1

Alexis Michelat

Analyse III MATH-203(a) - MT-SV

16 janvier 2024

Durée : 180 minutes

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.

Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides, et 21 questions (15 questions de QCM, chacune valant 1 point, et 6 exercices à rédaction détaillée valant 45 points en tout). Le total des points de l'examen est de 60.

Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table (avec le côté photo *visible*).
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout autre outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour le questionnaire à **choix multiples**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte;
  0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite, ou si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Formulaire

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{i\,a} = \cos(a) + i\,\sin(a) \qquad 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 \qquad 2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$\cos(2\,a) = 2\cos^2(a) - 1 \qquad 2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$\cos(2\,a) = 1 - 2\sin^2(a) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(2\,a) = 2\cos(a)\sin(a) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \qquad \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

Première partie, questionnaire à choix multiples (+1/0) (15 points)

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 *(1 point)* Soit $f :]-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, étendue par 2-périodicité. Alors, si $S(f)$ est la série de Fourier de f, on a:

- ☐ $S(f)(-1) = \sin(1)$.
- ■ $S(f)(-1) = 0$.
- ☐ $S(f)(-1) = -\sin(1)$.
- ☐ La limite $S_N(f)(-1) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{-\pi i\, n}$ n'existe pas.

Question 2 *(1 point)* Soit $f(x,y) = e^{2x}\sin(x+2y)$. Alors, le laplacien Δf de f est donné par:

- ■ $4e^{2x}\cos(x+2y) - e^{2x}\sin(x+2y)$
- ☐ $4e^{2x}\cos(x+2y) + e^{2x}\sin(x+2y)$
- ☐ $2e^{2x}\cos(x+2y) - e^{2x}\sin(x+2y)$
- ☐ $2e^{2x}\cos(x+2y) + e^{2x}\sin(x+2y)$

Question 3 *(1 point)* Si H est la fonction de Heaviside, telle que

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

et $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ est la masse de Dirac en 0 (telle que $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$), que vaut la convolution suivante au sens des distributions?

$$[x^4] * \left(\delta_0''''' * \left[H(x)H(1-x)e^{-x^2}\right]\right)$$

- ☐ Cette convolution n'est pas bien définie.
- ☐ δ_0
- ☐ $\delta_0 - e^{-1}\delta_1$
- ■ 0

Question 4 *(1 point)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit T_n la distribution donnée par

$$T_n = n^3\delta_{\frac{1}{n}} + n^3\delta_{-\frac{1}{n}} - 2\,n^3\,\delta_0 - n\,\delta_0'',$$

où δ_a est la masse de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Alors, la limite $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ au sens des distributions (dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$) est donnée par:

- ☐ δ_0''
- ■ 0
- ☐ $-\frac{1}{3}\delta_0'''$
- ☐ δ_0

Question 5 *(1 point)* Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note $B(x,r) = \mathbb{R}^2 \cap \{y : |y-x| < r\}$ le disque de centre x et de rayon r. Soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs tel que $\mathrm{rot}(X) = 0$ et

$$\int_{\partial B(2,1)} X \cdot dl = 0.$$

Alors:

- ☐ L'intégrale de X le long de toute courbe régulière fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est nulle.
- ☐ X est exact.
- ☐ X n'est pas exact.
- ■ On ne peut rien conclure.

Question 6 *(1 point)* Soit $f(x) = \exp\left(x^3 \sin(x)\right)$. Quelle affirmation est correcte?

- ☐ $[f]$ est une distribution à support compact ($[f] \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$).
- ■ $[f]$ est une distribution ($[f] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ est une distribution tempérée ($[f] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ n'est pas une distribution ($[f] \notin \mathscr{D}'(\mathbb{R})$).

Question 7 *(1 point)* Soit $F(x,y) = (y\sinh(xy), x\sinh(xy))$ et $G(x,y) = (y\cosh(xy), -x\sinh(xy))$. Alors, les champs de vecteurs exacts sont:

- ☐ F et G.
- ☐ G.
- ■ F.
- ☐ Aucun des deux.

Question 8 *(1 point)* Soit $f(x) = \cos(2023x)\sin(x)$ vue comme fonction 2π-périodique. Alors, on a:

- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1, 1, 2023\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2023\}$.
- ■ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2024, -2022, 2022, 2024\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1\}$.

Question 9 *(1 point)* Soit $T = \sum_{k=0}^{\infty}(\delta_{k+1} - \delta_k)$, où δ_k est la masse de Dirac en $k \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$. Alors, on a:

- ■ $T = -\delta_0$
- ☐ La série de converge pas au sens des distributions (dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $T = 0$
- ☐ $T = \delta_0$

Question 10 *(1 point)* Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ la distribution

$$T = \frac{\sin(2\pi t)}{t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k,$$

où δ_k est la masse de Dirac en $k \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$. Alors, on a:

- ■ $T = 2\pi\,\delta_0$
- ☐ $T = -2\pi\,\delta_0'$
- ☐ $T = 2\pi\,\delta_0'$
- ☐ $T = -2\pi\,\delta_0$

Question 11 *(1 point)* Admettons que la transformée de Fourier de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est donnée par $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{2}\,(\mathrm{sgn}(1+\xi) + \mathrm{sgn}(1-\xi))$, où

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ est égale à:

- ☐ ∞
- ☐ π
- ☐ 2π
- ■ $2\pi^2$

Question 12 *(1 point)* Soit $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^4}$. Alors, la transformée de Fourier de f est donnée par:

- ☐ $\widehat{f}(\xi) = -\dfrac{\pi}{48}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right) e^{-\xi}$.
- ☐ $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{48}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right) e^{-\xi}$.
- ☐ $\widehat{f}(\xi) = -\dfrac{\pi}{48}\left(|\xi|^3 + 6\,\xi^2 + 15|\xi| + 15\right) e^{-|\xi|}$.
- ■ $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{48}\left(|\xi|^3 + 6\,\xi^2 + 15|\xi| + 15\right) e^{-|\xi|}$.

