



PROJET DE RECHERCHE : PRe

Spécialité : Mécanique
Année scolaire : 2022-2023

**Interaction entre un choc et un cylindre de gaz perturbé :
évolution de la circulation déposée par le choc à l'interface et
étude de la géométrie du dipôle de vortex généré par
l'interaction**

RAPPORT NON CONFIDENTIEL

Auteur : Yasmina ELMORE Promotion : 2024

Tuteur ENSTA Paris : Cyril TOUZE Tuteur Organisme d'accueil : Eric JOHNSSEN
Stage effectué entre le 15/05/2023 et le 18/08/2023

Scientific Computing And Flow Physics Laboratory, University of Michigan
Adresse : 1231 Beal Ave, Ann Arbor, Mi 48109, U.S.A

Notice de confidentialité

Ce rapport de PRE n'est pas confidentiel et peut être consultable par tous sur la bibliothèque numérique de l'Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées (ENSTA).

Remerciements

J'adresse mes premiers remerciements à l'École Nationale Supérieure des Techniques Avancées (ENSTA) Paris, qui m'a donné l'opportunité de faire un stage de recherche. J'adresse aussi mes remerciements au professeur Cyril TOUZE, mon tuteur à l'ENSTA Paris, qui a validé mon sujet et a accepté que je puisse faire mon stage dans un domaine qui m'intéressait particulièrement. Je tiens aussi à le remercier de m'avoir fourni un bagage académique solide en turbulence et en théorie du chaos qui s'est avéré utile à plusieurs reprises lors de mon stage.

J'adresse mes remerciements les plus sincères au Professeur Eric JOHNSON, mon tuteur au sein de l'Université de Michigan, de m'avoir donné cette opportunité d'accomplir mon stage au sein de son laboratoire, le Scientific Computing and Flow Physics Laboratory (SCFPL). Son encadrement, son soutien et ses recommandations m'ont permis de profiter pleinement de mon expérience dans ce domaine de la recherche qui est très passionnant.

Je tiens à remercier aussi l'ensemble des membres du laboratoire SCFPL que j'ai pu rencontrer lors de mon stage et qui m'ont aussi aidée à plusieurs reprises. J'adresse mes remerciements personnels à Michael WADAS, Ph.D., qui m'a guidée dans mes recherches tout au long de mon stage. Je lui suis reconnaissante de m'avoir aidé à approfondir mes connaissances et ma compréhension dans ce domaine.

Cette expérience de stage s'est avérée des plus enrichissantes. Je remercie de tout cœur l'ensemble des personnes qui ont pu rendre ce projet possible. Ce fut une expérience précieuse et inoubliable.

Résumé :

L'interaction entre un cylindre de gaz et une onde de choc a souvent fait l'objet d'étude dans la littérature et apparaît dans de nombreux problèmes en physique. Il a été montré que cette interaction engendre une déformation du cylindre jusqu'à aboutir à la formation d'un dipôle de vortex. Dans ce projet, nous avons étudié dans un premier temps, cette interaction en essayant de quantifier l'évolution du dépôt de circulation autour du cylindre lors du passage du choc et après le choc. Nous nous sommes aperçus que la circulation continue de croître même après le choc et la pente de l'évolution de la circulation croît avec le nombre de Mach du choc. Nous avons mis en évidence que le non alignement du gradient de pression et du gradient de densité est à l'origine de cette croissance des pentes. Puis dans un second temps, nous avons déterminé l'impact du choc sur la géométrie du cylindre en essayant de déterminer la distance entre les deux vortex du dipôle formé et leur taille. Nous avons été capable de déterminer l'augmentation du nombre de Mach du choc ou une diminution de rapport de densité entre le cylindre et le gaz ambiant engendrait une diminution de la distance entre les deux vortex du dipôle. Cette étude est réalisée par simulation dont la méthode repose sur le raffinement adaptatif du maillage.

Abstract :

The interaction between a gas cylinder and a shock wave has been subject to studies in the literature and has often appeared in a couple of problems in physics. It has been proved that the shock wave passing through a cylinder leads to a deformation of the latter, forming a vortex dipole. In this project, we start by studying the interaction by looking at the evolution of circulation deposition around the cylinder during and mostly after the shock passage. We show that the circulation increases even after the shock passage, and the slope of this increase grows with the Mach number. We point out that the reason for the increase in slopes is linked to the misalignment between the pressure gradient and the density gradient. Secondly, we study the impact of the shock on the cylinder's geometry by looking at the distance between the two vortices of the formed dipole and their size. We pointed out that the growth of the Mach number or the reduction of the ratio of density between the cylinder and the ambient gas leads to a decrease in the distance between the two vortices. This study was realized through simulations based on adaptive mesh refinement.

Mots Clés

Onde de choc, Nombre de Mach, Cylindre, Dipôle de vortex, Ratio de densité, Raffinement adaptatif de maillage basée sur des patches, Circulation, Critère Q

Key Words

Shock wave, Mach number, Cylinder, Vortex dipole, Density Ratio, Patch-based Adaptive mesh refinement, Circulation, Q-criterion

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Motivation du sujet	7
1.2	Objectif du projet	8
2	Simulation numérique	9
2.1	Définition d'une stratégie correcte de simulation	9
2.1.1	Définition des équations de la dynamique à résoudre afin de modéliser l'évolution du modèle	9
2.1.2	Définition du maillage afin de résoudre les équations	10
2.1.3	Définition du raffinement adaptatif de maillage : " <i>Patch-Based AMR</i> "	10
2.2	Vérification et validation de la stratégie	13
2.2.1	Choix des indicateurs de raffinement	14
2.2.2	Modèle théorique de comparaison : Samtaney & Zabusky (1993)	15
2.2.3	Détermination des inconnues algorithmiques liées au raffinement adaptatif du maillage	17
2.2.4	Vérification du code	18
2.2.5	Validation : Comparaison avec les expériences de Haas & Strutevant (1987)	19
3	Détermination des paramètres 2D pour expliquer la géométrie du cylindre après le choc	19
3.1	Théorie et équation de la dynamique pour expliquer les vortex	19
3.2	Détermination de l'évolution de la circulation autour du cylindre après le passage du choc	21
3.2.1	Détermination du facteur d'échelle afin de comparer les expériences	21
3.2.2	Evolution de la circulation en fonction du nombre de Mach et du temps	21
3.2.3	Evolution de la circulation en fonction du ratio de densité η	23
3.3	Détermination des paramètres 2D	24
3.3.1	Définition du critère Q pour identifier les propriétés géométriques des noyaux de vortex	24
3.3.2	Evolution des paramètres en fonction du nombre de Mach M_s	26
3.3.3	Evolution des paramètres en fonction du ratio de densité η	27
4	Conclusion	29
	Références	30
	Addendum	31

Table des figures

2	Schéma 2D représentant l'évolution du cylindre torique perturbé après le choc et conduisant à la formation de dipôles de vortex, avec a la taille des vortex, b la distance entre les vortex et Γ la circulation	7
3	Schéma 2D du modèle d'étude	8
4	Schéma du maillage initial (niveau 0) du domaine Ω de longueur L et de largeur l	11
5	Définition des patches de "niveau 1" à partir des mailles à raffiner (en orange) du domaine initial Ω de longueur L	12
6	Tracé du maillages des patches de "niveau 1" du domaine initial Ω	12
7	Division d'une maille en sous-mailles en fonction du ratio de raffinement (a) $R = 4$ (b) $R = 2$	13
8	Schéma illustrant le processus répétitif de la définition des patches et des niveaux supérieurs : détermination des patches de "niveau 2" en fonction des patches de "niveau 1".	13
9	Exemple de maillage adapté (a) et non adapté (b)	14
10	Schéma représentant l'évolution de l'interface et des ondes après un choc.	15
11	Définition de l'unité de longueur ds de l'interface circulaire en fonction des unités de longueur dx et dy ainsi que de l'angle α entre la tangente à l'interface et au choc	16
12	Evolution de la différence entre le modèle théorique et le modèle numérique ϵ en fonction de la résolution du maillage r	18
13	Circulation numérique Γ_{num} en fonction de la résolution du maillage r et comparaison à la circulation de Samtaney & Zabusky (SZ)	18
14	Détermination par simulation numérique de la forme du cylindre après le passage de l'onde de choc à la date (a) $t = 32\mu s$, (b) $t = 52\mu s$, (c) $t = 62\mu s$, (d) $t = 72\mu s$, (e) $t = 82\mu s$ (f) $t = 102\mu s$ (g) $t = 245\mu s$ (h) $t = 427\mu s$ (i) $t = 674\mu s$ (j) $t = 983\mu s$	20
15	Evolution de la circulation numérique Γ_{num} (m^2/s) en fonction du temps (μs) et du nombre de Mach et comparaison avec la circulation obtenue par la méthode de Samtaney & Zabusky [12]	22
16	Tracé de la pente de croissance entre les dates $t = 20\mu s$ et $t = 160\mu s$ de la circulation numérique Γ_{num} en fonction du temps (μs)	22
17	Evolution de la circulation Γ_{num} (m^2/s) en fonction du rapport de densité η entre les deux fluides	23
18	Exemple de modélisation du critère de Q et de la vortacité (rad/s^{-1}) afin de détecter les noyaux du dipôle de vortex pour $M_s = 3, 5$.	25
19	Exemple de modélisation du critère de Q et de la vortacité (rad/s^{-1}) afin d'identifier les points A (centre du noyau), B et C (taille du noyau) pour $M_s = 3, 5$.	25
20	Exemple de modélisation du critère de Q et de la vortacité (rad/s^{-1}) afin de détecter les noyaux du dipôle de vortex pour $\eta = 4/1, 22$	26
21	Exemple de modélisation du critère de Q et de la vortacité (rad/s^{-1}) afin d'identifier les points A (centre du noyau), B et C (taille du noyau) pour $\eta = 4$	26
22	Evolution de la taille du noyau, a (m), et de la longueur entre les deux noyaux du vortex, b (m), en fonction du nombre de Mach M_s du choc incident	27
23	Evolution de la taille du noyau, a (m), et de la longueur entre les deux noyaux du vortex, b (m), en fonction du rapport de densité η	28

1 Introduction

1.1 Motivation du sujet

Cette étude repose sur l'analyse et l'établissement d'un modèle d'une structure tourbillonnaire particulière générée par un cylindre de gaz perturbé et traversé par une onde de choc. Après le passage de l'onde de choc, le cylindre évolue en une structure tourbillonnaire constituée de deux vortex contrarotatifs, c'est-à-dire tournant dans des sens opposés, et est sensible aux instabilités tridimensionnelles [8].

L'étude d'un tel système présente notamment son intérêt en astrophysique afin de déterminer les phénomènes sous-jacents à l'origine de la formation des planètes, à partir de l'observation de la supernova 1987A. Cette supernova est constituée de deux anneaux axisymétriques centrés autour d'un anneau équatorial. C'est au niveau de l'anneau équatorial qu'on retrouve une structure équivalente à celle d'un cylindre torique perturbé. Puis, une explosion génère une onde choc qui va impacter l'anneau équatorial et engendrer la formation de 28 amas de masse espacés de manière homogène [3]. Ces amas de masse sont semblables à des dipôles de vortex.

Une étude [10] a montré que l'instabilité de Crow peut être une réponse à la formation des amas le long de l'anneau équatorial. En effet, avant le choc, l'anneau équatorial est soumis à des perturbations tridimensionnelles. Après le passage du choc, l'anneau évolue en deux anneaux symétriques par rapport au plan équatorial, de circulation opposée, et équivalents en 2D à des dipôles de vortex contra-rotatifs. Puis, sous l'effet de l'instabilité de Crow, les perturbations tridimensionnelles le long des deux anneaux s'intensifient jusqu'à ce qu'ils se touchent à intervalle régulier et des amas se forment.

