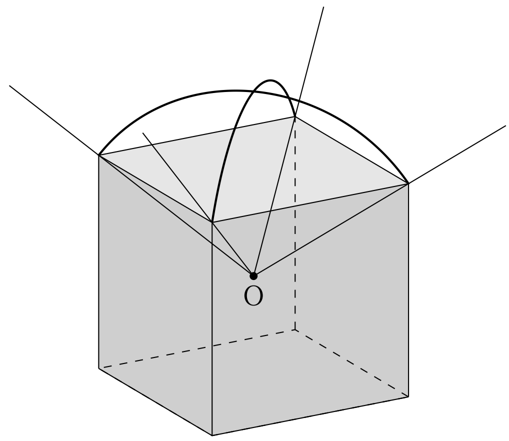
6.3　解説

•(1) 右に図を示す。立方体の表面のうち上面を除く面が S である。点 P が動きうる範囲は以下の 2 通りで表現できる。

- •1. 立方体の表面および内部
- •2. 原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の球の表面および内部のうち，立方体の上面からはみ出ている部分

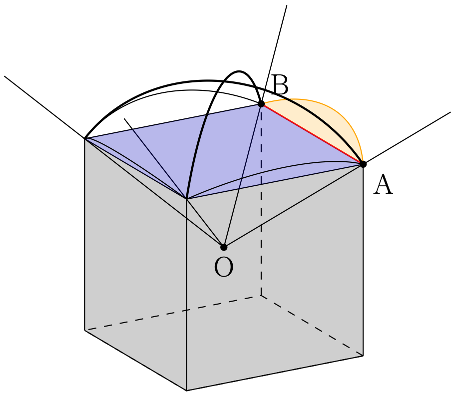


「立方体の上面を底面として点 O を頂点とする正四角錐」と,「原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の球の表面および内部のうち，立方体の上面からはみ出ている部分」を合わせた図形の体積は,「原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の球」の体積の 1/6 となる。また,「立方体の上面を底面として点 O を頂点とする正四角錐」の体積に関しても，立方体の体積の 1/6 であるから,

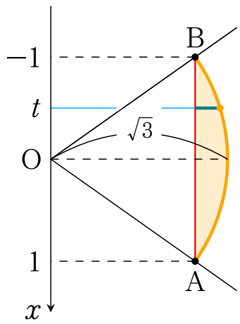
V の体積は,

$$\frac{4}{3}\pi\cdot(\sqrt{3})^3\cdot\frac{1}{6}+2^3\cdot\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{20}{3}}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

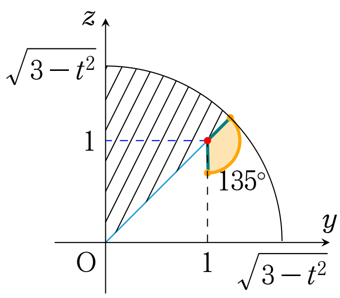
•(2) 3 点 O，N，P を条件を満たしながら同一直線上にとると，点 P の動きうる範囲は (1) と同様の V となる。したがって，W は V を包含するから，$W\cap\overline{V}$ の部分について考える。$W\cap\overline{V}=U$ とおく。U は立方体の上面の各辺に対するものとして 4 等分することができる。下図のように立方体の上面に線分 AB をとり，線分 AB に対する U の一部 U_{AB} を考える。オレンジの網目部を線分 AB を回転の軸として 135° 回転させた立体が U_{AB} である。



全体図



$y=z$ 平面



$x=t$ で切断した yz 平面
（斜線部は V の断面）

U の体積を求める。U の体積は U_{AB} の体積の 4 倍である。オレンジの網目部は $y=z$ 平面上にあり，オレンジの網目部と平面 $x=t$ の交線である図の緑線について，その長さは，$\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}$ となる。この緑線を線分 AB を回転の軸として 135° 回転させた図形の面積は,

$$\pi\cdot\left(\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{135}{360}=\frac{3}{8}\pi\left(5-t^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-t^2}\right)$$

となる。これを t について −1 から 1 まで積分すると，U_{AB} の体積が求まる。

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}\pi\int_{-1}^{1}\left(5-t^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-t^2}\right)dt&=\frac{3}{4}\pi\int_{0}^{1}\left(5-t^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-t^2}\right)dt\\&=\frac{3}{4}\pi\left[5t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^1\sqrt{3-t^2}\,dt\\&=\frac{3}{4}\pi\left(5-\frac{1}{3}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{3-3\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^{\alpha} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^{\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\left[\, \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \,\right]_0^{\alpha} \\
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right) \\
&= \frac{7}{2} - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{4}\pi \sin\alpha\cos\alpha \\
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{4}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
&= 2\pi - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi
\end{aligned}
$$

したがって，U の体積は,

$$4\cdot\left(2\pi - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi\right) = (8 - 9\sqrt{2}\alpha)\pi$$

よって，求めるべき W の体積は,

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{20}{3} + (8 - 9\sqrt{2}\alpha)\pi = \boldsymbol{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 8 - 9\sqrt{2}\alpha\right)\pi + \frac{20}{3}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$