



INSTITUT SUPÉRIEUR INDUSTRIEL DE BRUXELLES

Laboratoire de Modulation : Échantillonnage et reconstruction du signal

28 novembre 2025

Auteurs

Yassine AMINE EL JAZAR
Daoud M'RABET

Professeur

Ing. M.Garcia ACEVEDO

Rue des Goujons 28, 1070 Bruxelles (Belgique)

Table des matières

1	Introduction au laboratoire	1
2	Rappels théoriques	2
2.1	échantillonnage d'un signal	2
2.1.1	Modèle Mathématique	2
2.1.2	Théorème de Shannon-Nyquist et Aliasing	3
2.2	reconstruction d'un signal	6
2.2.1	Application du filtre passe-bas idéal	6
2.2.2	Application de la transformée de Fourier inverse	8
2.2.3	Expression finale de Shannon : somme de sinus cardinals	8
3	Explication du mode opératoire et utilisation du Modicom 1	9
4	Travail supplémentaire	10

1 Introduction au laboratoire

L'étude de la modulation et du traitement des signaux constitue une étape fondamentale en électronique et en télécommunications. Avant de s'intéresser aux techniques de modulation analogiques et numériques, il est essentiel de comprendre les principes de base liés à la représentation et à la transmission d'un signal.

La première séance de laboratoire est consacrée à l'échantillonnage et à la reconstruction du signal, deux opérations centrales dans tout système numérique de communication. En effet, la conversion d'un signal analogique en une suite d'échantillons est indispensable pour son traitement numérique. Ce processus repose directement sur le théorème de Shannon-Nyquist, qui stipule que pour pouvoir reconstituer fidèlement un signal bande limitée, il faut l'échantillonner à une fréquence au moins deux fois supérieure à sa fréquence maximale.

Le système Modicom 1 sera utilisé comme support expérimental afin d'illustrer concrètement ces concepts. Il permet de manipuler différents signaux (sinusoïdaux, carrés, etc.) pour mettre en évidence les phénomènes liés à l'échantillonnage, tels que l'aliasing ou la distorsion de reconstruction.

2 Rappels théoriques

2.1 échantillonnage d'un signal

L'échantillonnage consiste à prélever périodiquement les valeurs d'un signal continu dans le temps pour obtenir un signal discret. Échantillonner, c'est « prendre des photos » d'un signal analogique $x(t)$ à intervalles réguliers T_s . On obtient une suite de valeurs discrètes $x[n] = x(nT_s)$ (signal discret dans le temps). si on échantillonne assez vite, on ne perd pas l'information et on peut reconstruire $x(t)$ exactement.

2.1.1 Modèle Mathématique

On modélise l'échantillonnage idéal par la multiplication du signal analogique par un peigne de Dirac $\text{III}_{T_s}(t)$:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \quad (2.1)$$

Cette équation traduit le fait que l'on « prélève » la valeur de $x(t)$ uniquement aux instants multiples de T_s .

Dans le domaine fréquentiel (TF continue) : On sait qu'une multiplication dans le domaine temporel correspond à une convolution dans le domaine fréquentiel. Ainsi, la transformée de Fourier du signal échantillonné est donnée par :

$$X_s(f) = X(f) * \mathcal{F}\{\text{III}_{T_s}(t)\} \quad (2.2)$$

Or, la transformée de Fourier du peigne de Dirac possède une propriété remarquable : elle est elle-même un peigne dans le domaine des fréquences, de période $f_s = \frac{1}{T_s}$. On a donc :

$$\mathcal{F}\{\text{III}_{T_s}(t)\} = \frac{1}{T_s} \text{III}_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s) \quad (2.3)$$

En substituant les termes de l'expression on obtient :

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s) \quad (2.4)$$

Cette relation montre que le spectre du signal échantillonné $X_s(f)$ est constitué de copies du spectre original $X(f)$, décalées de multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage f_s et additionnées entre elles. Autrement dit, dans le domaine fréquentiel, le signal échantillonné est la réplication périodique du spectre initial autour de 0, $\pm f_s$, $\pm 2f_s$, ...

Plus la fréquence d'échantillonnage f_s est élevée, plus ces répliques sont éloignées les unes des autres ; inversement, si f_s est faible, elles se rapprochent.

2.1.2 Théorème de Shannon-Nyquist et Aliasing

Cette propriété conduit directement au théorème d'échantillonnage de Shannon–Nyquist. Si le signal original $x(t)$ est bande limitée à une fréquence B (c'est-à-dire que $X(f) = 0$ pour $|f| > B$), Le signal ne contient pas de composantes fréquentielles (d'énergie) au-delà de cette fréquence B), alors une reconstruction parfaite du signal est possible à partir de ses échantillons si :

$$f_s > 2B \quad (2.5)$$

Cette condition garantit que les répliques de $X(f)$, espacées de f_s ne se chevauchent pas. Dans ce cas, il suffit d'appliquer un filtre passe-bas idéal de coupure B pour isoler la copie centrale de $X(f)$ et retrouver exactement le signal d'origine. Si, en revanche, la fréquence d'échantillonnage est inférieure à $2B$, les répliques se chevauchent dans le domaine fréquentiel (et donc on perd de l'information). Ce recouvrement provoque un phénomène appelé aliasing : des composantes hautes fréquences se replient vers les basses fréquences, rendant impossible toute reconstruction fidèle du signal original.

