

**EPFL****1**

Alexis Michelat

Analyse III MATH-203(a) - MT-SV

16 janvier 2024

Durée : 180 minutes

Signature :

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.**

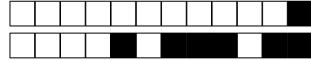
Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides, et 21 questions (15 questions de QCM, chacune valant 1 point, et 6 exercices à rédaction détaillée valant 45 points en tout). Le total des points de l'examen est de 60.

**Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table (avec le côté photo *visible*).
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout autre outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour le questionnaire à **choix multiples**, on comptera:
  - +1 point si la réponse est correcte;
  - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite, ou si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer  
Antwort auswählenne PAS choisir une réponse | NOT select an answer  
NICHT Antwort auswählenCorriger une réponse | Correct an answer  
Antwort korrigierence qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



## Formulaire

Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{array}{ll} e^{ia} = \cos(a) + i \sin(a) & 2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 & 2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ \cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 & 2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ \cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a) & \cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a) & \sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \\ \cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2} & \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \end{array}$$

## Première partie, questionnaire à choix multiples (+1/0) (15 points)

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1** (1 point) Soit  $f : ]-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin(x)$ , étendue par 2-périodicité. Alors, si  $S(f)$  est la série de Fourier de  $f$ , on a:

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $S(f)(-1) = \sin(1)$ .  | <input type="checkbox"/> La limite $S_N(f)(-1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{-\pi i n}$ |
| <input type="checkbox"/> $S(f)(-1) = 0$ .        | n'existe pas.   |
| <input type="checkbox"/> $S(f)(-1) = -\sin(1)$ . |   |

**Question 2** (1 point) Soit  $f(x, y) = e^{2x} \sin(x + 2y)$ . Alors, le laplacien  $\Delta f$  de  $f$  est donné par:

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $4e^{2x} \cos(x + 2y) - e^{2x} \sin(x + 2y)$ | <input type="checkbox"/> $4e^{2x} \cos(x + 2y) + e^{2x} \sin(x + 2y)$ |
| <input type="checkbox"/> $2e^{2x} \cos(x + 2y) - e^{2x} \sin(x + 2y)$ | <input type="checkbox"/> $2e^{2x} \cos(x + 2y) + e^{2x} \sin(x + 2y)$ |

**Question 3** (1 point) Si  $H$  est la fonction de Heaviside, telle que

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

et  $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  est la masse de Dirac en 0 (telle que  $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ ), que vaut la convolution suivante au sens des distributions?

$$[x^4] * (\delta_0'''' * [H(x)H(1-x)e^{-x^2}])$$

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Cette convolution n'est pas bien définie. | <input type="checkbox"/> $\delta_0$ |
| <input type="checkbox"/> $\delta_0 - e^{-1}\delta_1$               | <input type="checkbox"/> 0          |

**Question 4** (1 point) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $T_n$  la distribution donnée par

$$T_n = n^3 \delta_{\frac{1}{n}} + n^3 \delta_{-\frac{1}{n}} - 2n^3 \delta_0 - n \delta_0'',$$

où  $\delta_a$  est la masse de Dirac en  $a \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ , on ait  $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ . Alors, la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  au sens des distributions (dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ) est donnée par:

- |                                       |                            |  |                                     |
|---------------------------------------|----------------------------|--|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\delta_0''$ | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{3} \delta_0''$ | <input type="checkbox"/> $\delta_0$ |
|---------------------------------------|----------------------------|--|-------------------------------------|



**Question 5** (1 point) Rappelons que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ , on note  $B(x, r) = \mathbb{R}^2 \cap \{y : |y - x| < r\}$  le disque de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Soit  $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$  un champ de vecteurs tel que  $\text{rot}(X) = 0$  et

$$\int_{\partial B(2,1)} X \cdot dl = 0.$$

Alors:

- L'intégrale de  $X$  le long de toute courbe régulière fermée dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est nulle.  
  $X$  n'est pas exact.  
  $X$  est exact.  
 On ne peut rien conclure.

**Question 6** (1 point) Soit  $f(x) = \exp(x^3 \sin(x))$ . Quelle affirmation est correcte?

- $[f]$  est une distribution à support compact ( $[f] \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ ).  
  $[f]$  est une distribution ( $[f] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ).  
  $[f]$  est une distribution tempérée ( $[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ).  
  $[f]$  n'est pas une distribution ( $[f] \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ).

**Question 7** (1 point) Soit  $F(x, y) = (y \sinh(xy), x \sinh(xy))$  et  $G(x, y) = (y \cosh(xy), -x \sinh(xy))$ . Alors, les champs de vecteurs exacts sont:

- $F$  et  $G$ .  
  $G$ .  
  $F$ .  
 Aucun des deux.

**Question 8** (1 point) Soit  $f(x) = \cos(2023x) \sin(x)$  vue comme fonction  $2\pi$ -périodique. Alors, on a:

- $c_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1, 1, 2023\}$ .  
  $c_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2023\}$ .  
  $c_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2024, -2022, 2022, 2024\}$ .  
  $c_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1\}$ .