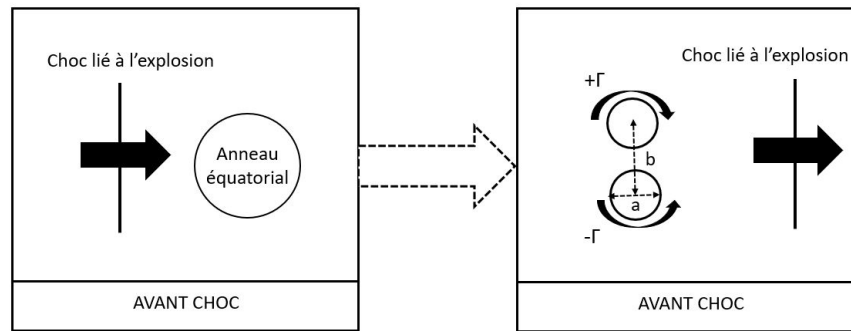


FIGURE 2 – Schéma 2D représentant l'évolution du cylindre torique perturbé après le choc et conduisant à la formation de dipôles de vortex, avec a la taille des vortex, b la distance entre les vortex et Γ la circulation

Après le choc, les dipôles de vortex qui s'étalent dans l'espace sont sensibles à l'instabilité de Crow à l'origine des amas. Toutefois, en utilisant la loi de Biot-Savart, il a été montré que l'estimation de la vitesse d'expansion des vortex de dipôles dépend de deux paramètres 2D : la distance entre les deux noyaux de vortex du dipôle (que l'on appellera b dans la suite de notre projet) et de la taille des noyaux (que l'on appellera a dans la suite de notre projet) [9]. Il est donc important de pouvoir donner une bonne estimation de leur ratio.

Afin de pouvoir déterminer ces deux paramètres 2D, il est important de pouvoir modéliser notre problème. On va se ramener au problème 2D d'un cylindre immobile constitué d'un gaz de masse volumique ρ_2 à la pression p_2 (milieu 2) et immergé dans un gaz ambiant (milieu 1) dans lequel se propage une onde de choc de nombre de Mach M_s . Le milieu 1 est donc divisé en deux parties : le milieu en amont du choc de masse volumique ρ_{u1} et de pression p_{u1} , et le milieu en aval du choc de masse volumique ρ_{d1} et de pression p_{d1} . Les deux fluides sont supposés parfaits et compressibles. Par ailleurs, nous considérerons que l'écoulement est à haut nombre de Reynolds (effet de viscosité négligées) et que les forces volumiques s'appliquant sur les particules de fluide peuvent être négligées.

À partir de la connaissance de la circulation générée par le choc sur le cylindre, il est possible de déterminer les paramètres 2D souhaités. Toutefois, cela nécessite d'avoir une bonne estimation de la circulation. Ce problème a déjà fait l'objet d'études dans la littérature. Samtaney Zabusk (1993) [12] ont donné une possible expression de la circulation en utilisant la dérivée des polaires de choc et en réalisant un développement limité. Ils ont pu mettre en évidence (théorie présentée en partie 2.4.2) une dépendance en fonction du nombre de Mach

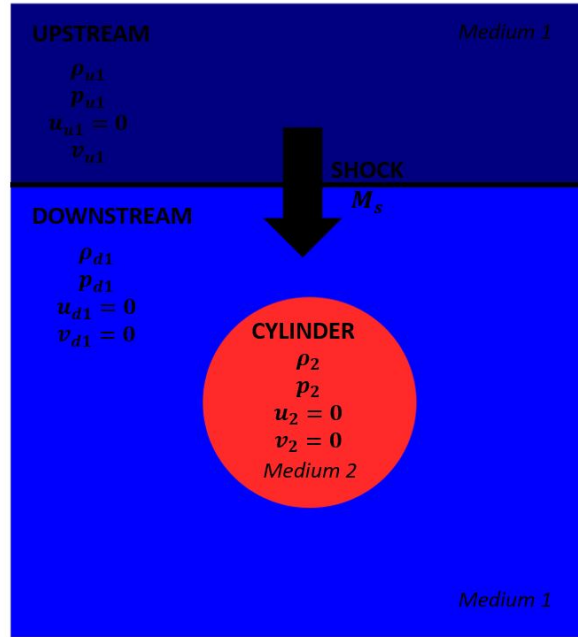


FIGURE 3 – Schéma 2D du modèle d'étude

ρ_2 masse volumique du milieu 2 ; p_2 pression dans le milieu 2 ; M_s nombre de Mach de l'onde de choc ; ρ_{u1} masse volumique du milieu 1 en amont du choc ; ρ_{d1} masse volumique du milieu 1 en aval du choc ; p_{u1} pression dans le milieu 1 en amont du choc ; p_{d1} pression dans le milieu 1 en aval du choc ; u_{d1} et v_{d1} composantes de la vitesse dans le milieu 1 en aval du choc ; u_{u1} et v_{u1} composantes de la vitesse dans le milieu 1 en amont du choc ; u_2 et v_2 composantes de la vitesse dans le milieu 2

du choc M_s et du ratio de densité entre les deux gaz $\eta = \rho_2/\rho_{d1}$. Cependant, la méthode présente des limites : la formule définie n'est valable qu'à une date après le choc et elle ne permet pas de déterminer l'évolution de la circulation autour du cylindre au fil du temps. Il n'est donc pas possible d'établir l'évolution de la géométrie du cylindre, et donc de caractériser les paramètres 2D, "a" et "b". Haas & Sturtevant (1987) [4] ont réalisé des expériences afin de déterminer l'évolution de la géométrie après le passage d'une onde de choc sur un cylindre contenant un gaz plus léger que le gaz ambiant (respectivement $\rho_2 < \rho_{d1}$ et $\rho_2 > \rho_{d1}$). À l'aide de la théorie des ondes, ils ont pu expliquer la façon dont le cylindre évolue en un dipôle de vortex. Cependant, ils n'ont pas pu quantifier la circulation autour du cylindre à partir des données expérimentales ni déterminer les paramètres 2D en fonction du nombre de Mach du choc M_s et du ratio de densité entre les deux gaz η . De plus, le cas d'un cylindre "lourd" n'a pas pu être étudié dans sa totalité en raison de limites expérimentales.

En raison de la difficulté d'établir des modèles théoriques liés aux vortex ou de réaliser des expériences fiables (absence de limitations expérimentales), on se tournera vers une étude par simulation numérique.

1.2 Objectif du projet

L'objectif du projet est de se munir de simulations afin de répondre aux questions suivantes :

1. Comment la circulation évolue avec le temps, le nombre de Mach du choc M_s et le ratio de densité entre les gaz $\eta = \rho_2/\rho_{d1}$
2. Comment les paramètres 2D, a et b, évoluent avec le temps, le nombre de Mach du choc M_s et le ratio de densité entre les gaz $\eta = \rho_2/\rho_{d1}$

Afin de répondre à ces deux questions, plusieurs étapes sont nécessaires :

1. Déterminer la stratégie de simulation à utiliser ainsi qu'un maillage adéquate afin de représenter les phénomènes
2. Réaliser la vérification et la validation de la stratégie
3. Traiter et exploiter les données obtenues par simulation

4. Expliquer et conclure

2 Simulation numérique

La simulation numérique est une étape centrale pour pouvoir répondre à notre problématique. Une simulation approximative peut conduire à des résultats erronés ainsi qu'une incapacité à traiter les données. Il faut donc :

- Définir une stratégie correcte de simulation (définition des équations à résoudre, définition du maillage et définition du raffinement adaptatif de maillage)
- Vérifier la fiabilité de la stratégie (définition des modèles de comparaison, détermination des inconnues algorithmiques liées au raffinement adaptatif du maillage, vérification et validation du code) avant de traiter les données.

2.1 Définition d'une stratégie correcte de simulation

2.1.1 Définition des équations de la dynamique à résoudre afin de modéliser l'évolution du modèle

Dans la partie précédente, nous avons établi le modèle de notre étude. Dans cette section du chapitre, nous allons introduire les équations qui permettent de décrire le comportement du cylindre pendant et après le choc, et de simuler la dynamique de notre modèle.

Afin de simuler de manière réaliste le comportement tourbillonnaire dans notre étude, il est nécessaire de déterminer comment interagissent la vitesse, la masse et l'énergie au sein du fluide. Pour ce faire, trois équations sont résolues :

1. L'équation de conservation de la masse (continuité) : assure la conservation de la masse du fluide.
2. L'équation de conservation de la quantité de mouvements : met en évidence l'évolution de la vitesse et de la trajectoire des particules de fluide à partir des forces externes qui s'appliquent. Elle prend aussi en compte la variation de la vitesse en fonction du gradient de pression ou de la viscosité.
3. L'équation de la conservation de l'énergie : indique comment l'énergie interne et l'énergie cinétique du fluide fluctue

Les fluides étant considérés dans notre cas newtonien, les équations peuvent se simplifier de la façon suivante [1] :

Forme différentielle de l'équation de continuité :

$$\nabla \bullet (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Forme différentielle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \bullet \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{f} \quad (2)$$

Forme différentielle de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2})] + \nabla \bullet [\rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2}) \vec{v}] = -\rho \nabla \bullet (p \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \bullet \vec{v}) \quad (3)$$

Où \vec{v} est la vitesse de la particule de fluide, ρ la masse volumique du fluide, p la pression régnant dans le fluide, μ le coefficient de viscosité du fluide, e est l'énergie interne spécifique du fluide, \dot{q} le taux d'apport (produite ou transférée par conduction) en chaleur par unité de masse et \vec{f} les forces de volumes s'appliquant dans le fluide.

Dans l'étude que nous réalisons, l'écoulement est supposé à haut nombre de Reynolds (i.e. $Re > 1$). Ainsi les phénomènes de viscosité peuvent être négligés (i.e. $\mu = 0$). De plus, les forces volumiques s'appliquant sur

les particules de fluides et le taux d'apport en chaleur par unité de masse sont aussi négligés (i.e. $\vec{f} = \vec{0}$ et $\dot{q} = 0$).

Les équations de conservation peuvent donc se réécrire de la façon suivante :

Forme différentielle de l'équation de continuité :

$$\nabla \bullet (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Forme différentielle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \bullet \nabla) \vec{v} = -\nabla p \quad (5)$$

Forme différentielle de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2})] + \nabla \bullet [\rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2}) \vec{v}] = -\rho \nabla \bullet (p \vec{v}) \quad (6)$$

La dynamique de notre modèle dépend donc quasiment exclusivement des gradients de pression et de vitesse. Les deux sont physiquement liés : le gradient de pression va donner naissance à une force qui va s'appliquer sur une particule de fluide, et en réponse à cette force, un gradient de vitesse de la particule de fluide va apparaître ou fluctuer. Il y a modification de la trajectoire des particules.

2.1.2 Définition du maillage afin de résoudre les équations

Une fois les équations à résoudre définies, il faut choisir l'ensemble des points du domaine où il faut résoudre les équations. Autrement dit, il faut définir un maillage.

La simulation numérique des dipôles de vortex nécessite la résolution des équations (4) à (6) à l'échelle locale. Une solution précise est indispensable afin de modéliser le mouvement tourbillonnaire. Toutefois, un maillage uniforme sur l'ensemble du domaine n'est pas envisageable pour étudier l'interface et l'intérieur du cylindre où le gradient de pression est important et la solution moins régulière, pouvant engendrer une erreur de discrétisation non négligeable. Une solution est donc d'opter pour un raffinement adaptatif de maillage (*Adaptive Mesh Refinement* ou *AMR*).

Les simulations numériques utilisées dans cette étude reposent sur un code "fait maison" qui s'appuie sur la méthode des volumes finis pour résoudre des équations partielles et sur le raffinement adaptatif du maillage via AMReX ([14], [13]). Il s'agit d'un raffinement adaptatif de maillage basé sur des patches (*patch-based AMR*).

