Correction

Ens: David Strütt
Analyse III - NA
14 janvier 2025
3 heures

0

XXX

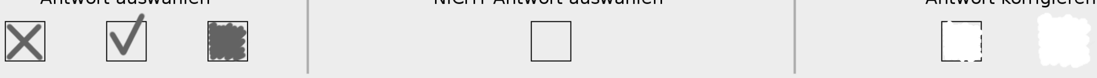
SCIPER : **0**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides.
Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant·e sur la table.
- Vous avez le droit à un **formulaire d'une feuille A4 recto-verso**. **Aucun** autre document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - moins un tiers du nombre de points indiqués si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen — ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen — Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

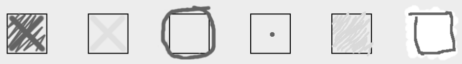


Table des transformées de Fourier

		$f(y)$	$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1		$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2		$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$
3		$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\omega > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\omega + i\alpha)}$
4		$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-(\omega+i\alpha)b} - e^{-(\omega+i\alpha)c}}{(\omega + i\alpha)}$
5		$f(y) = \begin{cases} e^{-i\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i(\omega+\alpha)b} - e^{-i(\omega+\alpha)c}}{\omega + \alpha}$
6		$f(y) = \frac{1}{y^2 + \omega^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\lvert\omega\alpha\rvert}}{\lvert\omega\rvert}$
7		$f(y) = \frac{e^{-\lvert\omega y\rvert}}{\lvert\omega\rvert} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$
8		$f(y) = e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert\omega\rvert}e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
9		$f(y) = ye^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert\omega\rvert^3}e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
10		$f(y) = \frac{4y^2}{(\omega^2 + y^2)^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f} = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\lvert\omega\rvert} - \lvert\alpha\rvert\right)e^{-\lvert\omega\alpha\rvert}$

Correction

Première partie, questions à choix multiple sur l'analyse vectorielle

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : *(4 points)*
Soit le domaine régulier

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1, \ z > 0\}.$$

Son bord est composé de deux parties :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\}$$
paramétrée par $\alpha(\theta, \varphi) = (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi)), \qquad \theta \in [0, 2\pi], \ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

et

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 0\}$$
paramétrée par $\beta(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0), \qquad r \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi],$

Considérons les normales associées $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$.

- ☐ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ est extérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est intérieure.
- ■ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux intérieures.
- ☐ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ est intérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est extérieure
- ☐ $\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux extérieures.

Solution :
On s'attend à ce que la normale extérieure pointe vers le haut sur Σ_1 (troisième composante positive) et vers le bas sur Σ_2 (troisième composante négative.). Or,

$$\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} = (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$$

(troisième composante négative)

$$\beta_r \wedge \beta_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

(troisième composante positive),

ainsi elles sont toutes deux intérieures.

Question 2 : *(2 points)*
Soient le champ scalaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = xe^y$, la courbe

$$\Gamma = \left\{(e^t, t) \ : \ t \in [0, 1]\right\}$$

et

$$I = \int_\Gamma f \, dl.$$

Alors,

- ☐ $I = \frac{3}{4}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}2^{\frac{3}{2}}$.
- ☐ $I = \frac{xy}{3}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{xy}{3}2^{\frac{3}{2}}$.
- ■ $I = \frac{1}{3}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}}$.
- ☐ $I = \frac{3xy}{4}\left(1 + e^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3xy}{4}2^{\frac{3}{2}}$.

Solution :

Correction

On paramétrise Γ par $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (e^t, t)$. On a alors, $\gamma'(t) = (e^t, 1)$ et $|\gamma'(t)| = \sqrt{e^{2t}+1}$. Ainsi,

$$\int_\Gamma f dl = \int_0^1 e^t e^t \sqrt{e^{2t}+1} dt = \int_0^1 e^{2t}\sqrt{e^{2t}+1} dt = \left[\frac{1}{3}\left(e^{2t}+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1+e^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}}$$

Question 3 : *(2 points)*
Soit le domaine régulier

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ x^2 < y < \sqrt{x}\right\}.$$

Le bord de Ω a deux parties :

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0,1], \ y = x^2\} \text{ paramétré par } \gamma_1(t) = (t, t^2), \ t \in [0,1],$$

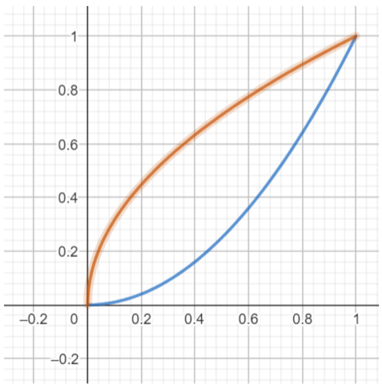
et

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0,1], \ y = \sqrt{x}\} \text{ paramétré par } \gamma_2(t) = (t^2, t), \ t \in [0,1].$$

Paramétrés ainsi, on a :

- ☐ Γ_1 est orientée négativement et Γ_2 est orientée positivement.
- ■ Γ_1 est orientée positivement et Γ_2 est orientée négativement.
- ☐ Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées positivement.
- ☐ Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées négativement.