Question 13 *(1 point)* On admet que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est égale à

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi(1-|\xi|) & \text{si } -1 \leq |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale suivante $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$ est égale à:

- ☐ π
- ☐ $\pi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
- ☐ $\pi\sqrt{2\pi}$
- ■ $\dfrac{\pi}{2}$

Question 14 *(1 point)* Soit $f(x) = |\cos(x)|$ et admettons que les coefficients de Fourier de f (vue comme fonction 2π-périodique) vérifient l'identité suivante $|c_n(f)| = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{|n^2-1|}$ si $n \in \mathbb{Z}$ est pair, et $c_n(f) = 0$ sinon (c'est-à-dire, si n est impair). Alors, la série $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$ vaut:

- ☐ $\dfrac{\pi^2}{8} + 1$
- ☐ $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{\pi^2}{8} - 1$
- ■ $\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{2}$

Question 15 *(1 point)* Soit $f :]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)$ étendue par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$. Alors, on a:

- ☐ $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) < 0$.
- ■ $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) > 0$.
- ☐ $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) < 0$.
- ☐ $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) > 0$.

Question 13 *(1 point)* On admet que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est égale à

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi(1-|\xi|) & \text{si } -1 \leq |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale suivante $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$ est égale à:

- ☐ π
- ☐ $\pi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
- ☐ $\pi\sqrt{2\pi}$
- ☒ $\dfrac{\pi}{2}$

In this exercise, from a previous year, the teacher used a different notation for the Fourier transform.

His definition was

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx \qquad (1)$$

instead of

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx \qquad (2)$$

used in my course.

IMPORTANT NOTE in this course (and specially in the exam) we stick to the definition (2). However, for this particular exercise we use (1).

Thus, evaluating $\hat{f}$ at $\xi = 0$ we obtain

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{0}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = 2I$$

Evaluating the $\hat{f}(\xi)$ provided we get

$$\hat{f}(0) = \pi(1-|0|) = \pi = 2I \longrightarrow I = \pi/2.$$

If instead we use the definition (2), the provided Fourier transform should have been:

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-|\xi|) & \text{if } |\xi| \le 1 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then, everything is the same

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i0x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, 2 \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, I$$

$$\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-|0|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, I \longrightarrow I = \pi/2.$$

Question 11 *(1 point)* Admettons que la transformée de Fourier de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est donnée par $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(1+\xi) + \operatorname{sgn}(1-\xi)\right)$, où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ est égale à:

- [ ] ∞
- [x] π
- [ ] 2π
- [ ] $2\pi^2$

As in question 13, the given Fourier transform follows the definition (1) above. The Plancherel identity associated to that definition becomes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \qquad (3)$$

instead of

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \qquad (4)$$

IMPORTANT NOTE in this course (and specially in the exam) we stick to the identity (4)

However, for this particular exercise we use (3).

The given Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{sgn}(1+\xi) + \operatorname{sgn}(1-\xi) \right)$$

can be written as:

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi & \text{if } -1 < \xi < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Thus, applying the Plancherel identity (3)

we get:

$$I = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \pi^2\,d\xi = \pi$$

Deuxième partie, questions ouvertes

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Chaque résultat du cours utilisé doit être précisément énoncé.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées aux correcteurs.

Question 16: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4

On considère la fonction

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ \theta &\to \left(\cos^3(\theta), \sin^3(\theta)\right) \end{aligned}$$

Calculer la longueur de la courbe fermée $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

Question 17: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6

Vérifier le théorème de Gauss-Green sur le domaine suivant:

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \cap \left\{(x,y) : 0 < y < 8\,x - 12\,x^2 + 6\,x^3 - x^4,\;\; x > 0\right\}$$

avec le champ de vecteurs $X(x,y) = (-y, x)$.

Question 18: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ■ 10

Calculer le volume du domaine

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \cap \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}\right\}$$

et vérifier le résultat à l'aide du théorème de la divergence.

Question 19: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ■9

Soit

$$\Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \left\{ (x,y,z) : x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes sur la surface à bord Σ avec le champ de vecteurs

$$X(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Question 20: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Soit $f(x) = e^{|x|}$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$, étendue par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier de f est donné par

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1 + n^2}.$$

2) À l'aide d'un théorème du cours que l'on rappelera, calculer la valeur des deux séries (et simplifier le résultat):

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Question 21: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Soit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-|x|}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-|x|}$ est donnée par

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)e^{-|x|}$.

2) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et la question 1), calculer $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$ en fonction de $\widehat{g}(\xi)$.

3) À l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\xi^2}{2}\right),$$

et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$

Analyse III

Alexis Michelat *

EPFL MATH-203(a)
Version du 12 février 2024

*. EPFL B, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland alexis.michelat@epfl.ch

1 QCM

On a bien sûr utilisé la convention du cours :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\,x\cdot\xi} dx.$$

Exercice 1.1. Soit $f(x,y) = e^{2x}\sin(x+2y)$. Alors, le laplacien Δf de f est donné par

1. $4e^{2x}\cos(x+2y) - e^{2x}\sin(x+2y)$.
2. $4e^{2x}\cos(x+2y) + e^{2x}\sin(x+2y)$.
3. $2e^{2x}\cos(x+2y) - e^{2x}\sin(x+2y)$.
4. $2e^{2x}\cos(x+2y) + e^{2x}\sin(x+2y)$.

Démonstration. La bonne réponse est la 1ère.

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= 2e^{2x}\sin(x+2y) + e^{2x}\cos(x+2y)\\
\partial_x^2 f &= 4e^{2x}\sin(x+2y) + 4e^{2x}\cos(x+2y) - e^{2x}\sin(x+2y)\\
\partial_y^2 f &= -4e^{2x}\sin(x+2y)\\
\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f &= 4e^{2x}\cos(x+2y) - e^{2x}\sin(x+2y).
\end{aligned}$$

□

Exercice 1.2. Soit $f :]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)$ étendue par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) > 0$.
2. $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) > 0$.
3. $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) < 0$.
4. $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) < 0$.

Démonstration. f est paire et positive (car $1 < \pi/2$), et la réponse correcte est donc la 1ère. □

Exercice 1.3. On admet que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est égale à

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi(1-|\xi|) & \text{si } -1 \leq |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale suivante $I = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$ est égale à :

1. π.
2. $\frac{\pi}{2}$.
3. $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
4. $\pi\sqrt{2\pi}$.

Démonstration.

$$I = \frac{1}{2}\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

La bonne réponse est la 2ème.

