# INLÄMNINGSUPPGIFT 3

Yasir Riyadh Jabbar, KTH … //2021

$\boldsymbol{a = 7, b = 1}$

## Uppgift 1. (Matlab)

En Markov kedja med två tillstånd E1 och E2 har övergångsmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} \frac{12}{20} & \frac{8}{20} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

a) Bestäm tillhörande stationära sannolikhetsvektorer $\vec{q} = (q_1, q_2)$ genom att lösa ekvationer:

$$\vec{q}P = \vec{q}$$
$$q_1 + q_2 = 1$$

b) Låt $\vec{p}^{(0)}$ vara en initialvektor. Bestäm sannolikhetsvektorerna $\vec{p}^{(1)}$,$\vec{p}^{(2)}$, $\vec{p}^{(3)}$, $\vec{p}^{(50)}$, $\vec{p}^{(100)}$ om

b1) $\vec{p}^{(0)} = (0.1,\ 0.9)$ b2) $\vec{p}^{(0)} = (0.7,\ 0.3)$

c) Vad är sannolikheten att systemet som startar i E1 befinner sig i tillstånd E2 efter 100 tidsenheter (dvs efter 100 övergångar).

| | Känd | Krav | Metod | Resultat av Matlab |
|---|---|---|---|---|
| a) | $\boldsymbol{P}$ | $\vec{\boldsymbol{q}} = (\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2})$ | $\vec{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{P} = \vec{\boldsymbol{q}}$<br>$\boldsymbol{q_1 + q_2 = 1}$ | $\vec{\boldsymbol{q}} = (\boldsymbol{0.6923}, \boldsymbol{0.3077})$ |
| b) | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{0})} = (\boldsymbol{0.1},\ \boldsymbol{0.9})$ | $\vec{p}^{(1)}$ | $\vec{p}^{(n)} = \vec{p}^{(0)}\,\boldsymbol{P}^n$ | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{1})} = (\boldsymbol{0.8700}\ \ \boldsymbol{0.1300})$ |
| | | $\vec{p}^{(2)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{2})} = (\boldsymbol{0.6390}\ \ \boldsymbol{0.3610})$ |
| | | $\vec{p}^{(3)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{3})} = (\boldsymbol{0.7083}\ \ \boldsymbol{0.2917})$ |
| | | $\vec{p}^{(50)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{50})} = (\boldsymbol{0.6923}\ \ \boldsymbol{0.3077})$ |
| | | $\vec{p}^{(100)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{100})} = (\boldsymbol{0.6923}\ \ \boldsymbol{0.3077})$ |
| | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{0})} = (\boldsymbol{0.7},\ \boldsymbol{0.3})$ | $\vec{p}^{(1)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{1})} = (\boldsymbol{0.6900}\ \ \boldsymbol{0.3100})$ |
| | | $\vec{p}^{(2)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{2})} = (\boldsymbol{0.6930}\ \ \boldsymbol{0.3070})$ |
| | | $\vec{p}^{(3)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{3})} = (\boldsymbol{0.6921}\ \ \boldsymbol{0.3079})$ |
| | | $\vec{p}^{(50)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{50})} = (\boldsymbol{0.6923}\ \ \boldsymbol{0.3077})$ |
| | | $\vec{p}^{(100)}$ | | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{100})} = (\boldsymbol{0.6923}\ \ \boldsymbol{0.3077})$ |
| c) | $\vec{p}^{(0)} = (1,\ 0)$ | $\boldsymbol{p_2^{(100)}}$ | $\vec{p}^{(100)} = (p_1^{(100)},\ \boldsymbol{p_2^{(100)}})$ | $\vec{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{100})} = (\boldsymbol{0.6923}\ \ \boldsymbol{0.3077})$<br>$\boldsymbol{p_2^{(100)}} = \boldsymbol{0.3077}$ |