Solution :



Les deux paramétrisations données parcourent les courbes de gauche à droite. Or, pour laisser le domaine à gauche, la partie du dessus (soit Γ_2) doit être parcourue de gauche à droite. Ainsi, Γ_1 est orientée positivement et Γ_2 est orientée négativement.

Question 4 : *(4 points)*
Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = \left(\frac{3y}{2(x^2+y^2)}, -\frac{3x}{2(x^2+y^2)}\right).$$

Alors,

- ■ Pour Γ, le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1, $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ $\operatorname{rot} F \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ Pour Γ, le cercle centré en $(0,2)$ de rayon 1, $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ F dérive d'un potentiel.

Solution :

Correction

Soit Γ, le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1 paramétré par $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Alors, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ et

$$\int_\Gamma F \cdot dl = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \langle (\sin(t), -\cos(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \rangle \, dt = -3\pi \neq 0$$

Question 5 : *(2 points)*
Soit Ω, le carré $[0,1] \times [0,1]$ et le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = (xy^2, x^2y + x).$$

Si on oriente le bord du carré $\partial\Omega$ positivement, l'intégrale $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$ vaut :

- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = -1$
- ■ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = 1$
- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \frac{5}{3}$
- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = 0$

Solution :
On remarque $\operatorname{rot} F(x,y) = 2xy + 1 - 2xy = 1$. Ainsi, par le théorème de Green, on a

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \iint_\Omega 1 dx dy = 1$$

Question 6 : *(3 points)*
Soit le champ scalaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{xy}$$

Alors, le laplacien de f, Δf est donné par :

- ☐ $\Delta f(x,y) = (4 + 8xy + x^4 + 2x^2y^2 - y^4)e^{xy}$
- ☐ $\Delta f(x,y) = (2x - 2y + x^3 + x^2y - xy^2 - y^3)e^{xy}$
- ■ $\Delta f(x,y) = (x^4 - y^4)e^{xy}$
- ☐ $\Delta f(x,y) = 0$

Solution :
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{xy} + y(x^2 - y^2)e^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{xy} + x(x^2 - y^2)e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 + 4xy + y^2x^2 - y^4)e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2 - 4xy + x^4 - x^2y^2)e^{xy}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^4 - y^4)e^{xy}$$

Question 7 : *(2 points)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel tel que pour tout $x \in \Omega$, $\operatorname{rot} F(x) = 0$. Alors,

- ■ On ne peut rien dire.
- ☐ F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ F dérive d'un potentiel.
- ☐ L'intégrale curviligne de F le long de n'importe quelle courbe simple fermée régulière est nulle.

Solution :

Sans hypothèse sur le domaine, on ne peut rien dire.

Question 8 : *(2 points)*
Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$F(x,y,z) = (yz, -xz, xy). \tag{1}$$

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier dont le bord est une surface régulière orientable avec normale extérieure unité ν, alors,

- ■ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \ ds = 0$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot ds = \text{Volume}(\Omega)$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} F \ dxdydz$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \ ds = \text{Aire}(\partial\Omega)$

Solution :
On remarque que $\operatorname{div} F = 0 + 0 + 0 = 0$. Ainsi, par le théorème de la divergence,

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dxdydz = 0$$

Question 9 : *(4 points)*
Soient le champ scalaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y,z) = 2 - 4z,$$

la surface

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, \ x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}, \ y \geq 0 \right\},$$

paramétrée par

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1-r)\,, \ r \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ \theta \in [0,\pi]\,,$$

et

$$I = \iint_{\Sigma} f ds.$$

Alors,

- ☐ $I = \dfrac{(\sqrt{2}-4)\pi}{6}$
- ☐ $I = -\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$
- ■ $I = -\dfrac{\pi\sqrt{2}}{12}$

Solution :
On a

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), \qquad |\sigma_r \wedge \sigma_\theta| = \sqrt{2}r$$

Ainsi,

$$\iint_{\Sigma} f ds = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} (2 - 4(1-r))\sqrt{2}r = -\pi\frac{\sqrt{2}}{12}$$

Deuxième partie, questions à choix multiple sur l'analyse de Fourier

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 10 : *(2 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{for } 0 < x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{for } 1 < x \leq 2 \\ x - 1 & \text{for } 2 < x \leq 3 \end{cases} \qquad \text{étendue par 3-périodicité}$$

et considérons $Ff(x)$ sa série de Fourier réelle. Alors, pour $x \in]0, 3]$,

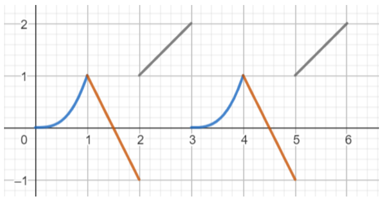
■ $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \{2, 3\}$

□ $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \{1, 2, 3\}$

□ $Ff(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$ et $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \{2\}$

□ $Ff(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, 3]$

Solution :



La fonction est bien continue par morceaux et la série de Fourier est définie pour tout x. De plus, la fonction est C^1 par morceaux. Par Dirichlet, la série de Fourier est égale à f partout là où f est continue. Vu qu'on a une discontinuité en 2 et 3, $f(x) \neq Ff(x)$ si et seulement si $x \in \{2, 3\}$.

