入試数学を研究しよう

東京大学　理科

やさしい理系お兄ちゃん

2023

Contents

CHAPTER 0

はじめに

0.1　本書の概要

0.2　本書の注意事項

ここでは，本書の書き方に関する注意事項を説明します．各大問の解説の節において，**黒字**で書かれている箇所は解答として最低限書けば十分であると考えている内容で，その他の記述や詳細な説明を青字で書いている．

CHAPTER 1

第1問

1.1　概要

本問の構成は，（１）で定積分の不等式評価を行い，得られた不等式を元に（２）で極限値を求める流れとなっています．このような形式の問題では，方針が立てにくいという点で（１）の不等式評価の方が難しい傾向にあります．なぜなら大抵の場合，不等式評価をした結果に対してはさみうちの原理を適用すれば（２）の極限値は求められるからです．そのため，（１）をクリアした受験生は（２）もクリアしていくと予想され，点数の差がつく問題であると考えられます．

1.2　問題

（１）正の整数 k に対し，

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

（２）正の整数 n に対し，

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

1.3　解説

（１）A_k に関して，被積分関数が絶対値の形となっています．積分の計算をするためには絶対値を外す必要がありますが，本問では不等式評価をするのみであるので，一旦は置いておきます．絶対値の中に注目してみましょう．$\sin(x^2)$ は $f(x) = \sin x$，$g(x) = x^2$ としたときの合成関数 $f(g(x))$ になっています．被積分関数が合成関数になっているとき，$t = g(x)$ と置換するとうまくいくことが多いです（経験則です）．

$t = x^2$ と置換する．積分区間を考えると $x > 0$ であることから，$x = \sqrt{t}$ であることが分かる．

$$\therefore\ A_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

x	$\sqrt{k\pi} \to \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi \to (k+1)\pi$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ほら！積分区間，被積分関数の両方とも見た目がスッキリしたでしょう？次に考えるべきは，積分の不等式評価です．積分区間は $k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ となっています．これより t の最大値が $(k+1)\pi$ で最小値が $k\pi$ であることが分かります．したがって，$0 < k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ より

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqq \frac{1}{t} \leqq \frac{1}{k\pi} \qquad \therefore\ \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{1}{\sqrt{t}} \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \cdots\cdots ①$$

が得られます．示すべき不等式の形が見えてきました！

ゆえに（① と $|\sin t| \geqq 0$ より）

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{k\pi}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt \leqq A_k \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt$$

被積分関数 $\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}$ のうち，分子の $\sqrt{t}$ の部分のみ不等式で評価をしました．分母の $|\sin t|$ も同様にやったらどうでしょう？より式が複雑になってしまいそうです．ここまで来たら，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = 2$ となることが示されれば証明完了ですね．周期性から，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt$ の値は $y = |\sin t|$ のお山 1 つ分（下図の斜線部）の面積と等しくなります.（お山 1 つ分の面積が 2 になることは覚えておきましょう！）

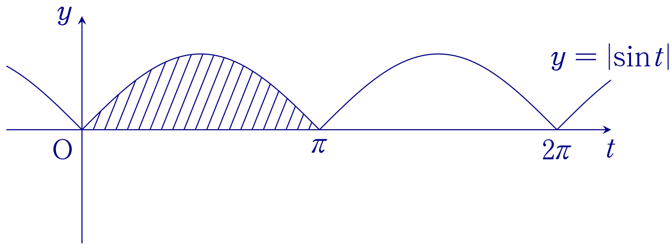


Figure 1.3.1: お山 1 つ分の面積

したがって，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = -(-1)-(-1) = 2$ となる．

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = 2$ であるから，（この程度の計算の過程は記述をしなくてよいと**個人的に**思います.）

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \blacksquare$$

（2）B_n は A_k と形は似ていますが，少々異なる部分があります．まずは，B_n を A_k を用いて表すことから始めましょう．慣れている人は素早く変形できるかもしれませんが，ここではそのような**プロ**の頭の中を覗いてみましょう．文字（B_n の n のこと）で一般化されている場合は，具体的な数字を当てはめることで考えやすくなります．ここで，B_n の $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は邪魔なので，それを除いた部分である $\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$ を $B_n{}'$ と置きます．