2.1.3 Définition du raffinement adaptatif de maillage : "Patch-Based AMR"

De manière générale, le raffinement adaptatif de maillage (*AMR*) repose sur la création locale d'un maillage plus fin en des zones où la solution présente des irrégularités importantes, afin d'atteindre la précision souhaitée. Cette adaptation du maillage nécessite cinq éléments [11] :

- Le maillage initial (niveau 0 de raffinement)
- Le critère et l'indicateur de raffinement permettant d'identifier les zones à raffiner
- La stratégie de raffinement du maillage
- Le ratio de raffinement qui indique le nombre de sous-maillages dessinés dans une maille lors d'une étape de raffinement
- Le seuil de raffinement qui indique le nombre maximum de niveaux de raffinement du maillage.

Il existe plusieurs stratégies de raffinement AMR. L'algorithme utilisé repose sur la méthode "Patch-Based AMR", dont la méthodologie est celle qui suit. Comprendre le mode de fonctionnement de cet algorithme est essentiel afin de déterminer les inconnues algorithmiques du code qui ont une influence sur le maillage final et sur le temps de résolution des équations (plus il y a de points dans le maillage, plus le temps de résolution augmente). L'une des premières difficultés rencontrées au cours de ce projet était le temps de résolution de certains maillages qui pouvait durer plusieurs heures. Afin de pouvoir obtenir une quantité suffisante de données dans le temps imparti, il fallait diminuer le temps de résolution.

1. Définition du maillage initial (niveau 0 du maillage) :

Le domaine initial est recouvert par un maillage rectangulaire uniforme, constitué d'un faible nombre de mailles. Le maillage généré dans notre cas est composé de mailles carrées. Ainsi, le nombre N_0 de mailles selon la longueur L du domaine Ω est relié au nombre N_1 de mailles selon la largeur l de Ω par la relation :

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{L}{l}$$

La résolution numérique bidimensionnelle du système devient unidimensionnelle, i.e. elle peut être contrôlée par une unique coordonnée de l'espace (L).

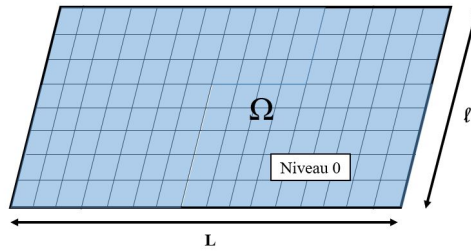


FIGURE 4 – Schéma du maillage initial (niveau 0) du domaine Ω de longueur L et de largeur l

2. Définition du critère de raffinement :

La modélisation de l'interaction entre une onde de choc et d'un cylindre perturbé nécessite deux critères de raffinement :

- **le gradient de densité** afin d'identifier le choc
- **une grandeur scalaire** α qui vaut 0 dans le milieu ambiant, 1 dans le cylindre et est comprise entre 0 et 1 à l'interface. Cette dernière quantité permet de mettre en évidence l'interface milieu ambiant-cylindre

Le gradient de densité présente aussi un intérêt dans le cadre de l'identification des zones à forte vorticité car il intervient dans la relation de la production de la vorticité (c.f. **Partie 3.1.**).

3. Définition de l'indicateur de raffinement :

Au sein de chacune des mailles, une grandeur numérique est calculée pour déterminer celles qui nécessitent un raffinement (ou un déraffinement dans certains cas). Au cours de cette étape, cet indicateur est défini à partir des critères de raffinement : si la valeur des critères est supérieure à un certain seuil, il y a raffinement. La première difficulté que nous rencontrons au sein de ce projet est donc la suivante : pouvoir déterminer ce seuil. La littérature ne nous permettant pas de le déterminer, nous nous retrouvons donc obligés de réaliser des simulations numériques pour déterminer un seuil "correct".

4. Définition des patches et établissement du "niveau 1" de raffinement :

Après l'identification des différentes mailles à raffiner, les patches sont formés et vont constituer le "niveau 1" de raffinement où un nouveau maillage devra être tracé à partir du ratio de raffinement, indépendamment du maillage initial.

5. Définition du ratio de raffinement et maillage des patches :

Dans le code utilisé, un maillage est tracé sur chacun des patches par méthode h-adaptative, caractérisée par l'insertion de points sur le domaine, ce qui nous permet de diviser les mailles en sous-mailles.

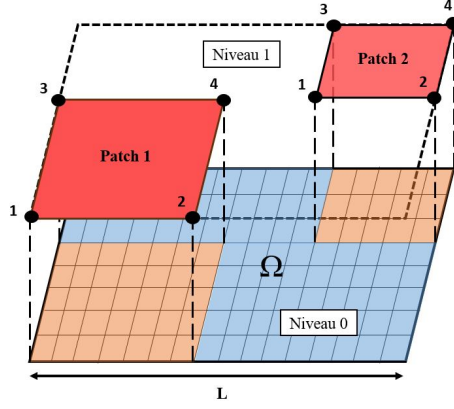


FIGURE 5 – Définition des patches de "niveau 1" à partir des mailles à raffiner (en orange) du domaine initial Ω de longueur L

Le nombre de points insérés pour définir le nouveau maillage dépend du ratio de raffinement R et du nombre N_0 de mailles selon la longueur L du maillage initial du domaine Ω , même s'il est créé indépendamment du maillage initial (il n'y a pas de caractère héréditaire entre les maillages considérés numériquement). Ce ratio de raffinement joue un rôle essentiel dans la résolution numérique car il indique le nombre de points à placer pour tracer le maillage des patches. Ainsi, si le ratio de raffinement est R , le nombre de mailles $\mathcal{N}_{i=1}$ par unité de longueur dans un patch de "niveau 1" de raffinement est :

$$\mathcal{N}_{i=1} = \frac{N_0}{L} \times R \quad (7)$$

où N_0 est le nombre de mailles du maillage initial, L est la longueur du maillage initial et R est le ratio de raffinement.

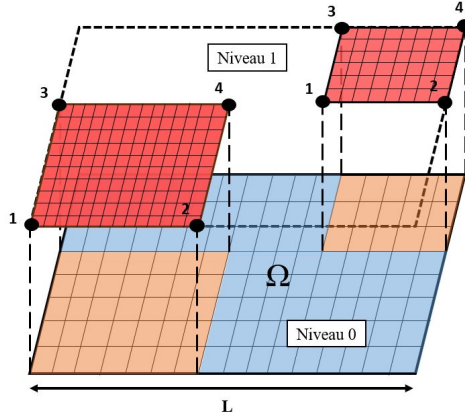
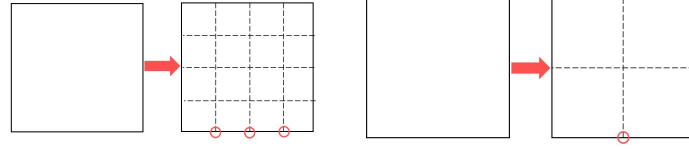


FIGURE 6 – Tracé du maillages des patches de "niveau 1" du domaine initial Ω

Autrement dit, entre chaque point de l'ancien maillage, $R - 1$ points sont introduits. Ci-dessous est illustré l'insertion des points en fonction du ratio de raffinement.



(a) Ratio de raffinement $R = 4$ (b) Ratio de raffinement $R = 2$

FIGURE 7 – Division d'une maille en sous-mailles en fonction du ratio de raffinement (a) $R = 4$ (b) $R = 2$

6. Définition du seuil de raffinement et répétition du processus :

Les étapes 4 et 5 sont répétées sur chacun des patches, ce qui nous permet d'atteindre les niveaux supérieurs de raffinement, jusqu'à atteindre le niveau maximal défini par le seuil de raffinement n . Ce seuil de raffinement permet de déterminer le nombre maximal N_{max} de mailles par unité de longueur du domaine Ω . Cette donnée peut être aussi assimilée comme la résolution maximale du maillage du domaine Ω , que l'on note r .

$$r = \frac{N_0}{L} \times R^n \quad (8)$$

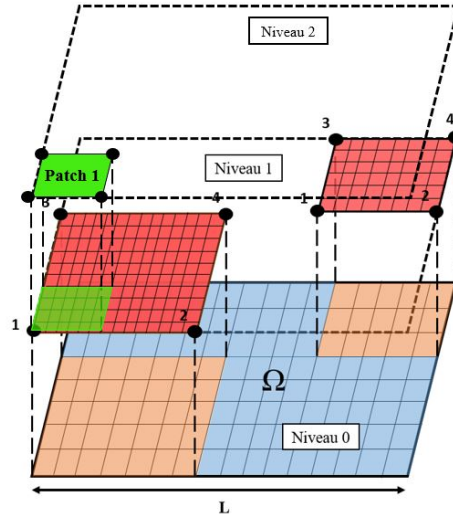


FIGURE 8 – Schéma illustrant le processus répétitif de la définition des patches et des niveaux supérieurs : détermination des patches de "niveau 2" en fonction des patches de "niveau 1".

2.2 Vérification et validation de la stratégie

Après avoir établi la stratégie de résolution, l'objectif est de générer un maillage adaptatif fiable du domaine d'étude et de vérifier sa fiabilité. Ce maillage dépend de nombreuses inconnues algorithmiques à déterminer : le nombre N_0 de mailles selon la longueur L du domaine Ω , le ratio de raffinement R et le seuil de raffinement n . Il faut donc se munir d'un modèle de référence permettant de déterminer ces inconnues algorithmiques. Les données obtenues par plusieurs maillages vont être comparées aux données du modèle de référence, et à partir de cette comparaison, on sera capable de déterminer un maillage "adéquate" pour pouvoir représenter l'évolution du modèle. De plus, il faut s'assurer aussi que le code converge, c'est-à-dire que la solution obtenue par résolution numérique tende vers la solution souhaitée, et que les équations dynamiques choisies dans notre stratégie sont réalistes. Pour vérifier que nos équations sont correctes, il faut comparer l'évolution de notre modèle à un second modèle de référence.

Dans cette partie, plusieurs étapes seront nécessaires et seront réalisées dans l'ordre chronologique suivant :

1. Choisir les indicateurs de raffinement par simulation
2. Choisir et expliquer le modèle de référence permettant de trouver un maillage "adéquate"
3. Comparer les résultats obtenus par différents maillage et les données du modèle de référence
4. Verifier que l'algorithme converge (étape de vérification)
5. Choisir un second modèle de référence permettant de valider le code et comparer les résultats obtenus par simulation et le second modèle (étape de validation)

Dans le code, notre modèle est obtenu en modifiant les fichiers suivants :

- Parm.H : il définit les paramètres du problème (équation d'état)
- ProblemICBC.H : il contient les conditions aux limites et initiales du problème
- Inputs : où sont définis les paramètres de temps et de raffinement du maillage

La simulation est ensuite visualisée et les données traitées sur le logiciel Visit3.3.3.

2.2.1 Choix des indicateurs de raffinement

Dans la sous-partie précédente, la modélisation de l'interaction d'un cylindre de gaz nécessite deux critères de raffinement : le gradient de densité $\nabla\rho$ et la grandeur scalaire α . L'indicateur de raffinement est choisi par critère visuel à partir des simulations numériques.

Le critère de sélection d'un indicateur de raffinement adéquat est qu'il présente un raffinement au niveau du choc incident et de l'interface. Toutefois, il ne doit pas y avoir de raffinement au niveau du choc réfléchi. Par simulation numérique, nous pouvons établir le tableau suivant qui nous permet de choisir un indicateur de raffinement.

