

15/05/2025

# Sujet de dossier

Séries temporelles



HOUSSEINE Yassine, LAHJAJI Hamid, MEHDID Aymen

## Table of Contents

<b>Présentation des ETF et évolution des valeurs.....</b>	<b>2</b>
Présentation des ETF .....	2
Performances Observées .....	3
Analyses des rendements quotidiens.....	4
Statistiques descriptives des rendements .....	4
Matrice de corrélation .....	5
Autocorrélation des rendements .....	6
Analyse de la Volatilité à l'aide des Modèles GARCH.....	6
Objectif et Intérêt des Modèles GARCH.....	6
Estimation du Modèle GARCH (1,1) : Analyse des Résultats pour VTI, ENOR et XRT .....	7
Représentation Graphique : Variance et Écart-Type Conditionnels des Rendements.....	10
Analyse graphique de la volatilité conditionnelle du VTI .....	10
Analyse graphique de la volatilité conditionnelle de ENOR.....	11
Analyse graphique de la volatilité conditionnelle de XRT .....	12
Analyse Multivariée de la Volatilité : Application des Modèles GARCH BEKK .....	13
Objectif et Intérêt des Modèles GARCH Multivariés .....	13
Estimation du Modèle BEKK pour l'Indice Large et le second ETF .....	14
Estimation du Modèle BEKK pour l'Indice Large et le Troisième ETF .....	15
Analyse des Interdépendances Dynamiques : Application des Modèles VAR.....	16
Objectif et Intérêt des Modèles VAR .....	16
Fonctions de réponse aux impulsions (IRF) .....	17
Conclusion .....	18
Récapitulatif du travail fourni.....	19

# Présentation des ETF et évolution des valeurs

## Présentation des ETF

Pour diversifier efficacement notre portefeuille d'investissement, nous avons sélectionné trois ETFs représentatifs de zones géographiques et de secteurs variés : le VTI, l'ENOR et le XRT.

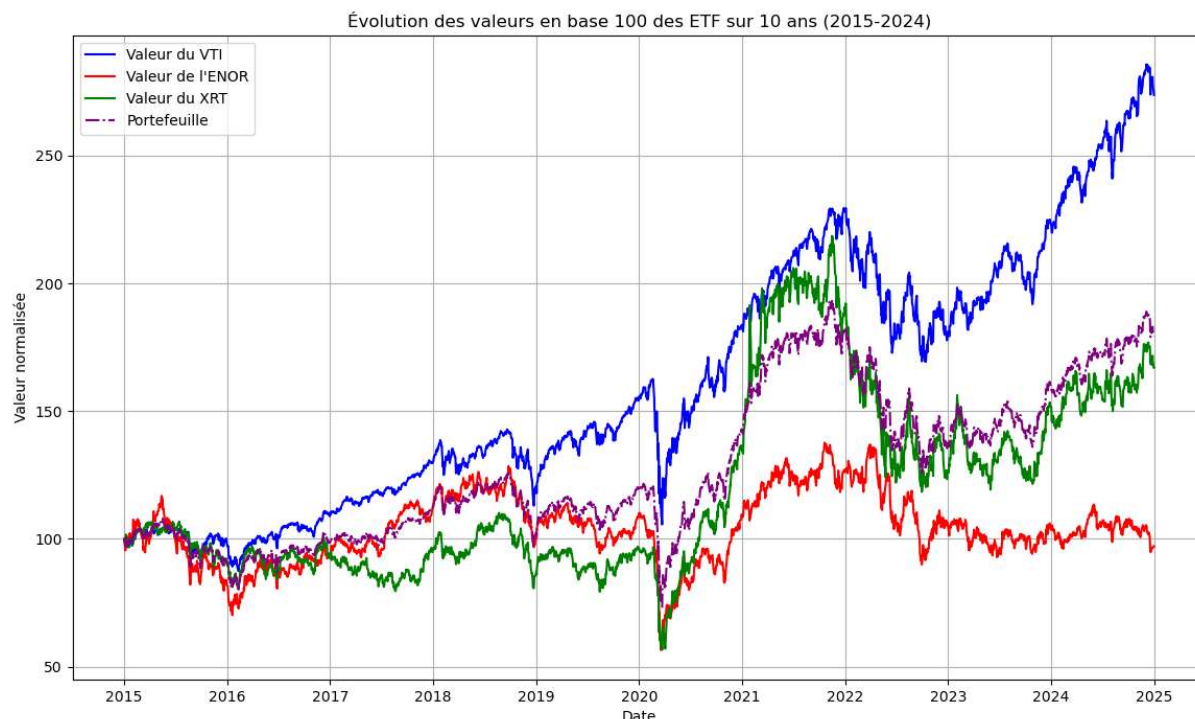
	VTI	ENOR	XRT
Names	Vanguard Total Stock Market ETF	iShares MSCI Norway ETF	SPDR S&P Retail ETF
ETFdb.com Category	U.S. Equity	Europe Equities	U.S. Equity
Index	CRSP US Total Market	MSCI Norway IMI 25/50	S&P Retail Select Industry
Index Description	View Index	View Index	View Index
Expense Ratio	0.03%	0.51%	0.35%
Issuer	Vanguard	BlackRock, Inc	State Street
Structure	ETF	ETF	ETF
Inception Date	24-mai-01	27-janv-10	26-juin-06
AUM	\$315,256.7 M	\$142.8 M	\$343.2 M
Shares Outstanding	592.3 M	5.0 M	10.6 M
ADV(1 month)	4,389,400	45,300	2,490,800
ADV(3 month)	4,531,200	51,100	2,532,100
ETF Home Page	Home page	Home page	Home page
Fact Sheet Link	Fact sheet	Fact sheet	Fact sheet

Le Vanguard Total Stock Market ETF (VTI) est un produit phare de Vanguard qui offre une exposition extrêmement large au marché actions américain. Il couvre l'ensemble des capitalisations, des très grandes entreprises aux plus petites, ce qui le rend particulièrement intéressant pour suivre la dynamique globale de l'économie américaine. Il est libellé en dollars américains et coté à la Bourse de New York. Les dividendes sont versés trimestriellement. En revanche, ce fonds n'est pas éligible au Plan d'Épargne en Actions (PEA), ce qui peut limiter son attrait pour certains investisseurs français.

Le second ETF, iShares MSCI Norway ETF (ENOR), se concentre exclusivement sur la Norvège. Il suit l'indice MSCI Norway et offre une exposition marquée aux secteurs de l'énergie et des matières premières, dans lesquels la Norvège est particulièrement compétitive. Ce fonds, également coté à New York et libellé en dollars, distribue ses dividendes deux fois par an. Il n'est pas non plus éligible au PEA. Il peut cependant intéresser des investisseurs souhaitant diversifier leur portefeuille au-delà des marchés traditionnels et miser sur la stabilité et les ressources naturelles du pays.

Enfin, le SPDR S&P Retail ETF (XRT) cible un secteur bien spécifique : la distribution de détail aux États-Unis. Il est construit de manière égalitaire entre les différentes entreprises de l'indice, ce qui limite la surpondération des géants du secteur. Très sensible aux cycles économiques et aux comportements de consommation, cet ETF est particulièrement réactif à l'actualité économique. Comme les précédents, il est coté aux États-Unis, en dollars, verse des dividendes trimestriels, et n'est pas éligible au PEA.