Question 11 : *(5 points)*
Supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(t)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1} \cos(2kt).$$

Alors, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$$

vaut

□ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

□ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + 1$

□ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}$

■ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$

Solution :
La fonction est π-périodique. On a par Parseval,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \frac{16}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}.$$

Or,

$$\int_0^{\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Correction

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

Question 12 : *(5 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et considérons l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(x-t)dt = e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Laquelle des fonctions $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous est solution de l'équation ?

- ☐ $u(x) = \begin{cases} xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- ■ $u(x) = \left(4 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{4}}$
- ☐ $u(x) = \begin{cases} 4e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- ☐ $u(x) = xe^{-|x|}$

Solution :
En prenant la transformée de Fourier,

$$\sqrt{2}e^{-\alpha^2} = \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4}}\right] = \mathcal{F}[f*u] = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{u} = \frac{1}{4+i\alpha}\hat{u}.$$

Ainsi,

$$\hat{u} = 4\sqrt{2}e^{-\alpha^2} + i\alpha\sqrt{2}e^{-\alpha^2}$$

et donc

$$u = 4e^{-\frac{x^2}{3}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(4 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Question 13 : *(2 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = 5 + \frac{1}{2}(5-i\pi)e^{3ix} + \frac{1}{2}(5+i\pi)e^{-3ix} - \frac{3}{2}e^{7ix} - \frac{3}{2}e^{-7ix},$$

et soit sa série de Fourier réelle :

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

Alors, les seuls coefficients de Fourier réels de f qui sont non-nuls sont

- ☐ $a_0,\ a_3,\ a_7$
- ☐ $a_0,\ b_3,\ a_7$
- ☐ $a_0,\ a_3,\ b_3,\ b_7$
- ■ $a_0,\ a_3,\ b_3,\ a_7$

Solution :
On a que f est donnée sous forme de série de Fourier complexe avec

$$c_{-7} = -\frac{3}{2},\ c_{-3} = \frac{1}{2}(5+i\pi),\ c_0 = 5,\ c_3 = \frac{1}{2}(5-i\pi),\ c_7 = -\frac{3}{2},$$

et tous les autres coefficients sont nuls. En utilisant que

$$a_0 = 2c_0,\ a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}),$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_0 &= 10 & & \\ a_3 &= 5 & b_3 &= -\pi \\ a_7 &= -3 & b_7 &= 0, \end{aligned}$$

et les autres coefficients sont nuls.

Question 14 : *(4 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{for } -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{for } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{for } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité.}$$

On admettra sans démonstration que les coefficients de Fourier réels de f sont donnés par

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \qquad \forall n \geq 0 \\ b_n &= \frac{4}{\pi}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2} \qquad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ vaut

- ■ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2-8}{8}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{\pi}$

Solution :
On a que la série de Fourier de f s'écrit

$$Ff(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)x).$$

En effet, pour n pair, $b_n = 0$.
En utilisant le théorème de Difichlet pour $x = \frac{\pi}{2}$ (f est continue en $\frac{\pi}{2}$), on a

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = Ff\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \underbrace{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=(-1)^k} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

En amplifiant par $\frac{\pi}{4}$, on a le résultat.

Question 15 : *(6 points)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ \frac{x}{\pi} & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Alors sa série de Fourier est

- ■ $\displaystyle Ff(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(nx)\right)$
- ☐ $\displaystyle Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}\sin(nx)\right)$
- ☐ $\displaystyle Ff(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{\pi^2(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$
- ☐ $\displaystyle Ff(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(nx)$

Solution :
On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}dx = \frac{1}{2}$$

et pour ≥ 1,

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{1}{n\pi^2}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \\
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi^2}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi^2}\int_0^{\pi} -\cos(nx)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}
\end{aligned}$$

Question 16 : *(3 points)*
L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4y^2}{(1+y^2)^2}\cos(2y)dy$$

vaut :

- ☐ $I = 0$
- ☐ $I = \dfrac{1}{2\sqrt{2}e}$
- ■ $I = -\dfrac{2\pi}{e^2}$
- ☐ $I = \dfrac{\pi^2}{e}$

On a

$$I = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{F}\left[\frac{4y^2}{1+y^2)^2}\right](-2)\right) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{2\pi}(1-|-2|)e^{-|-2|}\right) = -2\pi e^{-2}$$

Question 17 : *(4 points)*
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(y) = (y^2+1)e^{-|y|}.$$

Alors, $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f est donnée par

- ■ $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{2-6\alpha^2}{(1+\alpha^2)^3} + \dfrac{1}{1+\alpha^2}\right)$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = \dfrac{i\alpha^2 + 2\alpha - 3i}{\sqrt{2\pi}(i-\alpha)^3}$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = (\alpha^2+1)\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-|\alpha|}$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = \dfrac{\alpha^4 - 12\alpha^2 + 28}{16\sqrt{2}}e^{-\alpha^2}$

Solution :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[(y^2+1)e^{-|y|}\right] &= -\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\mathcal{F}\left[e^{-|y|}\right]\right] + \mathcal{F}\left[e^{-|y|}\right] \\
&= -\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}\right] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2-6\alpha^2}{(1+\alpha^2)^3} + \frac{1}{1+\alpha^2}\right)
\end{aligned}$$

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 18: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 *Réservé au correcteur*

(a) Soit la courbe

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = \sqrt{z}, \ y = \sin(x), \ 0 \leq z \leq \frac{\pi^2}{4}\right\}$$

Donner une paramétrisation $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de Γ et le vecteur tangent correspondant $\gamma'(t)$.

