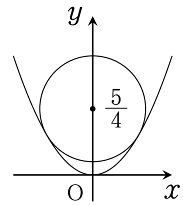
3.3　解説

（１）円 C を表す方程式は $x^2+(y-a)^2=1$ である。C と $y=x^2$ が接するときを考える。
$x^2+(y-a)^2=1$ と $y=x^2$ を連立すると，

$$x^2+(x^2-a)^2=1 \qquad \therefore\quad (x^2)^2-(2a-1)x^2+a^2-1=0$$



となるから，

$$(2a-1)^2-4(a^2-1)=0 \qquad \therefore\quad a=\frac{5}{4}$$

のときに接する。図と合わせて，求めるべき a の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{5}{4}<a} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

（２）S 上の点 P の座標は $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<0$ を満たす媒介変数 θ を用いて，

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=a+\sin\theta \end{cases}$$

と表せる。この点 P での C の接線の方程式は，

$$(\cos\theta)\cdot x+(\sin\theta)\cdot(y-a)=1 \cdots\cdots ①$$

① と $y=x^2$ を連立すると，

$$(\cos\theta)\cdot x+(\sin\theta)\cdot(x^2-a)=1 \quad \therefore\ (\sin\theta)\cdot x^2+(\cos\theta)\cdot x-a\sin\theta-1=0 \cdots\cdots ②$$

$\sin\theta\neq 0$ より，② は 2 次方程式である。2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad \alpha\beta=-a-\frac{1}{\sin\theta}$$

① が $y=x^2$ によって切り取られてできる線分の長さ L_{P} は，① の傾きが $-\frac{1}{\tan\theta}$ であることから，

$$L_{\mathrm{P}}=\frac{|\alpha-\beta|}{-\sin\theta}=\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}}{\sqrt{\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}{\sqrt{\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\tan^2\theta}+4a+\frac{4}{\sin\theta}\right)}$$

$t=\frac{1}{\sin\theta}$ とおくと，t の範囲は $t\leqq -1$ で，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<0$ から t の値と θ の値は 1 対 1 に対応する。

$$L_{\mathrm{P}}{}^2=t^2\left(t^2-1+4a+4t\right) \qquad \therefore\quad \frac{d}{dt}L_{\mathrm{P}}{}^2=2t\left(t^2-1+4a+4t\right)+t^2(2t+4)$$
$$=2t\left\{2\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+4a-\frac{11}{2}\right\}$$

$L_{\mathrm{Q}}=L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するための必要十分条件は，t の関数 $L_{\mathrm{P}}{}^2$ が $t\leqq -1$ で単調でないことである。それは，$2\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+4a-\frac{11}{2}=0$ が $t\leqq -1$ の範囲に重解でない解をもつことと同値である。

$$4a-\frac{11}{2}<0 \quad \therefore\ a<\frac{11}{8}$$

よって，（１）の条件と合わせて，求めるべき a の範囲は，$\boldsymbol{\frac{5}{4}<a<\frac{11}{8}}$ ……(答)