**Question 9** (1 point) Soit  $T = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_{k+1} - \delta_k)$ , où  $\delta_k$  est la masse de Dirac en  $k \in \mathbb{Z}$  telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ , on ait  $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$ . Alors, on a:

- $T = -\delta_0$   
  $T = 0$   
 La série de converge pas au sens des distributions (dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ).  
  $T = \delta_0$

**Question 10** (1 point) Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  la distribution

$$T = \frac{\sin(2\pi t)}{t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k,$$

où  $\delta_k$  est la masse de Dirac en  $k \in \mathbb{Z}$  telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ , on ait  $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$ . Alors, on a:

- $T = 2\pi \delta_0$   
  $T = -2\pi \delta'_0$   
  $T = 2\pi \delta'_0$   
  $T = -2\pi \delta_0$



**Question 11** (1 point) Admettons que la transformée de Fourier de  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  est donnée par  $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(1 + \xi) + \operatorname{sgn}(1 - \xi))$ , où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale  $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$  est égale à:

$\infty$

$\pi$

$2\pi$

$2\pi^2$

**Question 12** (1 point) Soit  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^4}$ . Alors, la transformée de Fourier de  $f$  est donnée par:

$\widehat{f}(\xi) = -\frac{\pi}{48} (\xi^3 + 6\xi^2 + 15\xi + 15) e^{-\xi}$ .

$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{48} (\xi^3 + 6\xi^2 + 15\xi + 15) e^{-\xi}$ .

$\widehat{f}(\xi) = -\frac{\pi}{48} (|\xi|^3 + 6|\xi|^2 + 15|\xi| + 15) e^{-|\xi|}$ .

$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{48} (|\xi|^3 + 6|\xi|^2 + 15|\xi| + 15) e^{-|\xi|}$ .

**Question 13** (1 point) On admet que la transformée de Fourier de la fonction  $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  est égale à

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi(1 - |\xi|) & \text{si } -1 \leq |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale suivante  $I = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$  est égale à:

$\pi$

$\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\pi\sqrt{2\pi}$

$\frac{\pi}{2}$

**Question 14** (1 point) Soit  $f(x) = |\cos(x)|$  et admettons que les coefficients de Fourier de  $f$  (vue comme fonction  $2\pi$ -périodique) vérifient l'identité suivante  $|c_n(f)| = \frac{2}{\pi} \frac{1}{|n^2 - 1|}$  si  $n \in \mathbb{Z}$  est pair, et  $c_n(f) = 0$  sinon

(c'est-à-dire, si  $n$  est impair). Alors, la série  $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$  vaut:

$\frac{\pi^2}{8} + 1$

$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$

$\frac{\pi^2}{8} - 1$

$\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}$

**Question 15** (1 point) Soit  $f : ]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)$  étendue par  $2\pi$ -périodicité sur  $\mathbb{R}$ . Alors, on a:

$a_n(f) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et  $a_0(f) < 0$ .

$b_n(f) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et  $a_0(f) > 0$ .

$b_n(f) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et  $a_0(f) < 0$ .

$a_n(f) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et  $a_0(f) > 0$ .



## Deuxième partie, questions ouvertes

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Chaque résultat du cours utilisé doit être précisément énoncé.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées aux correcteurs.

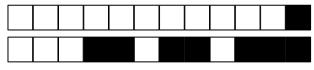
**Question 16:** *Cette question est notée sur 4 points.*

