Ens: David Strütt
Analyse III - (n/a)
14 janvier 2025
3 heures
Room : BLANK

BLANK

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides.
Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant·e sur la table.
- Vous avez le droit à un **formulaire d'une feuille A4 recto-verso**. **Aucun** autre document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - moins un tiers du nombre de points indiqués si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Table des transformées de Fourier

		$f(y)$	$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1		$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2		$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$
3		$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\omega > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega + i\alpha)}$
4		$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\omega+i\alpha)b} - e^{-(\omega+i\alpha)c}}{(\omega + i\alpha)}$
5		$f(y) = \begin{cases} e^{-i\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(\omega+\alpha)b} - e^{-i(\omega+\alpha)c}}{\omega + \alpha}$
6		$f(y) = \frac{1}{y^2 + \omega^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lvert\omega\alpha\rvert}}{\lvert\omega\rvert}$
7		$f(y) = \frac{e^{-\lvert\omega y\rvert}}{\lvert\omega\rvert} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$
8		$f(y) = e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert\omega\rvert} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
9		$f(y) = y e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert\omega\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
10		$f(y) = \frac{4y^2}{(\omega^2 + y^2)^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert\omega\rvert} - \lvert\alpha\rvert \right) e^{-\lvert\omega\alpha\rvert}$

Première partie, questions à choix multiple sur l'analyse vectorielle

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : *(4 points)*
Soit le domaine régulier

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1, \ z > 0\}.$$

Son bord est composé de deux parties :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\}$$
paramétrée par $\alpha(\theta, \varphi) = (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi))$, $\quad \theta \in [0, 2\pi], \ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

et

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 0\}$$
paramétrée par $\beta(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0)$, $\quad r \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]$,

Considérons les normales associées $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$.

- ☐ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ est extérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est intérieure.
- ☐ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux intérieures.
- ☐ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ est intérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est extérieure
- ☐ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux extérieures.

Question 2 : *(2 points)*
Soient le champ scalaire $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = xe^y$, la courbe

$$\Gamma = \left\{(e^t, t) \ : \ t \in [0, 1]\right\}$$

et

$$I = \int_\Gamma f \, dl.$$

Alors,

- ☐ $I = \frac{3}{4}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}2^{\frac{3}{2}}$.
- ☐ $I = \frac{xy}{3}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{xy}{3}2^{\frac{3}{2}}$.
- ☐ $I = \frac{1}{3}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}}$.
- ☐ $I = \frac{3xy}{4}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3xy}{4}2^{\frac{3}{2}}$.

Question 3 : *(2 points)*
Soit le domaine régulier

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ x^2 < y < \sqrt{x}\right\}.$$

Le bord de Ω a deux parties :

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0, 1], \ y = x^2\} \text{ paramétré par } \gamma_1(t) = (t, t^2), \ t \in [0, 1],$$

et

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0, 1], \ y = \sqrt{x}\} \text{ paramétré par } \gamma_2(t) = (t^2, t), \ t \in [0, 1].$$

Paramétrés ainsi, on a :

- ☐ Γ_1 est orientée négativement et Γ_2 est orientée positivement.
- ☐ Γ_1 est orientée positivement et Γ_2 est orientée négativement.
- ☐ Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées positivement.
- ☐ Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées négativement.

Question 4 : *(4 points)*
Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = \left(\frac{3y}{2(x^2+y^2)}, -\frac{3x}{2(x^2+y^2)}\right).$$

Alors,

- ☐ Pour Γ, le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1, $\int_\Gamma F\cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ $\operatorname{rot} F \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ Pour Γ, le cercle centré en $(0,2)$ de rayon 1, $\int_\Gamma F\cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ F dérive d'un potentiel.

Question 5 : *(2 points)*
Soit Ω, le carré $[0,1]\times[0,1]$ et le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = (xy^2, x^2y + x).$$

Si on oriente le bord du carré $\partial\Omega$ positivement, l'intégrale $\int_{\partial\Omega} F\cdot dl$ vaut :

- ☐ $\int_{\partial\Omega} F\cdot dl = -1$
- ☐ $\int_{\partial\Omega} F\cdot dl = 1$
- ☐ $\int_{\partial\Omega} F\cdot dl = \frac{5}{3}$
- ☐ $\int_{\partial\Omega} F\cdot dl = 0$

Question 6 : *(3 points)*
Soit le champ scalaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{xy}$$

Alors, le laplacien de f, Δf est donné par :

- ☐ $\Delta f(x,y) = (4 + 8xy + x^4 + 2x^2y^2 - y^4)e^{xy}$
- ☐ $\Delta f(x,y) = (2x - 2y + x^3 + x^2y - xy^2 - y^3)e^{xy}$
- ☐ $\Delta f(x,y) = (x^4 - y^4)e^{xy}$
- ☐ $\Delta f(x,y) = 0$

Question 7 : *(2 points)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel tel que pour tout $x\in\Omega$, $\operatorname{rot} F(x) = 0$. Alors,

- ☐ On ne peut rien dire.
- ☐ F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ F dérive d'un potentiel.
- ☐ L'intégrale curviligne de F le long de n'importe quelle courbe simple fermée régulière est nulle.

