

1.3 解説

- (1) A_k に関して、被積分関数が絶対値の形となっています。積分の計算をするためには絶対値を外す必要がありますが、本問では不等式評価をするのみであるので、一旦は置いておきます。絶対値の中に注目してみましょう。 $\sin(x^2)$ は $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$ としたときの合成関数 $f(g(x))$ になっています。被積分関数が合成関数になっているとき、 $t = g(x)$ と置換するとうまくいくことが多いです（経験則です）。

$t = x^2$ と置換すると

$$A_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & \sqrt{k\pi} \rightarrow \sqrt{(k+1)\pi} \\ \hline t & k\pi \rightarrow (k+1)\pi \\ \hline \end{array} \quad \frac{dt}{dx} = 2x = 2\sqrt{t}$$

ほら、積分区間、被積分関数の両方とも見た目がスッキリしたでしょう？次に考えるべきは、積分の不等式評価です。積分区間は $(0 <) k\pi \leq t \leq (k+1)\pi$ となっています。これは、 t の最大値が $(k+1)\pi$ で最小値が $k\pi$ であることを表しています。したがって、 $0 < k\pi \leq t \leq (k+1)\pi$ より

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k\pi} \quad \therefore \quad \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \dots\dots \textcircled{1}$$

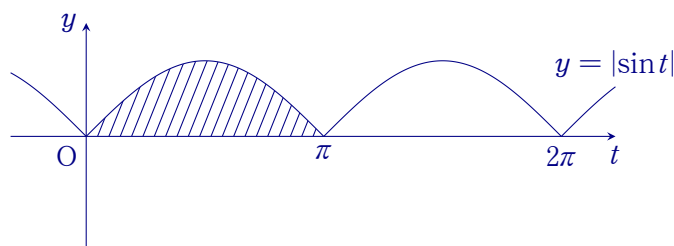
が得られます。見えてきましたか？

ゆえに (① と $|\sin t| \geq 0$ より)

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} &\leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}} \\ \therefore \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} &\leq A_k \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}} \\ \therefore \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt &\leq A_k \leq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt \end{aligned}$$

被積分関数 $\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}$ のうち、分子の \sqrt{t} の部分のみ不等式で評価をしました。分母の $|\sin t|$ も同様にやっ

らどうでしょう？より式が複雑になってしまいそうです。ここまで来たら、 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$ となることが示れば証明完了ですね。 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt$ は $y = |\sin t|$ のうち、下図の斜線部のようにお山1つ分の面積と等しくなります。(お山1つ分の面積が2になることは覚えておきましょう！)



したがって、 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t dt = [-\cos t]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2$ となる。

$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$ であるから、（この程度の計算の過程は記述をしなくてよいと個人的に思います。）

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \quad \blacksquare$$

- (2) B_n は A_k と形は似ていますが、少々異なる部分があります。したがって、 B_n を A_k を用いて表すことから始めましょう。慣れている人は素早く変形できるかもしれませんが、ここではそのような**プロ**の頭の中を覗いてみましょう。文字で一般化されている場合は、具体的な数字を当てはめることで考えやすくなります。

ここで、 B_n の $\frac{1}{\sqrt{n}}$ は邪魔なので、それを除いた $\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx$ を B_n' と置きます。

(i) $n = 1$ のとき

$$B_1' = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} |\sin(x^2)| dx = A_1$$

(ii) $n = 2$ のとき

$$B_2' = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)| dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)| dx + \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)| dx = A_2 + A_3$$

(iii) $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} B_3' &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)| dx \\ &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)| dx + \int_{\sqrt{4\pi}}^{\sqrt{5\pi}} |\sin(x^2)| dx + \int_{\sqrt{5\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)| dx \\ &= A_3 + A_4 + A_5 \end{aligned}$$

ここまで来れば見えてくるでしょう。

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} B_n' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$$

が得られます。

$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから、(1) で得られた不等式より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \dots\dots \textcircled{2}$$

この不等式 ② が得られたら、あとは両側の極限をとりはさみうっただけです (簡単なわけではないです)。まずは、形がシンプルな最右辺の極限を考えてみましょう。

② の最右辺について、区分求積法の原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}} dx = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \right]_1^2 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \dots\dots \textcircled{3}$$

と...サクッと計算しましたが、すんなり受け入れられた方は次に進みましょう。計算の過程を詳細に説明します。 \lim , Σ , $\frac{1}{n}$ の形が見えたら区分求積法を考えましょう。よく見る区分求積法は

定理 1.3.1: 定積分と区分求積法

$0 \leq x \leq 1$ において連続な関数 $h(x)$ において

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x) dx$$

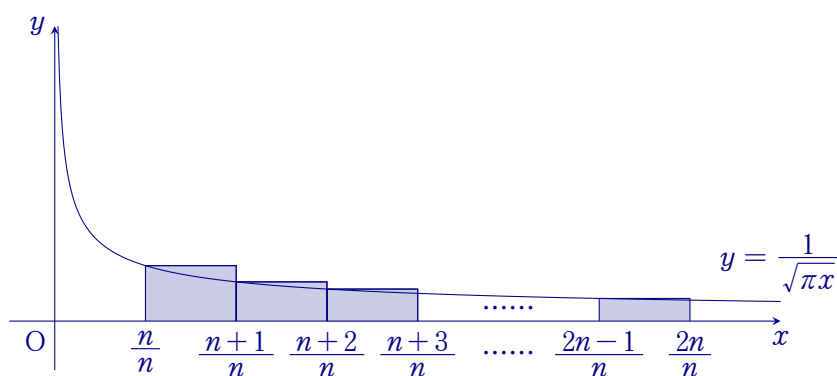
が成り立つ。

ですね。こちらの形に寄せていくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$

となります。この時点で定理??における $h(x)$ は $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ となることが分かります。問題なのは $k = n$ から $k = 2n - 1$ までの和であるシグマの扱いです。 \lim の中身を具体的に書き出すと

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{(n/n)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{((n+1)/n)\pi}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{((2n-1)/n)\pi}} \right) \dots\dots \textcircled{4}$$



④ 式は以下の網目部の面積を表しています。

そして、 $1 \leq x \leq 2$ の範囲で n 等分された長方形の横の長さを無限に小さくしていく ($n \rightarrow \infty$ とする) と、面積は $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ に収束します。(詳細な議論は区分求積法を学んだ教材を復習してください。) したがって

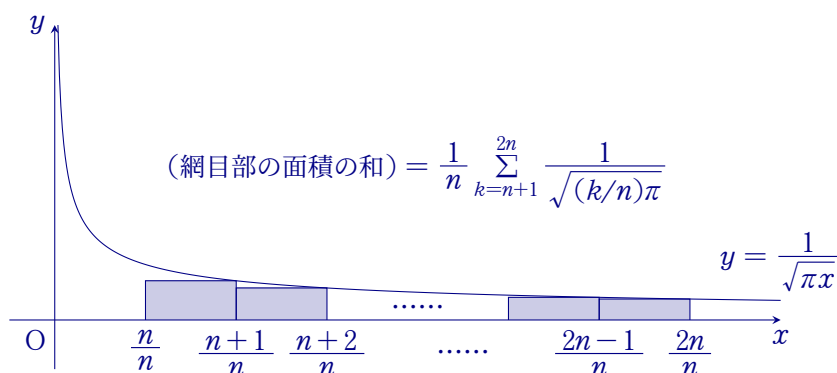
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

を得ます。それでは、続いて不等式 ② の最左辺について考えてみましょう。

② の最左辺について、区分求積法の原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}} dx = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

以下が参考図です。



②, ③, ⑤ より、はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}$ となります。

……(答)