（ｉ）$n=1$ のとき

$$B_1{}' = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = A_1$$

（ii）$n=2$ のとき

$$B_2{}' = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx = A_2 + A_3$$

（iii）$n=3$ のとき

$$\begin{aligned} B_3{}' &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\ &= \int_{\sqrt{3\pi}}^{\sqrt{4\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{4\pi}}^{\sqrt{5\pi}} |\sin(x^2)|\,dx + \int_{\sqrt{5\pi}}^{\sqrt{6\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \\ &= A_3 + A_4 + A_5 \end{aligned}$$

ここまで来れば見えてくるでしょう．

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} B_n{}' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$$

が得られます．

$B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，（１）で得られた不等式より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \cdots\cdots ②$$

この不等式 ② が得られたら，あとは両側の極限をとってはさみうつだけです（簡単なわけではないです）．
まずは，形がシンプルな最右辺の極限を考えてみましょう．
② の最右辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right]_1^2 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots\cdots ③$$

と… サクッと計算しましたが，すんなり受け入れられた方は次に進みましょう．計算の過程を詳細に説明します．lim，Σ，$\dfrac{1}{n}$ の形が見えたら区分求積法を考えましょう．よく見る区分求積法は

定理 1.3.1: 定積分と区分求積法

$0 \leqq x \leqq 1$ において連続な関数 $h(x)$ において

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\,dx$$

が成り立つ．

ですね．こちらの形に寄せていく（$1/n$ と k/n の形をつくる）と

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$

となります．この時点で定理 1.3.1 における $h(x)$ は $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ となることが分かります． 問題なのは $k=n$ から $k=2n-1$ までの和であるシグマの扱いです．lim の中身を具体的に書き出すと

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(n/n)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{((n+1)/n)\pi}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{((2n-1)/n)\pi}} \right) \cdots\cdots ④$$

④ 式は以下の網目部の面積を表しています．
そして，$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で n 等分された長方形の横の長さ $1/n$ を無限に小さくしていく（$n \to \infty$ とする）

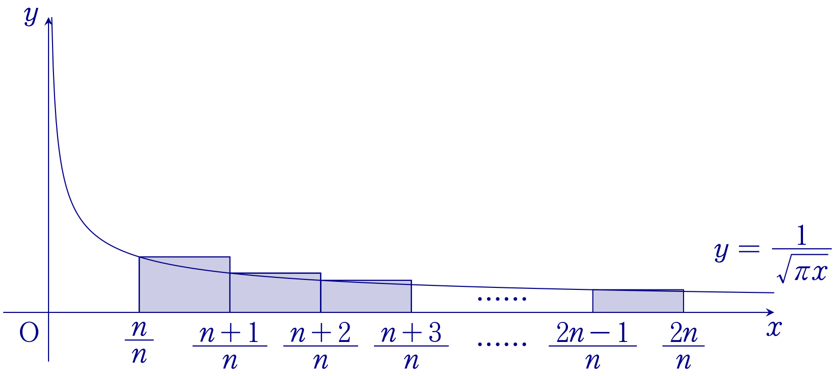


Figure 1.3.2: 区分求積法

と，面積は $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ に収束します.(詳細な議論は区分求積法を学んだ教材を復習してください.）したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

を得ます．それでは，続いて不等式 ② の最左辺について考えてみましょう.

② の最左辺について，区分求積法の原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{(k/n)\pi}}$$
$$=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,dx=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}\ \cdots\cdots ⑤$$

以下が参考図です.