Dans l'ensemble, ces trois ETFs ne sont donc pas adaptés à une enveloppe PEA, mais ils peuvent tout à fait s'inscrire dans un compte-titres ordinaire, notamment pour les investisseurs à la recherche de diversification géographique et sectorielle via des produits liquides et cotés.



## Performances Observées

Le graphique ci-joint représente l'évolution des trois ETFs entre 2015 et 2024, ainsi que celle d'un portefeuille les combinant, tous normalisés sur une base 100 en début de période. Cette représentation permet de comparer visuellement la performance de chaque actif sur 10 ans.

Le VTI se démarque nettement avec une progression régulière et marquée, traduisant la solidité de la bourse américaine sur la période, malgré un choc net en 2020 lié à la crise du COVID. Il finit la période à un niveau supérieur à 280, ce qui correspond à un rendement cumulé exceptionnel.

Le XRT montre une trajectoire plus heurtée. Très volatil, il profite d'un fort rebond post-COVID avec l'explosion de la consommation en ligne, mais connaît ensuite des phases de recul sensibles. Il reste néanmoins performant sur le long terme.

L'ENOR, de son côté, a une trajectoire plus modeste. Sa performance est relativement stable, mais inférieure à celle des deux autres ETFs, ce qui reflète une dynamique plus lente de l'économie norvégienne, fortement liée au secteur énergétique.

Le portefeuille combiné, représenté par une ligne violette pointillée, illustre une stratégie de diversification. Il parvient à lisser les fluctuations tout en captant une part des performances des meilleurs ETFs, ce qui en fait une option équilibrée pour les investisseurs prudents mais exposés à la croissance.

# Analyses des rendements quotidiens

## Statistiques descriptives des rendements

	<b>VTI Returns</b>	<b>ENOR Returns</b>	<b>XRT Returns</b>
<b>count</b>	2539.000000	2539.000000	2539.000000
<b>mean</b>	0.000461	0.000112	0.000342
<b>std</b>	0.011293	0.015660	0.016709
<b>min</b>	-0.113809	-0.146100	-0.124618
<b>25%</b>	-0.003988	-0.007493	-0.008628
<b>50%</b>	0.000565	0.000481	0.000236
<b>75%</b>	0.005872	0.008823	0.009474
<b>max</b>	0.094898	0.126108	0.120349

Le VTI se distingue très nettement par son rendement annualisé supérieur à 12 %, ce qui confirme sa performance robuste sur la période observée, malgré une volatilité modérée.

L'ENOR affiche un rendement annualisé beaucoup plus faible (moins de 3 %) avec une volatilité relativement élevée. Cela signifie qu'il a été plus risqué mais moins rémunérateur, ce qui le rend moins attractif du point de vue rendement-risque.

Le XRT, quant à lui, offre un compromis intéressant : un rendement proche de 9 % annualisé, avec une volatilité plus élevée que VTI, mais compensée par une meilleure performance que ENOR.

<b>ETF</b>	<b>Rendement journalier moyen</b>	<b>Rendement annualisé composé</b>
<b>VTI</b>	0.046%	12.304%
<b>ENOR</b>	0.011%	2.873%
<b>XRT</b>	0.034%	8.991%

Le rendement moyen journalier est un indicateur essentiel qui permet d'évaluer la tendance générale du produit. Sur la période analysée, le VTI affiche un rendement moyen de 0,0461 % par jour, ce qui est relativement élevé à l'échelle journalière. Cela traduit une dynamique positive et régulière du marché actions américain, soutenue par la croissance des grandes capitalisations et la résilience économique sur la décennie.

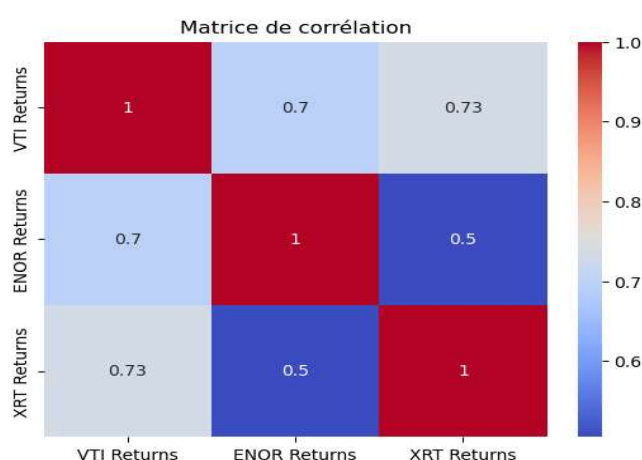
À l'opposé, l'ENOR ne progresse en moyenne que de 0,0112 % par jour, soit un niveau nettement inférieur. Cette faible performance moyenne reflète probablement la forte dépendance de la Norvège aux matières premières et à l'énergie, deux secteurs cycliques et sensibles à la conjoncture mondiale. Malgré certaines phases haussières, la tendance globale reste assez plate sur la période.

Le XRT, avec un rendement moyen de 0,0342 %, se situe entre les deux. Son rendement reste correct, en particulier compte tenu de son exposition à un secteur, le commerce de détail qui a été particulièrement chahuté par les effets du COVID, les évolutions technologiques et les changements dans les comportements de consommation.

Concernant la volatilité, mesurée ici par l'écart-type des rendements journaliers, elle nous renseigne sur l'ampleur des fluctuations quotidiennes. Le VTI présente la volatilité la plus faible des trois, à 1,13 %, ce qui est logique compte tenu de sa large diversification sectorielle et géographique sur le marché américain.

En revanche, ENOR et XRT sont nettement plus volatils, avec des écarts-types de respectivement 1,57 % et 1,67 %. Cette forte variabilité traduit un niveau de risque plus élevé : ces ETFs peuvent connaître des variations importantes à la hausse comme à la baisse, ce qui implique qu'ils sont plus sensibles aux chocs de marché ou aux événements spécifiques à leur secteur (comme les prix du pétrole pour ENOR, ou les résultats de certaines chaînes de magasins pour XRT).

## Matrice de corrélation



Ce graphique nous montre les corrélations entre les rendements journaliers des trois ETFs étudiés : VTI, ENOR et XRT. La corrélation est un indicateur qui mesure la force et la direction de la relation linéaire entre deux variables. Elle varie entre -1 (corrélacion parfaitement négative) et +1 (corrélacion parfaitement positive).

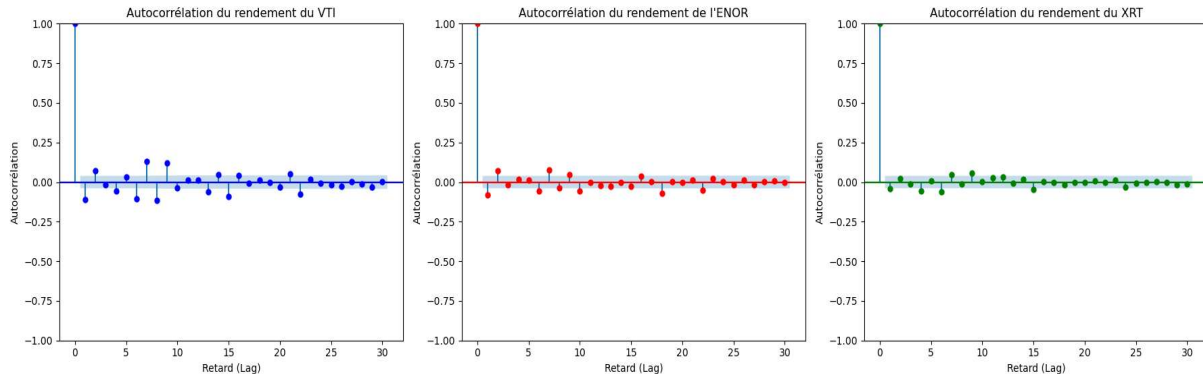
Première constatation : les trois ETFs présentent des corrélations positives entre eux, ce qui signifie qu'en règle générale, ils ont tendance à évoluer dans le même sens. Toutefois, l'intensité de ce co-mouvement varie.

