2024年 数学オリンピック 予選

第5問

やさしい理系お兄ちゃん

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

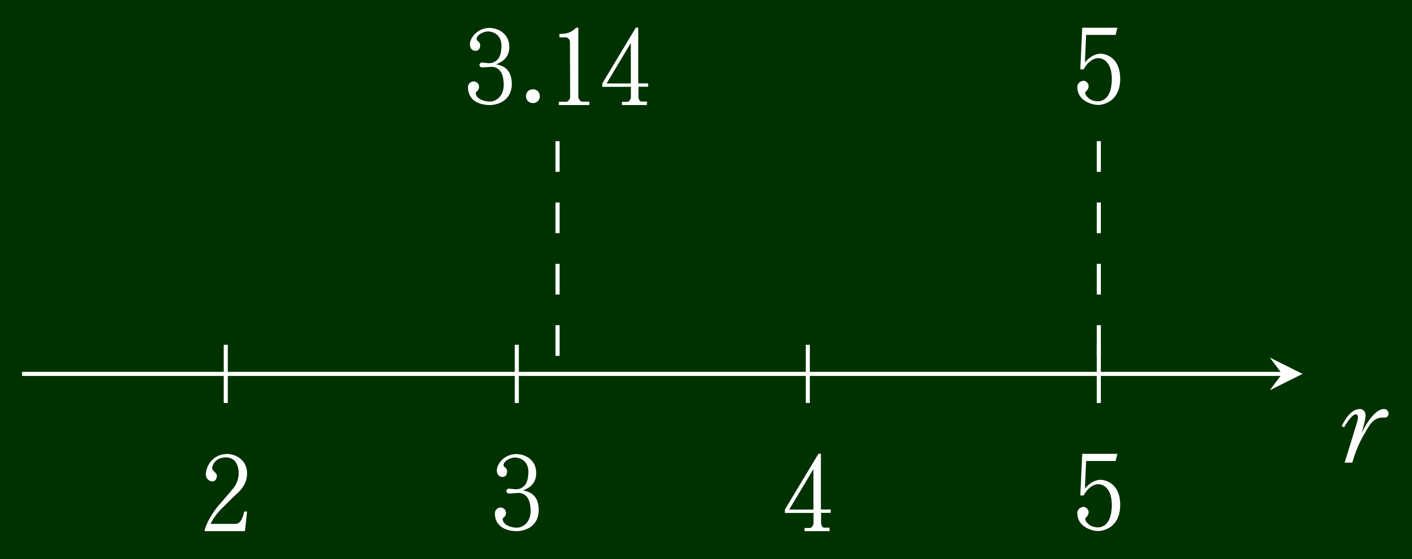
説明　ガウス記号の性質について

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right] = {}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について