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

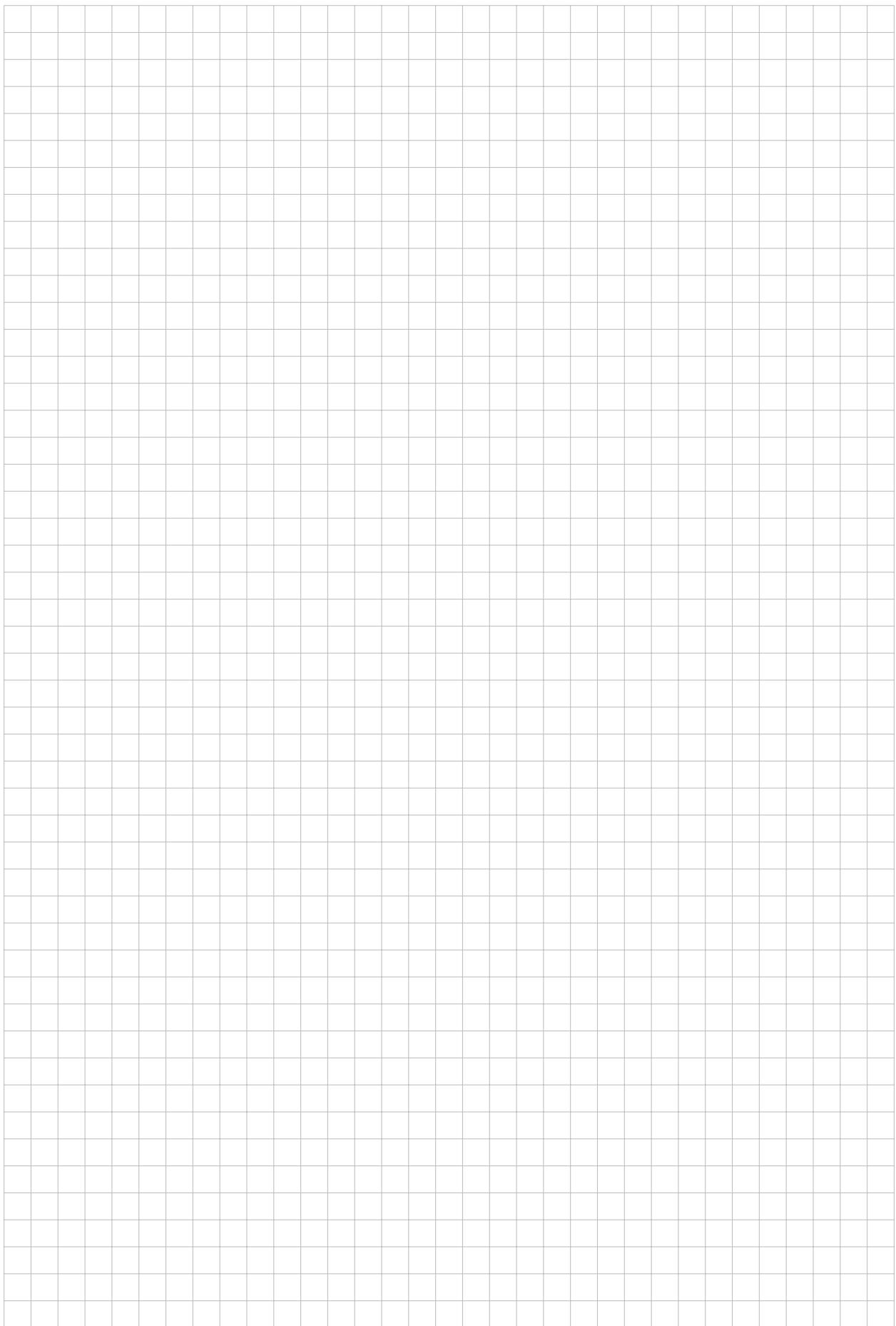
On considère la fonction

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow (\cos^3(\theta), \sin^3(\theta))\end{aligned}$$

Calculer la longueur de la courbe fermée  $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$ .



+1/6/55+





**Question 17:** Cette question est notée sur 6 points.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6
--------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

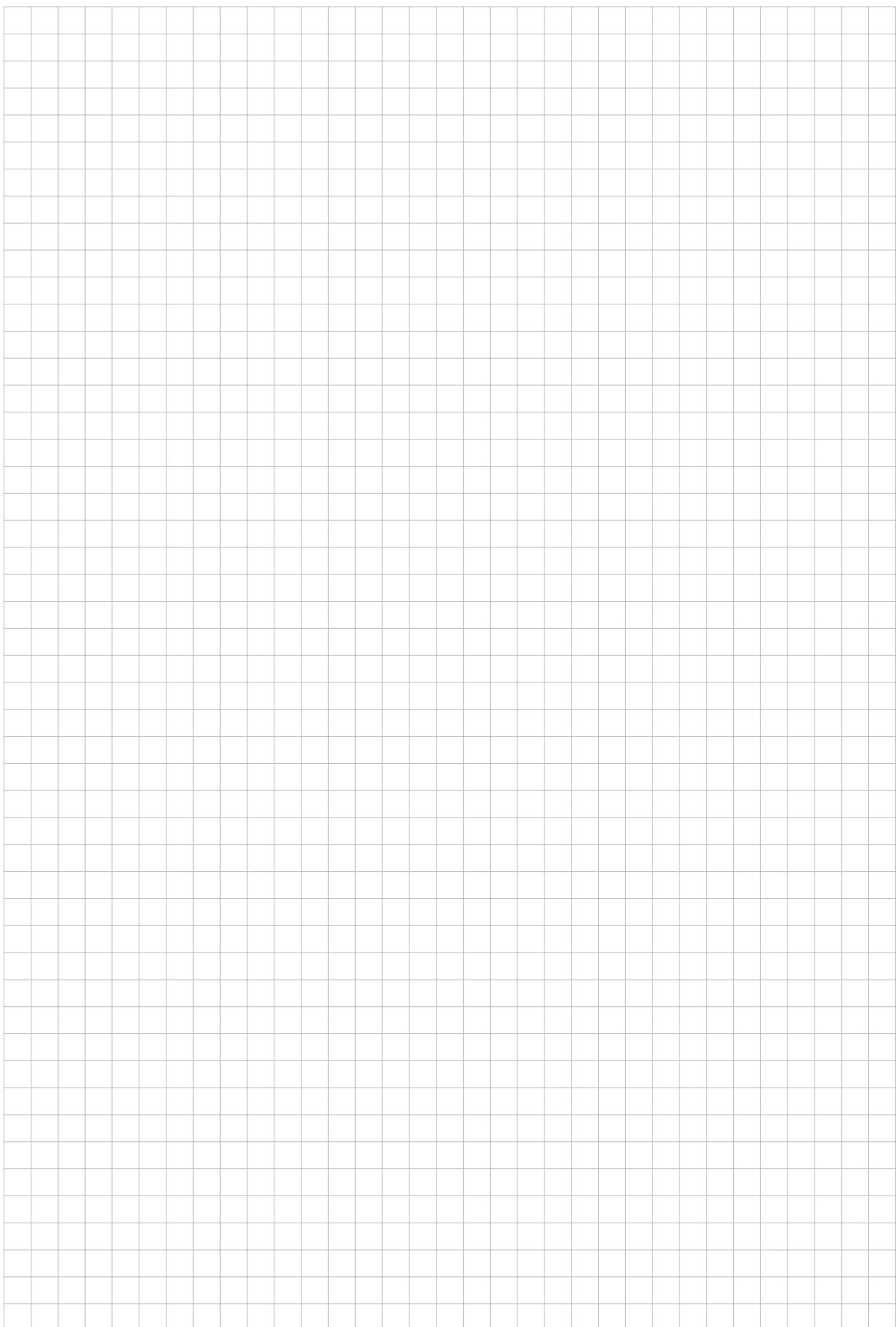
Vérifier le théorème de Gauss-Green sur le domaine suivant:

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \cap \{(x, y) : 0 < y < 8x - 12x^2 + 6x^3 - x^4, \quad x > 0\}$$

avec le champ de vecteurs  $X(x, y) = (-y, x)$ .