Pour trouver cette transformée de Fourier, on peut utiliser la même preuve que dans la question 10 en dérivant deux fois (il faut utiliser la théorie des distributions dans ce cas)c, ou remarquer simplement que par parité

$$\mathscr{F}(x \mapsto (1-|x|)_+)(\xi) = 2\int_0^1 (1-x)\cos(x\,\xi)dx = 2\left[(1-x)\frac{\sin(x\,\xi)}{\xi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(x\,\xi)}{\xi}dx = 2\left[\frac{-\cos(x\,\xi)}{\xi^2}\right]_0^1$$
$$= \frac{2(1-\cos(x))}{x^2},$$

ce qui implique le résultat souhaité à l'aide de la transformée de Fourier inverse. $\square$

Remarque. Cet exercice est plus difficile avec l'autre convention.

Exercice 1.4. Soit $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^4}$. Alors, la transformée de Fourier de f est donnée par :

1. $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{48}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right)e^{-\xi}$.
2. $\widehat{f}(\xi) = -\dfrac{\pi}{48}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right)e^{-\xi}$.
3. $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{48}\left(|\xi|^3 + 6\,\xi^2 + 15|\xi| + 15\right)e^{-|\xi|}$.
4. $\widehat{f}(\xi) = -\dfrac{\pi}{48}\left(|\xi|^3 + 6\,\xi^2 + 15|\xi| + 15\right)e^{-|\xi|}$.

Démonstration. La transformée de Fourier d'une fonction paire est une fonction paire. De plus, f est positive, ce qui implique que

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx > 0.$$

La bonne réponse est donc la 3ème. Pour le calcul, on peut calculer la transformée de Fourier de $\widehat{f}$ (en intégrant par parties) et utiliser l'inversion de Fourier. Mais le moyen facile (hors-programme, mais que vous verrez en Analyse IV), c'est d'utiliser l'analyse complexe. Soit $f_1(z) = \dfrac{1}{(z+i)^4}$ et $f_2(z) = e^{i\,z\,\xi}$. On a

$$\begin{aligned}
f_1'(z) &= -\frac{4}{(z+i)^5} & \qquad f_2'(z) &= i\,\xi\, e^{i\,z\,\xi}\\
f_1''(z) &= \frac{20}{(z+i)^6} & \qquad f_2''(z) &= -\xi^2\, e^{i\,z\,\xi}\\
f_1'''(z) &= -\frac{120}{(z+i)^7} & \qquad f_2'''(z) &= -i\,\xi^3 e^{i\,z\,\xi}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $f = f_1 f_2$ on a

$$\begin{aligned}
f'''(z) &= f_1'''(z)f_2(z) + 3\,f_1''(z)f_2'(z) + 3\,f_1'(z)f_2''(z) + f_1(z)f_2'''(z)\\
&= \left(-\frac{120}{(z+i)^7} + \frac{60\,i\,\xi}{(z+i)^6} + \frac{12\,\xi^2}{(z+i)^5} - \frac{i\,\xi^3}{(z+i)^4}\right)e^{i\,z\,\xi}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f'''(i) = -\frac{i}{16}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right)e^{-\xi},$$

et si

$$F(z) = \frac{e^{i\,z\,\xi}}{(1+z^2)^4},$$

on obtient

$$\mathrm{Res}(F,i) = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left((z-i)^4 F(z)\right)_{|z=i} = \frac{1}{6}f'''(i) = -\frac{i}{96}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right)e^{-\xi},$$

et si $\xi > 0$ (de sorte que l'intégrale sur $\partial D_+(0,R)$ tend vers 0 quand $R \to \infty$ par convergence dominée), on obtient donc par le théorème des résidus appliqué à $\Gamma_R = [-R,R] \cup \partial D_+(0,R)$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\,x\,\xi}}{(1+x^2)^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} F(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(F,i) = \frac{\pi}{48}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right) e^{-\xi}.$$

La formule pour $\xi \leq 0$ s'ensuie par parité. □

Exercice 1.5. Soit $f :]-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, étendue par 2-périodicité. Alors, si $S(f)$ est la série de Fourier de f, on a :

1. $S(f)(-1) = \sin(1)$.
2. $S(f)(-1) = -\sin(1)$.
3. $S(f)(-1) = 0$.
4. La limite $S_N(f)(-1) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{-2\pi i\, n}$ n'existe pas.

Démonstration. f est impaire, donc on obtient $S(f)(-1) = 0$ par le théorème de Dirichlet. La bonne réponse est la 3ème. □

Exercice 1.6. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note $B(x,r) = \mathbb{R}^2 \cap \{y : |y-x| < r\}$ le disque de centre x et de rayon r. Soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs tel que $\mathrm{rot}(X) = 0$ et

$$\int_{\partial B(2,1)} X \cdot dl = 0.$$

Alors :

1. X est exact.
2. X n'est pas exact.
3. L'intégrale de X le long de toute courbe régulière fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est nulle.
4. On ne peut rien conclure.

Démonstration. On ne peut rien conclure car l'intégrale sur le lacet donné ne contient pas 0. On remarquera que 1. et 3. sont équivalentes, et comme il y a une seule réponse, ces deux possibilités sont exclues. □

Exercice 1.7. Soit $F(x,y) = (y\sinh(xy), x\sinh(xy))$ et $G(x,y) = (y\cosh(xy), -x\sinh(xy))$. Alors, les champs de vecteurs exacts sont :

1. F.
2. G.
3. F et G.
4. Aucun des deux.

Démonstration. F, avec comme potentiel $f(x,y) = \cosh(xy)$. En intégrant la seconde fonction, on obtient comme potentiel $g(x,y) = \sinh(xy) + c_1(y) = -\cosh(xy) + c_2(x)$, et ces équations sont incompatibles. □

Exercice 1.8. Soit $f(x) = |\cos(x)|$ et admettons que les coefficients de Fourier de f (vue comme fonction 2π-périodique) vérifient l'identité suivante $|c_n(f)| = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{|n^2-1|}$ si $n \in \mathbb{Z}$ est pair, et $c_n(f) = 0$ sinon (c'est-à-dire, si n est impair). Alors, la série $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(4k^2-1)^2}$ vaut :

1. $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$.
2. $\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{2}$.

3. $\dfrac{\pi^2}{8} - 1$.
4. $\dfrac{\pi^2}{8} + 1$.