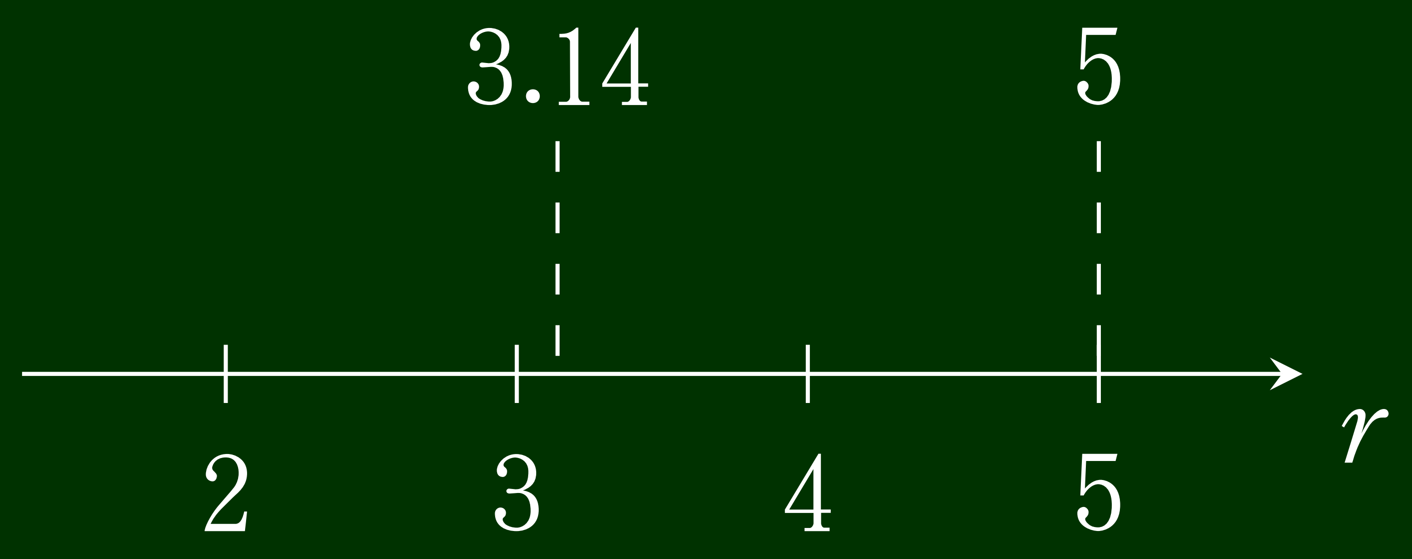


10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について



$[3.14]=$（3.14 以下の最大の整数）

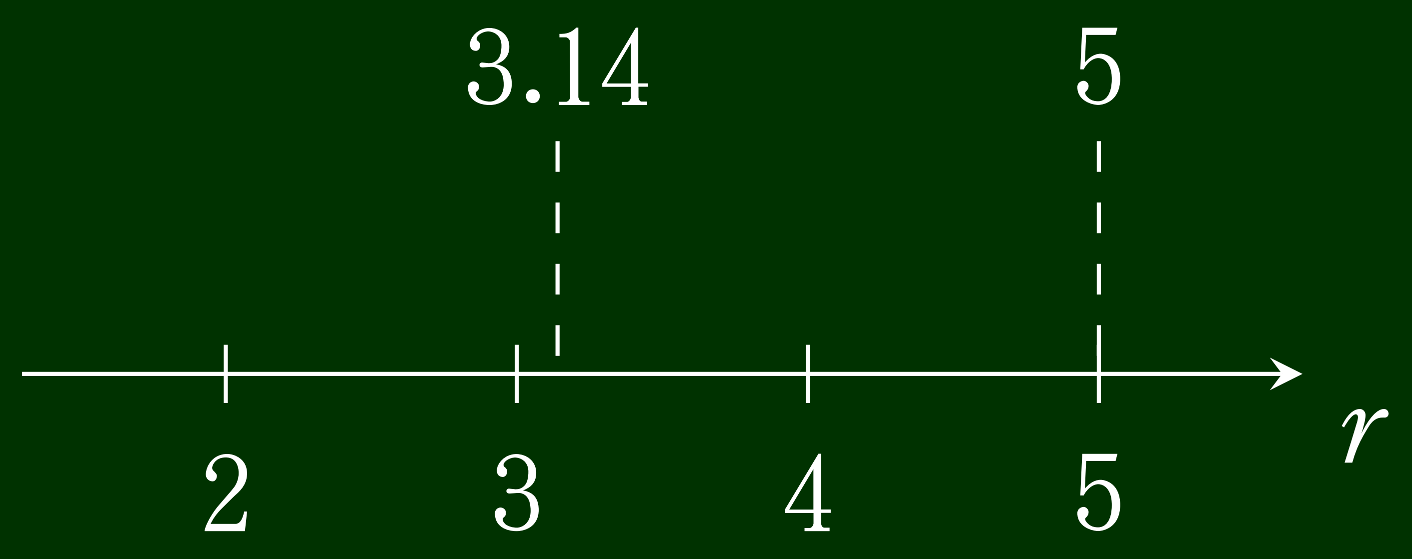
$=3$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right] = {}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について



$[3.14]=$（3.14 以下の最大の整数）

$\quad\quad\;\; = 3$

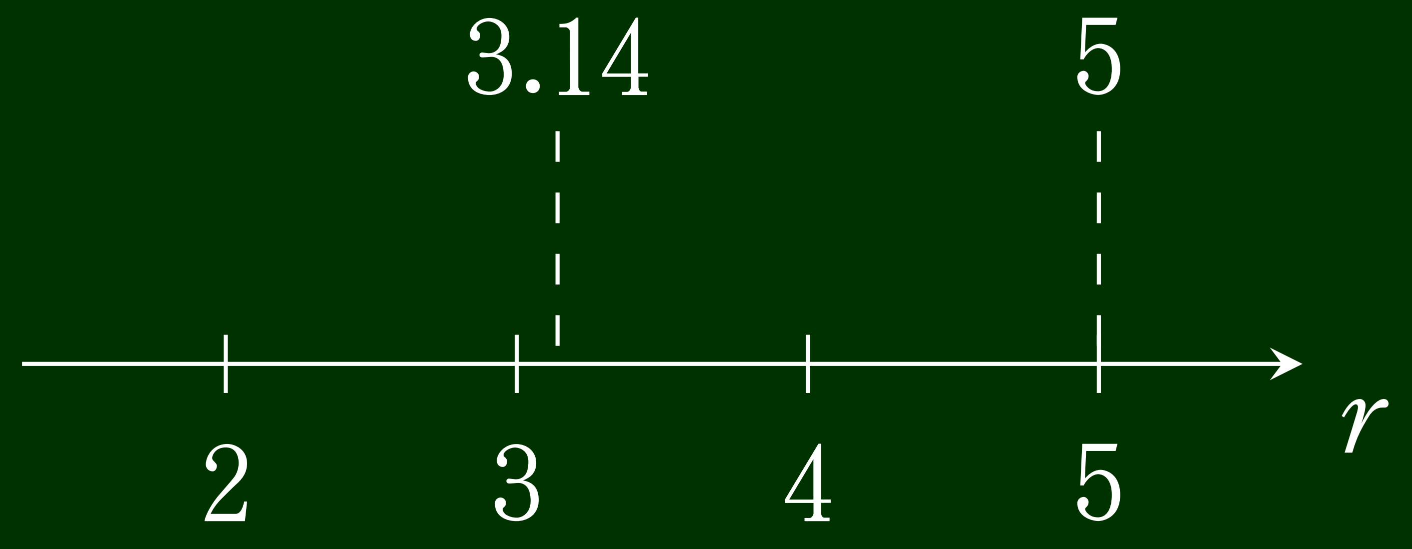
$[5]=$（5 以下の最大の整数）$=5$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について



