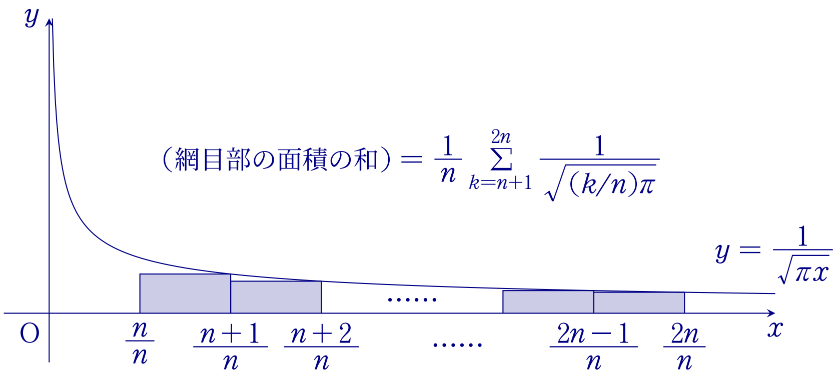
を得ます．それでは，続いて不等式 ② の最左辺について考えてみましょう．

② の最左辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$

$$=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}\quad\cdots\cdots ⑤$$

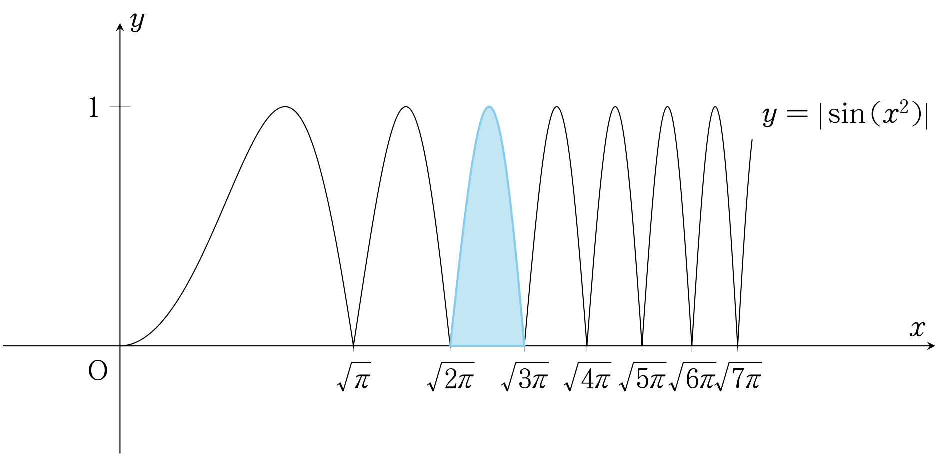
以下が参考図です.



②，③，⑤ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}B_n=\boldsymbol{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}}$ となります. ……(答)

1.4　研究

1.3 節では，式変形により解き進めましたが一体何を計算していたのでしょう．まず，A_k の定積分がどの図形の面積を表すかを考えてみましょう．以下の図に $y=|\sin(x^2)|$ のグラフを描画します．また，$A_2=\int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}}|\sin(x^2)|\,dx$ に対応する部分を水色で塗りつぶします．$y=|\sin(x^2)|$ は $x=\sqrt{m\pi}$（m は 0 以上の整数）のときに $y=0$ とな



ります．したがって，お山が連なった形状となります．そのお山を左から順に 0 番目，1 番目，… としていくと，k 番目のお山の面積が A_k となるわけです.

CHAPTER 2

第2問

2.1　概要

2.2　問題

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

（1）どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

（2）どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

2.3　解説

2.4　研究

CHAPTER 3

第3問

3.1　概要

3.2　問題

a を実数とし，座標平面上の点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

（1）C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

（2）a は（1）で求めた範囲にあるとする。C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする。$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するような a の範囲を求めよ。

3.3　解説

3.4　研究

CHAPTER 4

第4問

4.1　概要

4.2　問題

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(1, 1, 1), C(1, 2, 3) を考える。

（1）$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

（2）点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

（3）点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。

4.3　解説

4.4　研究

CHAPTER 5

第5問

5.1　概要

5.2　問題

整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を考える。

（1）$g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

（2）a，b を実数とし，$h(x)=x^2+ax+b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a，b の組を求めよ。

5.3　解説

5.4　研究

CHAPTER 6

第6問

6.1　概要

6.2　問題

O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を S とする。
以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

（1）座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

（i）$\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

（ii）線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

（2）座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

（iii）$\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

（iv）線分 ON と S は共有点を持たない。

（v）線分 NP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点に持つ。

6.3　解説

6.4　研究