Démonstration. C'est la deuxième réponse, voir l'examen de l'an passé (on a ajouté un terme à la série, attention !). $\square$

Exercice 1.9. Soit $f(x) = \cos(2023x)\sin(x)$ vue comme fonction 2π-périodique. Alors, on a :

1. $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1, 1, 2023\}$.
2. $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2024, -2022, 2022, 2024\}$.
3. $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2023\}$.
4. $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1\}$.

Démonstration. La 2ème réponse est correcte (les fréquences s'ajoutent et se soustraient ; voir les formules de duplication du formulaire). Encore une question copiée de l'examen de 2022-2023. $\square$

Exercice 1.10. Admettons que la transformée de Fourier de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est donnée par $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{2}\left(\mathrm{sgn}(1+\xi) + \mathrm{sgn}(1-\xi)\right)$, où

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$ est égale à :

1. ∞.
2. π.
3. 2π.
4. $2\pi^2$.

Démonstration. En vertu de la formule de Plancherel, on a

$$I = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

$\widehat{f}$ est paire, et $\widehat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 1$. Si $-1 \leq \xi \leq 1$, on a $\widehat{f}(\xi) = \pi$, et on obtient

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi^2 d\xi = \pi.$$

La bonne réponse est donc la 2ème.

Pour calculer cette transformée de Fourier, le moyen le plus simple (hors analyse complexe) est d'utiliser la théorie des distributions. Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-i\,x\,\xi} dx,$$

et cette formule reste vraie dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par densité, au sens où pour tout $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\left(\widehat{T}\right)' = -i\,\widehat{xT}.$$

Par conséquent, on a

$$\left(\widehat{f}\right)' = -i\,\mathscr{F}(\sin(x)),$$

où l'on identifie $\sin(x)$ avec $[x \mapsto \sin(x)]$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \mathscr{F}(e^{i\,\alpha\,x}), \varphi \right\rangle = \left\langle e^{i\,\alpha\,x}, \widehat{\varphi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\,\alpha\,\xi} d\xi = 2\pi\varphi(\alpha) = \langle 2\pi\delta_\alpha, \varphi \rangle\,.$$

Par conséquent, on a

$$\left(\widehat{f}\right)' = -i\,\mathscr{F}(\sin(x)) = -i\,\mathscr{F}\left(\frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2i}\right) = -i\left(\frac{2\pi\delta_1 - 2\pi\delta_{-1}}{2i}\right) = -\pi(\delta_1 - \delta_{-1}).$$

Le Lemme de du Bois-Reymond implique donc que $\widehat{f}$ est une fonction et qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\widehat{f}(\xi) = -\pi\left(H(\xi - 1) - H(\xi + 1)\right) + c = \begin{cases} c & \text{si } \xi \geq 1 \\ \pi + c & \text{si } -1 < \xi < 1 \\ c & \text{si } \xi < -1. \end{cases}$$

En vertu du Lemme de Riemann-Lebesgue, on a $c = 0$. Remarquons qu'on peut voir directement que $\widehat{f}$ est une fonction (d'ailleurs, c'est nécessaire pour pouvoir appliquer Riemann-Lebesgue) car pour tous $a < b$, on a si $\xi \neq \{\pm 1\}$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} e^{-i\,x\,\xi} dx = \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} e^{-i\,x\xi}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos(x)}{x^2} e^{-i\,x\,\xi} dx + i\,\xi \int_a^b \frac{1 - \cos(x)}{x} e^{-i\,x\,\xi} dx \\
&= \frac{1 - \cos(b)}{b} e^{i\,b\,\xi} - \frac{1 - \cos(a)}{a} e^{-i\,a\,\xi} + \int_a^b \frac{1 - \cos(x)}{x^2} e^{-i\,x\,\xi} dx \\
&+ \left[\left(1 - e^{-i\,x\,\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi + 1}(e^{-i(\xi+1)x} - 1) + \frac{\xi}{\xi - 1}(e^{-i(\xi-1)x} - 1)\right)\right)\frac{1}{x}\right]_a^b \\
&+ \int_a^b \left(1 - e^{-i\,x\,\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi + 1}(1 - e^{-i(\xi+1)x}) + \frac{\xi}{\xi - 1}(1 - e^{-i(\xi-1)x})\right)\right)\frac{1}{x^2} dx \\
&= \frac{1 - \cos(b)}{b} e^{i\,b\,\xi} - \frac{1 - \cos(a)}{a} e^{-i\,a\,\xi} + \int_a^b \frac{1 - \cos(x)}{x^2} e^{-i\,x\,\xi} dx \\
&+ \left(1 - e^{-i\,b\,\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi + 1}\left(e^{-i(\xi+1)b} - 1\right) + \frac{\xi}{\xi - 1}\left(e^{-i(\xi-1)b} - 1\right)\right)\right)\frac{1}{b} \\
&- \left(1 - e^{-i\,a\,\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi + 1}\left(e^{-i(\xi+1)a} - 1\right) + \frac{\xi}{\xi - 1}\left(e^{-i(\xi-1)a} - 1\right)\right)\right)\frac{1}{a} \\
&+ \int_a^b \left(1 - e^{-i\,x\,\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi + 1}\left(1 - e^{-i(\xi+1)x}\right) + \frac{\xi}{\xi - 1}\left(1 - e^{-i(\xi-1)x}\right)\right)\right)\frac{1}{x^2} dx
\end{aligned}$$

On remarque que pour $\xi = 0$, on obtient l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \pi,$$

et la second intégrale est absolument convergente. Pour $\xi = \pm 1$, on a par parité de f

$$\mathscr{F}(f)(1) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x)}{2x} dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(y)}{y} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En général, on vérifie facilement que

$$1 - e^{-i\,x\,\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi + 1}\left(1 - e^{-i(\xi+1)x}\right) + \frac{\xi}{\xi - 1}\left(1 - e^{-i(\xi-1)x}\right)\right) = O(x^2),$$

ce qui montre que la seconde intégrale est absolument convergente, par conséquent, pour tout choix de suites $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telles que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin(x)}{x} e^{-i\,x\,\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} e^{-i\,x\,\xi} dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}}\left(1-e^{-i\,x\,\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi+1}\left(1-e^{-i(\xi+1)x}\right)+\frac{\xi}{\xi-1}\left(1-e^{-i(\xi-1)x}\right)\right)\right)\frac{1}{x^2}dx,$$

et ces deux intégrales sont absolument convergentes pour tout $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. $\square$

Exercice 1.11. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit T_n la distribution donnée par

$$T_n=n^3\delta_{\frac{1}{n}}+n^3\delta_{-\frac{1}{n}}-2\,n^3\,\delta_0-n\,\delta_0'',$$

où δ_a est la masse de Dirac en $a\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})=C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_a(\varphi)=\varphi(a)$. Alors, la limite $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ au sens des distributions (dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$) est donnée par :

1. 0.
2. δ_0.
3. δ_0''.
4. $-\dfrac{1}{3}\delta_0'''$.