+1/8/53+





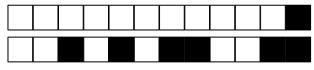
**Question 18:** *Cette question est notée sur 10 points.*

0     1     2     3     4     5     6     7     8     9     10

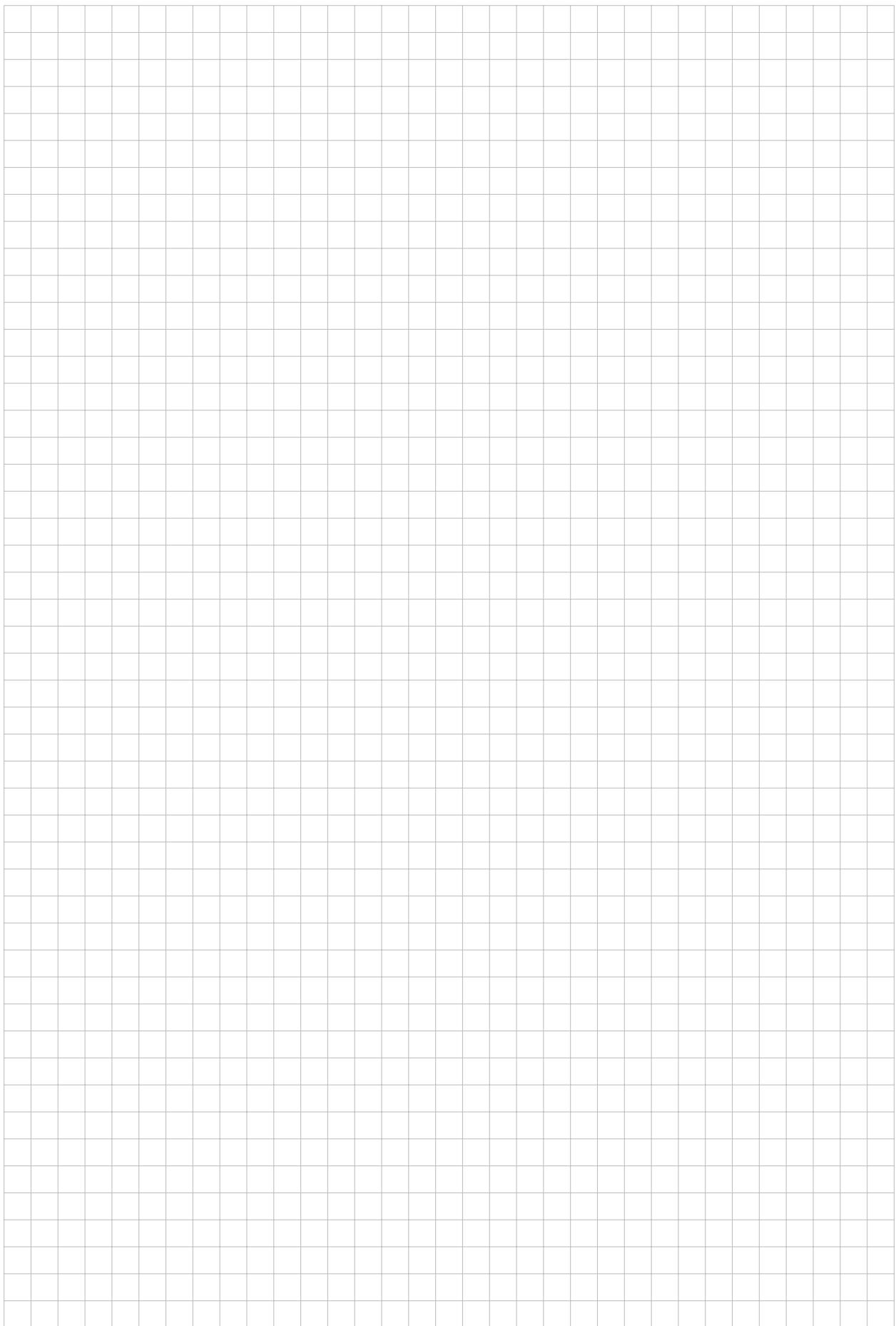
Calculer le volume du domaine

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \cap \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1, -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2} \right\}$$

et vérifier le résultat à l'aide du théorème de la divergence.