- **Corrélation entre VTI et XRT (0,73) :** Corrélation très forte mais pas surprenante, le VTI reflète l'ensemble du marché américain, et XRT suit le secteur du retail, qui en fait naturellement partie. Quand l'économie américaine est en croissance, cela soutient à la fois les grandes entreprises (VTI) et la consommation des ménages (XRT), ce qui explique qu'ils montent ou baissent souvent ensemble.
- **Corrélation entre VTI et ENOR (0,70) :** Corrélation moins forte mais significative. Bien que ENOR se concentre sur le marché norvégien, il est logique qu'il soit partiellement corrélé aux marchés globaux, en particulier au marché américain, qui joue un rôle central dans les flux financiers mondiaux. De plus, la Norvège, en tant que pays exportateur de pétrole, est également sensible à la conjoncture internationale.
- **Corrélation entre ENOR et XRT (0,50) :** Corrélation plus modérée, voire partiellement indépendante. XRT dépend beaucoup des dynamiques internes du marché américain et de la consommation domestique, alors que ENOR est lié à un autre pays, un autre contexte économique et à des secteurs très différents comme l'énergie. Ce niveau plus faible de corrélation est en fait une



bonne nouvelle du point de vue de la diversification : intégrer des actifs faiblement corrélés permet de lisser les performances d'un portefeuille et d'en réduire la volatilité globale.

## Autocorrélation des rendements



Les trois graphiques illustrent l'autocorrélation des rendements de VTI, ENOR et XRT. Pour VTI, le graphique de gauche, les barres après le premier lag oscillent autour de zéro sans dépasser les bandes de confiance, indiquant l'absence d'autocorrélation significative. Cela suggère que les rendements du VTI ne présentent pas de schéma temporel évident et semblent aléatoires.

Pour ENOR, le graphique central montre un comportement similaire. Les points sont concentrés autour de zéro, ce qui peut indiquer des rendements légèrement moins volatils par rapport à VTI, mais sans autocorrélation marquée.

Enfin, le graphique de XRT, à droite, présente le même profil. Les barres restent autour de zéro, sans oscillations marquées, renforçant l'idée que les rendements sont aléatoires et sans structure temporelle identifiable.

## Analyse de la Volatilité à l'aide des Modèles GARCH

### Objectif et Intérêt des Modèles GARCH

Les modèles GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) visent à modéliser et prévoir la volatilité des séries temporelles financières. Leur intérêt réside dans leur capacité à capturer l'hétéroscédasticité conditionnelle, c'est-à-dire les variations de volatilité au fil du temps, souvent observées dans les rendements financiers. Ils permettent ainsi d'identifier les périodes de forte ou faible volatilité, d'améliorer les prévisions de risque et de valoriser correctement des actifs financiers tout en tenant compte des chocs et des effets de persistance de la volatilité.

## Estimation du Modèle GARCH (1,1) : Analyse des Résultats pour VTI, ENOR et XRT

Constant Mean - GARCH Model Results					
Dep. Variable: VTI Returns		R-squared:		0.000	
Mean Model: Constant Mean		Adj. R-squared:		0.000	
Vol Model: GARCH		Log-Likelihood:		8381.67	
Distribution: Normal		AIC:		-16755.3	
Method: Maximum Likelihood		BIC:		-16732.0	
No. Observations: 2539					
Date: Fri, May 09 2025		Df Residuals:		2538	
Time: 16:08:31		Df Model:		1	
Mean Model					
coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.	
mu	8.5268e-04	6.432e-05	13.258	4.062e-40	[7.266e-04,9.787e-04]
Volatility Model					
coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.	
omega	2.5497e-06	1.653e-12	1.543e+06	0.000	[2.550e-06,2.550e-06]
alpha[1]	0.2000	2.923e-02	6.841	7.838e-12	[ 0.143, 0.257]
beta[1]	0.7800	2.454e-02	31.779	1.278e-221	[ 0.732, 0.828]

Covariance estimator: robust

biaisée et statistiquement significative.

Concernant le modèle de volatilité, trois paramètres sont estimés :

- Omega ( $\omega$ ), qui représente la variance inconditionnelle ou le niveau de volatilité de base, est estimé à  $2.55 \times 10^{-6}$ . Ce coefficient est très faible mais statistiquement significatif, ce qui est courant pour des rendements financiers où la variance quotidienne est généralement faible.
- Alpha ( $\alpha_1$ ), qui capte l'effet de choc (ou news impact) sur la volatilité, est estimé à 0.200. Cette valeur est significative et indique qu'environ 20 % des chocs passés sont transmis à la volatilité actuelle.
- Beta ( $\beta_1$ ), qui mesure la persistance de la volatilité, est estimé à 0.780, également significatif. Cette valeur élevée indique une forte persistance des niveaux de volatilité : si un choc se produit, son effet mettra du temps à se dissiper.

L'ensemble des paramètres alpha et beta totalise 0.98, très proche de 1, ce qui suggère une longue mémoire de la volatilité. En d'autres termes, les chocs passés continuent d'influencer la volatilité présente et future, ce qui est typique des actifs financiers. Les critères AIC et BIC, respectivement -16757.5 et -16732.0, indiquent la qualité de l'ajustement du modèle, bien que leur interprétation absolue ne soit pas directement informative sans comparaison avec d'autres modèles.



Constant Mean - GARCH Model Results					
Dep. Variable:	ENOR Returns		R-squared:	0.000	
Mean Model:	Constant Mean		Adj. R-squared:	0.000	
Vol Model:	GARCH		Log-Likelihood:	7294.95	
Distribution:	Normal		AIC:	-14581.9	
Method:	Maximum Likelihood		BIC:	-14558.5	
			No. Observations:	2539	
Date:	Fri, May 09 2025		Df Residuals:	2538	
Time:	16:08:14		Df Model:	1	
Mean Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
mu	2.2068e-04	2.464e-04	0.896	0.370	[-2.622e-04, 7.036e-04]
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	4.9066e-06	1.877e-12	2.614e+06	0.000	[4.907e-06, 4.907e-06]
alpha[1]	0.1000	4.909e-03	20.370	3.118e-92	[9.038e-02, 0.110]
beta[1]	0.8800	1.752e-04	5023.864	0.000	[0.880, 0.880]

Covariance estimator: robust

zéro, ce qui est courant pour des rendements financiers.

Dans le modèle de volatilité, trois paramètres sont estimés :

- Omega ( $\omega$ ), qui représente la variance inconditionnelle, est estimé à  $4.91 \times 10^{-6}$ . Ce coefficient est significatif et relativement plus élevé que celui du modèle précédent pour VTI, ce qui peut indiquer une volatilité de base plus importante pour ENOR.
- Alpha ( $\alpha_1$ ), qui capte l'effet des chocs sur la volatilité, est estimé à 0.100. Bien que ce coefficient soit plus faible que celui de VTI, il reste significatif, ce qui indique que les chocs passés influencent la volatilité actuelle mais de manière plus modérée.
- Beta ( $\beta_1$ ), qui mesure la persistance de la volatilité, est estimé à 0.880. Cette valeur est très élevée, suggérant une forte persistance des niveaux de volatilité. Autrement dit, les chocs passés continuent de se répercuter sur la volatilité actuelle, ce qui est typique des actifs à faible liquidité ou à forte sensibilité aux chocs externes.