Démonstration. C'est 0.

Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(x)&=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{1}{2}\varphi''(0)x^2+\frac{1}{6}\varphi'''(0)x^3+O(x^4)\\
\varphi\left(\frac{1}{n}\right)&=\varphi(0)+\frac{1}{n}\varphi'(0)+\frac{1}{2n^2}\varphi''(0)+\frac{1}{6n^3}\varphi'''(0)+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
\varphi\left(-\frac{1}{n}\right)&=\varphi(0)-\frac{1}{n}\varphi'(0)+\frac{1}{2n^2}\varphi''(0)-\frac{1}{6n^3}\varphi'''(0)+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
\varphi\left(\frac{1}{n}\right)&+\varphi\left(-\frac{1}{n}\right)-2\varphi(0)-\frac{1}{n^2}\varphi''(0)=O\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 1.12. Soit $T=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\delta_{k+1}-\delta_k)$, où δ_k est la masse de Dirac en $k\in\mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})=C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi)=\varphi(k)$. Alors, on a :

1. $T=\delta_0$.
2. $T=-\delta_0$.
3. $T=0$.
4. La série de converge pas au sens des distributions.

Démonstration. La 2ème réponse est correcte car

$$T(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi(k+1)-\varphi(k))=-\varphi(0)=-\delta_0(\varphi).$$

$\square$

Exercice 1.13. Soit $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ la distribution

$$T=\frac{\sin(2\pi t)}{t}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k,$$

où δ_k est la masse de Dirac en $k\in\mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})=C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi)=\varphi(k)$. Alors, on a :

1. $T=2\pi\delta_0$.
2. $T=-2\pi\delta_0$.

3. $T = 2\pi\delta_0'$.
4. $T = -2\pi\delta_0'$.

Démonstration. $f(t) = \dfrac{\sin(2\pi t)}{t}$ s'annule sur $\mathbb{Z}^*$, ce qui montre que

$$T(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k(f\,\varphi) = f(0)\varphi(0) = 2\pi\varphi(0) = 2\pi\delta_0(\varphi).$$

□

La bonne réponse est donc la 1ère.

Exercice 1.14. Si H est la fonction de Heaviside, telle que

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0, \end{cases}$$

et $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ est la masse de Dirac en 0 (telle que $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$), que vaut la convolution suivante au sens des distributions ?

1. δ_0.
2. $\delta_0 - e^{-1}\delta_1$.
3. 0.
4. Cette convolution n'est pas bien définie.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&[x^4] * \left(\delta_0^{'''''} * \left[H(x)H(1-x)e^{-x^2}\right]\right) = \left([x^4] * \delta_0^{'''''}\right) * \left[H(x)H(1-x)e^{-x^2}\right] \\
&= \left(\left[(x^4)^{'''''}\right] * \delta_0\right) * \left[H(x)H(1-x)e^{-x^2}\right] = 0.
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la 3ème. On peut aussi faire le calcul direct

$$\begin{aligned}
T(\varphi) &= \left\langle (\delta_0^{'''''} * [H(x)H(1-x)e^{-x^2}])_t, \int_{\mathbb{R}} z^4\varphi(z+t)dz \right\rangle \\
&= \left\langle (\delta_0^{'''''})_x, \int_0^1 e^{-y^2}\left(\int_{\mathbb{R}} z^4\varphi(x+y+z)\right) dy \right\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 z^4 e^{-y^2}\varphi^{'''''}(y+z)dydz \\
&= \int_0^1 e^{-y^2}\left(\left[-z^4\varphi''''(y+z)\right]_{-\infty}^{\infty} + 4\int_{\mathbb{R}} z^3\varphi''''(y+z)dz\right) dy \\
&= \int_0^1 e^{-y^2}\left(-12\int_{\mathbb{R}} z^2\varphi'''(y+z)dz\right) dy \\
&= \int_0^1 e^{-y^2}\left(24\int_{\mathbb{R}} z\varphi''(y+z)dz\right) dy \\
&= \int_0^1 e^{-y^2}\left(-24\int_{\mathbb{R}} \varphi'(y+z)dz\right) dy = 0.
\end{aligned}$$

□

Exercice 1.15. Soit $f(x) = \exp\left(x^3\sin(x)\right)$. Quelle affirmation est correcte ?

1. $[f]$ n'est pas une distribution ($[f] \notin \mathscr{D}'(\mathbb{R})$).
2. $[f]$ est une distribution ($[f] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$).
3. $[f]$ est une distribution tempérée ($[f] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$).

4. $[f]$ est une distribution à support compact ($[f] \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$).

Démonstration. C'est la seconde car f n'est pas à support compact ou tempérée, mais c'est bien une fonction localement intégrable. Elle n'est pas tempérée car si

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

alors comme on l'a vu en cours, on a $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx &= \int_0^{\infty} e^{x^3\sin(x)-\frac{1}{x}-x}dx \geq \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{4}+2\pi n}^{\frac{3\pi}{4}+2\pi n} e^{x^3\sin(x)-\frac{1}{x}-x}dx \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{2}\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)^3 - \frac{1}{\frac{\pi}{4}+2\pi n} - \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\right) = \infty. \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser $f(x) = e^{-x^2}$ et la preuve est encore plus simple. Et pour un QCM, on peut immédiatement éliminer 3) et 4) car 4) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 2), et il y a une seule réponse correcte. C'est donc soit 1), soit 2), et comme f est bien localement intégrable, c'est la réponse 2). □

Remarque. Dans l'ensemble, le QCM a été assez bien réussi, y compris les questions sur les distributions.