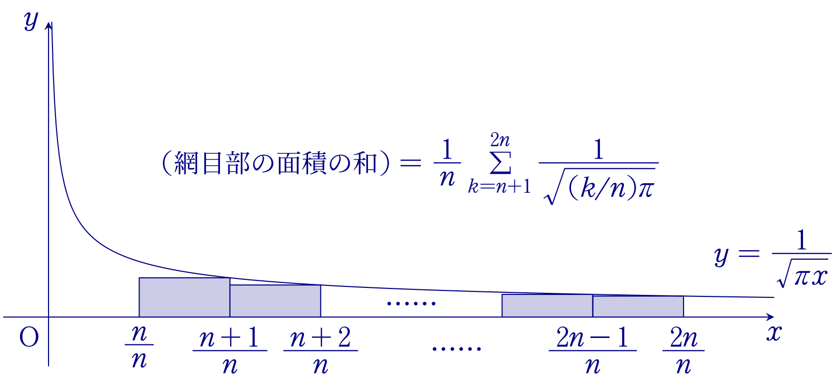


Figure 1.3.3: 区分求積法

②，③，⑤ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}B_n=\frac{\mathbf{2(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}$ となります. ……(答)

1.4 研究

1.4.1 A_k は何を表しているか？

1.3 節では，式変形により解き進めましたが，一体何を計算していたのでしょうか？まず，A_k の定積分がどの図形の面積を表すかを考えてみましょう．以下の図 1.4.1 に $y=|\sin(x^2)|$ のグラフを描画します．$y=|\sin(x^2)|$ は $x=\sqrt{m\pi}$ (m は 0 以上の整数) のときに $y=0$ となり，お山が連なった形状となります．そのお山を左から順

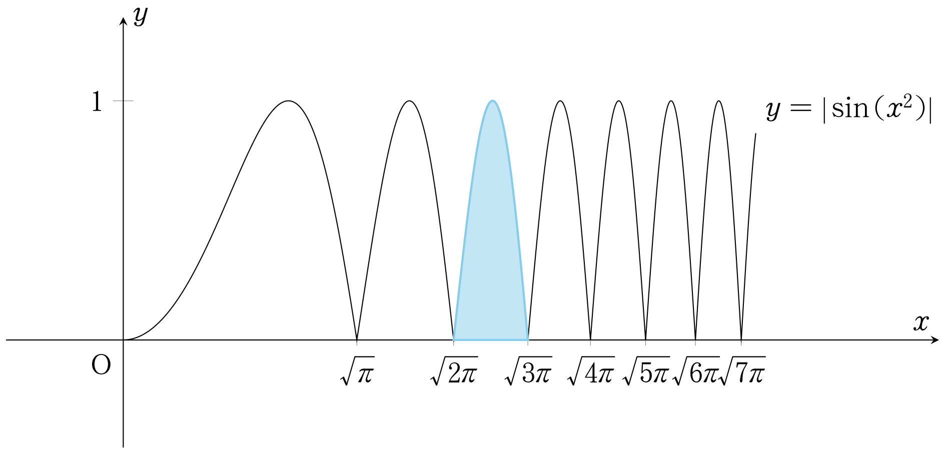


Figure 1.4.1: $y = |\sin(x^2)|$ の概形

に 0 番目，1 番目，... としていくと，k 番目のお山の面積が A_k となるわけです．例として，水色で塗りつぶした部分が $A_2 = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$ に対応しています．

1.4.2 A_k を図形的に評価する

1.4.1 項で A_k が何を表しているかが分かりました．では，以下の図のように下から評価する[1]ことはできないでしょうか？$k = 2$ の場合を考えてみましょう．

