Отчёт

1 Условия задачи

Дана система:

$$\begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}) = \sqrt{e^{2y+\sin y-1}} \\ (1+\alpha)x = e^{-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sin y\right)^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $0 < \ln\sqrt{1+x^2} => x \neq 0$
Из второго уравнения системы - $0 < (1+\alpha)x \leq 1$ Значит,

$$\left[\begin{array}{l} -1 < \alpha \leq \dfrac{1}{x} - 1,\ x > 0 \\ \dfrac{1}{x} - 1 \leq \alpha < -1,\ x < 0 \end{array}\right.$$

Запишем в виде $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+\alpha} e^{-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sin y\right)^2} = f_1(x,y,\alpha) \\ \\ y = \dfrac{1}{2}\left(2\ln\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right) - \sin y + 1\right) = f_2(x,y) \end{cases}$$

Определение: X - нормированное пространство. Отображение $F : X \times A \to X$ называют сжимающим, если для некоторого $\exists q:\ 0 < q < 1;\ \forall x_1, x_2 \in X;\ \forall \alpha \in A$ выполнено $\|F(x_1,\alpha) - F(x_2,\alpha)\| < q\|x_1 - x_2\|$

Теорема 1:
Пусть :

- $\Omega \subseteq X$ замкнуто ($\overline{\Omega} = \Omega$)
- X нормированное
- $F : \Omega \times A \to \Omega$; F - сжимающее

Тогда:

- $\exists!$ решение $x_* = x_*(\alpha)$ уравнения $F(x_*) = x_*$
- Это решение может быть получено: $x_* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, где $x_k = x_k(\alpha) \quad x_{k+1} = F(x_k,\alpha)$
- Скорость сходимости можно оценить по правилу: $\|x_* - x_k\| \leq \dfrac{q^k}{1-q}\|x_1 - x_0\|$

Теорема 2:
Пусть :

1. X нормированное пространство
2. $\Omega \subseteq X$ замкнуто ($\overline{\Omega} = \Omega$)
3. $F : \Omega \times A \to \Omega$
4. $\forall x \in \Omega \quad \exists F'_x(x, \alpha) = \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x}$
5. $\forall x \in \Omega, \ \forall \alpha \in A \quad \|F'_x(x, \alpha)\| \leq q < 1$

Тогда: F сжимающее отображение и выполнена Теорема 1

2 Проверка условий Теоремы 2

Отметим, что в нашем случае $X = \mathbb{R}^2$ - это нормированное пространство

2.1 Поиск области Ω

Из условия на неотрицательность подкоренного выражения в исходной системе получаем неравенство на y:

$$0 \leq 2y + \sin y - 1 \ \ => \ 0.335 \leq y$$

Выберем область по x: $x > 0$. Тогда $-1 < \alpha \leq \dfrac{1}{x} - 1$
$f_1(x, y, \alpha)$ попадает в нашу область $(0, +\infty)$
$f_2(x, y) \in [-\infty, +\infty]$. Получаем, что наша $\Omega = [1.28, +\infty] \times [0.335, +\infty]$ ограничена, выпукла.

2.2 Матрица Якоби

Посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{-2}{1+\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sin y - 1\right)^2} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sin y\right) \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-2}{1+\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sin y - 1\right)^2} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sin y\right) \cos y;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{\ln \sqrt{1+x^2}} \frac{x}{1+x^2};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{2} \cos y$$

Оценим их по модулю. С одним из выражений всё ясно:

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{2};$$

Оценим остальные. Заметим, что

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \leq 1$$

$$-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sin y\right)^2 \leq 2$$

Выражение $\frac{1}{\ln\sqrt{1+x^2}}\frac{x}{1+x^2} \leq 1$ при $x \geq 1.28$

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right| = \left|\frac{-2}{1+\alpha}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sin y-1\right)^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sin y\right)\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\right| \leq \frac{3}{1+\alpha}e^{-4}$$

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right| = \left|\frac{-2}{1+\alpha}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sin y-1\right)^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sin y\right)\cos y\right| \leq \frac{3}{1+\alpha}e^{-4}$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right| = \left|\frac{1}{\ln\sqrt{1+x^2}}\frac{x}{1+x^2}\right| \leq 1$$

Получаем, что для того, чтобы норма Якобиана была меньше единицы, должно выполняться неравенство:

$$\frac{3}{1+\alpha}e^{-4} \leq 1 \quad => \quad -1+3e^{-4} \leq \alpha$$

Значит, возьмем в качестве A множество $(0;3]$ Следовательно, если в качестве нормы взять сумму модулей по столбцам, то наша система удовлетворяет условиям второй теоремы (q = 3/4).

3 Оценка количества итераций:

Хотим получить для k оценку, т.е. найти минимальное количество шагов алгоритма, после которого точность станет достаточно малой ($< \varepsilon$):

$$\rho(x_k - x*) \leq \frac{q^k}{1-q}\rho(x_1, x_0) < \varepsilon$$

$$k\ln(q) < \ln(\varepsilon) + \ln(1-q) + \ln(x_1 - x_0)$$

$$k > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(q)} \quad (\ln(q) < 0)$$

Таким образом, для любого $k > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(q)}$ расстояние от x_k до x_* не превосходит заданного ε. Так как нас интересует минимальное значение числа итераций, возьмем в качестве $k_{min} = \lceil\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(q)}\rceil$.