## Uppgift 2. (Matlab)

En Markovkedja i diskret tid har följande övergångsmatris

$$P = \begin{bmatrix} 2x & 0.4 & 0.2 & y \\ 0.2 & x & 2y & 0.3 \\ z+1 & 0.22 & 0.33 & 0.2 \\ 0.2 & w+7 & 0.24 & 0.42 \end{bmatrix}$$

a) Bestäm x, y, z, w och matrisen P.
b) Antag att initialvektorn är $\vec{p}^{(0)} = (0.2,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.3)$. Bestäm sannolikhetsvektorerna $\vec{p}^{(1)}$,$\vec{p}^{(2)}$, $\vec{p}^{(3)}$, $\vec{p}^{(50)}$, $\vec{p}^{(100)}$.
c) Kan man ange approximativt värdet av sannolikhetsvektorn $\vec{p}^{(5743)}$ utan att beräkna det?
d) Vad säger b) om den stationära sannolikhetsvektorn?
e) Bestäm stationära sannolikheter $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ genom att lösa ekvationer
$\boldsymbol{\vec{q}} = \boldsymbol{\vec{q}} \cdot \boldsymbol{P}$ och $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$.
f) Jämför dina resultat i b) och e)

| | Känd | Krav | Metod | Resultat av Matlab |
|---|---|---|---|---|
| a) | Ofullständig $\boldsymbol{P}$ | [x, y, z, w] $\boldsymbol{P}$ | $\sum_k \boldsymbol{p_{ik}} = \mathbf{1}$ | $[x, y, z, w] = [\ 0.1, 0.2, -0.75, -6.86]$ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.2} & \mathbf{0.4} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.2} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0.4} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.25} & \mathbf{0.22} & \mathbf{0.33} & \mathbf{0.2} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.14} & \mathbf{0.24} & \mathbf{0.42} \end{bmatrix}$ |
| b) | $\vec{p}^{(0)} = (0.2, 0.3, 0.2, 0.3)$ | $\vec{p}^{(1)}$ | $\vec{p}^{(n)} = \vec{p}^{(0)}\ \boldsymbol{P}^n$ | $(\mathbf{0.2100}, \mathbf{0.1960}, \mathbf{0.2980}, \mathbf{0.2960})$ |
| | | $\vec{p}^{(2)}$ | | $(\mathbf{0.2149}, \mathbf{0.2106}, \mathbf{0.2898}, \mathbf{0.2847})$ |
| | | $\vec{p}^{(3)}$ | | $(\mathbf{0.2145}, \mathbf{0.2106}, \mathbf{0.2912}, \mathbf{0.2837})$ |
| | | $\vec{p}^{(50)}$ | | $(\mathbf{0.2146}, \mathbf{0.2107}, \mathbf{0.2913}, \mathbf{0.2834})$ |
| | | $\vec{p}^{(100)}$ | | $(\mathbf{0.2146}, \mathbf{0.2107}, \mathbf{0.2913}, \mathbf{0.2834})$ |
| c) | $\vec{p}^{(100)}$ | $\vec{p}^{(5743)}$ | $\approx \vec{p}^{(100)}$ | $(\mathbf{0.2146}, \mathbf{0.2107}, \mathbf{0.2913}, \mathbf{0.2834})$ |
| | $\boldsymbol{P}$ | | * | $(\mathbf{0.2146}, \mathbf{0.2107}, \mathbf{0.2913}, \mathbf{0.2834})$ |
| d) | $\vec{p}^{(1)}, \vec{p}^{(2)}, \vec{p}^{(3)}, \vec{p}^{(50)}, \vec{p}^{(100)}$ | stationära sannolikhet vektorn | När börjar det upprepa värden | $(\mathbf{0.2146}, \mathbf{0.2107}, \mathbf{0.2913}, \mathbf{0.2834})$ |
| e) | $\boldsymbol{P}$ | $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ | $\boldsymbol{\vec{q}P} = \boldsymbol{\vec{q}}$ $\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2} + q_3 + q_4 = \mathbf{1}$ | $\boldsymbol{\vec{q}} = (\mathbf{0.2146}, \mathbf{0.2107}, \mathbf{0.2913}, \mathbf{0.2834})$ |
| f) | När man jämför resultaten blir det tydligt att: $\boldsymbol{\vec{p}^{(50)}} = \boldsymbol{\vec{p}^{(100)}} = \boldsymbol{\vec{q}} \quad \boldsymbol{eller} \quad \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\vec{p}^{(n)}} = \boldsymbol{\vec{q}}$ | | | |

* Man kan också uppskatta det ungefärliga värdet av sannolikhetsvektorn från egenvektorn för P ', motsvarande egenvärdet 1. Det skulle vara vektorn Q, så att Q * P = Q.