2 Exercices à rédaction détaillée

Exercice 2.1 (4 points)**.** On considère la fonction

$$\begin{aligned} \gamma : [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ \theta &\to \left(\cos^3(\theta), \sin^3(\theta)\right) \end{aligned}$$

Calculer la longueur de la courbe fermée $\Gamma = \gamma([0,2\pi])$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\Gamma) &= \int_0^{2\pi}\sqrt{9\cos^4(\theta)\sin^2(\theta)+9\sin^4(\theta)\cos^2(\theta)}dx = \int_0^{2\pi}\sqrt{9\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\left(\cos^2(\theta)+\sin^2\theta)\right)}d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)||\sin(\theta)|d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}|\sin(2\theta)|\,d\theta = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)d\theta = 6\left[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6. \end{aligned}$$

Remarque 2.2. Environ 90% des étudiants ont obtenu moins de 3 points, ce qui correspond presque toujours à un calcul d'une courbe de longueur 0 ! En effet, une majorité inquiétante d'étudiants a utilisé la « formule » bien connue $\sqrt{x^2} = x$, ce qui amène bien à un calcul d'une courbe de longueur 0 :

$$3\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = 0.$$

□

Exercice 2.3 (6 points)**.** Vérifier le théorème de Gauss-Green sur le domaine suivant :

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \cap \left\{(x,y) : 0 < y < 8\,x - 12\,x^2 + 6\,x^3 - x^4,\ \ x > 0\right\}$$

avec le champ de vecteurs $X(x,y) = (-y,x)$.

Démonstration. On a $8\,x-12\,x^2+6\,x^3-x^4=x(2-x)^3$, ce qui implique que $0\leq x\leq 2$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{rot} X\,dx\,dy &= 2\int_0^2\left(\int_0^{8\,x-12\,x^2+6\,x^3-x^4}dy\right)dx = 2\left[4x^2-4x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2\\ &= 2\left(16-32+24-\frac{32}{5}\right)=\frac{16}{5}.\end{aligned}$$

On paramètre la première partie du bord par $\gamma_1(t)=(t,0)$, où $0\leq t\leq 2$. On obtient si $\Gamma_1=\gamma_1([0,1])$

$$\int_{\Gamma_1} X\cdot dl = \int_0^2 X(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)dt = \int_0^2 (0,t)\cdot(1,0)dt = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} X\cdot dl &= \int_0^2\left(-8t+12t^2-6t^3+t^4,t\right)\cdot(1,8-24t+18t^2-4t^3)dt\\ &= \int_0^2\left(-12t^2+12t^3-3t^4\right)dt = \left[-4t^3+3t^4-\frac{3}{5}t^5\right]_0^2 = -32+48-\frac{96}{5} = -\frac{16}{5}.\end{aligned}$$

Finalement, on

$$\int_{\partial\Omega} X\cdot dl = \int_{\Gamma_1} X\cdot dl - \int_{\Gamma_2} X\cdot dl = \frac{16}{5}.$$

Remarque. Il fallait bien voir que le domaine était borné, ce qui est évident sans calcul vu le terme dominant $-x^4$ dans la définition du domaine. D'ailleurs, les raisonnements du genre « On ne peut pas vérifier le théorème car le domaine est non-borné » ne sont pas corrects : un domaine non-borné peut être d'aire finie. Ce « raisonnement » revient à dire qu'une intégrale sur un domaine non-borné d'une fonction positive est toujours infinie...

□

Exercice 2.4 (10 points)**.** Calculer le volume du domaine

$$\Omega = \mathbb{R}^3\cap\left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2<1,\ -\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}\right\}$$

et vérifier le résultat à l'aide du théorème de la divergence.

Démonstration. La preuve était donnée dans le cours. Soit $-1\leq a<b\leq 1$, et

$$H(a,b) = B(0,1)\cap\left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2<1, a<z<b\right\}.$$

On utilise les coordonnées suivantes :

$$G(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\sqrt{1-z^2}\cos(\theta)\\ r\sqrt{1-z^2}\sin(\theta)\\ z\end{pmatrix},$$

où $0\leq r<1$, $\theta\in[0,2\pi]$ et $a<z<b$. On calcule

$$\nabla G = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos(\theta) & -r\sqrt{1-z^2}\sin(\theta) & *\\ \sqrt{1-z^2}\sin(\theta) & r\sqrt{1-z^2}\cos(\theta) & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Les valeurs en $*$ n'interviennent pas dans le calcul du déterminant jacobien, et nous les omettons (vous pouvez tout à fait faire cela le jour de l'examen). En développant par rapport à la troisième ligne, il vient

$$\operatorname{Jac}(G) = \det DG = \begin{vmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos(\theta) & -r\sqrt{1-z^2}\sin(\theta)\\ \sqrt{1-z^2}\sin(\theta) & r\sqrt{1-z^2}\cos(\theta)\end{vmatrix} = r(1-z^2).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(H(a,b)) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_a^b |\mathrm{Jac}(G)| dr\, d\theta\, dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_a^b r(1-z^2) dr\, d\theta\, dz\\ &= 2\pi\left[\frac{1}{2}r\right]_0^1\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_a^b\\ &= \pi\left(b-a-\frac{1}{3}(b^3-a^3)\right) = \frac{\pi}{3}(b-a)(3-(a^2+ab+b^2)).\end{aligned}$$

On vérifie sans peine la validité de ces calculs pour $(a,b)=(-1,1)$, $(a,b)=(-1,0)$, et $(a,b)=(0,1)$.

Finalement, on vérifie les calculs à l'aide du théorème de la divergence. Le bord $\partial H(a,b)$ est composé de trois ensembles (faire un dessin !) : le disque supérieur D_b, le disque inférieur D_a, et la section latérale $L(a,b)$. On paramètre le premier disque par

$$F_b(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\\ r\sin(\theta)\\ b\end{pmatrix},$$

où $0\le r\le \sqrt{1-b^2}$, et $\theta\in[0,2\pi]$. Par conséquent, on a

$$\partial_r F\times\partial_\theta F = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\int_{D_b}(x\cdot\nu(x))dA(x) &= \int_0^{\sqrt{1-b^2}}\int_0^{2\pi} b\, r\, dr\, d\theta\\ &= 2\pi\, b\left[\frac{1}{2}r\right]_0^1 = \pi\, b(1-b^2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

La normale associée à la paramétrisation F_a de D_b étant la normale entrante, on a

$$\int_{D_a}(x\cdot\nu(x))dA(x) = -\int_0^{\sqrt{1-a^2}}\int_0^{2\pi} a\, r\, dr\, d\theta = -\pi\, a(1-a^2).\tag{2.2}$$

