1.4 研究

1.4.1 A_k は何を表しているか？

??節では，式変形により解き進めましたが，一体何を計算していたのでしょうか？まず，A_k の定積分がどの図形の面積を表すかを考えてみましょう．以下の図 1.4.1 に $y = |\sin(x^2)|$ のグラフを描画します．$y = |\sin(x^2)|$ は

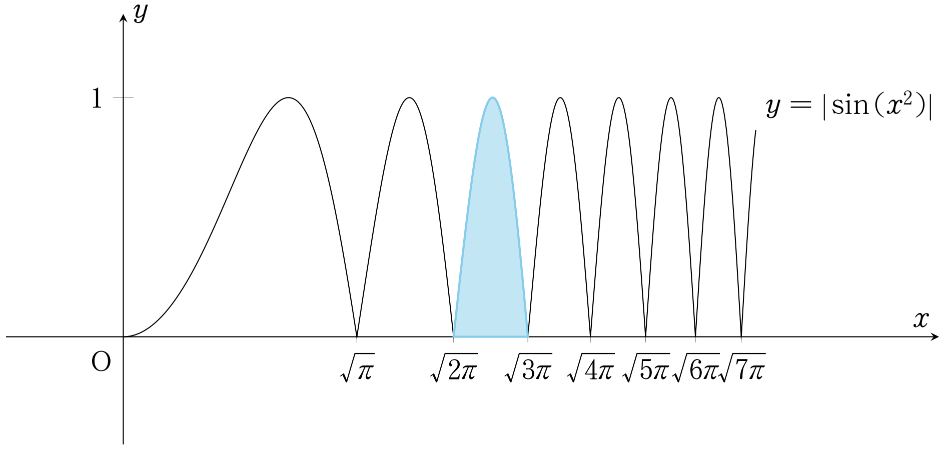

Figure 1.4.1: $y = |\sin(x^2)|$ の概形

$x = \sqrt{m\pi}$ (m は 0 以上の整数) のときに $y = 0$ となり，お山が連なった形状となります．そのお山を左から順に 0 番目，1 番目，… としていくと，k 番目のお山の面積が A_k となるわけです．例として，水色で塗りつぶした部分が $A_2 = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{3\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$ に対応しています．

1.4.2 A_k を図形的に評価する

1.4.1 項で A_k が何を表しているかが分かりました．では，以下の図のように下から評価する[1]ことはできないでしょうか？$k = 2$ の場合を考えてみましょう．

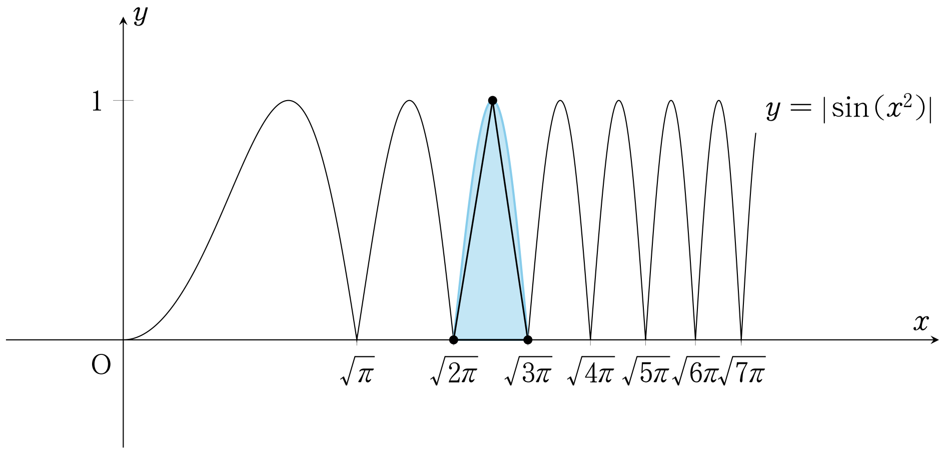

Figure 1.4.2: A_2 の面積を三角形の面積で下から評価する

もし

$$(\text{三角形の面積}) \leqq A_2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{(2+1)\pi}} \leqq A_2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2} \leqq A_2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq A_2$$

[1]「下から評価する」とは，$x \leqq A_k$ もしくは $x < A_k$ を満たす x を求めることです．同様に「上から評価する」という言い回しもあります．

が真であれば，下から評価できるということになります．要は，議論の流れとして

（ｉ）$\dfrac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2} \leqq A_2$ である．

（ii）また，$\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq \dfrac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2}$ である．

（iii）したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}} \leqq A_2$ である．

と言いたいわけです．（ｉ）は図形より正しいとしてよいでしょう．しかしながら，（ii）に関して

$$\frac{\sqrt{3\pi}-\sqrt{2\pi}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3\pi}}=\frac{3\pi-\sqrt{6}\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}=\frac{(3-\sqrt{6})\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}<\frac{(3-2.4)\pi-2}{2\sqrt{3\pi}}<\frac{0.6\cdot 3.2-2}{2\sqrt{3\pi}}<0$$

であるから，（ii）は成り立ちません．この例では $k=2$ のときを計算しましたが，すべての正の整数 k について同様の結果になります．よって，図形的に下から評価することは難しいでしょう．仮に，何らかの方法で下から評価することができても，上から評価するのはさらに難しいでしょう．

1.4.3　もう一度置換！

??節における（１）の解説の途中で以下の不等式が得られました．

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{k\pi}} \cdots\cdots ①$$

そして，$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=2 \cdots\cdots$（＊）であることを用いて与不等式を証明しました．しかし，この（＊）は思い付きましたでしょうか？思いつかなかった方は続けてお読みください．複雑な積分では，積分区間を簡単にすることが大事な方針の１つとなります．不等式 ① の両側とも積分区間は $k\pi$ から $(k+1)\pi$ となっております．これを 0 から π となるように置換してみましょう．

t	$k\pi \to (k+1)\pi$
s	$0 \to \pi$

となって欲しいので... $s=t-k\pi$ と置換すればよさそうですね．したがって，$ds=dt$ より，不等式 ① は

$$\int_0^{\pi}|\sin(s+k\pi)|\cdot\frac{ds}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \int_0^{\pi}|\sin(s+k\pi)|\cdot\frac{ds}{2\sqrt{k\pi}}$$

ここで

$$|\sin(s+k\pi)|=|\pm\sin s|=|\pm 1|\cdot|\sin s|=|\sin s|=\sin s$$

➡**注**　k が偶数のとき $|\sin(s+k\pi)|=\sin s$，k が奇数のとき $|\sin(s+k\pi)|=-\sin s$.

➡**注**　積分区間より $0\leqq s\leqq\pi$ で，$\sin s\geqq 0$ なので $|\sin s|=\sin s$.

であるから

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_0^{\pi}\sin s\,ds \leqq A_k \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^{\pi}\sin s\,ds$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \left(\because\ \int_0^{\pi}\sin s\,ds=\Big[-\cos s\Big]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=2\right)$$

が得られます．このように積分区間が簡単になるように置換をしていきましょう．