回答 2.2.6

R の反射的閉包を $R^=$ として，$R^= \subseteq R'$ かつ $R' \subseteq R^=$ を示す．
$R' = R \cup \{(s,s) \mid s \in S\}$ を①とおく．

1. $R^= \subseteq R'$

   ①より，すべての $s \in S$ に対して $(s,s) \in R'$ であるから R' は反射的である．
   また，R' は R を含むため，$R^= \subseteq R'$ である．

2. $R' \subseteq R^=$

   $(s,t) \in R'$ とすると，①より，$(s,t) \in R$ または $s = t$ である．

   - $(s,t) \in R$ のとき，$R \subseteq R^=$ より，$(s,t) \in R^=$ である．
   - $s = t$ のとき，$(s,t) = (s,s) \in R^=$ である．

   したがって，$R' \subseteq R^=$ である．

以上から，$R' = R^=$ である． □

Ans 2.2.6

Let $R^=$ be the reflexive closure of R. We show that $R^= \subseteq R'$ and $R' \subseteq R^=$.
Let $R' = R \cup \{(s,s) \mid s \in S\}$ be ①.

1. $R^= \subseteq R'$

   By ①, we have $(s,s) \in R'$ for all $s \in S$, so R' is reflexive.
   Since R' contains R, we have $R^= \subseteq R'$.

2. $R' \subseteq R^=$

   Suppose $(s,t) \in R'$. Then by ①, either $(s,t) \in R$ or $s = t$.

   - If $(s,t) \in R$, then $(s,t) \in R^=$ since $R \subseteq R^=$.
   - If $s = t$, then $(s,t) = (s,s) \in R^=$.

   Therefore, $R' \subseteq R^=$.

Hence, $R' = R^=$. □

回答 2.2.7

R^T を R の推移的閉包とする． $R^T \subseteq R^+$ と $R^+ \subseteq R^T$ を示す．

1. $R^T \subseteq R^+$

   $(s,t),(t,u) \in R^+$ とすると，ある i,j が存在して $(s,t) \in R_i$ かつ $(t,u) \in R_j$ である．
   R^+ の定義より $(s,u) \in R_{\max(i,j)+1}$ であり，したがって $(s,u) \in R^+$．
   よって R^+ は推移的である．
   また R^+ は R を含むので，$R^T \subseteq R^+$ である．

2. $R^+ \subseteq R^T$

   任意の i について $R_i \subseteq R^T$ を数学的帰納法で示す．

   - $i = 0$ のとき，$R_0 = R \subseteq R^T$．
   - $i = n$ のとき $R_n \subseteq R^T$ と仮定する．
     $i = n+1$ のとき，$(s,u) \in R_{n+1}$ とすると，ある $t \in S$ が存在して $(s,t),(t,u) \in R_n$．帰納法の仮定より $(s,t),(t,u) \in R^T$ であり，R^T が推移的なので $(s,u) \in R^T$．

   よって $R^+ \subseteq R^T$．

以上より $R^+ = R^T$． □

Ans 2.2.7

Let R^T be the transitive closure of R. We show that $R^T \subseteq R^+$ and $R^+ \subseteq R^T$.

1. $R^T \subseteq R^+$

   Suppose $(s,t),(t,u) \in R^+$. Then there exist some i,j such that $(s,t) \in R_i$ and $(t,u) \in R_j$.
   By the definition of R^+, we have $(s,u) \in R_{\max(i,j)+1}$, so $(s,u) \in R^+$.
   Therefore, R^+ is transitive.
   Since R^+ contains R, we have $R^T \subseteq R^+$.

2. $R^+ \subseteq R^T$

   We prove that $R_i \subseteq R^T$ for all i by mathematical induction.

   - When $i = 0$, we have $R_0 = R \subseteq R^T$.
   - Assume $R_n \subseteq R^T$ for $i = n$.
     When $i = n+1$, suppose $(s,u) \in R_{n+1}$. Then there exists some $t \in S$ such that $(s,t),(t,u) \in R_n$. By the induction hypothesis, $(s,t),(t,u) \in R^T$, and since R^T is transitive, we have $(s,u) \in R^T$.

   Therefore, $R^+ \subseteq R^T$.

Hence, $R^+ = R^T$. □