Finalement, le secteur latéral admet la paramétrisation suivante :

$$G(\theta,z) = \begin{pmatrix}\sqrt{1-z^2}\cos(\theta)\\ \sqrt{1-z^2}\sin(\theta)\\ z\end{pmatrix}$$

où $(\theta,z)\in A=[0,2\pi]\times[a,b]$. On calcule

$$\begin{aligned}\partial_\theta G\times\partial_z G &= \begin{pmatrix}-\sqrt{1-z^2}\sin(\theta)\\ \sqrt{1-z^2}\cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-z(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\cos(\theta)\\ -z(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\sin(\theta)\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\sqrt{1-z^2}\cos(\theta)\\ \sqrt{1-z^2}\sin(\theta)\\ z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

C'est bien la normale extérieure, ce qui montre que

$$\int_{L(a,b)}(x\cdot\nu(x))dA(x) = \int_0^{2\pi}\int_a^b d\theta\, dz = 2\pi(b-a),\tag{2.3}$$

ce qui coïncide avec la formule Aire$(S^2) = 4\pi$ pour $(a, b) = (-1, 1)$. On observe que l'aire latérale d'un secteur sphérique ne dépend que de la distance entre les deux plans de coupe (fait pas évident *a priori*, faire un dessin près du pôle nord et un dessin à l'équateur).

Finalement, on a par (2.1), (2.2), et (2.3) l'identité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_{\partial H(a,b)} (x \cdot \nu(x))dA(x) &= \frac{\pi}{3}\left(b(1-b^2) - a(1-a^2) + 2(b-a)\right) \\ &= \frac{\pi}{3}(b-a)(3-(a^2+ab+b^2)).\end{aligned}$$

Le résultat vaut $\dfrac{11\pi}{12}$ avec $b = \dfrac{1}{2}$ et $a = -\dfrac{1}{2}$.

Remarque. Le calcul était tout de même fait dans le cours, mais bien trop peu d'étudiants ont réussi à trouver la valeur correcte du volume. On notera avec surprise quelques volumes nuls et même un ou deux volumes négatifs !...

□

Exercice 2.5 (9 points)**.** Soit

$$\Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \left\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes sur la surface à bord Σ avec le champ de vecteurs

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On prend les coordonnées cylindriques

$$\varphi(y, \theta) = \begin{pmatrix} f(y)\cos(\theta) \\ y \\ f(y)\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

où $f(y) = y^{\frac{3}{2}}(1-y)^{\frac{3}{2}}$, et $\theta \in [0, 2\pi]$, $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On a

$$\partial_y\varphi \times \partial_\theta\varphi = \begin{pmatrix} f'(y)\cos(\theta) \\ 1 \\ f'(y)\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -f(y)\sin(\theta) \\ 0 \\ f(y)\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y)\cos(\theta) \\ f'(y)f(y) \\ f(y)\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\operatorname{rot} X = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -z & 0 & x \end{pmatrix} = (0, -2, 0).$$

Par conséquent, on a

$$\int_\Sigma X \cdot dA = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} -2f'(y)f(y)d\theta\right) dy = -2\pi\left[f^2(y)\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{32}.$$

On a

$$\partial\Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \left\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = \frac{1}{2^6}\right\}$$

est un cercle de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{8}$ dans le plan xz. On le paramètre par

$$\begin{aligned}\gamma : [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3\\ x &\mapsto \begin{pmatrix}\frac{1}{8}\cos(\theta)\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{8}\sin(\theta)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

qui est une orientation négative. On a donc

$$\int_{\partial\Sigma} X\cdot dl = -\int_{\Gamma} X\cdot dl = -\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\sin(\theta)\\ 0\\ \frac{1}{8}\cos(\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\sin(\theta)\\ 0\\ \frac{1}{8}\cos(\theta)\end{pmatrix}d\theta = -\frac{1}{64}\int_0^{2\pi}d\theta = -\frac{\pi}{32}.$$

Remarque. La méthode du livre (avec les « quatre bords ») est une vraie perte de temps pour ce genre d'exercice. On voit tout de suite que le bord de ce demi-citron est un cercle.

□

Exercice 2.6 (8 points)**.** Soit $f(x) = e^{|x|}$ pour tout $x \in]-\pi,\pi]$, étendue par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier de f est donné par

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}.$$

2) À l'aide d'un théorème du cours que l'on rappelera, calculer la valeur des deux séries (et simplifier le résultat) :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\qquad \text{et}\qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}2\pi\, c_n(f) &= \int_{-\pi}^{0} e^{-x-i\,n\,x}dx + \int_0^{\pi} e^{x-i\,n\,x}dx = \frac{1-e^{\pi+i\pi n}}{-1-i\,n} + \frac{e^{\pi-i\pi n}-1}{1-i\,n}\\ &= (e^{\pi}(-1)^n-1)\left(\frac{1-i\,n+1+i\,n}{1+n^2}\right) = \frac{2(e^{\pi}(-1)^n-1)}{1+n^2}.\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Dirichlet, comme f est continue, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x) = S(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{i\,n\,x} = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}\cos(n\,x).$$

En prenant $x=0$, on trouve si $S_1' = S_1 - 1$ et $S_2' = S_2 - 1$

$$1 = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(-S_1' + e^{\pi}S_2'\right),$$

et en prenant $x=\pi$,

$$e^{\pi} = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(e^{\pi}S_1' - S_2'\right),$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix}e^{\pi} & -1\\ -1 & e^{\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1'\\ S_2'\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\pi-1)\,e^{\pi}+1\\ \pi+1-e^{\pi}\end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix}e^{\pi} & -1\\ -1 & e^{\pi}\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^{2\pi}-1}\begin{pmatrix}e^{\pi} & 1\\ 1 & e^{\pi}\end{pmatrix},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} S_1' \\ S_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2(e^{2\pi}-1)}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\pi-1)\,e^{\pi}+1 \\ \pi+1-e^{\pi}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(e^{2\pi}-1)}\begin{pmatrix}(\pi-1)e^{2\pi}+\pi+1 \\ -e^{2\pi}+2\pi e^{\pi}+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(e^{2\pi}-1)}\begin{pmatrix}(\pi+1)e^{2\pi}+\pi-1 \\ e^{2\pi}+2\pi e^{\pi}-1\end{pmatrix}.$$

Remarque. C'était exactement la question de l'an dernier, et avec une fonction bien plus simple. Malheureusement, le calcul des coefficients de Fourier a révélé pas mal d'incompétence calculatoire, et bien trop souvent une mauvaise foi assez désagréable où l'on passe de manière magique d'un calcul faux à la formule finale donnée dans l'énoncé. Les correcteurs ont été étudiants avant vous, et vous ne tromperez personne.