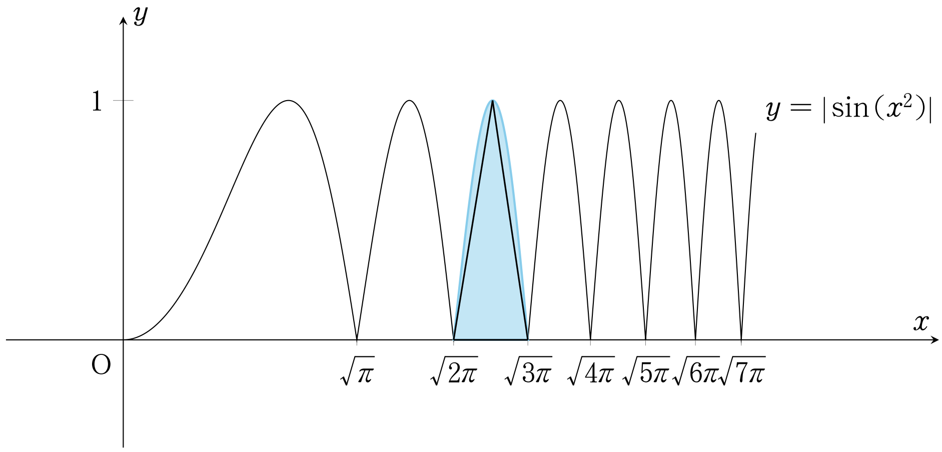


Figure 1.4.2: A_2 の面積を三角形の面積で下から評価する

もし

$$(\text{三角形の面積}) \leqq A_2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{(2+1)\pi}} \leqq A_2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2} \leqq A_2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq A_2$$

が真であれば，下から評価できるということになります．要は，議論の流れとして

(i) $\dfrac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2} \leqq A_2$ である．

(ii) また，$\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq \dfrac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2}$ である．

(iii) したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq A_2$ である．

[1]「下から評価する」とは，$x \leqq A_k$ もしくは $x < A_k$ を満たす x を求めることです．同様に「上から評価する」という言い回しもあります．

と言いたいわけです．(i) は図形より正しいとしてよいでしょう．しかしながら，(ii) に関して

$$\frac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3\pi}}=\frac{3\pi-\sqrt{6}\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}=\frac{(3-\sqrt{6})\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}<\frac{(3-2.4)\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}<\frac{0.6\cdot 3.2-2}{2\sqrt{3\pi}}<0$$

であるから，(ii) は成り立ちません．この例では $k=2$ のときを計算しましたが，すべての正の整数 k について同様の結果になります．よって，図形的に下から評価することは難しいでしょう．仮に，何らかの方法で下から評価することができても，上から評価するのはさらに難しいでしょう．

CHAPTER 2

第2問

2.1 概要

2.2 問題

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

（1）どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

（2）どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

2.3 解説

（1）12 個の玉の並べ方は ${}_{12}\mathrm{C}_3 \cdot {}_9\mathrm{C}_4 = \dfrac{12!}{3!9!} \cdot \dfrac{9!}{4!5!}$ 通りである。この値を N_1 とする。また，12 個の玉の並べ方のうちのそれぞれが現れる確率はどの並べ方でも等しく $\dfrac{1}{N_1}$ である。
どの赤玉も隣り合わない並べ方は，黒玉と白玉合計 8 個をまず並べ，その両端または隙間の 9 箇所に重複がないように赤玉 4 個を入れることで得られる。したがって，その総数を N_2 とすると，

$$N_2 = {}_8\mathrm{C}_3 \cdot {}_9\mathrm{C}_4 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{9!}{4!5!}$$

である。よって求める確率 p は

$$p = \frac{N_2}{N_1} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{9!}{4!5!} \cdot \frac{3!9!}{12!} \cdot \frac{4!5!}{9!} = \frac{8!9!}{5!12!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \boldsymbol{\frac{14}{55}} \quad \cdots\cdots(答)$$

（2）赤玉が隣り合わず，さらに黒玉も隣り合わない並べ方の総数 N_3 を考える。(1) で黒玉と白玉だけを並べた段階において，隣り合う黒玉の状況によって場合分けする。

（i）どの黒玉も隣り合わない場合黒玉と白玉の並べ方は，白玉 5 個の間と両端の合計 6 箇所に重複がないように黒玉 3 個を入れればよいので ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通りである。この間のどこに赤玉を入れても黒玉が隣接することはないので，赤玉まで含めた並べ方は $20 \cdot {}_9\mathrm{C}_4 = 20 \cdot 126 = 2520$ 通りである。

