EPFL

1

**Alexis Michelat**
**Analyse III MATH-203(a) - MT-SV**
**16 janvier 2024**
**Durée : 180 minutes**

Signature :

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.**

**Ce document est imprimé recto-verso, il contient** 20 **pages, les dernières pouvant être vides, et** 21 **questions (**15 **questions de QCM, chacune valant** 1 **point, et** 6 **exercices à rédaction détaillée valant** 45 **points en tout). Le total des points de l'examen est de** 60**.**

**Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table (avec le côté photo *visible*).
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout autre outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour le questionnaire à **choix multiples**, on comptera :
  +1 point si la réponse est correcte;
  0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite, ou si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

| choisir une réponse \| select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer Antwort korrigieren |
|---|---|---|

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

## Formulaire

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$
\begin{aligned}
e^{i\,a} &= \cos(a) + i\,\sin(a) & 2\cos(a)\cos(b) &= \cos(a+b) + \cos(a-b)\\
\cos^2(a) + \sin^2(a) &= 1 & 2\sin(a)\sin(b) &= \cos(a-b) - \cos(a+b)\\
\cos(2\,a) &= 2\cos^2(a) - 1 & 2\sin(a)\cos(b) &= \sin(a+b) + \sin(a-b)\\
\cos(2\,a) &= 1 - 2\sin^2(a) & \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\sin(2\,a) &= 2\cos(a)\sin(a) & \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\\
\cosh(a) &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} & \sinh(a) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2}
\end{aligned}
$$

## Première partie, questionnaire à choix multiples (+1/0) (15 points)

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1** *(1 point)* Soit $f : ]-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, étendue par 2-périodicité. Alors, si $S(f)$ est la série de Fourier de $f$, on a:

- ☐ $S(f)(-1) = \sin(1)$.
- ☐ $S(f)(-1) = 0$.
- ☐ $S(f)(-1) = -\sin(1)$.
- ☐ La limite $S_N(f)(-1) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{-\pi i n}$ n'existe pas.

**Question 2** *(1 point)* Soit $f(x, y) = e^{2x}\sin(x + 2y)$. Alors, le laplacien $\Delta f$ de $f$ est donné par:

- ☐ $4e^{2x}\cos(x + 2y) - e^{2x}\sin(x + 2y)$
- ☐ $2e^{2x}\cos(x + 2y) - e^{2x}\sin(x + 2y)$
- ☐ $4e^{2x}\cos(x + 2y) + e^{2x}\sin(x + 2y)$
- ☐ $2e^{2x}\cos(x + 2y) + e^{2x}\sin(x + 2y)$

**Question 3** *(1 point)* Si $H$ est la fonction de Heaviside, telle que

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

et $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ est la masse de Dirac en 0 (telle que $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$), que vaut la convolution suivante au sens des distributions?

$$\left[x^4\right] * \left(\delta_0^{'''''} * \left[H(x)H(1-x)e^{-x^2}\right]\right)$$

- ☐ Cette convolution n'est pas bien définie.
- ☐ $\delta_0 - e^{-1}\delta_1$
- ☐ $\delta_0$
- ☐ $0$

**Question 4** *(1 point)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T_n$ la distribution donnée par

$$T_n = n^3\delta_{\frac{1}{n}} + n^3\delta_{-\frac{1}{n}} - 2\,n^3\,\delta_0 - n\,\delta_0'',$$

où $\delta_a$ est la masse de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Alors, la limite $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ au sens des distributions (dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$) est donnée par:

- ☐ $\delta_0''$
- ☐ $0$
- ☐ $-\frac{1}{3}\delta_0'''$
- ☐ $\delta_0$

**Question 5** *(1 point)* Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note $B(x,r) = \mathbb{R}^2 \cap \{y : |y-x| < r\}$ le disque de centre $x$ et de rayon $r$. Soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs tel que $\mathrm{rot}(X) = 0$ et

$$\int_{\partial B(2,1)} X \cdot dl = 0.$$

Alors:

- ☐ L'intégrale de $X$ le long de toute courbe régulière fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est nulle.
- ☐ $X$ est exact.
- ☐ $X$ n'est pas exact.
- ☐ On ne peut rien conclure.

**Question 6** *(1 point)* Soit $f(x) = \exp\left(x^3 \sin(x)\right)$. Quelle affirmation est correcte?

- ☐ $[f]$ est une distribution à support compact ($[f] \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ est une distribution ($[f] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ est une distribution tempérée ($[f] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $[f]$ n'est pas une distribution ($[f] \notin \mathscr{D}'(\mathbb{R})$).

**Question 7** *(1 point)* Soit $F(x,y) = (y\sinh(xy), x\sinh(xy))$ et $G(x,y) = (y\cosh(xy), -x\sinh(xy))$. Alors, les champs de vecteurs exacts sont:

- ☐ $F$ et $G$.
- ☐ $G$.
- ☐ $F$.
- ☐ Aucun des deux.

**Question 8** *(1 point)* Soit $f(x) = \cos(2023x)\sin(x)$ vue comme fonction $2\pi$-périodique. Alors, on a:

- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1, 1, 2023\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2023\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2024, -2022, 2022, 2024\}$.
- ☐ $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2023, -1\}$.