La somme de alpha et beta est de 0.98, indiquant une mémoire longue de la volatilité, similaire à VTI mais avec une composition différente : une contribution plus importante de beta, suggérant une volatilité persistante avec des chocs de moindre ampleur.

Les critères AIC et BIC, respectivement -14581.9 et -14558.5, sont plus élevés (en valeur absolue) que ceux de VTI, ce qui peut indiquer un ajustement moins précis du modèle ou une volatilité plus erratique.

Ce tableau présente les résultats du modèle GARCH appliqué aux rendements de ENOR.

Le modèle utilise une moyenne constante pour les rendements, représentée par le paramètre mu, estimé à  $2.21 \times 10^{-4}$ . La statistique t est de 0.896 et la p-valeur est élevée, indiquant que ce paramètre n'est pas statistiquement significatif. Cela suggère que la moyenne des rendements de ENOR n'est pas significativement différente de

Constant Mean - GARCH Model Results					
Dep. Variable: XRT Returns		R-squared:		0.000	
Mean Model: Constant Mean		Adj. R-squared:		0.000	
Vol Model: GARCH		Log-Likelihood:		7125.99	
Distribution: Normal		AIC:		-14244.0	
Method: Maximum Likelihood		BIC:		-14220.6	
		No. Observations:		2539	
Date: Fri, May 09 2025		Df Residuals:		2538	
Time: 16:08:43		Df Model:		1	
Mean Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
mu	3.0649e-04	1.223e-05	25.059	1.409e-138	[2.825e-04,3.305e-04]
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	5.6143e-06	2.317e-11	2.423e+05	0.000	[5.614e-06,5.614e-06]
alpha[1]	0.1000	1.718e-02	5.822	5.807e-09	[6.634e-02, 0.134]
beta[1]	0.8800	1.390e-02	63.305	0.000	[0.853, 0.907]

Covariance estimator: robust

qui est habituel dans les séries de rendements financiers.

Dans le modèle de volatilité, trois paramètres clés sont estimés :

- Omega ( $\omega$ ), représentant la variance inconditionnelle, est estimé à  $5.61 \times 10^{-6}$ . Ce paramètre est significatif et témoigne d'un niveau de volatilité de base relativement faible pour XRT, ce qui pourrait refléter une certaine stabilité structurelle dans ses rendements.
- Alpha ( $\alpha_1$ ), qui capte l'impact immédiat des chocs sur la volatilité, est estimé à 0.100. Cela signifie que les nouvelles informations influencent la volatilité de manière modérée. Ce coefficient est significatif et conforme aux dynamiques classiques des actifs financiers.
- Beta ( $\beta_1$ ), mesurant la persistance de la volatilité, est estimé à 0.880, ce qui traduit une forte mémoire dans la variance conditionnelle. Autrement dit, la volatilité de XRT a tendance à persister dans le temps, un comportement typique des marchés financiers.

La somme de alpha et beta est de 0.98, suggérant une volatilité fortement persistante. Ce type de dynamique est courant pour les ETF sectoriels ou thématiques, sensibles à des événements de marché spécifiques mais avec une inertie importante dans la réaction de leur volatilité.

Concernant la qualité de l'ajustement :

- Le log-vraisemblance atteint 7125.99.
- Les critères d'information AIC et BIC sont respectivement de -14244.0 et -14220.6, indiquant un bon compromis entre ajustement et parcimonie du modèle.

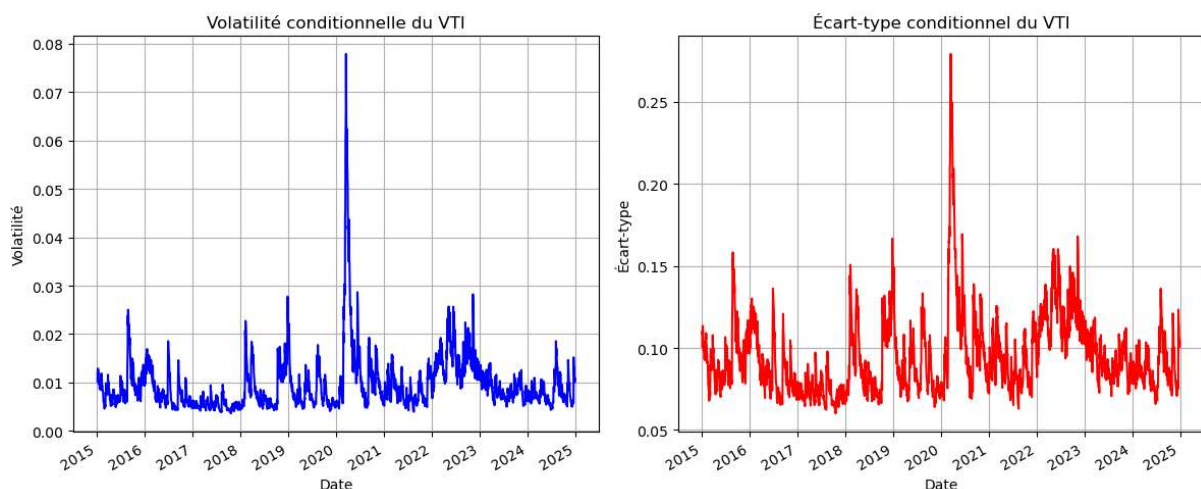
Ce tableau présente les résultats du modèle GARCH appliqué aux rendements de XRT. Le modèle suppose une moyenne constante pour les rendements, représentée par le paramètre  $\mu$ , estimé à  $3.06 \times 10^{-4}$ . Bien que cette valeur soit faible, elle est hautement significative (statistique  $t = 25.06$ ,  $p < 0.0001$ ), indiquant que la moyenne des rendements de XRT diffère statistiquement de zéro. Toutefois, cette valeur reste économiquement négligeable, ce

- L'absence de pouvoir explicatif ( $R^2 \approx 0$ ) pour les rendements eux-mêmes est attendue, car le modèle se concentre sur la dynamique de la variance conditionnelle, non sur la prévision des rendements.

En somme, le modèle GARCH(1,1) appliqué à XRT met en évidence une volatilité faible mais très persistante, avec un rôle modéré joué par les chocs récents. Ce comportement est cohérent avec les caractéristiques d'un ETF bien diversifié mais exposé à des tendances de marché à long terme.

## Représentation Graphique : Variance et Écart-Type Conditionnels des Rendements

### Analyse graphique de la variance conditionnelle du VTI



Les graphiques ci-dessous illustrent l'évolution de la volatilité conditionnelle et de l'écart-type conditionnel de l'ETF VTI (Vanguard Total Stock Market ETF) sur la période allant de 2015 à 2025, tels qu'estimés par un modèle GARCH(1,1).

#### ***Variance conditionnelle (graphique de gauche)***

Ce graphique met en évidence les fluctuations de la variance conditionnelle, qui représente le niveau anticipé de la volatilité à chaque période. On observe une volatilité généralement modérée au fil du temps, avec des valeurs comprises entre 0,005 et 0,02 dans des conditions de marché normales.