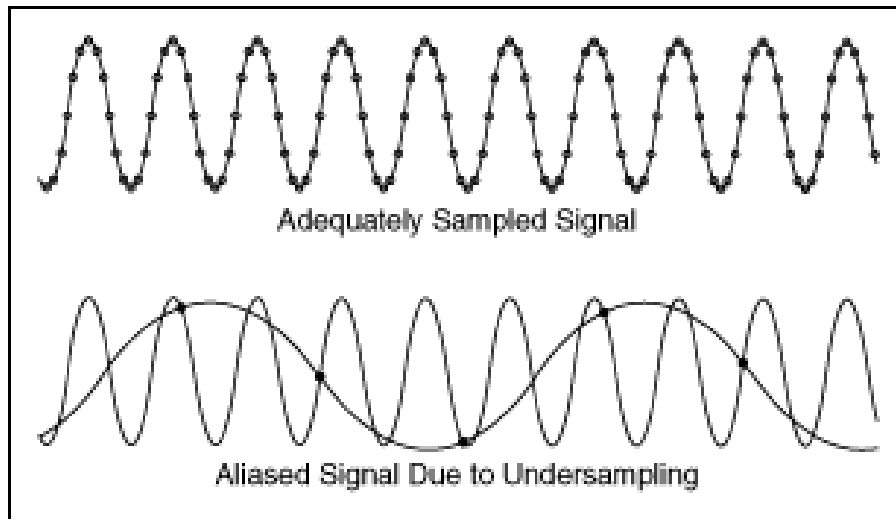


FIGURE 2.1 – Aliasing due to undersampling

On comprend mieux l'importance d'avoir une bonne fréquence d'échantillonnage grâce à cette image, si on sous-échantillonne (f_s très petit donc T_s très grand) alors on perd de l'information

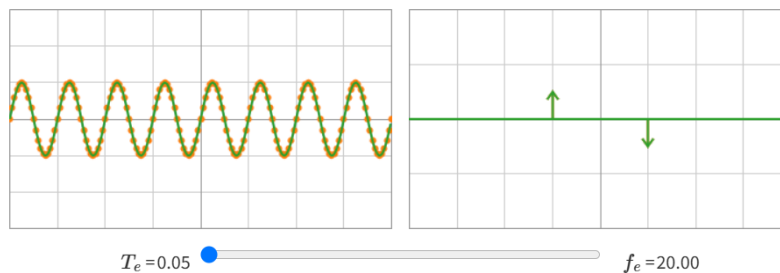


FIGURE 2.2 – Signal échantillonné à la bonne fréquence

Dans cette image nous observons un échantillonnage avec lequel nous pouvons bien obtenir le signal original sans soucis. Si on observe le spectre alors on a bien $-f_0$ et $+f_0$

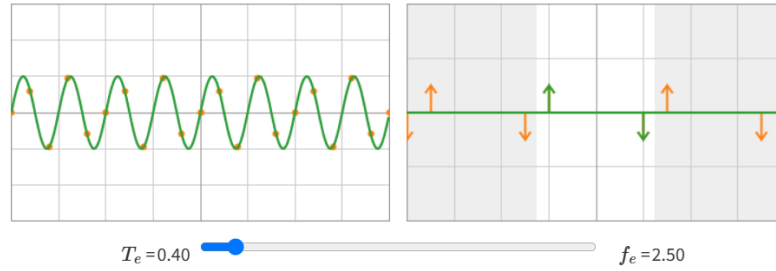


FIGURE 2.3 – Signal échantillonné avec une plus petite fréquence

cette seconde image est la suite logique de la précédente. Elle illustre parfaitement ce qui se passe quand on diminue la fréquence d'échantillonnage et que l'on commence à violenter le théorème de Shannon-Nyquist. Comme on prélève beaucoup moins d'échantillons par période, le signal discret (points orange) semble ne plus suivre correctement la sinusoïde : il paraît déphasé ou même de fréquence différente (C'est le début de l'aliasing dans le temps.). Pour le domaine fréquentiel, Le graphe montre encore les pics de spectre (raies de Fourier). En vert c'est la copie principale du spectre du signal original (autour de \pm sa fréquence réelle) et en orange c'est les répliques du spectre, créées par l'échantillonnage, qui apparaissent à chaque multiple de f_e , comme f_e est faible, ces répliques sont beaucoup plus rapprochées qu'auparavant donc les copies du spectre commencent à se chevaucher (zone grisée sur l'image). Ce chevauchement spectral est le repliement de spectre (ce que l'on appelle aliasing) : certaines composantes hautes fréquences du signal se rabattent sur des basses fréquences et se confondent avec le spectre original.