$ \nabla\rho $ (kg/m^4)	choc incident	interface	choc réfléchi	temps de calcul (s)
0,001	raffinement	raffinement	raffinement	116
0,005	raffinement	raffinement	raffinement	79
0,01	raffinement	raffinement	raffinement	58
0,05	raffinement	raffinement	pas de raffinement	50
0,1	raffinement	raffinement	pas de raffinement	49
0,5	pas de raffinement	raffinement	pas de raffinement	43

TABLE 1 – Raffinement de l'interface et des chocs et temps de calcul de la solution (s) en fonction de la valeur du gradient de densité (kg/m^4)

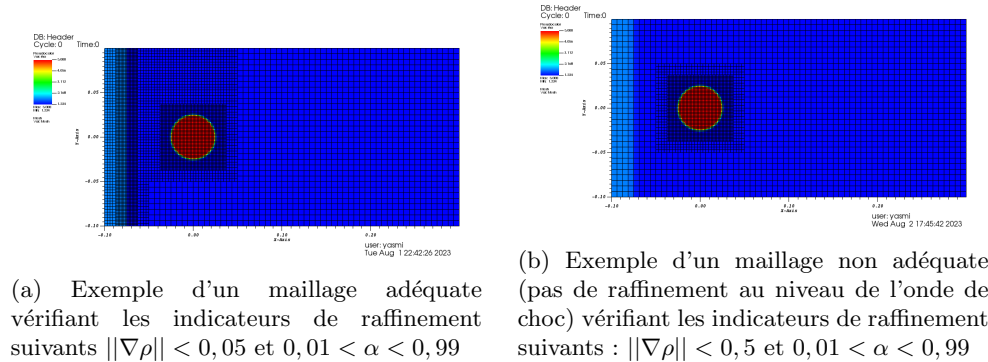


FIGURE 9 – Exemple de maillage adapté (a) et non adapté (b)

D'après le tableau précédent, un indicateur de raffinement adéquate est $||\nabla\rho|| = 0,05$.

2.2.2 Modèle théorique de comparaison : Samtaney & Zabusky (1993)

Samtaney & Zabusky [12] ont établi une formule de la circulation approximée à l'ordre 3 Γ_{app} autour d'un demi-cylindre après le passage d'une onde de choc.

Cette formule se déduit à partir de l'équation de la circulation autour d'une surface plane obtenue par analyse des chocs polaires réalisée par Henderson (1966) [5] et par résolution d'un polynôme à l'ordre 12 dont l'expression a été fournie par Henderson (1989) [6].

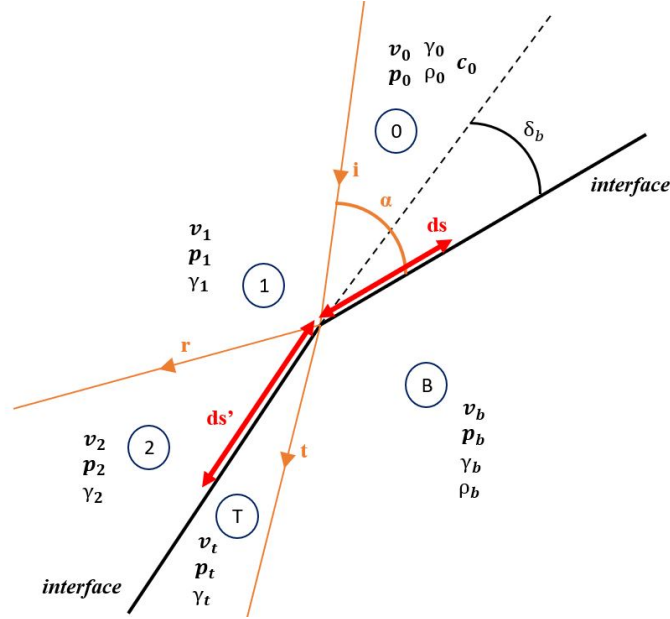


FIGURE 10 – Schéma représentant l'évolution de l'interface et des ondes après un choc. ds et ds' correspondent respectivement à l'unité de longueur de l'interface pré-choc et post-choc. δ_b est l'angle de déviation de l'interface après le choc. v_i , p_i , ρ_i et γ_i sont respectivement la vitesse, la pression, la densité et le coefficient adiabatique du gaz dans le milieu i . Le milieu 0 correspond au premier gaz avant le choc incident est réfléchi. Le milieu 1 correspond au premier gaz après le choc incident et avant le choc réfléchi. Le milieu 2 correspond au premier gaz après le choc incident et le choc réfléchi. Le milieu B correspond au deuxième gaz avant le choc transmis. Le milieu T correspond au deuxième gaz après le choc transmis

La réflexion étant supposée régulière (*Regular Refraction*, RR) et sous forme de choc (c.f. Figure 10), l'expression exacte de la circulation par unité de longueur de l'interface pré-choc se met sous la forme :

$$\Gamma' = \frac{d\Gamma}{ds} = \frac{(v_t - v_2) \times \cos\alpha}{\cos(\alpha - \delta_b)} \times \frac{c_0}{\gamma_0^{1/2}} \quad (9)$$

où ds est l'unité de longueur de l'interface pré-choc, α est l'angle entre l'onde de choc incidente et l'interface, δ_b est l'angle de déviation de l'interface après le choc, c_0 est la célérité du son dans le milieu 0, γ_0 est la coefficient adiabatique du gaz dans la milieu 0, v_t est la vitesse dans le milieu t et v_2 est la vitesse dans le milieu 2. $v_t - v_2$ correspond à la vitesse au niveau de l'interface après le choc.

Le terme $v_t - v_2$ dépend de l'ensemble des paramètres de l'analyse des chocs polaires et du nombre de Mach de l'onde de choc M_s :

$$v_t - v_2 = \frac{\gamma_0^{1/2}}{\sin\alpha} \times (f(M_s, \gamma_b, \gamma_0, \rho_0, \rho_b, \mu_b, p_2, \sin\alpha)^{1/2} - g(M_s, \gamma_0, \mu_0, p_2, p_1, \sin\alpha)^{1/2}) \quad (10)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(M_s, \gamma_b, \gamma_0, \rho_0, \rho_b, \mu_b, p_2, \sin\alpha) = M_s^2 + \frac{2 \times \sin\alpha^2}{\gamma_b - 1} \times \left(\frac{1 - p_2 \times \frac{1 + \mu_b^2 p_2}{\mu_b^2 + p_2}}{\frac{\gamma_0 \rho_b}{\rho_0 \gamma_b}} \right) \\ g(M_s, \gamma_0, \mu_0, p_2, p_1, \sin\alpha) = M_s^2 + \frac{2 \times \sin\alpha^2}{\gamma_0 - 1} \times \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \frac{1 + \mu_0^2 \times \frac{p_2}{p_1}}{\mu_0^2 + \frac{p_2}{p_1}} \times p_1 \frac{1 + \mu_0^2 p_1}{\mu_0^2 + p_1} \right) \\ \mu_i = \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i + 1} \quad \text{où } i = b, 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

où γ_i est le coefficient adiabatique du gaz dans le milieu i , M_s est le nombre de Mach du choc incident, ρ_i est la densité du gaz dans le milieu i , p_i est la pression du gaz dans le milieu i et α est l'angle entre l'interface pré-choc et le choc incident.

A partir de l'expression de la dérivée de la circulation autour d'une surface plane, Samtaney & Zabusky ont déduit la dérivée de la circulation autour d'une surface non-plane, en réalisant un développement limité en $\sin\alpha$ à l'ordre 5 :

$$\Gamma' = (\Gamma'_1 \sin\alpha + \Gamma'_3 \sin\alpha^3 + \mathcal{O}(\sin\alpha^5)) \times \frac{c_0}{\gamma_0^{1/2}} \quad (12)$$

Toutefois, les formules obtenues de Γ'_1 et Γ'_3 ne mettent pas en évidence les effets du nombre de Mach du choc M_s , du ratio de densité ρ_b/ρ_0 et du coefficient adiabatique γ_0 . Samtaney & Zabusky ont donc établi une nouvelle expression de Γ' par identification des facteurs scalaires obtenus en réalisant le développement asymptotique de Γ' en fonction de ρ_b/ρ_0 et de γ_0 sous hypothèse de RR . Ils ont ensuite comparé le comportement du terme dominant de chacun des développements asymptotiques avec celui de la formule exacte. Comme, il a été démontré qu'un facteur scalaire adapté en fonction de α est $\sin\alpha$, le développement asymptotique de Γ' permet donc d'accéder à une autre formulation de Γ'_1 .

La formule approximée de la circulation autour d'une surface non-plane à l'ordre 3 obtenue par l'analyse des chocs polaires peut donc aussi s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma'_{approx} = (\Gamma'_1 \sin\alpha + \Gamma'_3 \sin\alpha^3) \times \frac{c_0}{\gamma_0^{1/2}} \\ \text{où } \Gamma'_1 = \frac{2 \times \gamma_0^{1/2}}{\gamma_0 + 1} \times (1 - (\frac{\rho_b}{\rho_0})^{-1/2})(1 + M_s^{-1} + 2M_s^{-2})(M_s - 1) \\ \text{et } \Gamma'_3 \text{ dépend de } M_s, \frac{\rho_b}{\rho_0}, \gamma_0, \gamma_t \text{ (Formule explicitée dans [12])} \end{array} \right. \quad (13)$$

En se ramenant à la géométrie du système d'étude, dx et dy sont fonctions de α et de ds (Figure 10) :

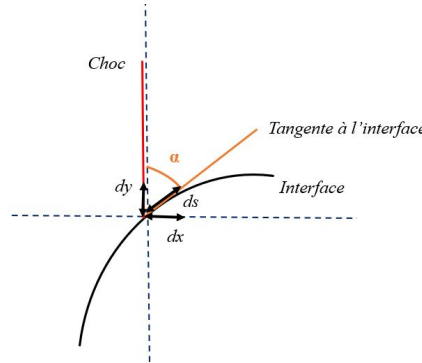


FIGURE 11 – Définition de l'unité de longueur ds de l'interface circulaire en fonction des unités de longueur dx et dy ainsi que de l'angle α entre la tangente à l'interface et au choc

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \sin\alpha \times ds \\ dy = \cos\alpha \times ds \end{array} \right.$$

L'estimation de la circulation autour d'une surface courbée peut s'écrire à l'ordre 1 sous la forme :

$$d\Gamma' = \Gamma'_1 \times \sin\alpha \times ds = \Gamma'_1 dx$$

En étudiant les différentes étapes de choc et en faisant l'hypothèse que le gradient de densité et de pression sont quasiment perpendiculaires au niveau de l'interface (hypothèse de '*near-normality*') pour le deuxième quart de cylindre, Samtaney & Zabusky ont finalement établi l'expression de la circulation autour d'un demi-cylindre après choc :

$$\Gamma_{approx} = (1 + \frac{\pi}{2}) \frac{2 \times \gamma_0^{1/2}}{\gamma_0 + 1} \times (1 - (\frac{\rho_b}{\rho_0})^{-1/2}) (1 + M_s^{-1} + 2M_s^{-2}) (M_s - 1) r_0 \quad (14)$$

où γ_0 est le coefficient adiabatique du gaz dans le milieu 0, M_s est le nombre de Mach du choc incident, ρ_i est la densité du gaz dans le milieu i ($i = 0, b$), r_0 est le rayon du demi-cylindre.

2.2.3 Détermination des inconnues algorithmiques liées au raffinement adaptatif du maillage

Il est possible d'établir une expression établissant la différence entre le modèle théorique "idéale" de Samtaney & Zabusky et le modèle numérique dépendant du maillage afin de déterminer les inconnues algorithmiques générant un maillage adéquate. Pour cela, les circulations numériques sont comparées à la circulation approximative autour d'un demi cylindre donnée par Samtaney & Zabusky (11) :

$$\epsilon = \frac{|\Gamma_{num} - \Gamma_{approx}|}{|\Gamma_{approx}|} \quad (15)$$

où ϵ correspond au pourcentage de différence entre le modèle numérique et le modèle théorique de référence, Γ_{num} est la circulation obtenue par traitement de données en utilisant le maillage considéré et Γ_{approx} est la circulation obtenue en appliquant le modèle théorique de Samtaney & Zabusky.