Un pic exceptionnel apparaît au début de l'année 2020, atteignant près de 0,08, ce qui correspond à la période de fortes turbulences liées à la crise sanitaire du COVID-19. Ce pic reflète une forte incertitude sur les marchés financiers à ce moment-là. D'autres épisodes de volatilité accrue sont perceptibles, notamment en fin 2018, début 2022 et mi-2023, périodes souvent associées à des tensions économiques ou à des ajustements monétaires.

#### ***Écart-type conditionnel (graphique de droite)***

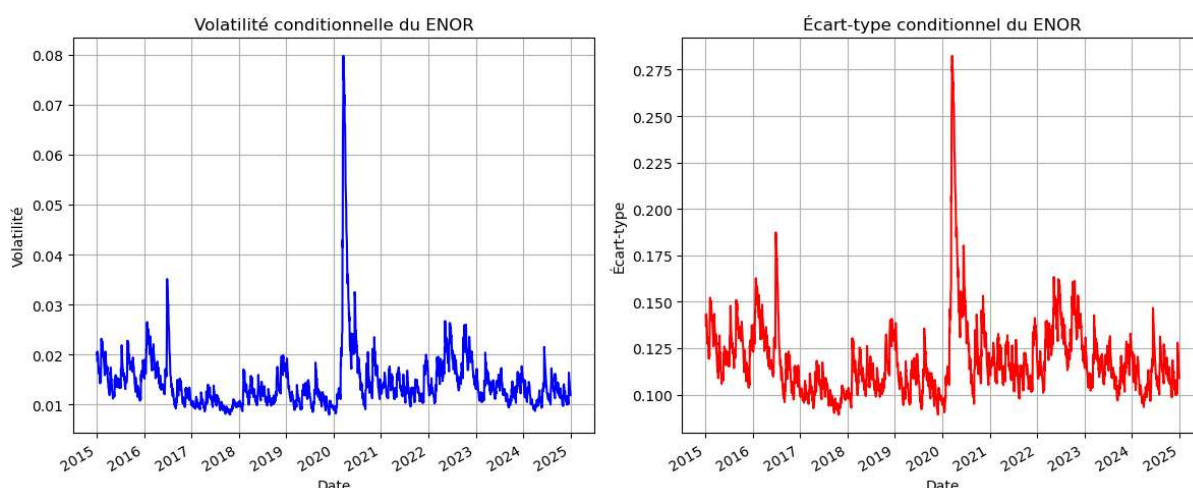
Ce second graphique représente l'écart-type conditionnel, c'est-à-dire la racine carrée de la volatilité conditionnelle. Il donne une mesure directe du risque instantané de fluctuation des rendements.

L'évolution de l'écart-type suit naturellement celle de la volatilité. La valeur maximale est atteinte également en mars 2020, avec un pic à environ 0,28, indiquant un niveau de risque exceptionnellement élevé. En dehors de cette période, l'écart-type varie généralement entre 0,07 et 0,12, ce qui traduit une volatilité journalière modérée, cohérente avec la nature diversifiée de VTI.

### Conclusion :

Ces graphiques confirment que la volatilité de VTI est faible et stable en temps normal, mais peut augmenter de manière spectaculaire en période de crise. Le modèle GARCH permet ici de bien capturer ces dynamiques, caractérisées par une réactivité aux chocs et une persistance dans le temps, typiques des marchés financiers. Cela souligne à la fois la résilience de VTI dans un environnement stable et sa vulnérabilité ponctuelle aux événements macroéconomiques majeurs.

### Analyse graphique de la variance conditionnelle de ENOR



Les graphiques ci-après illustrent l'évolution de la volatilité conditionnelle et de l'écart-type conditionnel de l'ETF ENOR (iShares MSCI Norway ETF) entre 2015 et 2025, selon les estimations d'un modèle GARCH(1,1).

#### Variance conditionnelle (graphique de gauche)

Le graphique présente la dynamique de la variance conditionnelle, qui reflète les anticipations de volatilité des rendements au fil du temps. Dans des conditions de marché normales, la volatilité de ENOR se maintient entre 0,01 et 0,025, ce qui indique un niveau de risque relativement modéré mais plus fluctuant que celui d'un ETF très diversifié comme VTI.

Un pic majeur de volatilité est visible autour de mars 2020, période correspondant à la crise du COVID-19, où la volatilité atteint près de 0,08, tout comme pour VTI. Cela

suggère une forte sensibilité de ENOR aux chocs globaux. D'autres hausses notables, bien que moins marquées, sont observées en 2016, début 2022, et fin 2023, probablement en lien avec des événements économiques affectant plus spécifiquement les marchés norvégiens ou les secteurs représentés dans l'ETF.

### Écart-type conditionnel (graphique de droite)

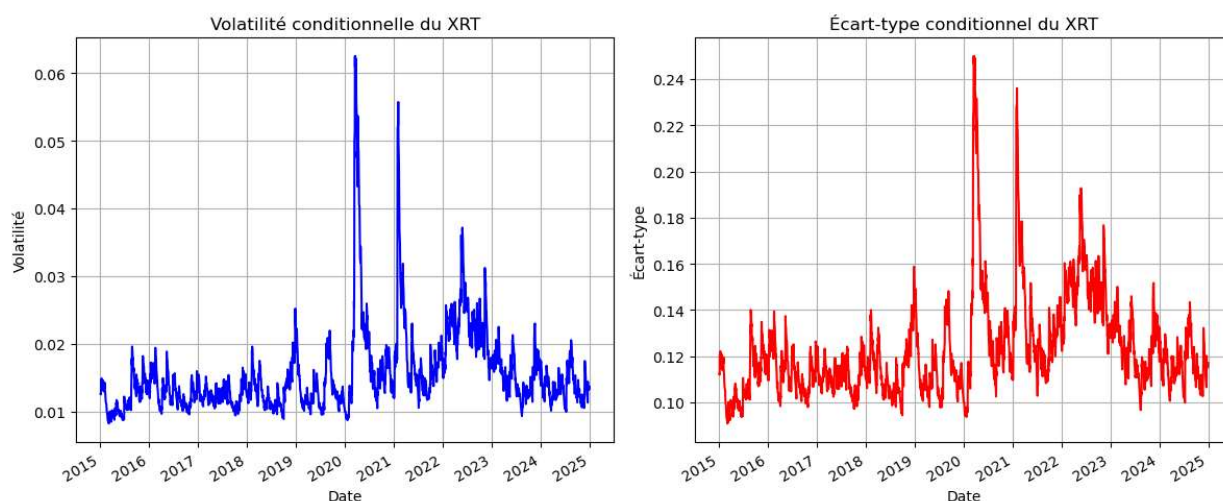
Ce graphique représente l'évolution de l'écart-type conditionnel, une mesure directe de la volatilité instantanée. Il suit une tendance similaire à celle de la variance, avec des valeurs moyennes comprises entre 0,11 et 0,15, ce qui traduit un risque plus élevé que pour VTI, en cohérence avec la concentration sectorielle et géographique de l'ETF.

Le pic de 2020 atteint près de 0,28, soit un niveau de volatilité quotidien très élevé, illustrant une forte incertitude pendant la crise sanitaire. Ce comportement est typique d'actifs ou d'indices plus spécialisés, qui réagissent plus fortement aux perturbations globales.

### Conclusion :

Les graphiques montrent que ENOR présente une volatilité plus irrégulière et plus sensible aux chocs que VTI, avec une base de volatilité légèrement plus élevée. Le modèle GARCH permet de capturer ces caractéristiques, notamment la forte réactivité aux événements extrêmes et la persistance des épisodes de volatilité élevée. ENOR, en tant qu'ETF focalisé sur la Norvège, est plus exposé à des facteurs spécifiques (marché de l'énergie, politique monétaire nationale, etc.), ce qui explique la plus grande variabilité de sa volatilité conditionnelle dans le temps.