□

Exercice 2.7 (8 points)**.** Soit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}e^{-|x|}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier de $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{-|x|}$ est donnée par

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \sin(x)e^{-|x|}$.
2) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et la question 1), calculer $\dfrac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$ en fonction de $\widehat{g}(\xi)$.
3) À l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\xi^2}{2}\right),$$

et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}e^{-x}dx.$$

Démonstration. 1. On rappelle que si $f(x)=e^{-|x|}$, alors

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

De plus, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\mathscr{F}\left(x\mapsto e^{i\,\alpha\,x}e^{-|x|}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\,\alpha\,x}e^{-|x|}e^{-i\,x\,\xi}dx = \widehat{f}(\xi-\alpha).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}\left(x\mapsto \sin(x)e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{2\,i}\left(\mathscr{F}\left(x\mapsto e^{i\,x}e^{-|x|}\right) - \mathscr{F}\left(x\mapsto e^{-i\,x}e^{-|x|}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{2}{1+(\xi-1)^2}-\frac{2}{1+(\xi+1)^2}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{1+(\xi+1)^2-(1+(\xi-1)^2)}{1+(\xi-1)^2+(\xi+1)^2+(\xi^2-1)^2}\right) = \frac{1}{i}\frac{4\,\xi}{4+\xi^4} = \frac{-4\,i\,\xi}{4+\xi^4}.\end{aligned}$$

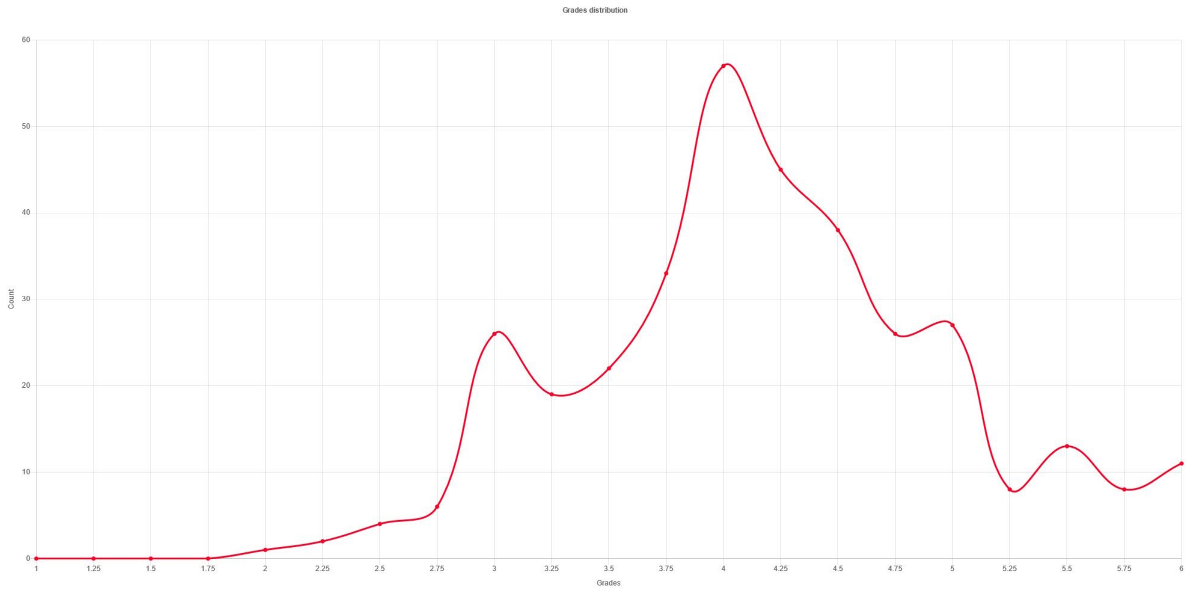
2. On a
$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\int_{\mathbb{R}} \sin(x)e^{-|x|}dx = -\frac{4\,\xi}{4+\xi^4}.$$

3. En intégrant, on obtient $\widehat{f}(\xi) = C - \arctan\left(\frac{\xi^2}{2}\right)$. Comme $\widehat{f}(\xi) \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ **en vertu du Lemme de Riemann-Lebesgue**, on en déduit que $C = \frac{\pi}{2}$. Finalement, on a
$$I = \frac{1}{2}\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Remarque. Exercice très simple qui a été très mal réussi à cause de lacunes assez graves au niveau du cours. Beaucoup de formules qui n'ont pas de sens, avec des x mélangés à des ξ, une convolution avec la fonction sinus (qui, on le rappelle, n'est pas intégrable ; ça aurait un sens avec les distributions, mais on se ramènerait à la première formule du cours avec la multiplication par $e^{i\,\alpha\,x}$), et de manière plus consternante, peu de tentatives de résolution de la seconde partie de la question 3). Pour trouver *a priori* les formules des questions 1) et 2), il fallait simplement connaître son cours et dériver la formule donnée en 3). En cours, on avait justement utilisé cette méthode pour calculer la transformée de Fourier de e^{-x^2}, et la formule pour la dérivée d'une transformée de Fourier était à connaître — ou à savoir retrouver. Après, j'imagine qu'il y a eu également un problème de manque de temps.

$\square$

3 Statistiques



MATH-203(a) Michelat

GENERAL STATISTICS

STUDENTS : 349 PRESENT : 346 ABSENT : 3

SCALE	AVERAGE	MEDIAN	STD. DEV.	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3	3.25	3.5	3.75	4	4.25	4.5	4.75	5	5.25	5.5	5.75	6
45P	4.18425	4.25000	0.80792	0	0	0	0	1	2	4	6	26	19	22	33	57	45	38	26	27	8	13	8	11

ACHIEVEMENT : 233 (67.34%) NON ACHIEVEMENT : 113 (32.66%)