**Question 9** *(1 point)* Soit $T = \sum_{k=0}^{\infty}(\delta_{k+1} - \delta_k)$, où $\delta_k$ est la masse de Dirac en $k \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$. Alors, on a:

- ☐ $T = -\delta_0$
- ☐ La série de converge pas au sens des distributions (dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$).
- ☐ $T = 0$
- ☐ $T = \delta_0$

**Question 10** *(1 point)* Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ la distribution

$$T = \frac{\sin(2\pi t)}{t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k,$$

où $\delta_k$ est la masse de Dirac en $k \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait $\delta_k(\varphi) = \varphi(k)$. Alors, on a:

- ☐ $T = 2\pi\,\delta_0$
- ☐ $T = -2\pi\,\delta_0'$
- ☐ $T = 2\pi\,\delta_0'$
- ☐ $T = -2\pi\,\delta_0$

**Question 11** *(1 point)* Admettons que la transformée de Fourier de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est donnée par $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(1+\xi) + \operatorname{sgn}(1-\xi)\right)$, où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ est égale à:

- [ ] $\infty$
- [ ] $\pi$
- [ ] $2\pi$
- [ ] $2\pi^2$

**Question 12** *(1 point)* Soit $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^4}$. Alors, la transformée de Fourier de $f$ est donnée par:

- [ ] $\widehat{f}(\xi) = -\dfrac{\pi}{48}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right) e^{-\xi}$.
- [ ] $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{48}\left(\xi^3 + 6\,\xi^2 + 15\,\xi + 15\right) e^{-\xi}$.
- [ ] $\widehat{f}(\xi) = -\dfrac{\pi}{48}\left(|\xi|^3 + 6\,\xi^2 + 15|\xi| + 15\right) e^{-|\xi|}$.
- [ ] $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{\pi}{48}\left(|\xi|^3 + 6\,\xi^2 + 15|\xi| + 15\right) e^{-|\xi|}$.

**Question 13** *(1 point)* On admet que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est égale à

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi(1-|\xi|) & \text{si } -1 \le |\xi| \le 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale suivante $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$ est égale à:

- [ ] $\pi$
- [ ] $\pi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
- [ ] $\pi\sqrt{2\pi}$
- [ ] $\dfrac{\pi}{2}$

**Question 14** *(1 point)* Soit $f(x) = |\cos(x)|$ et admettons que les coefficients de Fourier de $f$ (vue comme fonction $2\pi$-périodique) vérifient l'identité suivante $|c_n(f)| = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{|n^2-1|}$ si $n \in \mathbb{Z}$ est pair, et $c_n(f) = 0$ sinon (c'est-à-dire, si $n$ est impair). Alors, la série $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$ vaut:

- [ ] $\dfrac{\pi^2}{8} + 1$
- [ ] $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$
- [ ] $\dfrac{\pi^2}{8} - 1$
- [ ] $\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{2}$

**Question 15** *(1 point)* Soit $f : ]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)$ étendue par $2\pi$-périodicité sur $\mathbb{R}$. Alors, on a:

- [ ] $a_n(f) = 0$ pour tout $n \ge 1$ et $a_0(f) < 0$.
- [ ] $b_n(f) = 0$ pour tout $n \ge 1$ et $a_0(f) > 0$.
- [ ] $b_n(f) = 0$ pour tout $n \ge 1$ et $a_0(f) < 0$.
- [ ] $a_n(f) = 0$ pour tout $n \ge 1$ et $a_0(f) > 0$.

## Deuxième partie, questions ouvertes

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Chaque résultat du cours utilisé doit être précisément énoncé.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées aux correcteurs.

**Question 16:** *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

On considère la fonction

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2\\ \theta &\to \big(\cos^3(\theta), \sin^3(\theta)\big)\end{aligned}$$

Calculer la longueur de la courbe fermée $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

**Question 17:** *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Vérifier le théorème de Gauss-Green sur le domaine suivant:

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \cap \left\{(x, y) : 0 < y < 8\,x - 12\,x^2 + 6\,x^3 - x^4,\ \ x > 0\right\}$$

avec le champ de vecteurs $X(x, y) = (-y, x)$.

**Question 18:** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

Calculer le volume du domaine

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \cap \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2} \right\}$$

et vérifier le résultat à l'aide du théorème de la divergence.

**Question 19:** *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Soit

$$\Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \left\{ (x, y, z) : x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes sur la surface à bord $\Sigma$ avec le champ de vecteurs

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

**Question 20:** *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit $f(x) = e^{|x|}$ pour tout $x \in ]-\pi, \pi]$, étendue par $2\pi$-périodicité sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier de $f$ est donné par

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}.$$

2) À l'aide d'un théorème du cours que l'on rappelera, calculer la valeur des deux séries (et simplifier le résultat):

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

**Question 21:** *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-|x|}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-|x|}$ est donnée par

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)e^{-|x|}$.

2) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et la question 1), calculer $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$ en fonction de $\widehat{g}(\xi)$.

3) À l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\xi^2}{2}\right),$$

et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$