Question 8 : *(2 points)*
Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$F(x,y,z) = (yz, -xz, xy). \qquad (1)$$

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier dont le bord est une surface régulière orientable avec normale extérieure unité ν, alors,

- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \; ds = 0$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot ds = \text{Volume}(\Omega)$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} F \; dxdydz$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \; ds = \text{Aire}(\partial\Omega)$

Question 9 : *(4 points)*
Soient le champ scalaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y,z) = 2 - 4z,$$

la surface

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le \frac{1}{4},\ y \ge 0 \right\},$$

paramétrée par

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1-r)\,,\ r \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ \theta \in [0,\pi]\,,$$

et

$$I = \iint_{\Sigma} f ds.$$

Alors,

- ☐ $I = \dfrac{(\sqrt{2}-4)\pi}{6}$
- ☐ $I = -\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$
- ☐ $I = -\dfrac{\pi\sqrt{2}}{12}$

Deuxième partie, questions à choix multiple sur l'analyse de Fourier

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 10 : *(2 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{for } 0 < x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{for } 1 < x \leq 2 \\ x - 1 & \text{for } 2 < x \leq 3 \end{cases} \qquad \text{étendue par 3-périodicité}$$

et considérons $Ff(x)$ sa série de Fourier réelle. Alors, pour $x \in]0,3]$,

- ☐ $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \{2, 3\}$
- ☐ $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \{1, 2, 3\}$
- ☐ $Ff(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$ et $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \{2\}$
- ☐ $Ff(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,3]$

Question 11 : *(5 points)*
Supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(t)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1} \cos(2kt)\,.$$

Alors, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

vaut

- ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$
- ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + 1$
- ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$

Question 12 : *(5 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4t} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et considérons l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(x-t)dt = e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Laquelle des fonctions $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous est solution de l'équation ?

- ☐ $u(x) = \begin{cases} xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- ☐ $u(x) = \left(4 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{4}}$
- ☐ $u(x) = \begin{cases} 4e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- ☐ $u(x) = xe^{-|x|}$

Question 13 : *(2 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = 5 + \frac{1}{2}(5 - i\pi)e^{3ix} + \frac{1}{2}(5 + i\pi)e^{-3ix} - \frac{3}{2}e^{7ix} - \frac{3}{2}e^{-7ix},$$

et soit sa série de Fourier réelle :

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Alors, les seuls coefficients de Fourier réels de f qui sont non-nuls sont

- ☐ $a_0,\ a_3,\ a_7$
- ☐ $a_0,\ b_3,\ a_7$
- ☐ $a_0,\ a_3,\ b_3,\ b_7$
- ☐ $a_0,\ a_3,\ b_3,\ a_7$

Question 14 : *(4 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{for } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{for } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{for } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité.}$$

On admettra sans démonstration que les coefficients de Fourier réels de f sont donnés par

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \qquad \forall n \ge 0 \\ b_n &= \frac{4}{\pi}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2} \qquad \forall n \ge 1. \end{aligned}$$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ vaut

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{8}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{\pi}$

Question 15 : *(6 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \le 0 \\ \frac{x}{\pi} & \text{si } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Alors sa série de Fourier est

- ☐ $\displaystyle Ff(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(nx) \right)$
- ☐ $\displaystyle Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \sin(nx) \right)$
- ☐ $\displaystyle Ff(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$
- ☐ $\displaystyle Ff(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(nx)$

Question 16 : *(3 points)*
L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4y^2}{(1+y^2)^2} \cos(2y) dy$$

vaut :

- ☐ $I = 0$
- ☐ $I = \frac{1}{2\sqrt{2}e}$
- ☐ $I = -\frac{2\pi}{e^2}$
- ☐ $I = \frac{\pi^2}{e}$

Question 17 : *(4 points)*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(y) = (y^2 + 1)e^{-|y|}.$$

Alors, $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f est donnée par

- ☐ $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2 - 6\alpha^2}{(1+\alpha^2)^3} + \frac{1}{1+\alpha^2} \right)$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = \frac{i\alpha^2 + 2\alpha - 3i}{\sqrt{2\pi}(i-\alpha)^3}$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = (\alpha^2 + 1)\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\alpha|}$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 12\alpha^2 + 28}{16\sqrt{2}} e^{-\alpha^2}$

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 18: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

(a) Soit la courbe

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = \sqrt{z},\ y = \sin(x),\ 0 \le z \le \frac{\pi^2}{4}\right\}$$

Donner une paramétrisation $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de Γ et le vecteur tangent correspondant $\gamma'(t)$.

(b) Soit la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 3,\ x \ge 0\right\}$$

Donner une paramétrisation $\sigma\colon A \to \mathbb{R}^3$ de Σ et un champ de vecteur normal correspondant $\sigma_u \wedge \sigma_v$.

Question 19: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

Soit la surface

$$\Sigma := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 = x^2 + y^2 + z^2,\ x \geq 0\right\}$$

et le champ vectoriel

$$F(x, y, z) = \left(0, z^2, y^2\right).$$

(a) Énoncer le théorème de Stokes (seulement l'égalité,pas besoin de mentionner les hypothèses)

(b) Donner une paramétrisation $\sigma\colon A \to \mathbb{R}^3$ de Σ.

(c) Donner la paramétrisation de $\partial\Sigma$ correspondante.

(d) En utilisant la paramétrisation du point précédent, calculer $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$.

Question 20: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

Donner explicitement une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique solution de

$$u''''(x) + 2u(x) = 2 + 3\sin(x) - 36\cos(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

où u'''' dénote la dérivée d'ordre 4 de u.