$[3.14]=(3.14$ 以下の最大の整数$)$
$\quad\quad\;=3$
$[5]=(5$ 以下の最大の整数$)=5$

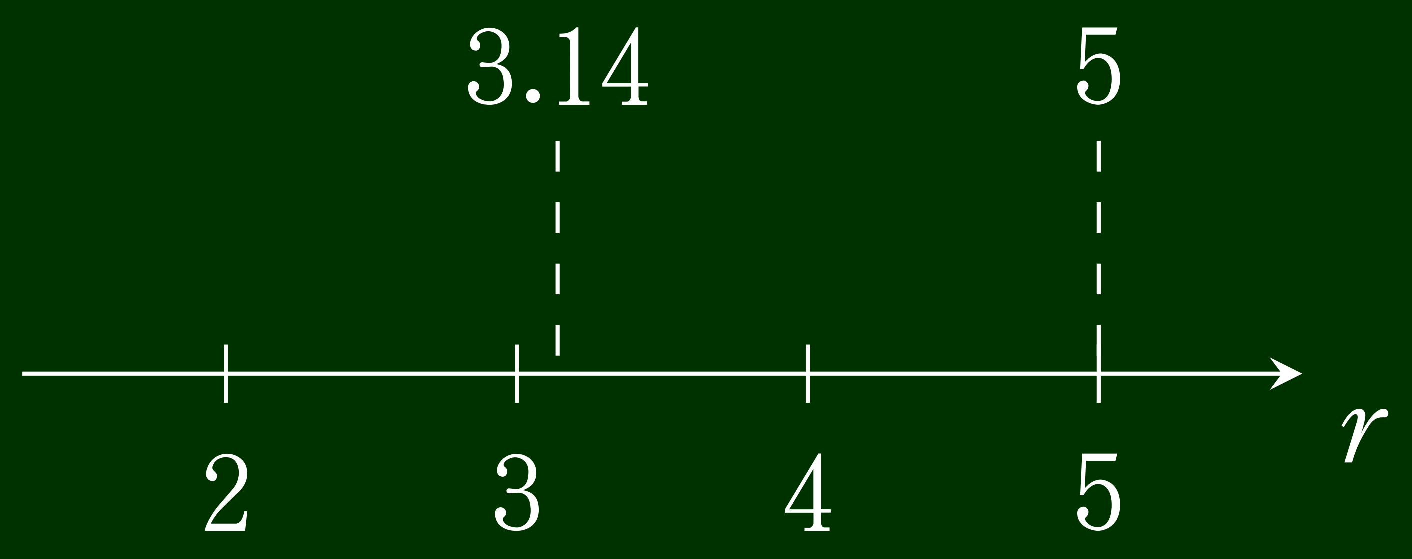
☞ $[r]$ は r より左側（もしくは r 自身）

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right] = {}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について