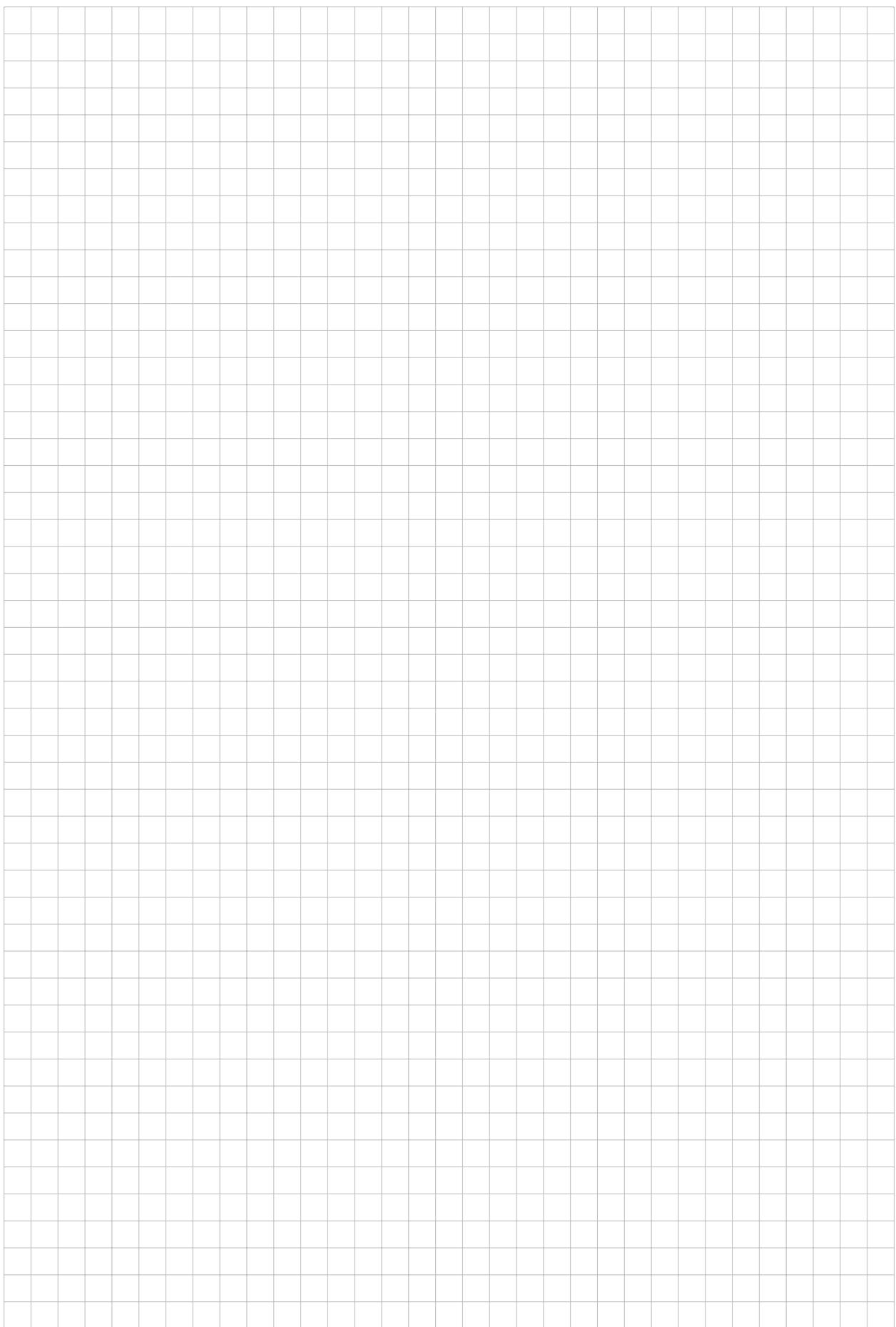


+1/10/51+





+1/11/50+





**Question 19:** Cette question est notée sur 9 points.

<input type="checkbox"/>										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Soit

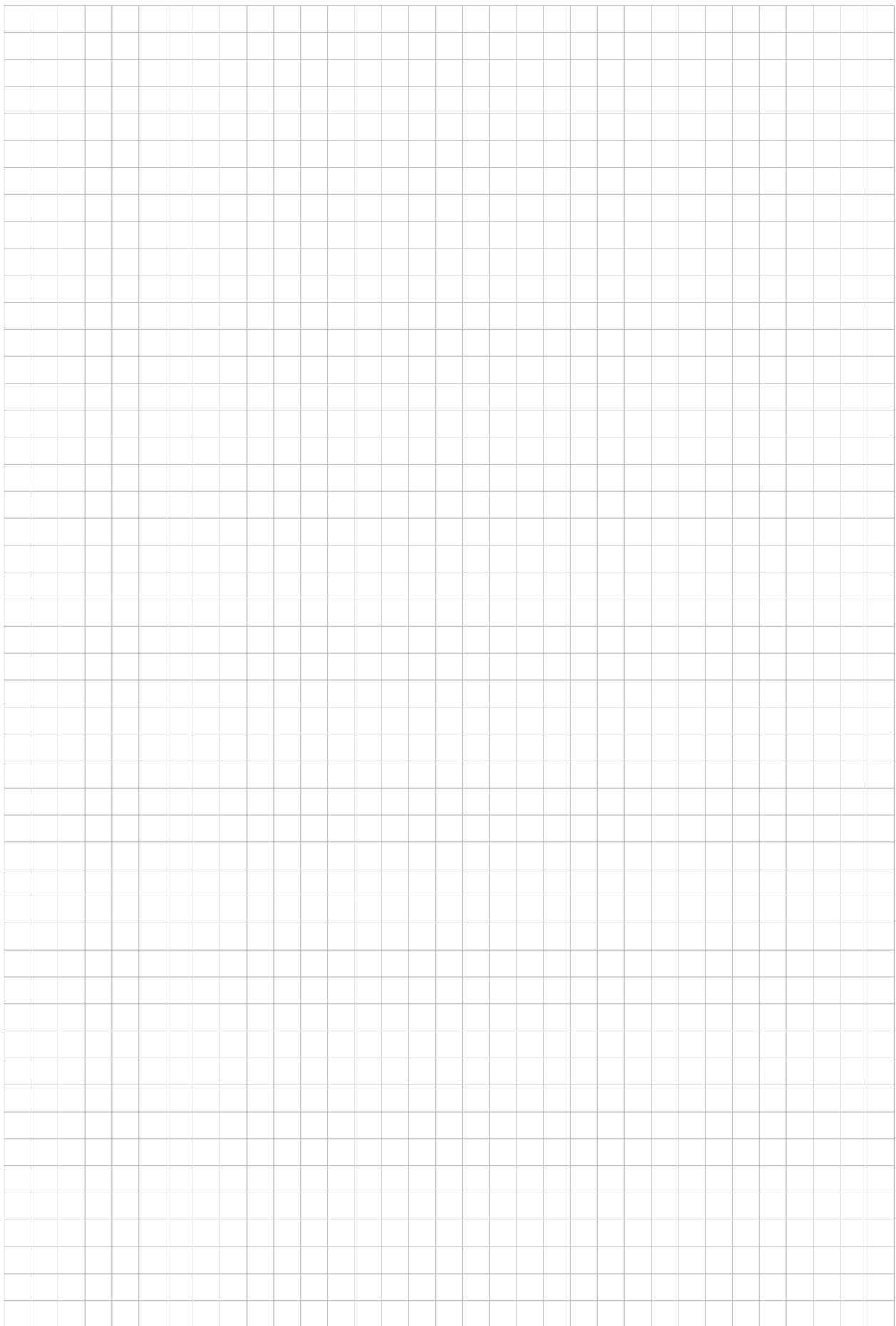
$$\Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \left\{ (x, y, z) : x^2 + z^2 = y^3(1 - y)^3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