（ii）2 個の黒玉が隣り合い，残りの 1 個とは隣り合っていない場合白玉 5 個の間と両端の合計 6 箇所のうち相異なる箇所に，「2 個の黒玉」と「1 個の黒玉」を 1 組ずつ入れることで黒玉と白玉の並べ方が作れる。この並べ方は $6 \cdot 5 = 30$ 通りである。「2 個の黒玉」の間には赤玉を入れる必要があり，それ以外の 8 箇所には残り 3 個の赤玉をどこに入れても黒玉は隣接しないので，赤玉まで含めた並べ方は $30 \cdot {}_8\mathrm{C}_3 = 30 \cdot 56 = 1680$ 通りである。

（iii）3 個の黒玉が連続して並ぶ場合白玉 5 個の間と両端の合計 6 箇所のうち 1 箇所に,「3 個の黒玉」を入れることで黒玉と白玉の並べ方が作れる。この並べ方は 6 通りである。「3 個の黒玉」の間 2 箇所にはどちらも赤玉を入れる必要があり，それ以外の 7 箇所には残り 2 個の赤玉をどこに入れても黒玉は隣接しないので，赤玉まで含めた並べ方は $6 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 = 6 \cdot 21 = 126$ 通りである。

よって，$N_3 = 2520 + 1680 + 126 = 4326$ であるから，

$$q = \frac{N_3}{N_2} = \frac{4326}{7056} = \boldsymbol{\frac{103}{168}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

2.4　研究

CHAPTER 3

第3問

3.1　概要

3.2　問題

a を実数とし，座標平面上の点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

（1）C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

（2）a は（1）で求めた範囲にあるとする。C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする。$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するような a の範囲を求めよ。

3.3　解説

（1）円 C を表す方程式は $x^2 + (y-a)^2 = 1$ である。C と $y = x^2$ が接するときを考える。

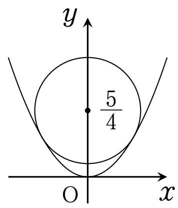
$x^2 + (y-a)^2 = 1$ と $y = x^2$ を連立すると，

$$x^2 + (x^2 - a)^2 = 1 \qquad \therefore \quad (x^2)^2 - (2a-1)x^2 + a^2 - 1 = 0$$

となるから，

$$(2a-1)^2 - 4(a^2-1) = 0 \qquad \therefore \quad a = \frac{5}{4}$$

のときに接する。図と合わせて，求めるべき a の範囲は，



$$\boldsymbol{\frac{5}{4} < a} \quad \cdots\cdots(答)$$

（2）S 上の点 P の座標は $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta < 0$ を満たす媒介変数 θ を用いて，

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = a + \sin\theta \end{cases}$$

と表せる。この点 P での C の接線の方程式は，

$$(\cos\theta)\cdot x + (\sin\theta)\cdot(y-a) = 1 \cdots\cdots ①$$

① と $y = x^2$ を連立すると，

$$(\cos\theta)\cdot x + (\sin\theta)\cdot(x^2 - a) = 1 \quad \therefore\ (\sin\theta)\cdot x^2 + (\cos\theta)\cdot x - a\sin\theta - 1 = 0 \cdots\cdots ②$$

$\sin\theta \fallingdotseq 0$ より，② は 2 次方程式である。2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad \alpha\beta=-a-\frac{1}{\sin\theta}$$

① が $y=x^2$ によって切り取られてできる線分の長さ L_P は，① の傾きが $-\dfrac{1}{\tan\theta}$ であることから，

$$L_\mathrm{P}=\frac{|\alpha-\beta|}{-\sin\theta}=\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}}{\sqrt{\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}{\sqrt{\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\tan^2\theta}+4a+\frac{4}{\sin\theta}\right)}$$

$t=\dfrac{1}{\sin\theta}$ とおくと，t の範囲は $t\leqq-1$ で，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<0$ から t の値と θ の値は 1 対 1 に対応する。

$${L_\mathrm{P}}^2=t^2(t^2-1+4a+4t)\qquad\therefore\quad \frac{d}{dt}{L_\mathrm{P}}^2=2t(t^2-1+4a+4t)+t^2(2t+4)$$
$$=2t\left\{2\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+4a-\frac{11}{2}\right\}$$