$[3.14] =$（3.14 以下の最大の整数）
$= 3$

$[5] =$（5 以下の最大の整数）$= 5$

☞ $[r]$は r より左側（もしくは r 自身）

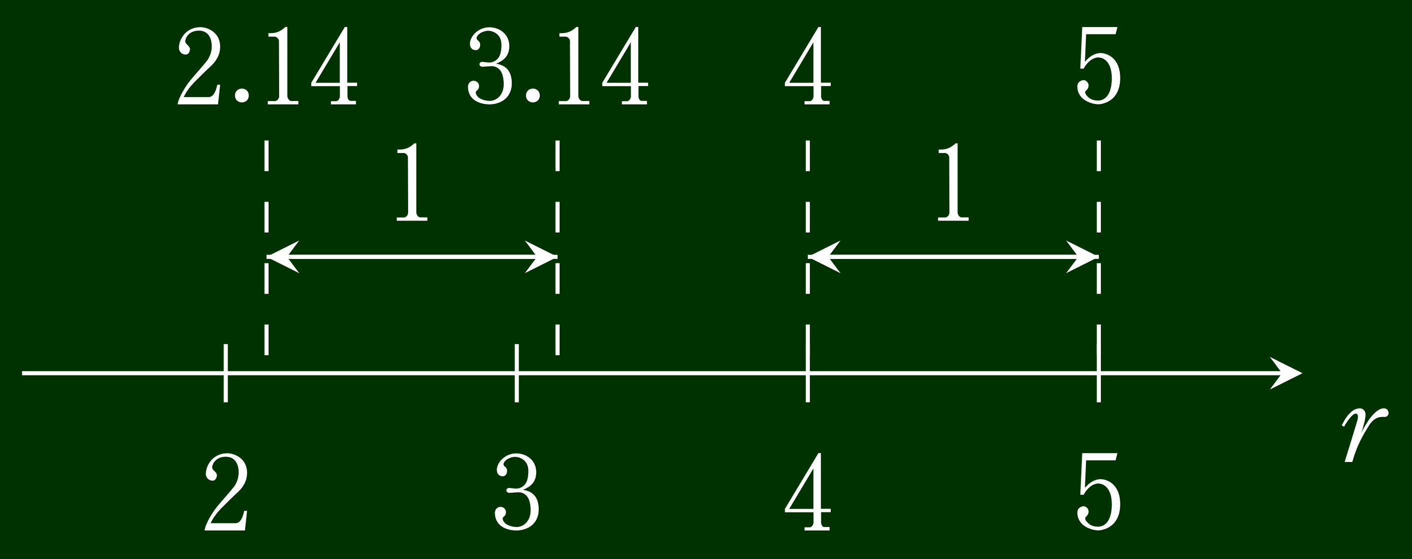
$\therefore\quad [r] \leqq r$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について



$[3.14]=$（3.14 以下の最大の整数）
$\quad\quad=3$
$[5]=$（5 以下の最大の整数）$=5$

☞　$[r]$は r より左側（もしくは r 自身）

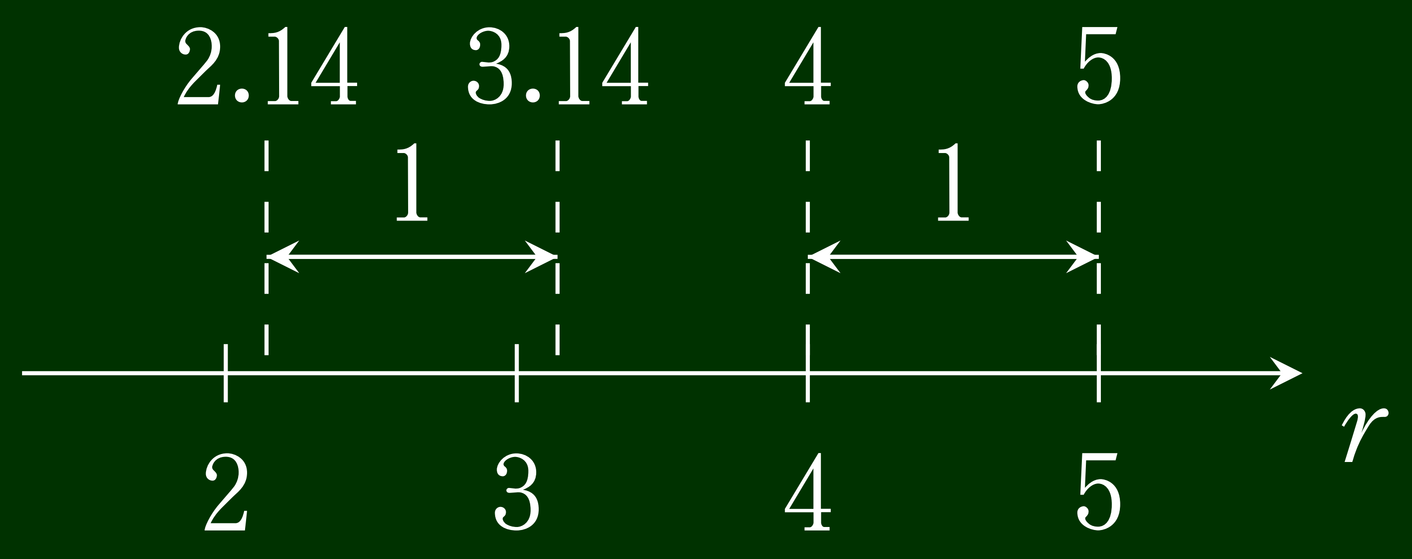
$\therefore\quad [r]\leqq r$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について