La grandeur ϵ évolue en fonction des différentes inconnues algorithmiques : le nombre de mailles N_0 du maillage initial selon la longueur L du domaine Ω , le ratio de raffinement R et le seuil de raffinement n . Autrement dit, ϵ varie en fonction de la résolution du maillage r . Dans ce projet, un maillage est considéré adéquate si la différence entre le modèle théorique basée sur la méthode de Samtaney & Zabusky [12] et le modèle numérique est inférieure à 5%. Ainsi, le critère de sélection du maillage est : $\epsilon < 0,05$

Le tableau ci-dessous met en évidence l'évolution de l'évolution du pourcentage de différence entre les modèles en fonction de la résolution ainsi que le temps total de résolution des équations.

r	$\Gamma_{num} (m^2/s)$	ϵ	$t_{total} (s)$
64	7,025	0,089	1,21
128	7,004	0,085	3,45
256	6,881	0,067	9,86
512	6,812	0,056	44,54
1024	6,759	0,047	243,67
2048	6,739	0,044	1968,23
4096	6,716	0,041	> 3h

TABLE 2 – Résultats obtenus par modélisation d'un choc de nombre de Mach $M_s = 1,22$ se propageant dans un fluide ambiant de masse volumique $\rho_1 = 1,25 \text{ kg/m}^3$ et impactant un cylindre de masse volumique $\rho_2 = 5 \text{ kg/m}^3$ et de rayon $r = 2,5 \text{ cm}$. La circulation numérique est estimée à la date où le choc intersecte le point à l'extrémité du cylindre.

L'augmentation de la résolution du maillage entraîne une diminution de ϵ . La différence entre les deux modèles devient inférieure à 5%, à partir d'une résolution supérieure à 1024. Toutefois, l'augmentation de la résolution du maillage entraîne une augmentation du temps de calcul, avec un temps supérieur à 3 heures pour 0,0006 secondes de simulation et un maillage de résolution $r = 4096$. Il faut donc réaliser un compromis entre la quantité de données (liée au temps de calcul) et la qualité des données (liée à la résolution du maillage). La qualité des données est évaluée grâce à la grandeur ϵ et la quantité de données par le temps total de résolution des équations t_{total} . Il faut donc choisir une résolution du maillage dont le pourcentage de différence

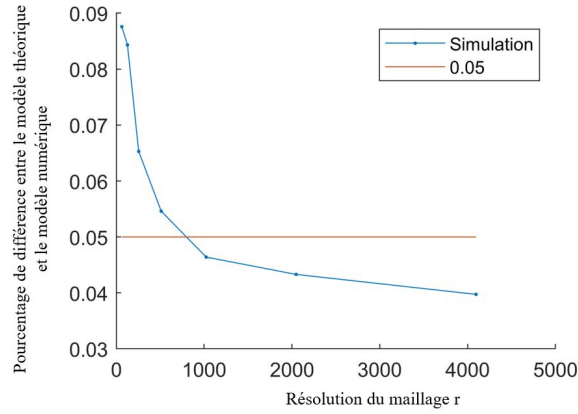


FIGURE 12 – Evolution de la différence entre le modèle théorique et le modèle numérique ϵ en fonction de la résolution du maillage r

est inférieur à 5% et dont le temps de génération du maillage soit minimal. Une résolution de $r = 1024$ convient.

Cependant, lors de la réalisation des simulations, nous avons constaté que le temps de calcul augmentait de manière significative avec le nombre de Mach pour une valeur de résolution r fixée. Le compromis entre la quantité et la qualité n'était plus respecté. Cette augmentation notable du temps de calcul s'explique par une augmentation du gradient de pression avec le nombre de Mach. À mesure que le nombre de Mach augmente, le gradient de pression augmente également, ce qui entraîne une augmentation de la surface du domaine de gradient de pression supérieur à $0,05 \text{ kg/m}^4$. L'expérience précédente avait été effectuée à un faible nombre de Mach ($M_s = 1,22$), mais il aurait été nécessaire d'adopter un nombre de Mach plus élevé (de l'ordre de 3 ou 4). En réexaminant la Figure 11, nous avons constaté qu'avec une résolution de 512, le pourcentage de différence était proche de 0,05 (le pourcentage exact était de 0,058). Afin de rétablir un compromis entre la quantité et la qualité, nous avons décidé d'adopter cette nouvelle valeur de résolution. Ainsi, la résolution $r = 512$ a été choisie.

2.2.4 Vérification du code

Après avoir déterminé une résolution adaptée du maillage, il faut vérifier que le code converge. Autrement, on doit s'assurer que la solution numérique obtenue par le code converge et tend vers la solution souhaitée. On a représenté ci-dessous l'évolution de la circulation numérique calculée (m^2/s) et la circulation donnée par le modèle de Samtaney & Zabusky [12] en fonction de la résolution du maillage r .

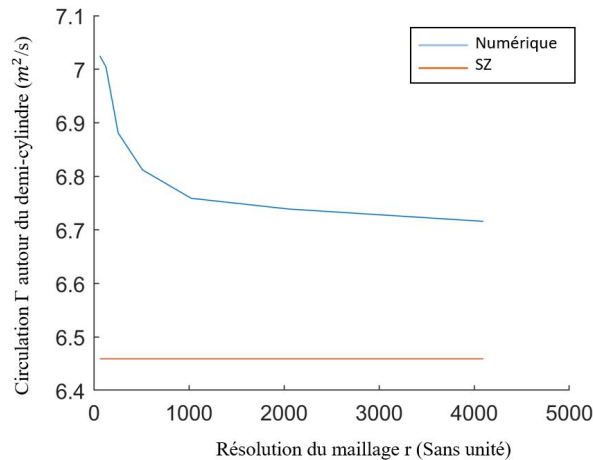


FIGURE 13 – Circulation numérique Γ_{num} en fonction de la résolution du maillage r et comparaison à la circulation de Samtaney & Zabusky (SZ)

On observe qu'il y a convergence des solutions obtenues par résolution des équations et que la valeur de la

circulation numérique tend vers la valeur de circulation théorique du modèle de référence. Le code est bien vérifié.

2.2.5 Validation : Comparaison avec les expériences de Haas & Strutevant (1987)

La validation constitue la dernière étape essentielle afin que nous fassions notre traitement de données. Cette étape permet de vérifier que le comportement de notre modèle, autrement dit que les équations choisies lors de la définition de notre stratégie conviennent. Il faut donc qu'on puisse comparer nos résultats à un modèle de référence.

Haas & Sturtevant [4] ont réalisés des expériences qui mettent en évidence l'impact d'une onde de choc sur un cylindre et une sphère contenant des gaz plus lourds et plus légers que l'air ambiant. Pour représenter les comportements des gaz légers, ils se sont munis d'hélium de masse volumique $0,17 \text{ kg/m}^3$, puis pour représenter les gaz plus lourds que l'air, le Réfrigérant 22 (R22) de masse volumique $3,69 \text{ kg/m}^3$. Les conditions expérimentales étaient réalisées à pression et température ambiante.

Afin de procéder à l'étape de validation, nous allons nous placer dans les "même" conditions expérimentales. Nous allons en particulier considérer le cas du cylindre léger comme modèle de référence. Dans la cas du cylindre, Haas & Sturtevant se sont munis de cellules de réfraction cylindrique à membrane plastique fine et de 5cm de diamètre. On va donc initialiser le code afin de se trouver dans le même cas d'étude. Toutefois, contrairement aux expériences qui étaient limitées par l'utilisation du tube, on ne va pas prendre en compte les conditions aux limites, i.e. on va supposer que le milieu ambiant est "infini" (choix "outflow" pour le code). On va ainsi négliger les effets de bord.

En comparant les données obtenues (**Figure 14**) aux résultats expérimentaux de Haas & Sturtevant [4], nous observons une très forte corrélation entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique réalisée. La stratégie de résolution (et aussi le code) est donc bien validée!

3 Détermination des paramètres 2D pour expliquer la géométrie du cylindre après le choc

3.1 Théorie et équation de la dynamique pour expliquer les vortex

Certains cas d'écoulement, en particulier ceux présentant une structure tourbillonnaire, peuvent être difficile à décrire en utilisant les équations (4) à (6). Pour cela, on introduit le concept de vecteur de vorticité $\vec{\omega}$ défini de la façon suivante :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \quad \text{où } \vec{v} \text{ est la vitesse de la particule de fluide}$$

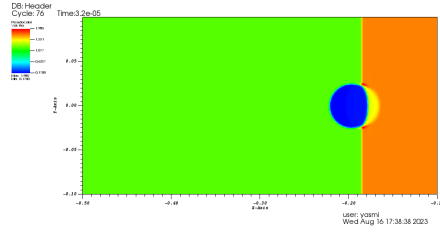
La dynamique de la vorticité du fluide peut être décrite grâce à l'équation de la vorticité qui s'obtient en appliquant le rotationnel $\nabla \times$ à l'équation de conservation de la quantité de mouvement des équations de Navier-Stokes.

En se plaçant dans les mêmes hypothèses, l'équation de la vorticité peut être simplifiée de la façon suivante [4] :

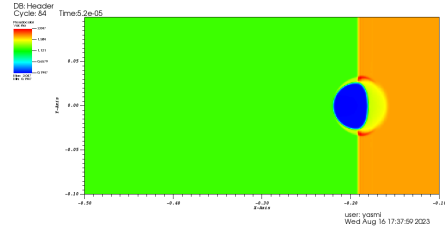
Equation de la vorticité :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \bullet \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \bullet \nabla) \vec{v} - \omega(\nabla \bullet \vec{v}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \quad (16)$$

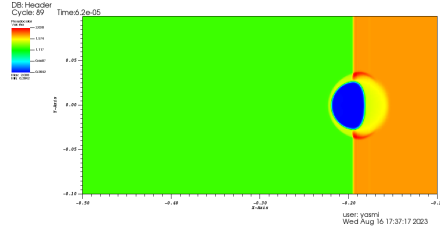
A droite de l'équation, on reconnaît le terme de création de vorticité par non-alignement des gradients de pression et de densité $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ qui permet de caractériser le sens de rotation des structures tourbillonnaires et des vortex.



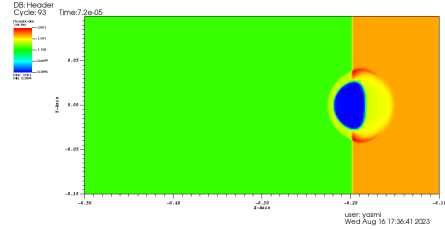
(a) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 32\mu s$



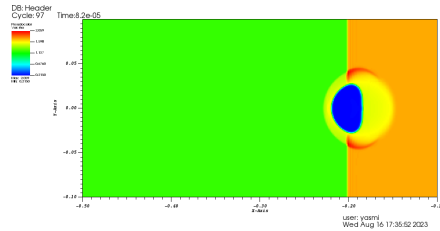
(b) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 52\mu s$



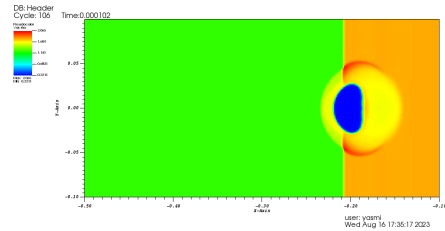
(c) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 62\mu s$



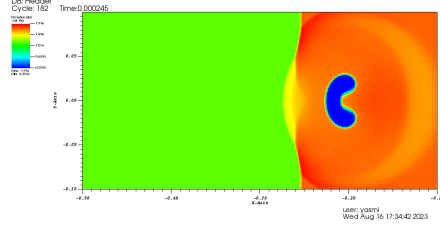
(d) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 72\mu s$



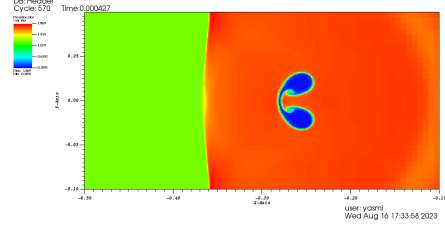
(e) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 82\mu s$