### Analyse graphique de la variance conditionnelle de XRT



Les graphiques suivants présentent l'évolution de la variance conditionnelle et de l'écart-type conditionnel de l'ETF XRT, qui suit le secteur de la distribution au détail aux États-Unis, sur la période allant de 2015 à 2025, estimée à l'aide d'un modèle GARCH(1,1).

### Variance conditionnelle (graphique de gauche)



La variance conditionnelle affichée dans ce graphique met en lumière les fluctuations de la volatilité anticipée du XRT. De manière générale, la volatilité reste contenue entre 0,01 et 0,025 en périodes normales, mais présente des pics importants lors d'événements de marché majeurs.

Deux périodes de forte volatilité se détachent nettement : la première, autour de mars 2020, correspond à la crise du COVID-19, avec un pic à plus de 0,06. La seconde vague, d'ampleur similaire, survient vers début 2021, période marquée par une forte spéculation autour des actions de détail (phénomène « meme stocks »), qui a directement impacté les actifs liés à ce secteur. Cette double montée de volatilité reflète la vulnérabilité du secteur de la distribution face aux chocs exogènes et aux comportements spéculatifs.

D'autres épisodes de hausse de la volatilité sont observés en 2022 et 2023, mais de moindre ampleur, traduisant une certaine instabilité persistante.

### **Écart-type conditionnel (graphique de droite)**

L'écart-type conditionnel, qui représente la racine carrée de la volatilité, suit la même tendance que le graphique précédent. Les valeurs observées varient entre 0,10 et 0,14 dans des conditions normales, avec des pics supérieurs à 0,24 lors des événements marquants mentionnés plus haut.

Ces niveaux traduisent un risque plus élevé que VTI et comparable à ENOR, bien que la dynamique de XRT semble plus réactive aux effets de mode et aux chocs spécifiques au secteur de la consommation.

### **Conclusion :**

L'analyse graphique montre que XRT présente une volatilité structurellement plus instable, marquée par des sauts soudains et violents en période de crise ou de spéculation. Le modèle GARCH met en évidence une forte sensibilité aux événements économiques et boursiers, avec une volatilité persistante, typique des secteurs cycliques et exposés aux comportements des consommateurs et des investisseurs particuliers.

## **Analyse Multivariée de la Volatilité : Application des Modèles GARCH BEKK**

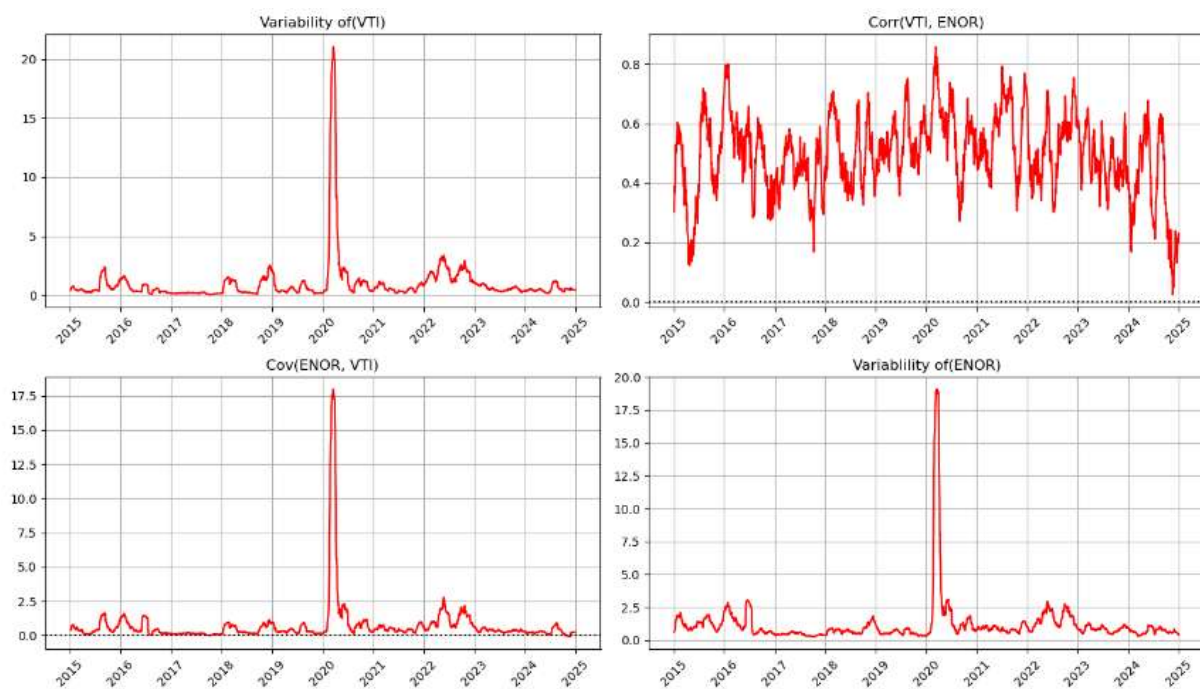
### **Objectif et Intérêt des Modèles GARCH Multivariés**

Les modèles GARCH multivariés ont pour principal objectif de modéliser simultanément la dynamique de la volatilité de plusieurs séries financières, tout en tenant compte des interdépendances qui existent entre elles. Contrairement aux modèles univariés, qui se concentrent sur la volatilité d'un seul actif, les modèles multivariés permettent de capturer l'évolution conjointe des variances et des



covariances conditionnelles. Cela revêt une importance particulière dans le cadre de la gestion de portefeuille, de la diversification des risques ou encore de la valorisation d'instruments financiers dérivés. En effet, dans un environnement financier interconnecté, les chocs de volatilité peuvent se transmettre rapidement d'un actif à un autre, rendant cruciale l'analyse des corrélations dynamiques entre actifs. Des modèles comme le DCC-GARCH (Dynamic Conditional Correlation) offrent une flexibilité accrue en autorisant des corrélations qui évoluent dans le temps, reflétant ainsi plus fidèlement la réalité des marchés. En somme, les modèles GARCH multivariés constituent un outil essentiel pour analyser, anticiper et gérer les risques dans un cadre multi-actifs.

## Estimation du Modèle BEKK pour l'Indice Large et le second ETF



Les graphiques ci-dessus présentent les résultats issus de l'estimation d'un modèle GARCH multivarié de type BEKK appliqué conjointement aux rendements de l'indice large VTI et de l'ETF ENOR. Ce type de modèle permet de capturer non seulement l'évolution individuelle de la volatilité conditionnelle de chaque actif, mais aussi la dynamique de leur covariance et de leur corrélation au fil du temps. On a aussi introduit un smoothing des données de 30 jours afin de rendre les graphiques plus lisibles.

Dans le graphique en haut à gauche, on observe la variabilité conditionnelle (i.e., la variance) du VTI. Comme attendu, un pic très marqué apparaît autour de mars 2020, correspondant à la crise liée à la pandémie de COVID-19. Cet épisode de stress financier s'est traduit par une explosion de la volatilité, suivie d'un retour progressif à des niveaux plus modérés. En dehors de cette période, la volatilité reste relativement stable avec quelques hausses ponctuelles.