$L_\mathrm{Q}=L_\mathrm{R}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するための必要十分条件は，t の関数 ${L_\mathrm{P}}^2$ が $t\leqq-1$ で単調でないことである。それは，$2\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+4a-\dfrac{11}{2}=0$ が $t\leqq-1$ の範囲に重解でない解をもつことと同値である。

$$4a-\frac{11}{2}<0\quad\therefore\ a<\frac{11}{8}$$

よって，（ 1 ）の条件と合わせて，求めるべき a の範囲は，$\boldsymbol{\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}}$ ……(答)

3.4　研究

CHAPTER 4

第4問

4.1　概要

4.2　問題

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(1, 1, 1), C(1, 2, 3) を考える。

（1）$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

（2）点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

（3）点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。

4.3　解説

（1）点 P の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2x = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = x + y + z = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

より $\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (0,\ -1,\ 1)}$ ……(答)

（2）$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と書ける。$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= -s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (2s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= -4s + 2(2s-1) + 3(1-s) = 1 - 3s = 0 \end{aligned}$$

よって $s = \dfrac{1}{3}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}}$ ……(答)

（3）点 Q から平面 OHB に垂線を下ろし，その垂線と平面 OHB の交点を M とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立である

から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は実数 t, u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2t+u,\ u,\ u)$ と書ける。また，$\overrightarrow{\mathrm{QM}}$ は平面 OAB 上に垂直なので $\overrightarrow{\mathrm{OP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{QM}}$ であり，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{QM}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と書けるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QM}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1+k)\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{3}{2},\ -(1+k),\ 1+k\right)$$

よって

$$\begin{cases} 2t+u = \dfrac{3}{2} \\ u = -(1+k) \\ u = 1+k \end{cases}$$

なので，$t = \dfrac{3}{4}$, $u = 0$ だから $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。

点 M から直線 OH に垂線を下ろし，その垂線と直線 OH の交点を N とする。このとき図より，三角形 OHB 上の点のうち点 M からの距離が最小であるのは点 N，最大であるのは頂点 O, B, H のいずれかである。さらに，三角形 OHB 上を点 X が動くとき，$\mathrm{QX}^2 = \mathrm{QM}^2 + \mathrm{MX}^2$ より QX が最小，最大となる点はそれぞれ MX が最大，最小となる点である。この最小値と最大値が r の最小値と最大値であり，X が動くとき QX は連続的に変化するので求める範囲は（最小値）$\leqq r \leqq$（最大値）の形で表される。

点 N は線分 OH 上にあるので実数 ℓ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と書け，$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \left(\ell\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \ell|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= \ell\left|\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\right|^2 - \frac{3}{4}(2,\ 0,\ 0)\cdot\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\ell - 2 = 0 \end{aligned}$$

即ち $\ell = \dfrac{3}{4}$ である。よって r^2 の最小値は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{QN}}|^2 &= \left|\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\right|^2 = \left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = \left|\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \frac{9}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{17}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2 = \left|\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \frac{9}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{17}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|^2 = \left|\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \frac{25}{144}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{35}{12}$$

より r^2 の最大値は $\dfrac{17}{4}$ である。以上より求める範囲は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{2} \leqq r \leqq \dfrac{\sqrt{17}}{2}}$ ……（答）

4.4　研究

CHAPTER 5

第5問

5.1　概要

5.2　問題

整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を考える。

（1）$g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

（2）a，b を実数とし，$h(x)=x^2+ax+b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a，b の組を求めよ。

5.3　解説

(1) $g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $P(x)$ とすると，

$$g(x)=f(x)\cdot P(x)+r(x)$$

と表せるから，この両辺を 7 乗すると，

$$\begin{aligned} g(x)^7 &= \sum_{r=0}^{6}\left\{{}_7\mathrm{C}_r\cdot\left(f(x)\cdot P(x)\right)^{7-r}\cdot r(x)^r\right\}+r(x)^7 \\ &= f(x)\cdot\sum_{r=0}^{6}\left({}_7\mathrm{C}_r\cdot f(x)^{6-r}\cdot P(x)^{7-r}\cdot r(x)^r\right)+r(x)^7 \end{aligned}$$

したがって，$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは，$r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りに等しい。■