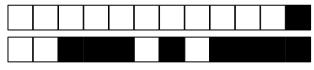
Vérifier le théorème de Stokes sur la surface à bord  $\Sigma$  avec le champ de vecteurs

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

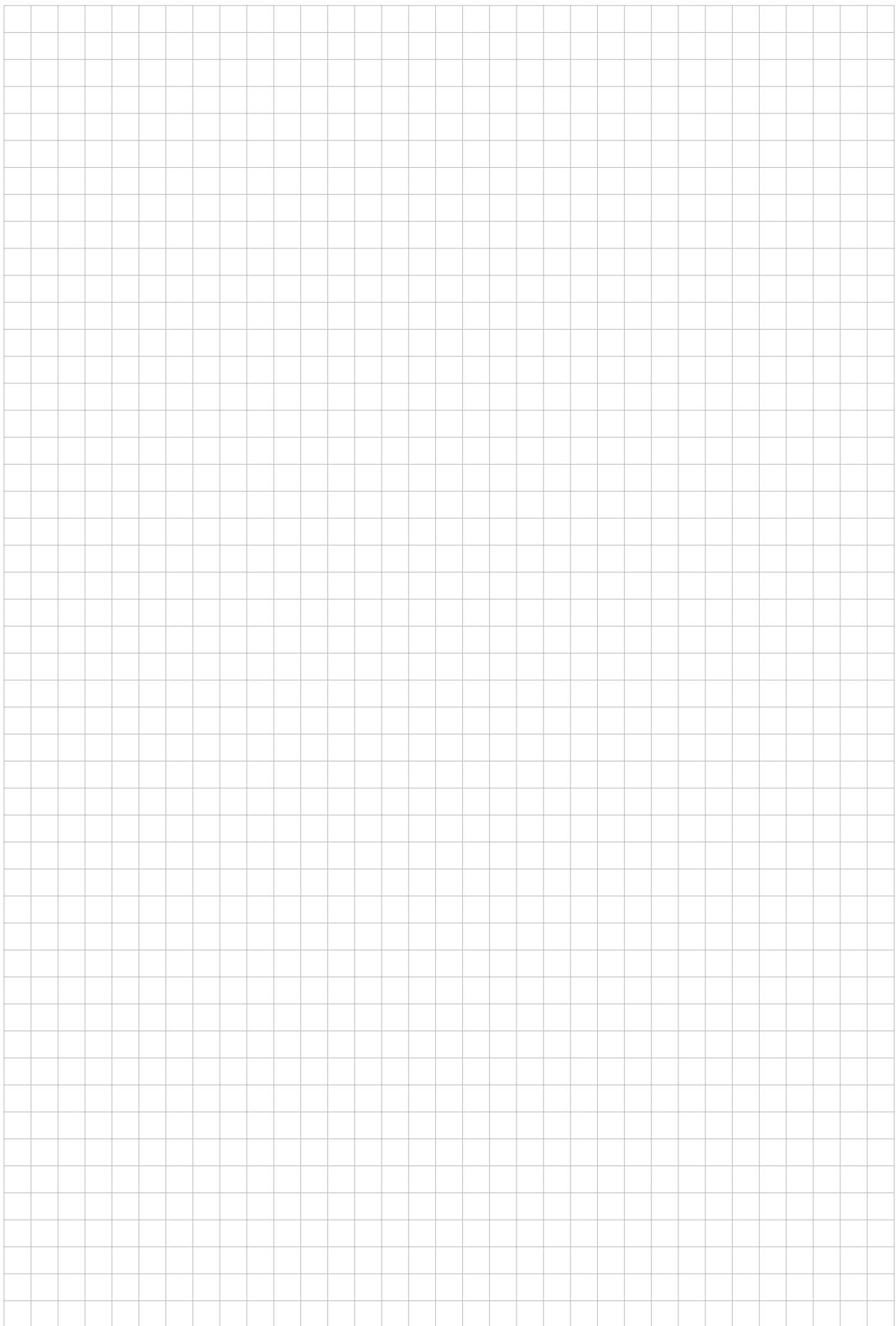


+1/13/48+





+1/14/47+





**Question 20:** *Cette question est notée sur 8 points.*

0    1    2    3    4    5    6    7    8

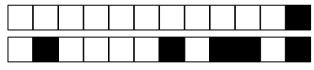
Soit  $f(x) = e^{|x|}$  pour tout  $x \in ]-\pi, \pi]$ , étendue par  $2\pi$ -périodicité sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le coefficient de Fourier de  $f$  est donné par