$[3.14]=(3.14$ 以下の最大の整数$)$
$\quad=3$

$[5]=(5$ 以下の最大の整数$)=5$

☞ $[r]$ は r より左側（もしくは r 自身）

$\therefore\quad [r]\leqq r$

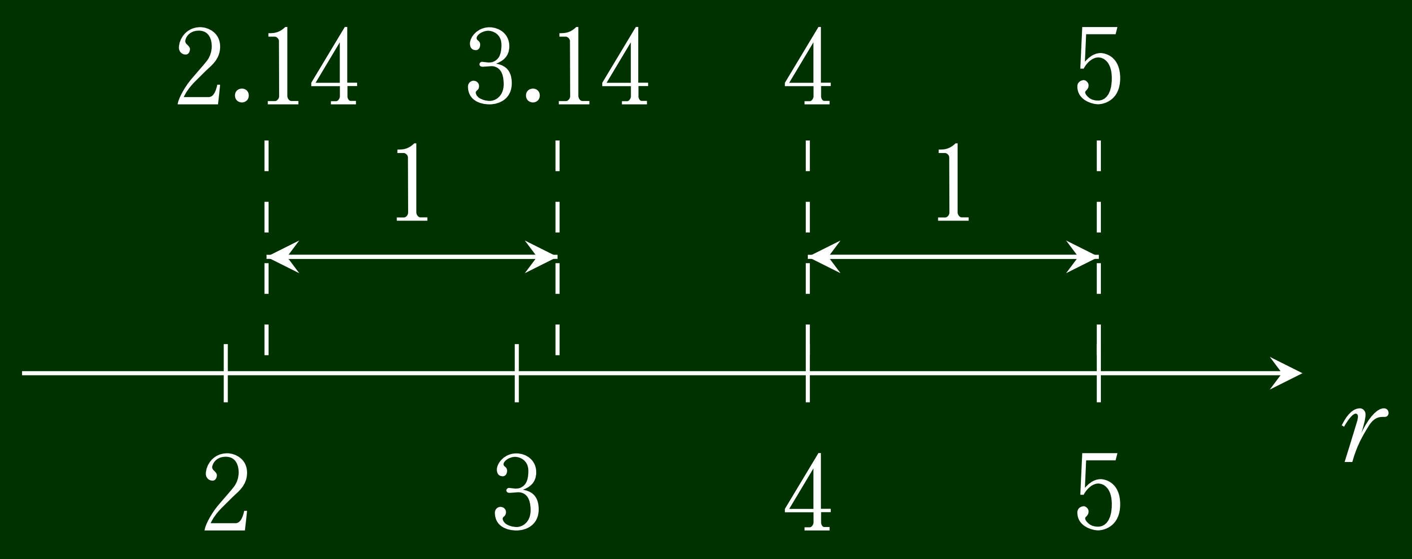
図より，$r-1\leqq[r]\leqq r$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明 ガウス記号の性質について



$[3.14]=(3.14$ 以下の最大の整数$)$
$\qquad\;\;=3$
$[5]=(5$ 以下の最大の整数$)=5$

☞ $[r]$ は r より左側（もしくは r 自身）

$\therefore\quad [r]\leqq r$

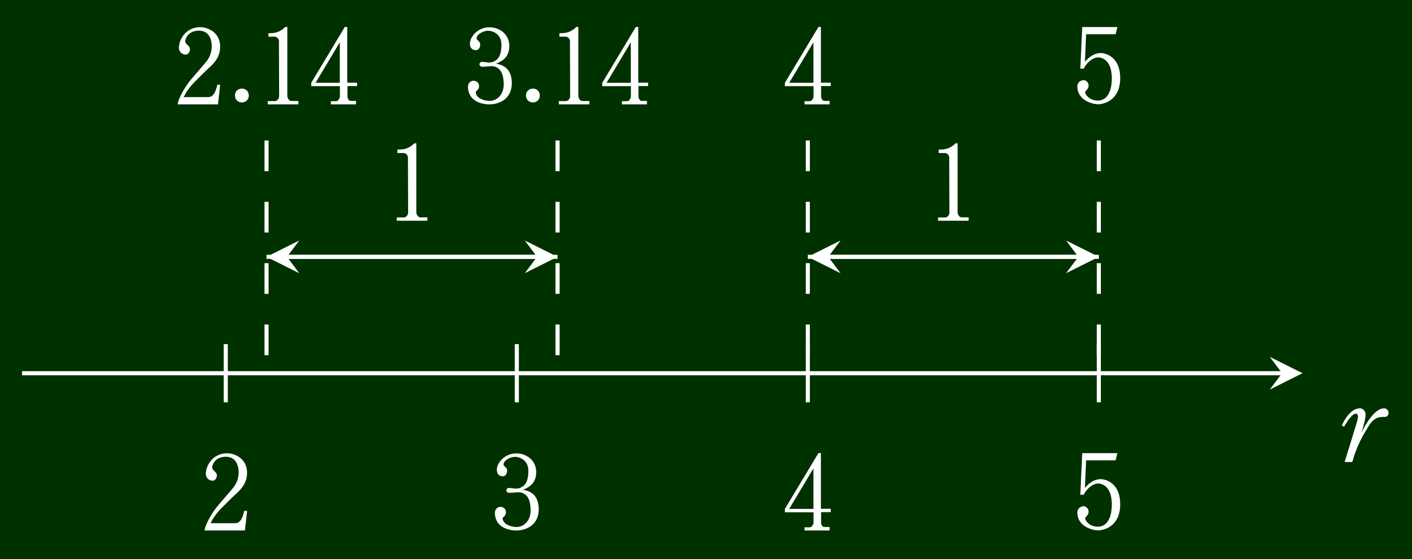
図より，$r-1\leqq[r]\leqq r$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