(b) Soit la surface

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 \leq 3, \ x \geq 0\right\}$$

Donner une paramétrisation $\sigma\colon A \to \mathbb{R}^3$ de Σ et un champ de vecteur normal correspondant $\sigma_u \wedge \sigma_v$.

Solution :

(a) Option 1 : $t = z$

Let $\gamma\colon \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right] \to \mathbb{R}^3$ be defined by

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{t}, \ \sin\left(\sqrt{t}\right), \ t\right).$$

Then,

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \ \cos\left(\sqrt{t}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}, \ 1\right).$$

Option 2 : $t = x$

Let $\gamma\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ be defined by

$$\gamma(t) = \left(t, \ \sin(t), \ t^2\right).$$

Then,

$$\gamma'(t) = (1, \ \cos(t), \ 2t).$$

Option 3 : $t = y$

Let $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ be defined by

$$\gamma(t) = \left(\arcsin(t), \ t, \ \arcsin(t)^2\right).$$

Then

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}, \ 1, \ 2\arcsin(t)\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\right)$$

Option 4 : Any of the above composed with a diffeomorphism $\varphi\colon [a, b] \to [\alpha, \beta]$

Let $\varphi\colon [a, b] \to [\alpha, \beta]$ be bijective such that φ and φ^{-1} are both differentiable and let $\tilde{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ ba any of the above parametrization. Then $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ defined by

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\varphi(t))$$

is a parametrization of Γ and

$$\gamma'(t) = \varphi'(t)\gamma'(\varphi(t)).$$

(b) <u>*Option 1*</u> : Cylindrical coordinates

Let $\sigma\colon \big[0,\sqrt{3}\big]\times\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]\to\mathbb{R}^3$ be defined by

$$\sigma(r,\theta)=\big(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r^2\big)\,.$$

Then,

$$\sigma_r\wedge\sigma_\theta=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \cos\theta & \sin\theta & 2r\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\big(-2r^2\cos\theta,\ -2r^2\sin\theta,\ r\big)$$

Some computational details on how to get there :

$(x,y,z)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$, $r\geq 0$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z=x^2+y^2 &\Leftrightarrow z=r^2\\ x^2+y^2\leq 3 &\Leftrightarrow r^2\leq 3\\ &\Leftrightarrow r\in[0,\sqrt{3}].\\ x\geq 0 &\Leftrightarrow r\cos\theta\geq 0\\ &\Leftrightarrow \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Alternatively, let $\sigma\colon \big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]\times[0,3]\to\mathbb{R}^3$ be defined by

$$\sigma(\theta,z)=\big(\sqrt{z}\cos(\theta),\sqrt{z}\sin(\theta),z\big)$$

Then,

$$\sigma_\theta\wedge\sigma_z=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -\sqrt{z}\sin(\theta) & \sqrt{z}\cos(\theta) & 0\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos(\theta) & \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin(\theta) & 1\end{vmatrix}=\left(\sqrt{z}\cos\theta,\sqrt{z}\sin(\theta),-\frac{1}{2}\right)$$

<u>*Option 2*</u> : Cartesian coordinates.

Let

$$\begin{aligned} A&=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 3\big\}\\ &=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ : 0\leq x\leq\sqrt{3},\ -\sqrt{3-x^2}\leq y\leq\sqrt{3-x^2}\Big\}\\ &=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ : -\sqrt{3}\leq y\leq\sqrt{3},\ 0\leq x\leq\sqrt{3-y^2}\Big\}\end{aligned}$$

and define $\sigma\colon A\to\mathbb{R}^3$ by

$$\sigma(x,y)=\big(x,\ y,\ x^2+y^2\big)\,.$$

Then,

$$\sigma_x\wedge\sigma_y=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix}=(-2x,\ -2y,\ 1)$$

Correction

Question 19: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ■ 9 *Réservé au correcteur*

Soit la surface

$$\Sigma := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 = x^2 + y^2 + z^2,\ x \geq 0\right\}$$

et le champ vectoriel

$$F(x, y, z) = \left(0, z^2, y^2\right).$$

(a) Énoncer le théorème de Stokes (seulement l'égalité,pas besoin de mentionner les hypothèses)

(b) Donner une paramétrisation $\sigma\colon A \to \mathbb{R}^3$ de Σ.

(c) Donner la paramétrisation de $\partial\Sigma$ correspondante.

(d) En utilisant la paramétrisation du point précédent, calculer $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$.

Solution :

$$\iint_\Sigma \operatorname{curl} F \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$$

($\operatorname{curl} F$ can be replaced with $\operatorname{rot} F$ or $\nabla \wedge F$).