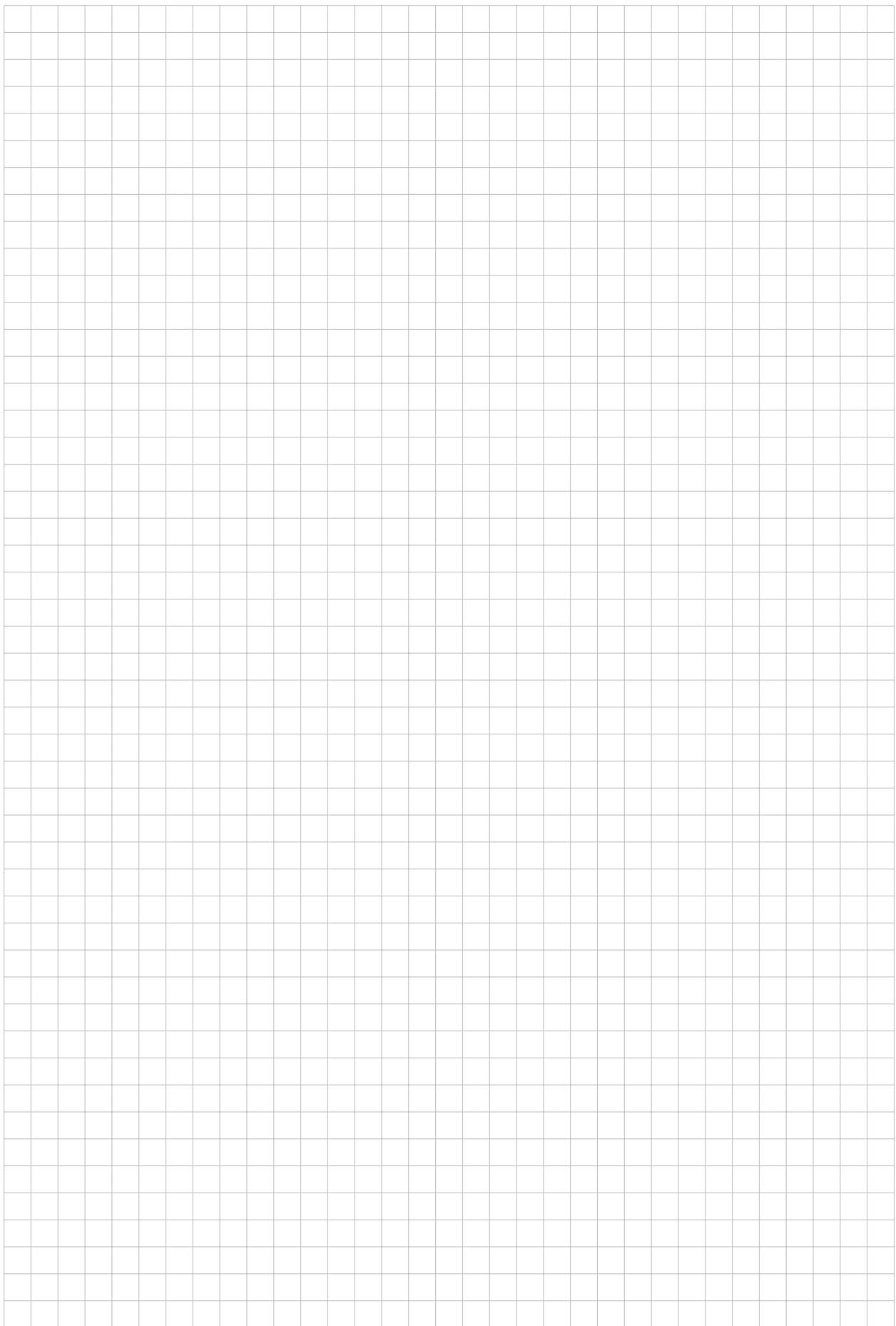
$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \frac{e^\pi (-1)^n - 1}{1 + n^2}.$$

- 2) À l'aide d'un théorème du cours que l'on rappellera, calculer la valeur des deux séries (et simplifier le résultat):