説明　ガウス記号の性質について



$[3.14]=$（3.14 以下の最大の整数）

$\quad\quad\;=3$

$[5]=$（5 以下の最大の整数）$=5$

☞ $[r]$は r より左側（もしくは r 自身）

$\therefore\quad [r]\leqq r$

図より，$r-1\leqq[r]\leqq r$

さらに，$r-1<[r]\leqq r$ ……　①

◀ ガウス記号が登場したら，ほぼこの不等式を使用します．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説　不等式 ① より

◀ $r-1<[r]\leqq r$ $\cdots$ ①

10 以上の整数 n であって,

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説　不等式 ① より

$$\frac{n-1}{1}<\left[\frac{n}{1}\right]\leqq\frac{n}{1},\quad \frac{n-2}{2}<\left[\frac{n}{2}\right]\leqq\frac{n}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \frac{n-10}{10}<\left[\frac{n}{10}\right]\leqq\frac{n}{10}$$

であるから

◀ $r-1<[r]\leqq r$ … ①

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

$\boxed{\text{解説}}$　不等式 ① より

$$\frac{n-1}{1}<\left[\frac{n}{1}\right]\leqq\frac{n}{1},\quad \frac{n-2}{2}<\left[\frac{n}{2}\right]\leqq\frac{n}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \frac{n-10}{10}<\left[\frac{n}{10}\right]\leqq\frac{n}{10}$$

であるから

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n}{1},\quad \left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}\ \text{or}\ \frac{n}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10}\ \text{or}\ \frac{n-8}{10}\ \text{or}\ \cdots\cdots\ \text{or}\ \frac{n}{10}$$

◀ $r-1<[r]\leqq r$　…　①

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説 不等式 ① より

$$\frac{n-1}{1}<\left[\frac{n}{1}\right]\leqq\frac{n}{1},\quad \frac{n-2}{2}<\left[\frac{n}{2}\right]\leqq\frac{n}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \frac{n-10}{10}<\left[\frac{n}{10}\right]\leqq\frac{n}{10}$$

◀ $r-1<[r]\leqq r$ … ①

であるから

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n}{1},\quad \left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}\ \text{or}\ \frac{n}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10}\ \text{or}\ \frac{n-8}{10}\ \text{or}\ \cdots\cdots\ \text{or}\ \frac{n}{10}$$

《注》例えば，$\left[\frac{n}{2}\right]$ のとき

$$\frac{n-0.5}{2},\quad \frac{n-\sqrt{2}}{2},\quad \ldots$$ になる可能性は ??

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

$\boxed{\text{解説}}$

《注》例えば，$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ のとき

$$\frac{n-0.5}{2},\quad \frac{n-\sqrt{2}}{2},\quad \cdots \qquad \text{になる可能性は??}$$

$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ は $\dfrac{n}{2}$ 以下の最大の**整数**である．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

《注》例えば，$\left[\frac{n}{2}\right]$ のとき

$$\frac{n-0.5}{2},\quad \frac{n-\sqrt{2}}{2},\quad \cdots$$ になる可能性は ??

$\left[\frac{n}{2}\right]$ は $\frac{n}{2}$ 以下の最大の**整数**である．

$$\frac{n-(\text{整数でない実数})}{2}$$ は整数にならない．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

《注》例えば，$\left[\frac{n}{2}\right]$ のとき

$$\frac{n-0.5}{2},\quad \frac{n-\sqrt{2}}{2},\quad \cdots$$ になる可能性は??

答えは. . .

$\left[\frac{n}{2}\right]$ は $\frac{n}{2}$ 以下の最大の**整数**である．

$$\frac{n-(\text{整数でない実数})}{2}$$ は整数にならない．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

《注》例えば，$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ のとき

$\dfrac{n-0.5}{2}$，$\dfrac{n-\sqrt{2}}{2}$，… になる可能性は??

答えは. . .

$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ は $\dfrac{n}{2}$ 以下の最大の**整数**である．

$\dfrac{n-(\text{整数でない実数})}{2}$ は整数にならない．→ 可能性はない！

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

《注》例えば，$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ のとき

$\dfrac{n-0.5}{2}$，　$\dfrac{n-\sqrt{2}}{2}$，　…　　になる可能性は ??

答えは. . .

$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ は $\dfrac{n}{2}$ 以下の最大の**整数**である．

$\dfrac{n-(\text{整数でない実数})}{2}$ は整数にならない．　→　可能性はない！

$\dfrac{n-(\text{整数})}{2}$ も整数にならないこともあるが，少なくとも必要な条件である．

10 以上の整数 n であって,

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

《注》例えば，$\left[\frac{n}{2}\right]$ のとき

$$\frac{n-0.5}{2},\quad \frac{n-\sqrt{2}}{2},\quad \ldots$$ になる可能性は ??

答えは. . .

$\left[\frac{n}{2}\right]$ は $\frac{n}{2}$ 以下の最大の**整数**である.