OR

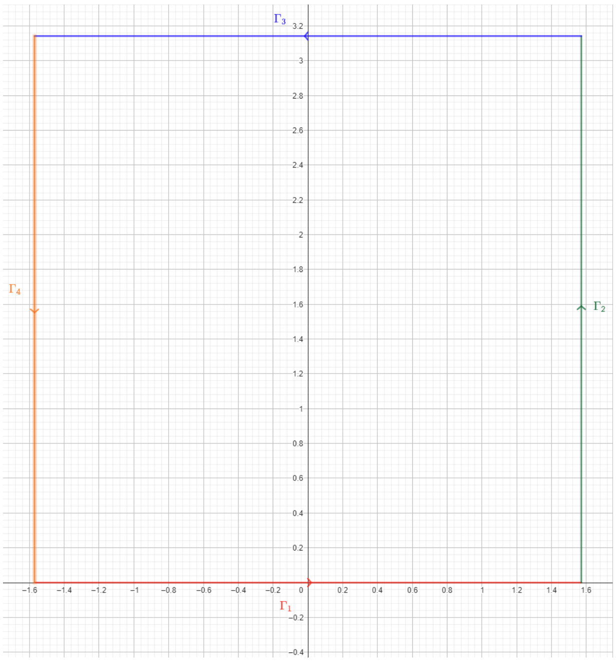
$$\iint_\Sigma \langle \operatorname{curl} F, n\rangle\, ds = \int_{\partial\Sigma} F \cdot \tau dl$$

Correction

<u>*Option 1*</u> : Standard spherical coordinates
Define $\Phi\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ by

$$\Phi(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\varphi).$$

Parametrize the boundary :



$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]$

$\Gamma_1\colon \gamma_1(t) = (t,0) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\oplus$

$\Phi\circ\gamma_1(t) = (0,0,1)$

a point, remove

$\Gamma_2\colon \gamma_2(t) = \left(\frac{\pi}{2}, t\right) \quad t \in [0,\pi]$ $\oplus$

$\Phi\circ\gamma_2(t) = (0, \sin(t), \cos(t))$

$(\Phi\circ\gamma_2)'(t) = (0, \cos(t), -\sin(t))$

$\Gamma_3\colon \gamma_3(t) = (t,\pi) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\ominus$

$\Phi\circ\gamma_3(t) = (0,0,-1)$

a point, remove

$\Gamma_4\colon \gamma_4(t) = \left(-\frac{\pi}{2}, t\right) \quad t \in [0,\pi]$ $\ominus$

$\Phi\circ\gamma_4(t) = (0, -\sin(t), \cos(t))$

$(\Phi\circ\gamma_3)'(t) = (0, -\cos(t), -\sin(t))$

Hence,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial H} F\cdot dl &= \int_{\Phi(\Gamma_2)} F\cdot dl - \int_{\Phi(\Gamma_4)} F\cdot dl \\
&= \int_0^\pi \langle F(0,\sin(t),\cos(t), (0,\cos t, -\sin t, \rangle\, dt \\
&\quad - \int_0^\pi \langle F(0,-\sin t, \cos t), (0, -\cos t, -\sin t\rangle\, dt \\
&= \int_0^\pi \big\langle (0,\cos^2 t, \sin^2 t), (0, \cos t, -\sin t\big\rangle\, dt \\
&\quad - \int_0^\pi \big\langle 0, \cos^2 t, \sin^2 t), (0, -\cos t, -\sin t)\big\rangle\, dt \\
&= \int_0^\pi \cos^3 t - \sin^3 t dt - \int_0^\pi -\cos^3 t - \sin^3 t dt \\
&= 2\int_0^\pi \cos^3 t dt
\end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned}
\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right)\left(e^{it}+e^{-it}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3it}+e^{-3it}+3e^{it}+3e^{-it}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos(3t)+3\cos(t)\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t).
\end{aligned}$$

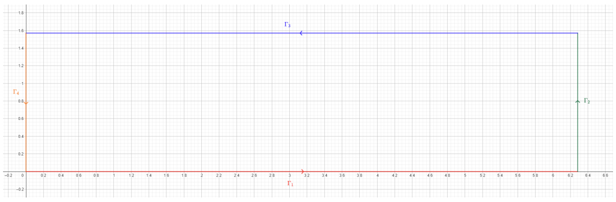
Therefore

$$\begin{aligned}\int_{\partial H} F \cdot dl &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{3}{2}\cos(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{6}\sin(3t) + \frac{3}{2}\sin(t)\right]_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

Option 2 : Rotated spherical coordinates
Define $\Phi \colon [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ by

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi).$$

Parametrize the boundary :