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

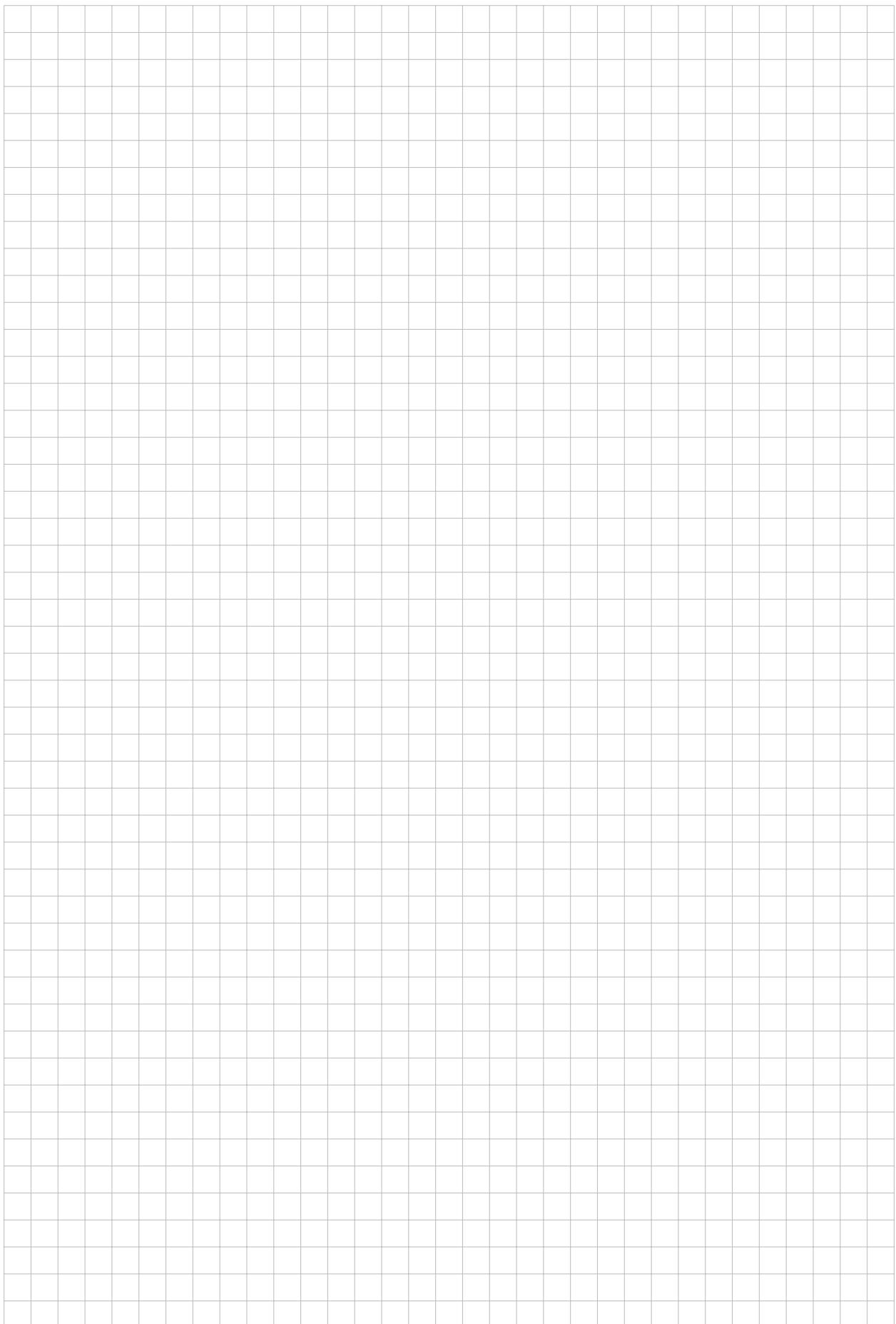


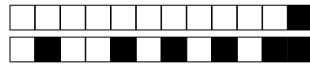
+1/16/45+





+1/17/44+





**Question 21:** *Cette question est notée sur 8 points.*

0    1    2    3    4    5    6    7    8

Soit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-|x|}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier de  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^{-|x|}$  est donnée par

$$\hat{h}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

- 1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin(x)e^{-|x|}$ .
  - 2) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et la question 1), calculer  $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$  en fonction de  $\widehat{g}(\xi)$ .
  - 3) À l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, montrer que

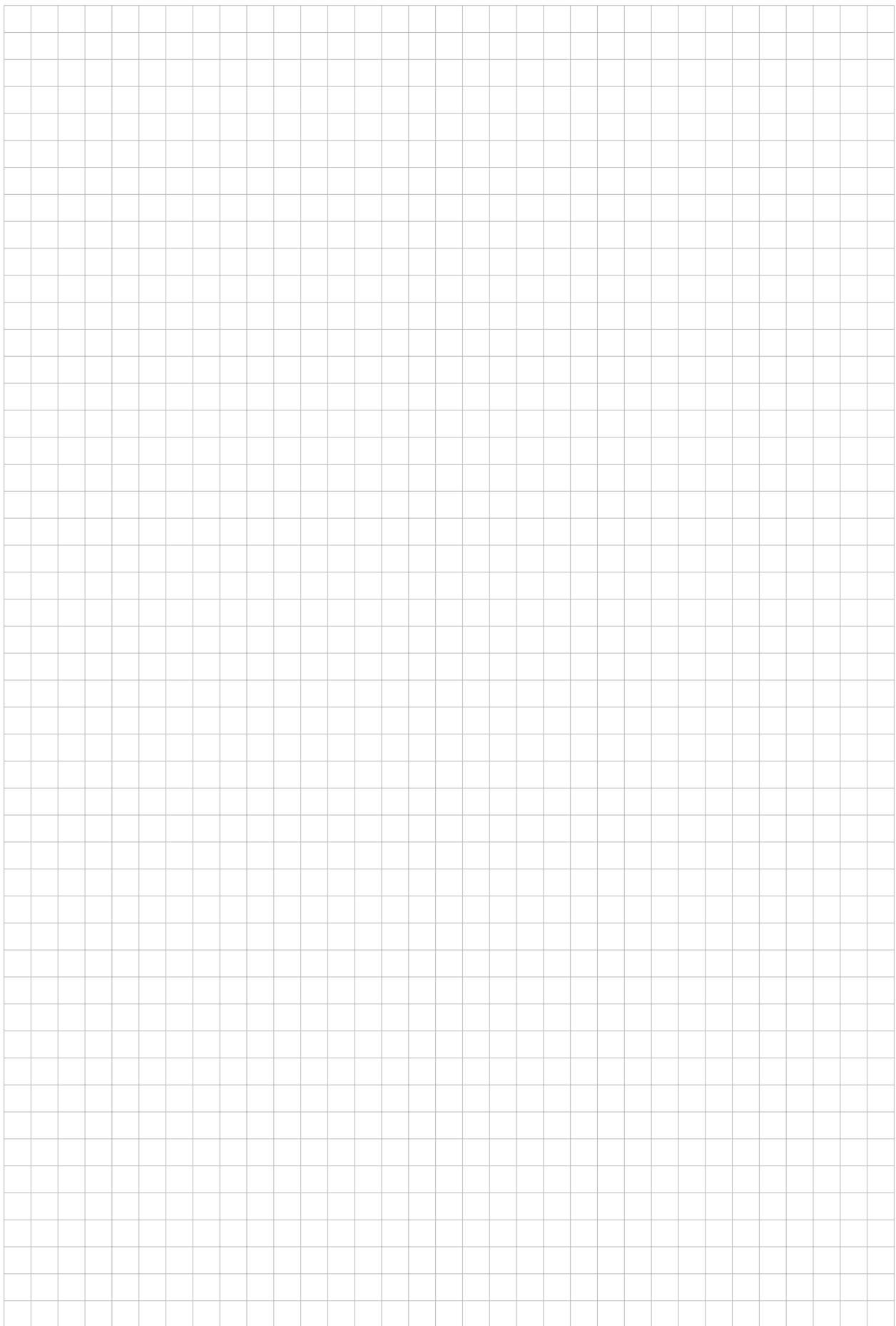
$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\xi^2}{2}\right),$$

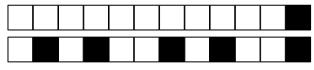
et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$



+1/19/42+





+1/20/41+