$\dfrac{n-(\text{整数でない実数})}{2}$ は整数にならない. → 可能性はない！

$\dfrac{n-(\text{整数})}{2}$ も整数にならないこともあるが，少なくとも必要な条件である.

$$\boxed{\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}\ \text{or}\ \frac{n}{2}}$$

10 以上の整数 n であって,

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]$$

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n}{1},\quad \left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2} \text{ or } \frac{n}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10} \text{ or } \frac{n-8}{10} \text{ or } \cdots\cdots \text{ or } \frac{n}{10}$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}\quad\cdots\cdots\ ②$$

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n}{1},\quad\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}\text{ or }\frac{n}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad\left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10}\text{ or }\frac{n-8}{10}\text{ or }\cdots\cdots\text{ or }\frac{n}{10}$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right] &\geqq \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10} \quad \cdots\cdots \text{②}\\ &={}_n\mathrm{C}_{10}\end{aligned}$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}\quad\cdots\cdots\ ②$$
$$={}_n\mathrm{C}_{10}$$

$$\boxed{{}_n\mathrm{C}_{10}=\frac{n(n-1)\cdots(n-9)}{10\cdot9\cdots1}}$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}\quad\cdots\cdots\ ②$$
$$={}_n\mathrm{C}_{10}$$

等号成立する n の条件を考える．

$$\boxed{{}_n\mathrm{C}_{10}=\frac{n(n-1)\cdots(n-9)}{10\cdot 9\cdots 1}}$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n-0}{1},\quad \left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}\ \text{or}\ \frac{n-0}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10}\ \text{or}\ \frac{n-8}{10}\ \text{or}\ \cdots\cdots\ \text{or}\ \frac{n-0}{10}$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n-0}{1},\quad \left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2} \text{ or } \frac{n-0}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10} \text{ or } \frac{n-8}{10} \text{ or } \cdots\cdots \text{ or } \frac{n-0}{10}$$

何か見覚えが．．．ないですか??

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

2で割った余り

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n-0}{1},\quad \left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}\ \text{or}\ \frac{n-0}{2},$$

$$\cdots\cdots,\ \left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10}\ \text{or}\ \frac{n-8}{10}\ \text{or}\ \cdots\cdots\ \text{or}\ \frac{n-0}{10}$$

10で割った余り

1で割った余り

何か見覚えが...ないですか??

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

$$\left[\frac{n}{1}\right]=\frac{n-0}{1},\quad \left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}\ \text{or}\ \frac{n-0}{2},$$

$$\cdots\cdots,\quad \left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-9}{10}\ \text{or}\ \frac{n-8}{10}\ \text{or}\ \cdots\cdots\ \text{or}\ \frac{n-0}{10}$$

定理

自然数 m，k に関して，m を k で割った余りを r とすると

$$\left[\frac{m}{k}\right]=\frac{m-r}{k}\qquad (0\leqq r<k)$$

が成り立つ．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって，n を i で割った余りを r_i とすると

◀ $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 10$

定理

自然数 m，k に関して，m を k で割った余りを r とすると

$$\left[\frac{m}{k}\right]=\frac{m-r}{k}\qquad (0\leqq r<k)$$

が成り立つ．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって，n を i で割った余りを r_i とすると

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}$$

◀ $i=1,\ 2,\ \dots,\ 10$

定理

自然数 m，k に関して，m を k で割った余りを r とすると

$$\left[\frac{m}{k}\right]=\frac{m-r}{k}\qquad(0\leqq r<k)$$

が成り立つ．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって，n を i で割った余りを r_i とすると

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}$$

② より

◀ $i=1,\ 2,\ \dots,\ 10$

◀ $\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]$

$\geqq \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}$

…… ②

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって，n を i で割った余りを r_i とすると

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}$$

② より

$$\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}$$

◀ $i=1$，2，…，10

◀ $\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]$
$\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}$
…… ②

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって，n を i で割った余りを r_i とすると

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}$$

② より

$$\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}$$

等号成立するとき

◀ $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 10$

◀ $\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]$
$\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}$
…… ②

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

したがって，n を i で割った余りを r_i とすると

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]=\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}$$

② より

$$\frac{n-r_1}{1}\cdot\frac{n-r_2}{2}\cdots\frac{n-r_{10}}{10}\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}$$

等号成立するとき

$$(n-r_1)(n-r_2)\cdots(n-r_{10})=n(n-1)\cdots(n-9)$$

◀ $i=1$，2，…，10

◀ $\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]$
$\geqq\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-9}{10}$
…… ②

10 以上の整数 n であって,

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立するとき

$$(n-r_1)(n-r_2)\cdots(n-r_{10})=n(n-1)\cdots(n-9)$$

いま

$$0 \leqq r_1 < 1,\quad 0 \leqq r_2 < 2,\quad \ldots\ldots,\quad 0 \leqq r_{10} < 10$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立するとき

$$(n-r_1)(n-r_2)\cdots(n-r_{10})=n(n-1)\cdots(n-9)$$

いま

$$0\leqq r_1<1,\quad 0\leqq r_2<2,\quad \ldots\ldots,\quad 0\leqq r_{10}<10$$

$$\therefore\quad r_1=0,\quad r_2=0 \text{ or } 1,\quad \ldots\ldots,\quad r_{10}=0 \text{ or } 1 \text{ or } \cdots \text{ or } 9$$