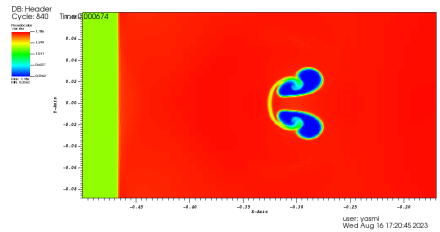
(f) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 102\mu s$



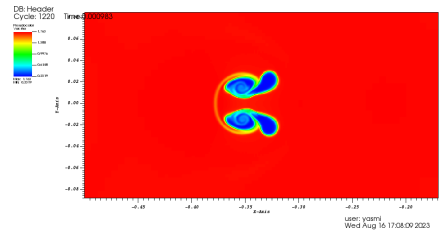
(g) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 245\mu s$



(h) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 427\mu s$



(i) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 674\mu s$



(j) Forme du cylindre (bleue) obtenue par simulation à $t = 983\mu s$

FIGURE 14 – Détermination par simulation numérique de la forme du cylindre après le passage de l'onde de choc à la date (a) $t = 32\mu s$, (b) $t = 52\mu s$, (c) $t = 62\mu s$, (d) $t = 72\mu s$, (e) $t = 82\mu s$ (f) $t = 102\mu s$ (g) $t = 245\mu s$ (h) $t = 427\mu s$ (i) $t = 674\mu s$ (j) $t = 983\mu s$

3.2 Détermination de l'évolution de la circulation autour du cylindre après le passage du choc

Dans de nombreux problèmes associés aux vortex, tels que celui étudié, il est difficile de prédire de manière théorique l'évolution de la circulation Γ autour du cylindre après le passage du choc. Sur le plan expérimental, Haas & Sturtevant [4] ont montré qu'un cylindre plus lourd que le gaz ambiant se transforme en un dipôle de vortex anti-corrôatif, mais n'ont pas pu fournir une expression théorique de l'évolution de la circulation pendant la transformation du cylindre. Samtaney & Zabusky [12] ont pu fournir une expression de la circulation juste après le choc, mais n'ont pas pu fournir une expression de l'évolution de la circulation autour du cylindre après le choc au cours du temps. En raison de la complexité des phénomènes se produisant autour du cylindre après le choc, nous sommes confrontés à la difficulté théorique de déterminer l'évolution de la circulation au fil du temps. Cependant, il est possible de répondre partiellement à cette question grâce à la simulation numérique.

3.2.1 Détermination du facteur d'échelle afin de comparer les expériences

Une partie de ce projet est orienté vers la détermination de l'évolution de la circulation au cours du temps. Toutefois, comme le montre le modèle théorique de Samtaney & Zabusky [12], la circulation de ce choc dépend à la fois du nombre de Mach M_s et du rapport de densité η .

Il est à noter que les phénomènes liés à la circulation qui surviennent à la suite du choc (vorticité, formation des noyaux de vortex, etc.) évolueront à des vitesses différentes en fonction du nombre de Mach, et se produiront donc selon des échelles de temps différentes en fonction de ce nombre. Afin de pouvoir comparer les phénomènes qui se produisent à la suite du choc à la surface de l'interface et ainsi "caractériser" l'évolution de la circulation, il est nécessaire d'ajuster l'ensemble des expériences réalisées à la même échelle de temps. Nous utiliserons comme référence le temps associé à la propagation de l'onde de choc d'un nombre de Mach $M_s = 1,22$. Ainsi, lors de la réalisation d'une simulation avec une onde de choc d'un nombre de Mach M_s , les données obtenues au cours du temps $t_{noncorrigé}$ par simulation numérique pourront être comparées aux données de référence (avec une onde de choc de Mach 1,22) en utilisant le facteur suivant :

$$t_{corrigé} = t_{noncorrigé} \times \frac{W}{W'} \quad (17)$$

où W est la vitesse de l'onde de choc de référence ($M_s = 1,22$) et W' est la vitesse de l'onde de choc de nombre de Mach M_s .

Il est possible d'exprimer la vitesse des ondes de choc grâce au nombre de Mach :

$$M_s = \frac{W}{\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}} \quad [1] \quad (18)$$

où γ , p et ρ sont respectivement le coefficient adiabatique, la pression et la masse volumique du milieu en aval du choc.

3.2.2 Evolution de la circulation en fonction du nombre de Mach et du temps

Afin d'obtenir des données fiables, on commence par générer un maillage de résolution $r = 512$ (Sous-partie 2.4.3). Le maillage vérifiant les conditions $N_0 = 64$, $R = 2$ et $n = 3$ convient.

On s'intéresse dans cette partie à modéliser l'évolution de la circulation autour du cylindre après choc. On considère de nouveau que le cylindre est de masse volumique $\rho_2 = 5 \text{ kg/m}^3$, de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1,4$, de rayon $r_0 = 2,5 \text{ cm}$. Le fluide ambiant est supposé de masse volumique $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$, de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1,4$. Dans ce fluide se propage une onde de choc de nombre de Mach M_s . Les expériences sont réalisées pour plusieurs nombres de Mach $M_s \in \{1,22; 2; 2,5; 3; 3,5\}$. Les données seront récoltées et le maillage généré à intervalle de temps régulier de $5 \times 10^{-5} \text{ s}$.

Plusieurs éléments peuvent être déduits de la simulation réalisée :

1. La figure 15 met en évidence une croissance de la circulation au niveau de l'interface Γ avec le nombre de Mach. Cette augmentation est en cohérence avec l'équation d'approximation de la circulation établie par Samtaney & Zabusky [12]. Selon l'équation (14), le terme dominant dans la circulation est proportionnel à M_s et croît donc avec la force de l'onde de choc. Donc les simulations sont en cohérence avec la

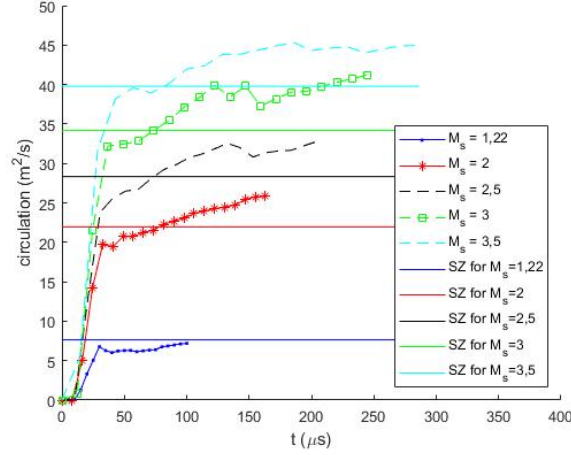


FIGURE 15 – Evolution de la circulation numérique Γ_{num} (m^2/s) en fonction du temps (μs) et du nombre de Mach et comparaison avec la circulation obtenue par la méthode de Samtaney & Zabusky [12]

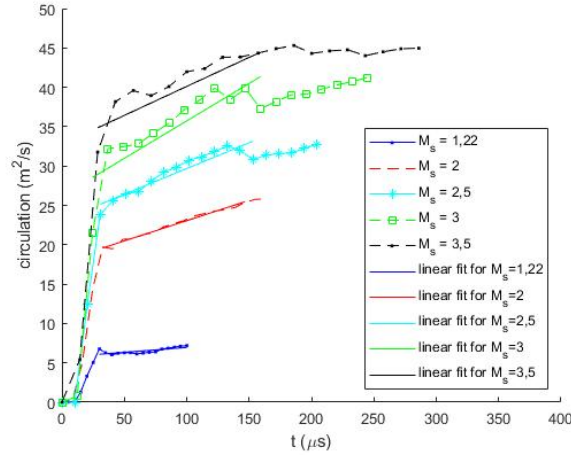


FIGURE 16 – Tracé de la pente de croissance entre les dates $t = 20\mu s$ et $t = 160\mu s$ de la circulation numérique Γ_{num} en fonction du temps (μs)

formule théorique de Samtaney et Zabusney. De plus, on observe que la circulation numérique obtenue par simulation et la circulation théorique sont très proches (indépendamment des conditions initiales i.e. du nombre de Mach M_s). D'où l'intérêt de s'être assuré de la fiabilité de notre stratégie de simulation !

- Après le choc, la circulation à l'interface continue d'augmenter (Figure 16), avec une pente qui dépend du nombre de Mach du choc. Nous essayons donc de déterminer la pente de l'évolution de la circulation entre les dates $t \in [20\mu s, 160\mu s]$. Nous nous rendons compte que la pente de la tendance de la circulation augmente avec le nombre de Mach. Or, en établissant une échelle de temps commune aux expériences (sous-partie 3.1.1), les phénomènes se produisent à la même vitesse. La différence entre les différentes pentes ne peut donc pas être liée à la vitesse. Il y a donc un autre phénomène moteur qui génère de la vorticité.

En intégrant en espace l'équation de la production de la vorticité (3), nous nous rendons compte que nous pouvons quantifier l'évolution de la circulation au cours du temps :

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} \approx \int \frac{d\omega}{dt} = \int ((\vec{\omega} \bullet \nabla) \vec{v} - \omega(\nabla \bullet \vec{v}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2})$$

Ainsi, la pente dépend du non-alignement du gradient de pression et du gradient de densité. L'augmentation des coefficients des pentes avec le nombre de Mach montre donc que le terme de non-alignement augmente

Nombre de Mach M_s	coefficient de la pente ($m^2/s/\mu s$)
1,22	0,0123
2	0,0514
2,5	0,0654
3	0,0952
3,5	0,0736

TABLE 3 – Evolution du coefficient de la pente de la circulation ($m^2/s/\mu s$) en fonction du nombre de Mach M_s

avec la force du choc. Cela semble cohérent, car à mesure que le nombre de Mach augmente, les gradients de pression et de densité deviennent plus importants, entraînant une augmentation de la norme du terme de non-alignement des gradients de pression et de densité.

Toutefois, des zones de vorticité opposée peuvent apparaître et sont fréquentes à mesure que le nombre de Mach augmente. Ce qui explique pourquoi on commence à observer une diminution du coefficient de la pente à partir d'un nombre de Mach $M_s = 3,5$.

3.2.3 Evolution de la circulation en fonction du ratio de densité η

Dans cette partie, on conserve le maillage de la partie précédente. On s'intéresse à modéliser l'évolution de la circulation autour d'un cylindre après choc, en faisant varier le rapport de densité entre le gaz ambiant et le gaz dans le cylindre. Pour la simulation, on considère de nouveau un cylindre de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1,4$ et de rayon $r_0 = 2,5$ cm. Le fluide ambiant est supposé de masse volumique $\rho_1 = 1,2$ kg/m³ et de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1,4$. Dans ce fluide se propage une onde de choc de nombre de Mach $M_s = 1,22$. Les simulations sont réalisées pour plusieurs masse volumique de fluide au sein du cylindre $\rho \in \{5\text{kg/m}^3; 3\text{kg/m}^3; 2\text{kg/m}^3; 0,17\text{kg/m}^3\}$. Les données seront récoltées et le maillage généré à intervalle de temps régulier de 5×10^{-5} s.