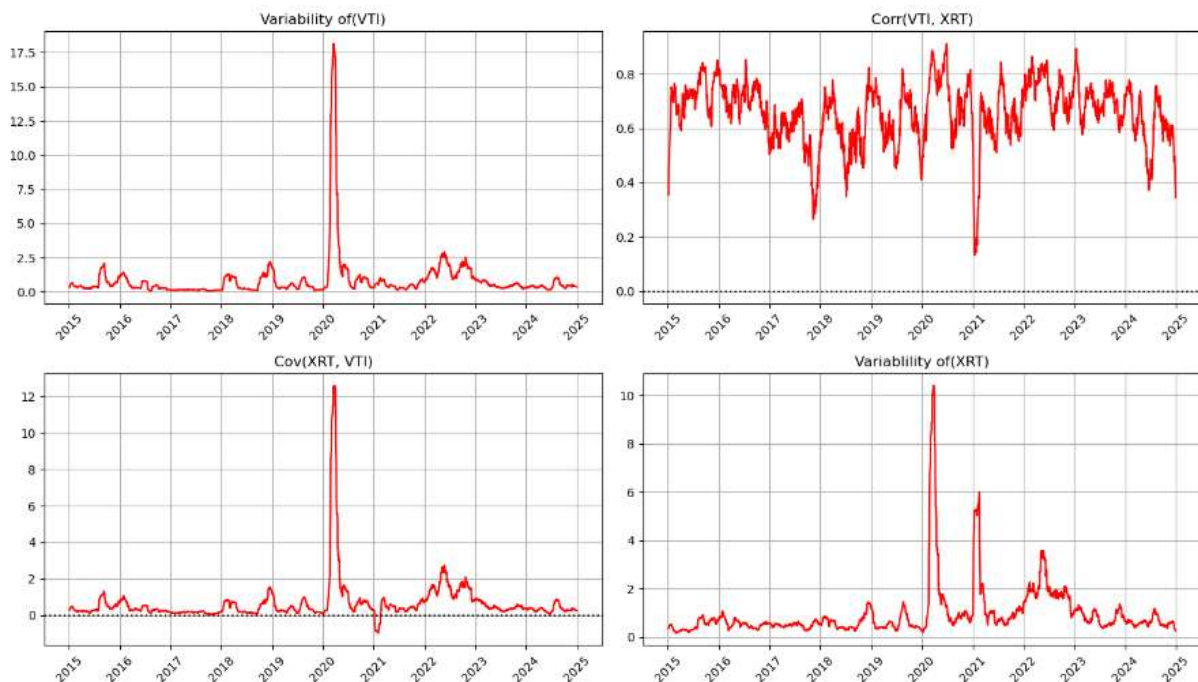
Le graphique en bas à droite illustre la variabilité de l'ETF ENOR. La dynamique est similaire à celle de VTI, avec également un pic net en 2020. Toutefois, ENOR semble présenter une volatilité structurellement un peu plus élevée, ce qui peut refléter une exposition plus marquée à des marchés émergents ou à des secteurs plus volatils.

Le graphique en bas à gauche montre l'évolution de la covariance conditionnelle entre les deux actifs. On constate que cette covariance augmente fortement durant les périodes de crise, en particulier en 2020. Cela illustre la tendance typique des marchés financiers à voir les corrélations et co-mouvements augmenter en période de choc systémique, ce qui réduit les avantages de la diversification.

Enfin, le graphique en haut à droite trace la corrélation conditionnelle dynamique entre VTI et ENOR. Celle-ci fluctue dans une fourchette relativement large, allant d'environ 0,1 à plus de 0,8. On remarque une hausse des corrélations durant les périodes de turbulence, ce qui est cohérent avec les hausses simultanées des variabilités individuelles et de la covariance. Néanmoins, la corrélation ne reste pas constamment élevée, suggérant que ces deux actifs conservent par moments une certaine indépendance, ce qui peut être exploité pour la diversification en dehors des périodes de stress.

En somme, ces résultats montrent que le modèle BEKK permet de bien capturer la nature dynamique et interdépendante de la volatilité entre VTI et ENOR, soulignant à la fois l'utilité et les limites de la diversification en période de crise.

## Estimation du Modèle BEKK pour l'Indice Large et le Troisième ETF



Les graphiques ci-dessus présentent les résultats issus de l'estimation d'un modèle GARCH multivarié de type BEKK appliqué conjointement aux rendements de l'indice large VTI et de l'ETF XRT. Ce type de modèle permet de capturer non seulement l'évolution individuelle de la volatilité conditionnelle de chaque actif, mais aussi la dynamique de leur covariance et de leur corrélation au fil du temps. On a aussi introduit un smoothing des données de 30 jours afin de rendre les graphiques plus lisibles.

Dans le graphique en haut à gauche, on observe la variabilité conditionnelle (i.e., la variance) du VTI. Comme attendu, un pic très marqué apparaît autour de mars 2020, correspondant à la crise liée à la pandémie de COVID-19. Cet épisode de stress financier s'est traduit par une explosion de la volatilité, suivie d'un retour progressif à des niveaux plus modérés. En dehors de cette période, la volatilité reste relativement stable avec quelques hausses ponctuelles.

Le graphique en bas à droite illustre la variabilité de l'ETF XRT. La dynamique est similaire à celle de VTI, avec également des pics marqués en 2020 et début 2021. Toutefois, XRT présente des périodes de volatilité accrue, en particulier en 2021, ce qui peut indiquer une sensibilité plus forte aux événements de marché ou à une exposition à des secteurs plus volatils.

Le graphique en bas à gauche montre l'évolution de la covariance conditionnelle entre les deux actifs. On constate que cette covariance augmente fortement durant les périodes de crise, notamment en 2020 et début 2021. Cela illustre la tendance typique des marchés financiers à voir les corrélations et co-mouvements augmenter en période de choc systémique, ce qui réduit les avantages de la diversification.

Enfin, le graphique en haut à droite trace la corrélation conditionnelle dynamique entre VTI et XRT. Celle-ci reste globalement élevée, oscillant principalement entre 0,5 et 0,8, ce qui indique une interdépendance notable entre les deux actifs. Toutefois, on observe des épisodes de baisse de corrélation, en particulier en 2016 et en 2021, ce qui peut refléter des mouvements idiosyncratiques affectant XRT ou VTI de manière distincte.

En somme, ces résultats montrent que le modèle BEKK permet de bien capturer la nature dynamique et interdépendante de la volatilité entre VTI et XRT, soulignant l'importance de surveiller les périodes de corrélation accrue qui tendent à réduire les avantages de la diversification, surtout en période de crise.