$[0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \colon & \gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, 2\pi] & \oplus \\ & \Phi \circ \gamma_1(t) = (1, 0, 0) \\ & \text{a point, remove} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 \colon & \gamma_2(t) = (2\pi, t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \oplus \\ & \Phi \circ \gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \\ & (\Phi \circ \gamma_2)'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 \colon & \gamma_3(t) = (t, \pi/2) \quad t \in [0, 2\pi] & \ominus \\ & \Phi \circ \gamma_3(t) = (0, \cos(t), \sin(t)) \\ & (\Phi \circ \gamma_3)'(t) = (0, -\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4 \colon & \gamma_4(t) = (0, t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \ominus \\ & \Phi \circ \gamma_4(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \\ & \text{Same as } \Gamma_2 \text{ in opposite direction, remove both} \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} F \cdot dl &= -\int_{\Phi(\Gamma_3)} F \cdot dl \\ &= -\int_0^{2\pi} \langle F(0, \cos(t), \sin(t)), (0, -\sin(t), \cos(t)) \rangle \, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \left\langle (0, \sin^2(t), \cos^2(t), (0, -\sin(t), \cos(t)) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^3(t) - \cos^3(t) dt \end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned} \cos^3 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{2it} + 2 + e^{-2it}\right)\left(e^{it} + e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3it} + e^{-3it} + 3e^{it} + 3e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos(3t) + 3\cos(t)\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{-1}{8i}\left(e^{3it} - e^{-3it} - 3e^{-it} + 3e^{-it}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t) \end{aligned}$$

Therefore,

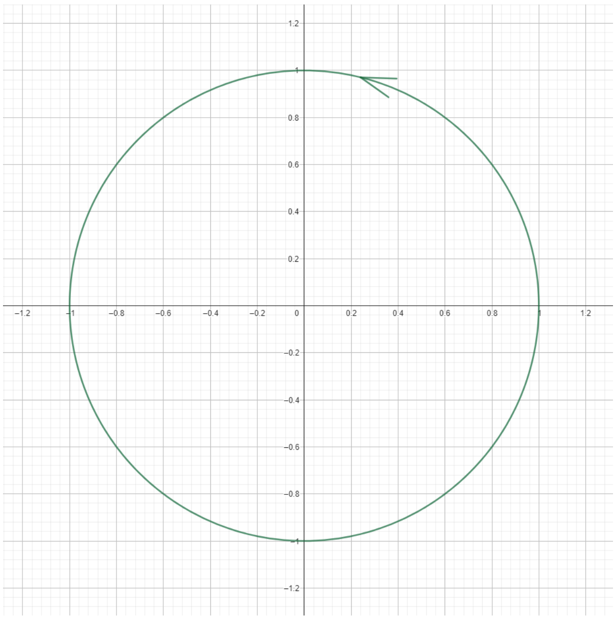
$$\begin{aligned}\int_{\partial H} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin(3t) - \frac{3}{4}\sin(t) + \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)dt \\ &= \left[-\frac{1}{12}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\sin(t) + \frac{3}{4}\sin(t)\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Option 3 : Cartesian coordinates

Define $\Omega = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2+z^2 \leq 1\right\}$ and $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ by

$$\Phi(y,z) = \left(\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right).$$

Parametrize the boundary :



$\left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2+z^2 \leq 1\right\}$

option 3.1 : Polar coordinates

$$\Gamma\colon \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \oplus$$
$$\Phi \circ \gamma(t) = (0, \cos(t), \sin(t))$$
$$(\Phi \circ \gamma)'(t) = (0, -\sin(t), \cos(t))$$

option 3.2 : Cartesian coordinates

$$\Gamma_1\colon \gamma_1(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \quad t \in [-1,1] \qquad \ominus$$
$$\Phi \circ \gamma_1(t) = \left(0, t, \sqrt{1-t^2}\right)$$
$$(\Phi \circ \gamma_1(t))'(t) = \left(0, 1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$\Gamma_2\colon \gamma_2(t) = \left(t, -\sqrt{1-t^2}\right) \quad t \in [-1,1] \qquad \oplus$$
$$\Phi \circ \gamma_1(t) = \left(0, t, -\sqrt{1-t^2}\right)$$
$$(\Phi \circ \gamma_1(t))'(t) = \left(0, 1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) ht)$$

Hence,

option 3.1

$$\begin{aligned}\int_{\partial H} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(0, \cos(t), \sin(t)), (0, -\sin(t), \cos(t))\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle (0, \sin^2(t), \cos^2(t), (0, -\sin(t), \cos(t)) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^3(t) + \cos^3(t) dt\end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right)\left(e^{it}+e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3it}+e^{-3it}+3e^{it}+3e^{-it}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos(3t)+3\cos(t)\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{-1}{8i}\left(e^{3it}-e^{-3it}-3e^{-it}+3e^{-it}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\int_{\partial H} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin(3t) - \frac{3}{4}\sin(t) + \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{12}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\sin(t) + \frac{3}{4}\sin(t)\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