であり

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立するとき

$$(n-r_1)(n-r_2)\cdots(n-r_{10})=n(n-1)\cdots(n-9)$$

いま

$$0\leqq r_1<1,\quad 0\leqq r_2<2,\quad \ldots\ldots,\quad 0\leqq r_{10}<10$$

$$\therefore\quad r_1=0,\quad r_2=0 \text{ or } 1,\quad \ldots\ldots,\quad r_{10}=0 \text{ or } 1 \text{ or } \cdots \text{ or } 9$$

であり

$$\frac{n-r_1}{n}\cdot\frac{n-r_2}{n-1}\cdots\frac{n-r_{10}}{n-9}=1$$

両辺を右辺で割る

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立するとき

$$(n-r_1)(n-r_2)\cdots(n-r_{10})=n(n-1)\cdots(n-9)$$

いま

$$0\leqq r_1<1,\quad 0\leqq r_2<2,\quad \ldots\ldots,\quad 0\leqq r_{10}<10$$

$$\therefore\quad r_1=0,\quad r_2=0 \text{ or } 1,\quad \ldots\ldots,\quad r_{10}=0 \text{ or } 1 \text{ or } \cdots \text{ or } 9$$

であり

$$\frac{n-r_1}{n}\cdot\frac{n-r_2}{n-1}\cdots\frac{n-r_{10}}{n-9}=1$$

両辺を右辺で割る

すべての i に対して，$1\leqq\dfrac{n-r_i}{n-(i-1)}$ であるから，等号成立条件は

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立するとき

$$(n-r_1)(n-r_2)\cdots(n-r_{10})=n(n-1)\cdots(n-9)$$

いま

$$0\leqq r_1<1,\quad 0\leqq r_2<2,\quad \ldots\ldots,\quad 0\leqq r_{10}<10$$

$$\therefore\quad r_1=0,\quad r_2=0 \text{ or } 1,\quad \ldots\ldots,\quad r_{10}=0 \text{ or } 1 \text{ or } \cdots \text{ or } 9$$

であり

$$\frac{n-r_1}{n}\cdot\frac{n-r_2}{n-1}\cdots\frac{n-r_{10}}{n-9}=1$$

両辺を右辺で割る

すべての i に対して，$1\leqq\dfrac{n-r_i}{n-(i-1)}$ であるから，等号成立条件は

$$r_i=i-1$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right] = {}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立条件は

$$r_i = i - 1$$

である．すなわち，n を i で割った余りが -1 となる．すべての $i=1$，2，…，10 で成り立つので，n は

$$(1,\ 2,\ ,\ \ldots,\ 10\ の公倍数) - 1$$

となる．

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立条件は

$$r_i=i-1$$

である．すなわち，n を i で割った余りが -1 となる．すべての $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ で成り立つので，n は

(1，2，，…，10 の公倍数) -1

となる．このうち，最小のものは，(1，2，，…，10 の最小公倍数) -1 であるから，

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立条件は

$$r_i=i-1$$

である．すなわち，n を i で割った余りが -1 となる．すべての $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ で成り立つので，n は

$$(1,\ 2,\ ,\ \ldots,\ 10\ の公倍数)-1$$

となる．このうち，最小のものは，$(1,\ 2,\ ,\ \ldots,\ 10$ の最小公倍数$)-1$ であるから，

$$n=1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot5\cdot7\cdot2\cdot3-1$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立条件は

$$r_i=i-1$$

である．すなわち，n を i で割った余りが -1 となる．すべての $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ で成り立つので，n は

（1，2，，…，10 の公倍数）-1

となる．このうち，最小のものは，（1，2，，…，10 の最小公倍数）-1 であるから，

$$n=1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot5\cdot7\cdot2\cdot3-1$$

4で割れるように　9で割れるように

8で割れるように

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right]={}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．ただし，実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す．例えば，$[3.14]=3$，$[5]=5$ である．

解説

等号成立条件は

$$r_i=i-1$$

である．すなわち，n を i で割った余りが -1 となる．すべての $i=1,\ 2,\ \dots,\ 10$ で成り立つので，n は

$$(1,\ 2,\ ,\ \dots,\ 10\text{ の公倍数})-1$$

となる．このうち，最小のものは，$(1,\ 2,\ ,\ \dots,\ 10$ の最小公倍数$)-1$ であるから，

$$n=1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot5\cdot7\cdot2\cdot3-1=2520-1=\mathbf{2519}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

10 以上の整数 n であって，

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right] = {}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち，最小のものを求めよ．

2024年 数学オリンピック 予選 第5問