(2) 条件より，$f(x)$ を法として，$h(x)^7\equiv h_1(x)$，$h_1(x)^7\equiv h_2(x)$ がそれぞれ成り立つから，

$$h(x)^{49}=(h(x)^7)^7\equiv h_1(x)^7\equiv h_2(x)\pmod{f(x)}$$

これより，$h(x)^{49}\equiv h(x)\ (\mathrm{mod}\ f(x))$ となるような a，b の組を求める。ここで，$p(x)$ を次のようにおく。

$$p(x)=h(x)^{49}-h(x)\quad\therefore\ p'(x)=49h(x)^{48}\cdot h'(x)-h'(x)$$

そして，

$$h(x)^{49}\equiv h(x)\pmod{f(x)}\iff p(x)\equiv 0\pmod{f(x)}\iff p(1)=p'(1)=p(2)=0$$

であるから，$p(1)=p'(1)=p(2)=0$ を満たす a，b の組を求める。$p(1)=p'(1)=p(2)=0$ に関して，

以下の ①，②，③ 式を得る。

$$\begin{cases} p(1)=(1+a+b)^{49}-(1+a+b)=(1+a+b)\{(1+a+b)^{48}-1\}=0 & \cdots ① \\ p'(1)=49(1+a+b)^{48}(2+a)-(2+a)=(2+a)\{49(1+a+b)^{48}-1\}=0 & \cdots ② \\ p(2)=(4+2a+b)^{49}-(4+2a+b)=(4+2a+b)\{(4+2a+b)^{48}-1\}=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① 式について，$1+a+b=x$ とおくと，

$$\begin{aligned} ① &\iff x^{49}-x=0 \\ &\iff x(x^{24}+1)(x^{12}+1)(x^{6}+1)(x^{3}+1)(x^{3}-1)=0 \\ &\iff x=0 \lor x=1 \lor x=-1 \quad (\because x\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$x=1+a+b$ が 0，1，-1 のいずれの場合においても，② に代入すると $a=-2$ となるから，

$$① \land ② \iff (a,\ b)=(-2,\ 1) \lor (a,\ b)=(-2,\ 2) \lor (a,\ b)=(-2,\ 0)$$

$$\therefore\ ① \land ② \land ③ \iff (a,\ b)=(-2,\ 1) \lor (a,\ b)=(-2,\ 0)$$

よって，求めるべき a，b の組は，$\boldsymbol{(a,\ b)=(-2,\ 1),\ (-2,\ 0)}$ ……(答)

5.4 研究

CHAPTER 6

第6問

6.1　概要

6.2　問題

O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を S とする。
以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

（1）座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

（i）$\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

（ii）線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

（2）座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

（iii）$\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

（iv）線分 ON と S は共有点を持たない。

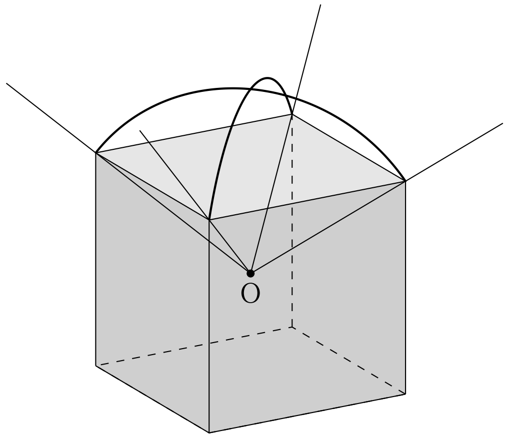
（v）線分 NP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点に持つ。

6.3　解説

•(1) 右に図を示す。立方体の表面のうち上面を除く面が S である。

点 P が動きうる範囲は以下の 2 通りで表現できる。

- •1. 立方体の表面および内部
- •2. 原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の球の表面および内部のうち，立方体の上面からはみ出ている部分