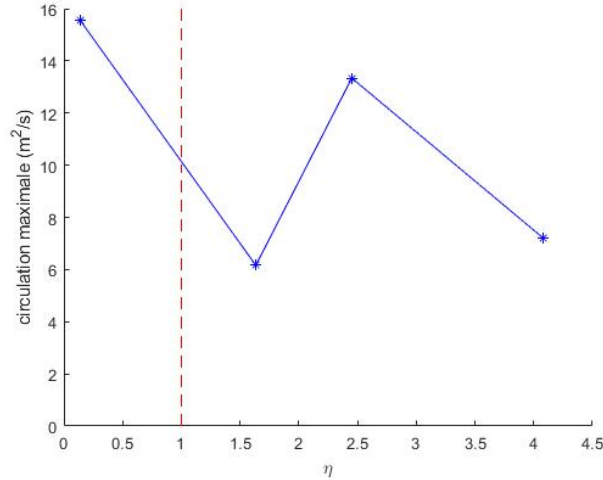


FIGURE 17 – Evolution de la circulation Γ_{num} (m^2/s) en fonction du rapport de densité η entre les deux fluides

La courbe montrant l'évolution de la circulation est tracée en bleue. En rouge est représentée la limite entre un cylindre léger (densité volumique du cylindre plus faible que l'air, i.e. $\eta < 1$) et un cylindre lourd (densité volumique du cylindre plus élevée que l'air i.e. $\eta > 1$)

  partir des résultats obtenus, il est difficile de conclure sur l'impact du ratio de densité sur l'évolution de la circulation. Il faudrait étudier davantage de cas pour pouvoir déduire des propriétés à partir de ces résultats. Intuitivement, nous nous attendrions à ce que la courbe croisse avec la diminution du ratio η . En effet, les effets de vorticité diminueraient avec l'augmentation du ratio de densité, tandis que les effets inertiels augmen-

teraient, c'est-à-dire que chaque particule de fluide tenterait de maintenir son mouvement et sa rotation. Il y aurait donc une diminution de la circulation.

3.3 Détermination des paramètres 2D

Dans la partie précédente, nous avons étudié l'impact du nombre de Mach et du ratio de densité η sur la circulation autour du cylindre. Nous avons montré, grâce aux simulations, que l'augmentation du nombre de Mach entraîne une augmentation de la circulation, et la circulation évolue au cours du temps avec une pente qui dépend du nombre de Mach. Nous avons expliqué que l'élément moteur de cette augmentation de la pente de la circulation au cours du temps est lié au non-alignement des gradients de pression et de densité.

Dans cette partie, nous souhaitons pouvoir déterminer comment évolue la géométrie des dipôles de vortex après l'impact avec le choc. Cette géométrie peut être caractérisée par deux éléments : la taille des noyaux de vortex (a) et la longueur entre les deux noyaux (b) (Figure 1). Ces paramètres sont essentiels pour pouvoir déterminer la vitesse de propagation des différents amas formés après le choc et sensibles à l'instabilité de Crow 3D.

3.3.1 Définition du critère Q pour identifier les propriétés géométriques des noyaux de vortex

Après le choc, le cylindre suit une transformation où sa forme continue de changer (régime transitoire) puis à partir d'une certaine date, sa forme se conserve (régime permanent atteint). Toutefois la géométrie de dipôle de vortex est complexe pour pouvoir simplement deviner à l'oeil nu où se trouve les noyaux de vortex. Il faudrait donc trouver une grandeur qui nous permettrait d'identifier les noyaux : le critère Q.

Le critère Q a été établi par Hunt *et al.* (1988) [7] et permet de quantifier la rotation locale du fluide par rapport au mouvement d'étirement du fluide. Ce critère Q peut être défini par la formule suivante :

$$Q = \frac{1}{2}(\|\Omega\|^2 - \|S\|^2) \quad [2] \quad (19)$$

où Ω est le tenseur de vorticité, qui correspond à la partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse, et S est le tenseur taux de déformation, partie symétrique du tenseur gradient de vitesse.

Un critère de Q élevé positif signale la présence d'un vortex. Pour pouvoir identifier les noyaux de vortex du dipôle, il faut déterminer l'ensemble des structures circulaires avec un vortex fort (critère Q élevé) au centre et délimité par une zone où la critère Q est nul. Sur VisIt, on représente donc les zones où la critère Q est nul afin d'identifier les possibles zones "circulaires" pouvant correspondre au noyau. Puis, le noyau est celui qui possède un gradient de critère Q en son sein atteignant un maximum en son centre (Figure 18). Cette étude est réalisée lorsque le régime permanent est atteint (i.e. lorsque la structure globale du dipôle de vortex se conserve).

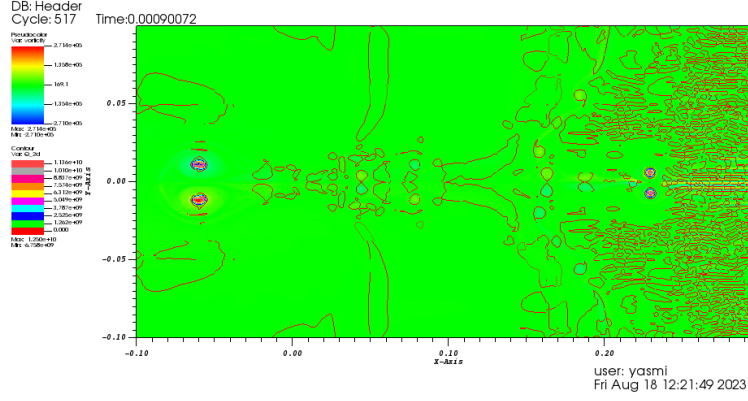


FIGURE 18 – Exemple de modélisation du critère de Q et de la vorticité (rad/s^{-1}) afin de détecter les noyaux du dipôle de vortex pour $M_s = 3,5$.

Données obtenues pour les paramètres suivants : cylindre de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1,4$, rayon $r_0 = 2,5 \text{ cm}$ et masse volumique $\rho_2 = 5 \text{ kg/m}^3$. Le fluide ambiant de masse volumique $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ et de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1,4$. Onde de choc de nombre de Mach $M_s = 3,5$

Une fois les noyaux identifiés, on peut approximer le centre du noyau, A, qui est contenu dans la zone au critère Q très élevé, et le "rayon" des noyaux des vortex en s'intéressant à l'ordonnée des extrémités du vortex, B et C (Figure 18). La propriété géométrique b du dipôle est donnée par l'ordonnée du centre :

$$b = 2 \times y_A$$

Tandis que le rayon se déduit à partir des ordonnées des points B et C :

$$a = y_B - y_C$$

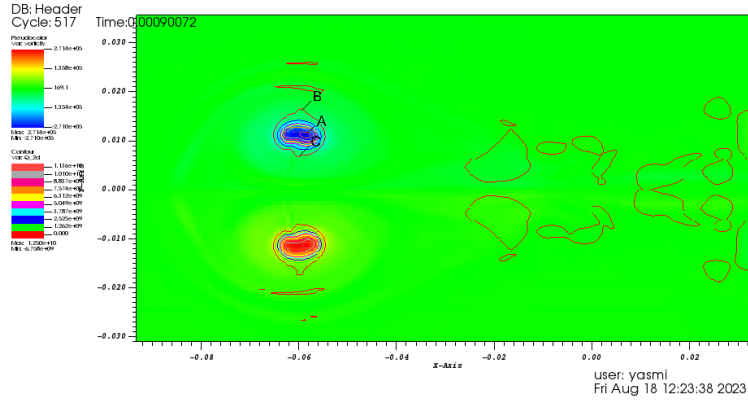


FIGURE 19 – Exemple de modélisation du critère de Q et de la vorticité (rad/s^{-1}) afin d'identifier les points A (centre du noyau), B et C (taille du noyau) pour $M_s = 3,5$.

Données obtenues pour les paramètres suivants : cylindre de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1,4$, rayon $r_0 = 2,5 \text{ cm}$ et masse volumique $\rho_2 = 5 \text{ kg/m}^3$. Le fluide ambiant de masse volumique $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ et de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1,4$. Onde de choc de nombre de Mach $M_s = 3,5$

Toutefois, ces vortex évoluent selon les conditions initiales (Nombre de Mach M_s et ratio de densité η). Dans certains cas, il se peut que le système soit un peu plus complexe, et que la forme délimitée par un critère de Q nul soit semblable à celle des dipôles en régime permanent. Dans ce cas, on procédera à un pointage différent. (Figures 19 et 20)

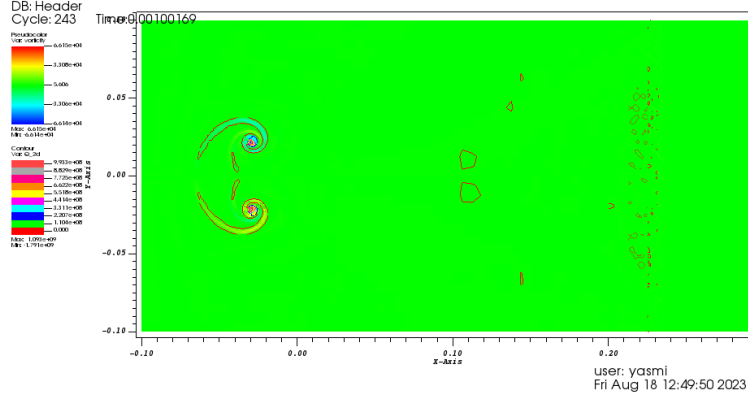


FIGURE 20 – Exemple de modélisation du critère de Q et de la vorticité (rad/s^{-1}) afin de détecter les noyaux du dipôle de vortex pour $\eta = 4/1, 22$

Données obtenues pour les paramètres suivants : cylindre de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1, 4$, rayon $r_0 = 2, 5 \text{ cm}$ et masse volumique $\rho_2 = 5 \text{ kg/m}^3$. Le fluide ambiant a une masse volumique $\rho_1 = 1, 2 \text{ kg/m}^3$ et de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1, 4$. Onde de choc de nombre de Mach $M_s = 3, 5$

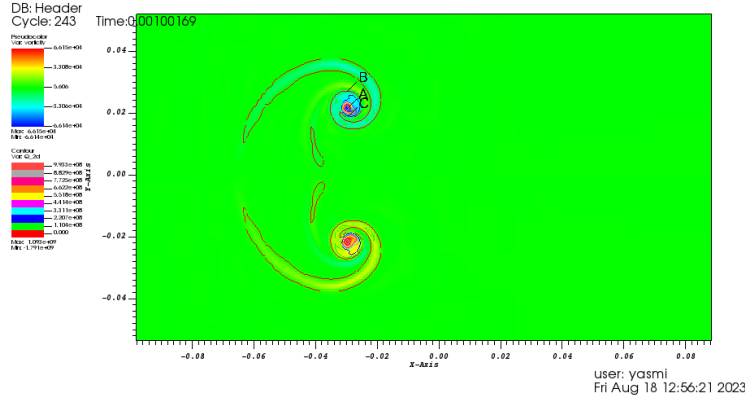


FIGURE 21 – Exemple de modélisation du critère de Q et de la vorticité (rad/s^{-1}) afin d'identifier les points A (centre du noyau), B et C (taille du noyau) pour $\eta = 4$

Données obtenues sont obtenues pour Pour la simulation, on considère de nouveau un cylindre de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1, 4$, un rayon $r_0 = 2, 5 \text{ cm}$ et une masse volumique $\rho_2 = 4 \text{ kg/m}^3$. Le fluide ambiant est considéré de masse volumique $\rho_1 = 1, 2 \text{ kg/m}^3$ et de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1, 4$. L'onde de choc est considérée avec un nombre de Mach $M_s = 1, 22$

3.3.2 Evolution des paramètres en fonction du nombre de Mach M_s

Le choc génère un gradient de pression et de densité lors de son passage, et va impacter le cylindre entraînant sa déformation. Des débuts de vortex commencent à prendre naissance au point où la tangente de l'interface est perpendiculaire au choc et vont commencer à s'enrouler jusqu'à former un dipôle de vortex. Tout comme la circulation, les propriétés géométriques du dipôle (a et b) dépendent du nombre de Mach de l'onde choc et du ratio de densité. Pour pouvoir déterminer l'évolution des paramètres géométriques, on commence par générer un maillage de résolution $r = 512$ (Sous-partie 2.4.3). Le maillage vérifiant les conditions $N_0 = 64$, $R = 2$ et $n = 3$ convient.

Pour réaliser la simulation, on considère un cylindre de masse volumique $\rho_2 = 5 \text{ kg/m}^3$ et de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1, 4$ et de rayon $r_0 = 2, 5 \text{ cm}$. Le fluide ambiant est supposé de masse volumique $\rho_1 = 1, 2 \text{ kg/m}^3$ et de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1, 4$. Dans ce fluide se propage une onde de choc de nombre de Mach M_s . Les expériences sont réalisées pour plusieurs nombres de Mach $M_s \in \{1, 22; 2; 2, 5; 3; 3, 5\}$. Les données seront récoltées et le maillage généré à intervalle de temps régulier de $5 \times 10^{-5} \text{ s}$.