option 3.2

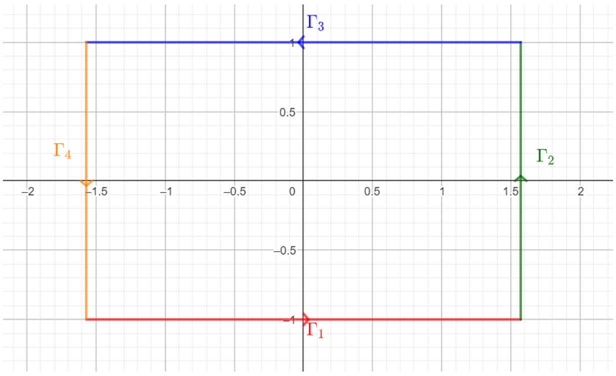
$$\begin{aligned}
\int_{\partial H} F \cdot dl =& - \int_{\Phi(\Gamma_1)} F \cdot dl + \int_{\Phi(\Gamma_2)} F \cdot dl \\
=& - \int_{-1}^{1} \left\langle F\left(0, t, \sqrt{1-t^2}\right), \left(0, 1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \right\rangle dt \\
&+ \int_{-1}^{1} \left\langle F\left(0, t, -\sqrt{1-t^2}\right), \left(0, 1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \right\rangle dt \\
=& - \int_{-1}^{1} \left\langle \left(0, 1-t^2, t^2\right), \left(0, 1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \right\rangle dt \\
&+ \int_{-1}^{1} \left\langle \left(0, 1-t^2, t^2\right), \left(0, 1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \right\rangle dt \\
=& \int_{-1}^{1} -1 + t^2 + \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} + 1 - t^2 + \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
=& 2 \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
\overset{\text{IbP}}{=}& 2 \left[-t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{1} - 2 \int_{-1}^{1} -2t\sqrt{1-t^2} dt \qquad \left| \begin{array}{ll} u = t^2 & v = -\sqrt{1-t^2} \\ u' = 2t & v' = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right. \\
=& -\frac{4}{3} \left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

Correction

Option 4 : Cylindrical coordinates z is in the parametrization
Define $\Phi\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[-1,1]\to\mathbb{R}^3$ by

$$\Phi(\theta,z)=\left(\sqrt{1-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{1-z^2}\sin\theta,z\right)$$

Parametrize the boundary



$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[-1,1]$

$$\Gamma_1\colon \gamma_1(t)=(t,-1)\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\qquad\oplus$$
$$\Phi\circ\gamma_1(t)=(0,0,-1)$$
a point, remove

$$\Gamma_2\colon \gamma_2(t)=\left(\frac{\pi}{2},t\right)\quad t\in[-1,1]\qquad\oplus$$
$$\Phi\circ\gamma_2(t)=\left(0,-\sqrt{1-t^2},t\right)$$
$$(\Phi\circ\gamma_2)'(t)=\left(0,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)$$

$$\Gamma_3\colon \gamma_3(t)=(t,1)\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\qquad\ominus$$
$$\Phi\circ\gamma_3(t)=(0,0,1)$$
a point, remove

$$\Gamma_4\colon \gamma_4(t)=\left(-\frac{\pi}{2},t\right)\quad t\in[-1,1]\qquad\ominus$$
$$\Phi\circ\gamma_4(t)=\left(0,\sqrt{1-t^2},t\right)$$
$$(\Phi\circ\gamma_4)'(t)=\left(0,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)$$

Hence,

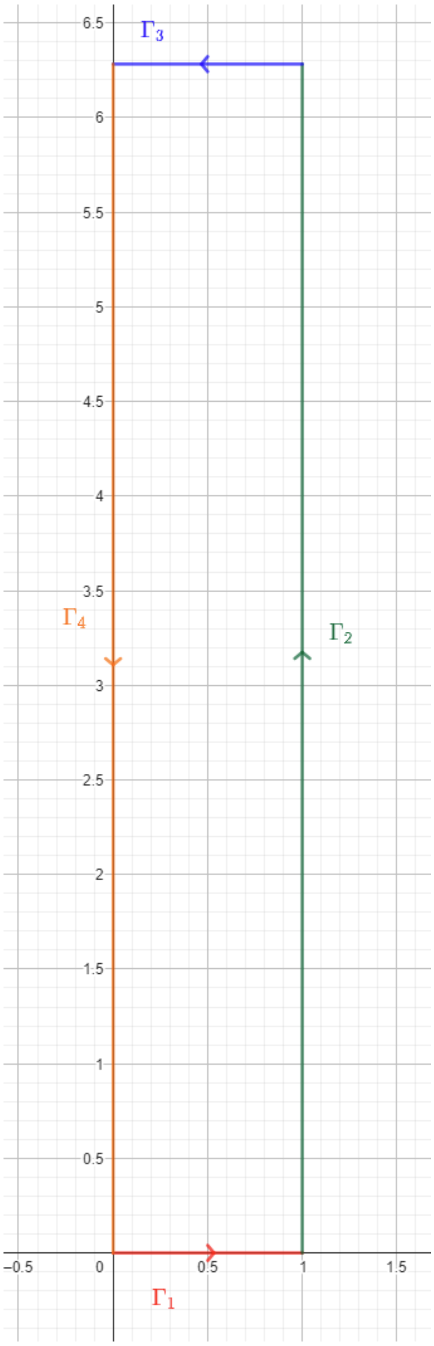
$$\begin{aligned}
\int_{\partial H}F\cdot dl&=\int_{\Phi(\Gamma_2)}F\cdot dl-\int_{\Phi(\Gamma_4)}F\cdot dl\\
&=\int_{-1}^{1}\left\langle F\left(0,-\sqrt{1-t^2},t\right),\left(0,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)\right\rangle dt\\
&\quad-\int_{-1}^{1}\left\langle F\left(0,\sqrt{1-t^2},t\right),\left(0,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)\right\rangle dt\\
&=\int_{-1}^{1}\left\langle \left(0,t^2,1-t^2\right),\left(0,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)\right\rangle dt\\
&\quad-\int_{-1}^{1}\left\langle \left(0,t^2,1-t^2\right),\left(0,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)\right\rangle dt\\
&=\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}+1-t^2+\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}-1+t^2dt\\
&=2\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt\\
&\overset{\text{IbP}}{=}2\left[-t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}-2t\sqrt{1-t^2}dt\\
&=-\frac{4}{3}\left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|ll} u=t^2 & v=-\sqrt{1-t^2}\\ u'=2t & v'=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\end{array}$$