## Analyse des Interdépendances Dynamiques : Application des Modèles VAR

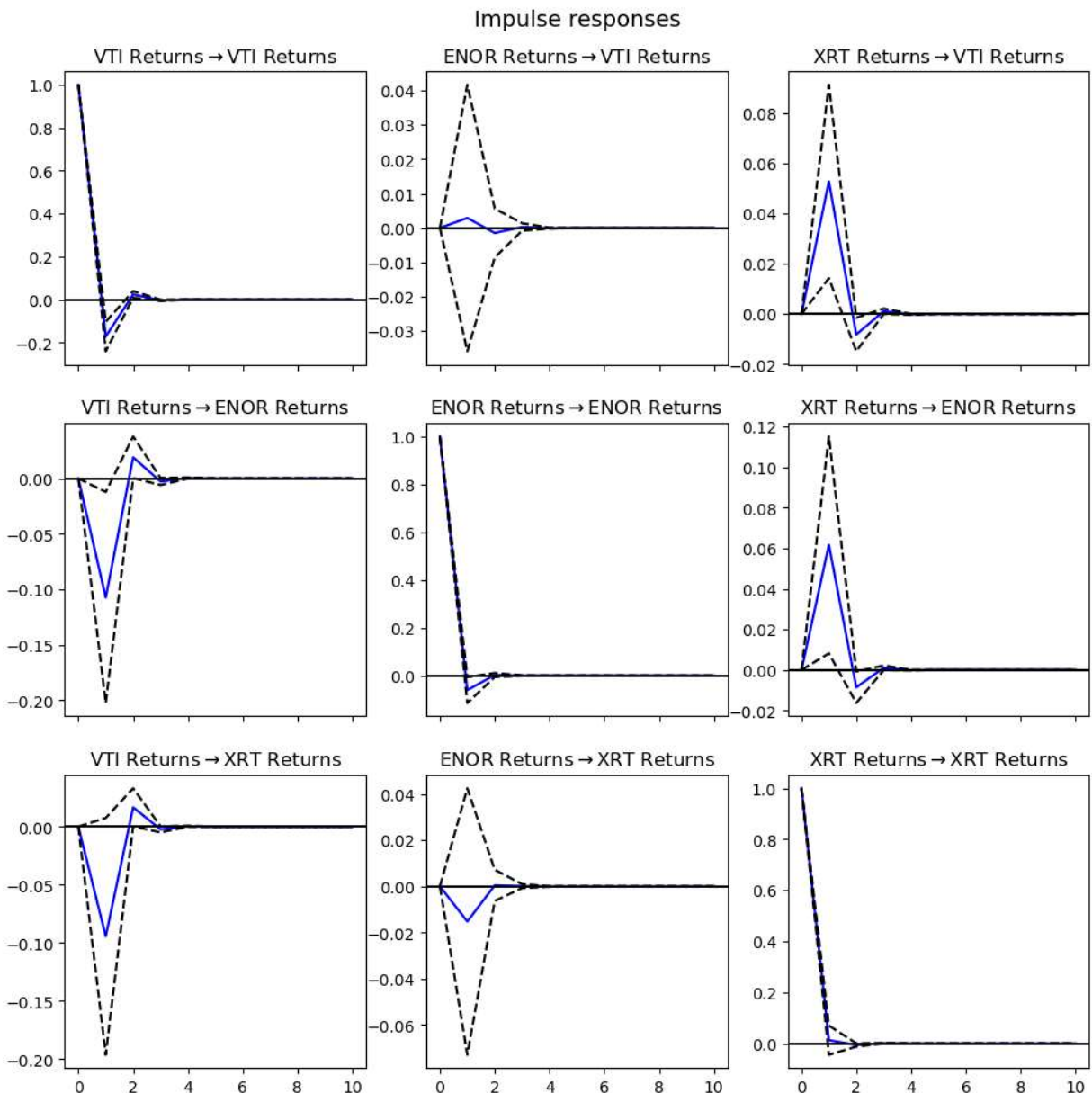
### Objectif et Intérêt des Modèles VAR

Les modèles Vectoriels Auto-Régressifs (VAR) sont des modèles économétriques qui permettent de capturer les relations dynamiques entre plusieurs séries temporelles.

Leur principal objectif est de modéliser l'évolution conjointe de plusieurs variables en tenant compte des dépendances croisées entre elles.

L'intérêt des modèles VAR réside dans leur capacité à analyser l'impact des chocs exogènes et des interactions entre les variables, à prévoir leurs évolutions futures et à réaliser des analyses de causalité ou de décomposition de variance. Ils sont particulièrement utiles pour étudier les interrelations économiques, financières ou macroéconomiques sans imposer de restrictions structurelles fortes.

## Fonctions de réponse aux impulsions (IRF)



En ce qui concerne les fonctions de réponse aux impulsions (IRF), les graphiques illustrent la réaction des rendements des trois ETF (VTI, ENOR et XRT) à la suite d'un

choc unitaire sur chaque actif. Les réponses permettent d'analyser l'ampleur, le sens et la persistance des effets des chocs.

Dans la première ligne, on observe les réponses des rendements du VTI à un choc sur les trois actifs. Le VTI réagit fortement à son propre choc, avec une correction rapide vers zéro. En revanche, les chocs en provenance de ENOR et XRT génèrent des réponses plus modérées mais persistantes, ce qui suggère une interdépendance, mais moins marquée que pour le choc propre à VTI.

Dans la deuxième ligne, les réponses des rendements de ENOR montrent une réaction initiale forte à son propre choc, mais les effets s'atténuent rapidement. Les chocs provenant de VTI et XRT entraînent des réponses plus faibles, avec une dynamique plus volatile, ce qui peut indiquer une plus grande sensibilité aux interactions entre actifs.

Enfin, la troisième ligne montre les réponses des rendements de XRT. Un choc sur XRT produit une réponse marquée et persistante, indiquant une autocorrélation notable. Les chocs sur VTI et ENOR induisent des réponses initiales significatives mais de faible ampleur, illustrant une certaine indépendance structurelle vis-à-vis des deux autres actifs.

En somme, ces graphiques mettent en évidence la dynamique des interrelations entre VTI, ENOR et XRT à travers leurs fonctions de réponse aux impulsions. Les réponses aux chocs propres sont plus intenses et plus persistantes, tandis que les réponses croisées révèlent des interactions plus subtiles, reflétant des interdépendances modérées entre les actifs.

## Conclusion

Ce travail nous a permis d'explorer en profondeur la dynamique des rendements et de la volatilité de trois ETFs aux profils sectoriels et géographiques distincts : VTI, ENOR et XRT. Grâce à une approche rigoureuse combinant outils statistiques classiques (statistiques descriptives, corrélations, autocorrélations) et modèles plus avancés (GARCH univariés, BEKK multivariés, VAR), nous avons pu mettre en évidence les caractéristiques propres à chaque actif ainsi que leurs interactions dans le temps.

L'utilisation des modèles GARCH a mis en lumière la persistance forte de la volatilité pour l'ensemble des actifs, avec des épisodes marqués en période de crise. Les modèles multivariés BEKK ont confirmé une montée des corrélations en temps de stress, limitant les bienfaits de la diversification précisément quand on en aurait le plus besoin. Quant à l'analyse VAR, elle a permis de mieux cerner les interdépendances dynamiques, révélant des structures d'influence asymétriques entre les actifs.

Ce projet nous a également confrontés à certaines limites techniques, notamment en ce qui concerne l'implémentation du modèle BEKK, qui a nécessité la création d'une librairie ad hoc. Cet aspect nous a permis de développer non seulement des

compétences techniques, mais aussi une certaine autonomie dans la résolution de problèmes complexes.

Finalement, cette étude souligne l'importance d'une analyse fine de la volatilité et des relations croisées entre actifs pour toute stratégie de gestion de portefeuille. Elle rappelle aussi que derrière la robustesse apparente des modèles statistiques, se cache toujours une part d'incertitude que l'investisseur doit apprendre à intégrer.

## Récapitulatif du travail fourni

- Yassine a réalisé tout le code en Python. Il a rencontré des difficultés pour trouver une librairie appropriée pour le modèle GARCH multivarié BEKK. Pour surmonter cet obstacle, il a dû construire une librairie spécifique permettant de répliquer ce modèle.
- Aymen et Hamid se sont chargés de toutes les interprétations des résultats, incluant les commentaires des graphiques du modèle BEKK ainsi que des fonctions de réponse aux impulsions (IRF).