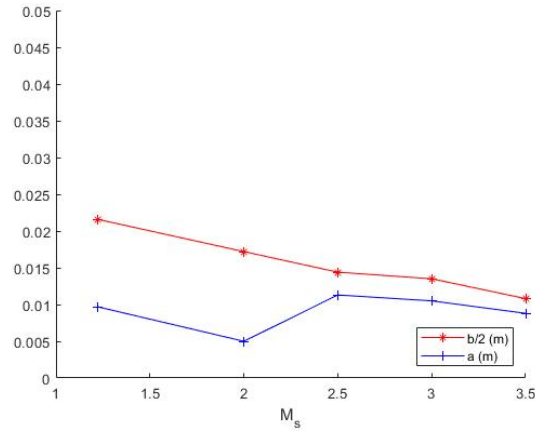


FIGURE 22 – Evolution de la taille du noyau, a (m), et de la longueur entre les deux noyaux du vortex, b (m), en fonction du nombre de Mach M_s du choc incident

La figure 22 met en évidence une décroissance de 0,0216 m à 0,0108 m de la longueur avec l'augmentation du nombre de Mach. Cette décroissance peut s'expliquer par l'augmentation de la vorticité avec le nombre de Mach. En effet, à ratio de densité η fixé, l'augmentation de la puissance du choc conduit l'interface à s'enrouler davantage (comportement lié au terme de non-alignement des gradients de pression et de densité et à l'augmentation de la circulation), poussant l'ordonnée du centre du vortex à diminuer.

Toutefois, on ne peut rien conclure sur l'impact de la puissance du choc sur la taille des noyaux de vortex en raison du peu de données. Il n'y a pas de tendance claire dans la courbe, et les incertitudes de mesure peuvent aussi avoir impact  les résultats obtenus. On peut néanmoins remarquer que les valeurs obtenues tournent autour de 0,001 m. Si, en réalisant de nouvelles simulations, on est capable de montrer que les valeurs de la taille du noyau de vortex continuent de varier autour de 0,001 m, alors la tendance de la courbe est constante. Une explication possible de cette constance potentielle de la courbe est la valeur importante de la densité du fluide à l'intérieur du cylindre, qui vaut 5 kg/m^3 pour nos simulations. Plus la densité est élevée, moins les particules de fluide vont se déplacer sous l'effet du choc (les phénomènes inertiels dominent les phénomènes de vorticité). Il faut donc à nouveau réaliser cette même simulation afin de pouvoir comparer la valeur de la taille des noyaux avec différentes valeurs de la densité du fluide du cylindre.

3.3.3 Evolution des paramètres en fonction du ratio de densité η

Dans cette partie, on s'intéresse à déterminer l'évolution des paramètres 2D, en faisant varier le rapport de densité entre le fluide ambiant et la densité volumique du cylindre. Pour la simulation, on considère à nouveau un cylindre de coefficient adiabatique $\gamma_2 = 1,4$ et de rayon $r_0 = 2,5$ cm. Le fluide ambiant est supposé de masse volumique $\rho_1 = 1,2$ kg/m^3 et de coefficient adiabatique $\gamma_1 = 1,4$. Dans ce fluide se propage une onde de choc de nombre de Mach $M_s = 1,22$. Les simulations sont réalisées pour des masses volumiques du cylindre $\rho_2 \in \{5\text{ kg/m}^3; 3\text{ kg/m}^3; 2,5\text{ kg/m}^3; 2\text{ kg/m}^3; 1,5\text{ kg/m}^3; 0,17\text{ kg/m}^3\}$.

En se concentrant sur les données obtenues pour $\eta > 1$ (c'est-à-dire pour un cylindre de masse volumique plus lourde que l'air ambiant), les résultats mettent en évidence une croissance de la taille des noyaux de vortex avec l'augmentation du ratio. Cette augmentation de la distance entre les deux noyaux avec la diminution de η peut également s'expliquer par les effets inertiels. Si le fluide est peu dense, les particules sont sensibles aux variations de pression et de densité, ce qui impacte leur trajectoire. Ainsi, lors du dépôt de vorticité par le choc, on s'attendrait à ce que les particules de fluide changent rapidement de trajectoire et de vitesse, rendant la taille des noyaux du dipôle plus réduite. En revanche, lorsque le cylindre est plus dense que l'air ambiant, les particules de fluide constituant le cylindre résistent davantage au changement de vitesse. On s'attendrait à ce que la trajectoire de ces particules prenne "plus d'espace" lors du changement de leur trajectoire, ce qui entraînerait une taille de noyaux plus grande.

Une autre hypothèse pour expliquer ce phénomène pourrait être d'examiner comment évolue le gradient de pression pour expliquer le comportement de la courbe de la variable "b" (méthode qui n'a pas pu être réalisée en raison du manque de temps). En effet, "b" est associée à la distance entre les deux noyaux de vortex et

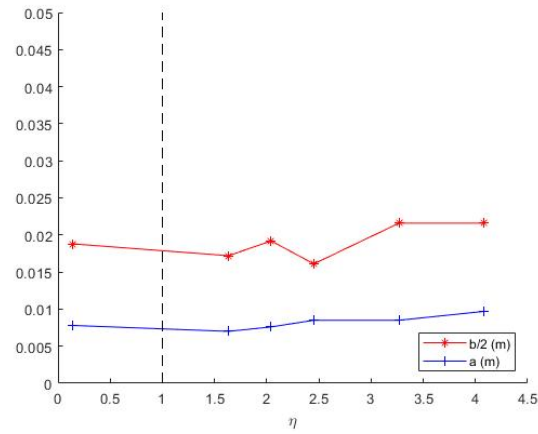


FIGURE 23 – Evolution de la taille du noyau, a (m), et de la longueur entre les deux noyaux du vortex, b (m), en fonction du rapport de densité η

donc aussi à la différence de pression entre l'extérieur et l'intérieur du dipôle. On pourrait s'attendre à ce que plus le gradient de pression entre l'extérieur et l'intérieur du dipôle est élevé, plus les noyaux ont tendance à s'approcher, et donc la valeur de "b" diminue. Ainsi, si "b" augmente avec le ratio de densité, on pourrait s'attendre à ce que le gradient de pression diminue avec le ratio de densité.

4 Conclusion

L'objectif de ce stage a été d'essayer de déterminer l'évolution de la circulation déposée sur le cylindre et d'étudier la géométrie du dipôle de vortex engendré par l'interaction d'une onde de choc avec un cylindre de gaz en caractérisant des paramètres 2D géométriques. Nous avons d'abord commencé par poser le problème et expliquer le phénomène : lorsqu'une onde de choc passe à travers un cylindre, elle dépose une vorticité à l'interface, ce qui entraîne la transformation du cylindre en un dipôle de vortex. Les caractéristiques géométriques de ce dipôle sont la distance entre les deux vortex et leur taille. Nous avons aussi motivé notre sujet par le fait que ces paramètres étaient intéressants à déterminer afin de calculer la vitesse de propagation des amas obtenus au niveau de l'anneau équatorial de la supernova 1987A.

Ensuite, nous avons discuté des différentes études de la littérature réalisées afin de répondre à cette problématique (Haas & Sturtevant [4] et Samtaney & Zabusky [12]). Nous nous sommes rendus compte que les modèles proposés ne permettaient de répondre à notre problématique que partiellement.

Nous nous sommes donc munis de simulations afin de répondre à notre problématique. Toutefois, comme il s'agit de collecte de données à partir de simulations, il fallait s'assurer que la stratégie de résolution était correcte. Pour cela, nous avons commencé par choisir une stratégie, puis nous l'avons vérifiée et validée en la comparant à des modèles de référence. Il est à noter toutefois que nous avons d   réaliser des compromis entre la quantité de données et la qualité des données, et nous avons finalement adopté une résolution de maillage $r = 512$ permettant de trouver le meilleur compromis.

Une fois la stratégie de simulation validée et vérifiée, nous avons pu passer à l'exploitation des données. Nous avons commencé par étudier la façon dont la circulation évoluait en fonction du nombre de Mach, du ratio de densité et du temps. Nous nous sommes aperçus que les pentes de croissance de la circulation après le choc dépendaient du terme de non-alignement des gradients de pression et de densité. Nous étions aussi surpris de voir la proximité de la valeur de la circulation après le choc obtenue par simulation avec celle de notre modèle de référence. Toutefois, nous n'étions pas capables de conclure sur l'évolution de la circulation avec le ratio de densité en raison du faible nombre de données obtenues.

Après avoir étudié la circulation, nous nous sommes ensuite pen  ch  s sur les paramètres géométriques 2D. Pour cela, nous avons commencé par définir les régions où se situent les vortex à l'aide du critère Q, puis par pointage, nous avons déterminé la façon dont évoluaient "a" et "b". Nous nous sommes aperçus que "b" avait tendance à augmenter avec η et à diminuer avec l'augmentation de M_s . Nous avons par ailleurs observé une certaine constance de "a", mais il était difficile d'exploiter les données en raison de leur faible nombre.

Références

- [1] John David Anderson. *Modern compressible flow : with historical perspective*, volume 12. McGraw-Hill New York, 1990.
- [2] Min S Chong, Anthony E Perry, and Brian J Cantwell. A general classification of three-dimensional flow fields. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 2(5) :765–777, 1990.
- [3] Claes Fransson, Josefin Larsson, Katia Migotto, Dominic Pesce, Peter Challis, Roger A Chevalier, Kevin France, Robert P Kirshner, Bruno Leibundgut, Peter Lundqvist, et al. The destruction of the circumstellar ring of sn 1987a. *The Astrophysical Journal Letters*, 806(1) :L19, 2015.
- [4] J-F Haas and Bradford Sturtevant. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities. *Journal of Fluid Mechanics*, 181 :41–76, 1987.
- [5] LF Henderson. The refraction of a plane shock wave at a gas interface. *Journal of Fluid Mechanics*, 26(3) :607–637, 1966.
- [6] LF Henderson. On the refraction of shock waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 198 :365–386, 1989.
- [7] Julian CR Hunt, Alan A Wray, and Parviz Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *Studying turbulence using numerical simulation databases, 2. Proceedings of the 1988 summer program*, 1988.
- [8] Thomas Leweke, Stéphane Le Dizes, and Charles HK Williamson. Dynamics and instabilities of vortex pairs. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 48 :507–541, 2016.
- [9] H. J. LeFevre C. C. Kuranz A. Towne M J. Wadas, S. Balakrishna and E. Johnsen. On the stability of a pair of vortex rings. *J Fluid Mech*, under review.
- [10] Heath J. LeFevre Carolyn C. Kuranz Aaron Towne Michael J. Wadas, William J. White and Eric Johnsen. A hydrodynamic mechanism for clumping along the equatorial rings of sn1987a and other stars. under review.
- [11] Sajad Mozaffari. *Adaptive Grid Refinement for Hybrid RANS/LES*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2020.
- [12] Ravi Samtaney and Norman J Zabusky. On shock polar analysis and analytical expressions for vorticity deposition in shock-accelerated density-stratified interfaces. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 5(6) :1285–1287, 1993.
- [13] Bram Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov’s method. *Journal of computational Physics*, 32(1) :101–136, 1979.
- [14] Weiqun Zhang, Ann Almgren, Vince Beckner, John Bell, Johannes Blaschke, Cy Chan, Marcus Day, Brian Friesen, Kevin Gott, Daniel Graves, et al. Amrex : a framework for block-structured adaptive mesh refinement. *The Journal of Open Source Software*, 4(37) :1370, 2019.

Addendum

J-F Haas and Bradford Sturtevant. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities. *Journal of Fluid Mechanics*, 181 :41-76, 1987