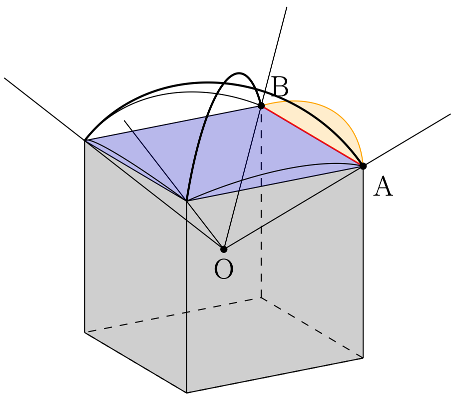


「立方体の上面を底面として点 O を頂点とする正四角錐」と,「原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の球の表面および内部のうち，立方体の上面からはみ出ている部分」を合わせた図形の体積は,「原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の球」の体積の 1/6 となる。また,「立方体の上面を底面として点 O を頂点とする正四角錐」の体積に関しても，立方体の体積の 1/6 であるから,

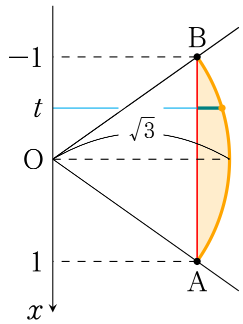
V の体積は,

$$\frac{4}{3}\pi\cdot(\sqrt{3})^3\cdot\frac{1}{6}+2^3\cdot\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{20}{3}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

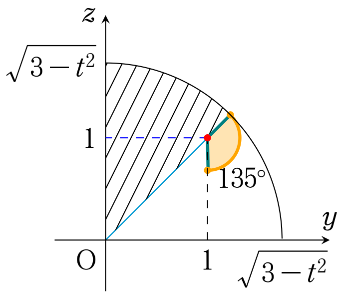
•(2) 3 点 O，N，P を条件を満たしながら同一直線上にとると，点 P の動きうる範囲は (1) と同様の V となる。したがって，W は V を包含するから，$W\cap\overline{V}$ の部分について考える。$W\cap\overline{V}=U$ とおく。U は立方体の上面の各辺に対するものとして 4 等分することができる。下図のように立方体の上面に線分 AB をとり，線分 AB に対する U の一部 U_{AB} を考える。オレンジの網目部を線分 AB を回転の軸として 135° 回転させた立体が U_{AB} である。



全体図



$y=z$ 平面



$x=t$ で切断した yz 平面
(斜線部は V の断面)

U の体積を求める。U の体積は U_{AB} の体積の 4 倍である。オレンジの網目部は $y=z$ 平面上にあり，オレンジの網目部と平面 $x=t$ の交線である図の緑線について，その長さは，$\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}$ となる。この緑線を線分 AB を回転の軸として 135° 回転させた図形の面積は,

$$\pi\cdot\left(\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{135}{360}=\frac{3}{8}\pi\left(5-t^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-t^2}\right)$$

となる。これを t について -1 から 1 まで積分すると，U_{AB} の体積が求まる。

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}\pi\int_{-1}^{1}\left(5-t^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-t^2}\right)dt&=\frac{3}{4}\pi\int_{0}^{1}\left(5-t^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-t^2}\right)dt\\&=\frac{3}{4}\pi\left[5t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^1\sqrt{3-t^2}\,dt\\&=\frac{3}{4}\pi\left(5-\frac{1}{3}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{3-3\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{7}{2}\pi-\frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^{\alpha}\cos^2\theta\,d\theta\\&=\frac{7}{2}\pi-\frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^{\alpha}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\left[\,\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\,\right]_0^{\alpha} \\
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
&= \frac{7}{2} - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{4}\pi\sin\alpha\cos\alpha \\
&= \frac{7}{2}\pi - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{4}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
&= 2\pi - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi
\end{aligned}
$$

したがって，U の体積は，

$$4\cdot\left(2\pi - \frac{9\sqrt{2}\alpha}{4}\pi\right) = (8 - 9\sqrt{2}\alpha)\pi$$

よって，求めるべき W の体積は，

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{20}{3} + (8 - 9\sqrt{2}\alpha)\pi = \boldsymbol{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 8 - 9\sqrt{2}\alpha\right)\pi + \frac{20}{3}} \quad \cdots\cdots(答)$$

6.4　研究