<u>*Option 5*</u> : Rotated Cylindrical coordinates.
Define $\Phi\colon [0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ by

$$\Phi(x,\theta)=\left(x,\sqrt{1-x^2}\cos\theta,\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)$$

Parametrize the boundary



$[0,1]\times[0,2\pi]$

$\Gamma_1\colon \gamma_1(t)=(t,0)\quad t\in[0,1]$ $\oplus$

$$\Phi\circ\gamma_1(t)=(t,\sqrt{1-t^2},0)$$

$$(\Phi\circ\Gamma_1)'(t)=\left(1,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},0\right)$$

$\Gamma_2\colon \gamma_2(t)=(1,t)\quad t\in[0,2\pi]$ $\oplus$

$$\Phi\circ\gamma_2(t)=(1,0,0)$$

a point, remove.

$\Gamma_3\colon \gamma_3(t)=(t,2\pi)\quad t\in[0,1]$ $\ominus$

$$\Phi\circ\gamma_3(t)=(t,\sqrt{1-t^2},0)$$

same as Γ_1 in opposite direction, remove

$\Gamma_4\colon \gamma_4(t)=(0,t)\quad t\in[0,\pi]$ $\ominus$

$$\Phi\circ\gamma_4(t)=(0,\cos(t),\sin(t))$$

$$(\Phi\circ\gamma_4)'(t)=(0,-\sin(t),\cos(t))$$

Hence,

$$\begin{aligned}\int_{\partial H} F\cdot dl &= -\int_{\Phi(\Gamma_4)} F\cdot dl\\ &= -\int_0^{2\pi} \langle F(0,\cos(t),\sin(t)),(0,-\sin(t),\cos(t))\rangle\, dt\\ &= -\int_0^{2\pi} \left\langle \sin^2(t),\cos^2(t)),(0,-\sin(t),\cos(t))\right\rangle dt\\ &= \int_0^{2\pi} \sin^3(t)-\cos^3(t)dt\end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3\\ &=\frac{1}{8}\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right)\left(e^{it}+e^{-it}\right)\\ &=\frac{1}{8}\left(e^{3it}+e^{-3it}+3e^{it}+3e^{-it}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(\cos(3t)+3\cos(t)\right)\\ &=\frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3\\ &=\frac{-1}{8i}\left(e^{3it}-e^{-3it}-3e^{-it}+3e^{-it}\right)\\ &=-\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\int_{\partial H} F\cdot dl &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)-\frac{1}{4}\cos(3t)-\frac{3}{4}\cos(t)dt\\ &=\left[\frac{1}{12}\cos(3t)-\frac{3}{4}\cos(t)-\frac{1}{12}\sin(t)-\frac{3}{4}\sin(t)\right]_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

Question 20: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 *Réservé au correcteur*

Donner explicitement une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique solution de

$$u''''(x) + 2u(x) = 2 + 3\sin(x) - 36\cos(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

où u'''' dénote la dérivée d'ordre 4 de u.

Solution :
We look for a solution in the form of a Fourier series :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \\
u'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \{kb_k \cos(kx) - ka_k \sin(kx)\} \\
u''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{-k^2 a_k \cos(kx) - k^2 b_k \sin(kx)\right\} \\
u'''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{-k^3 b_k \cos(kx) + k^3 a_k \sin(kx)\right\} \\
u''''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{k^4 a_k \cos(kx) + k^4 b_k \sin(kx)\right\}
\end{aligned}$$

Hence,

$$u''''(x) + 2u(x) = 2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{(k^4+2)a_k \cos(kx) + (k^4+2)b_k \sin(kx)\right\}$$

Note moreover that if $f(x) = 2 + 3\sin(x) - 36\cos(2x)$, then

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)\},$$

with $A_0 = 4$, $B_1 = 3$, $A_2 = -36$ and all other coefficients are 0.
Identifying Fourier coefficients, we end up with

$$\begin{array}{ll}
k = 0 & a_0 = 2 \\
k = 1 & \begin{cases} 3a_1 = 0 \\ 3b_1 = 3 \end{cases} \\
k = 2 & \begin{cases} 18a_2 = -36 \\ 18b_2 = 0 \end{cases} \\
k \geq 3 & \begin{cases} (k^4+2)a_k = 0 \\ (k^4+2)b_k = 0 \end{cases}
\end{array}$$

Solving those yelds

$$a_0 = 2, \qquad b_1 = 1 \qquad a_2 = -2$$

and all other coefficients are 0. Meaning our solution is

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) = 1 + \sin(x) - 2\cos(2x).$$