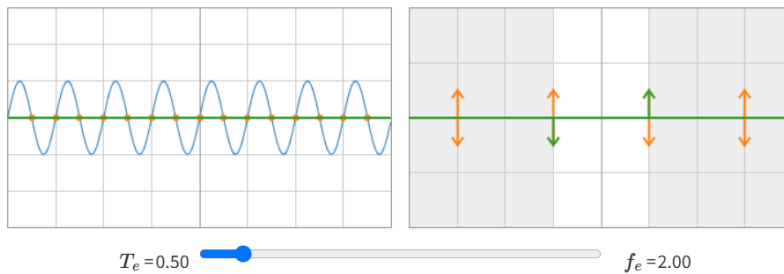


FIGURE 2.4 – Cas limite du théorème de Shannon-Nyquist

C'est le **cas limite** parce que lorsque $f_e = 2f_0$ (Nyquist), les répliques du spectre de la sinusoïde, situées à $\pm(f_0 + mf_e)$, **se touchent juste** à la frontière de la première zone de Nyquist $\pm f_e/2$ sans encore se chevaucher : la copie centrale a ses raies à $\pm f_0 = \pm f_e/2$, et la première paire de répliques est à $\pm(f_e \pm f_0) = \pm 3f_e/2$ et $\pm f_e/2$, donc **contact tangentiel** mais pas de recouvrement. Théoriquement, une reconstruction est encore possible avec un filtre passe-bas **idéal** de coupure $f_e/2$ et des instants d'échantillonnage parfaits ; toutefois, la moindre imperfection (tolérance de filtre, gigue d'horloge, bruit, non-linéarités) fait franchir cette frontière et crée du **repliement** irréversible. D'où l'exigence pratique $f_e > 2f_0$ (marge stricte) plutôt que l'égalité.

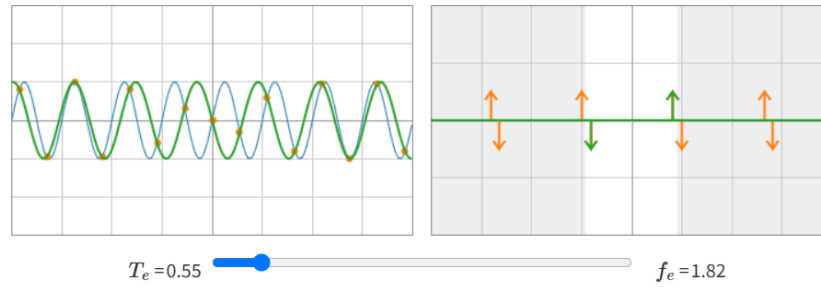


FIGURE 2.5 – la fréquence d'échantillonnage devient inférieure à la limite de Nyquist.

En reliant les échantillons, on obtient une sinusoïde apparente de fréquence plus basse, différente de celle du signal d'origine. L'échantillonnage trop lent donne l'illusion d'une fréquence plus faible que la réalité. Ce chevauchement signifie que des composantes fréquentielles différentes se superposent et deviennent indiscernables après l'échantillonnage le spectre observé est donc replié (aliasé). Cette image illustre le phénomène d'**aliasing complet** : quand la fréquence d'échantillonnage f_e devient inférieure à $2f_0$, les répliques du spectre se chevauchent et le signal reconstruit présente une fausse fréquence f_{alias} . Ce repliement est **irréversible** : l'information originale a été perdue lors de l'échantillonnage.

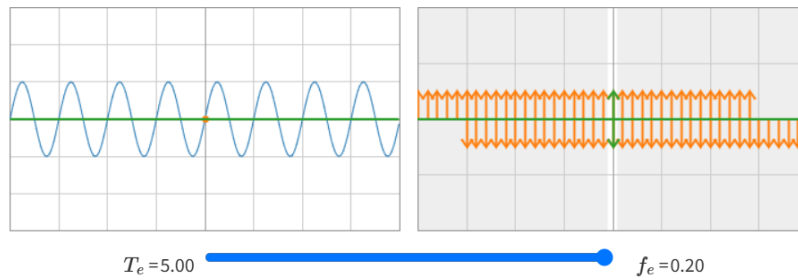


FIGURE 2.6 – échantillonnage extrêmement lent

Le spectre devient indistinguable — plus aucune information sur la fréquence réelle du signal n'est récupérable.

Interprétation physique : il s'agit du **cas extrême d'aliasing**. Le signal est si peu échantillonné qu'il semble presque statique, ou de fréquence nulle. En réalité, des dizaines de répliques du spectre se superposent — tout le spectre est « replié sur lui-même ».

En pratique, un tel échantillonnage correspond à une **perte totale d'information** : le système d'acquisition pourrait tout aussi bien enregistrer une valeur constante, c'est-à-dire

$$x_s(t) \approx \text{constante}.$$

Jusqu'ici nous avons vu les conséquences d'une fréquence d'échantillonnage trop petite (signal sous-échantillonné) mais il faut aussi faire attention à ce que la fréquence d'échantillonnage ne soit pas trop élevée, il est vrai que plus la fréquence d'échantillonnage est élevée et plus on pourra reconstruire un signal fidèle à l'original mais il y a bien une limite et une fréquence d'échantillonnage trop élevée peut être néfaste, en voici les principales conséquences :

- **Augmentation inutile du volume de données** : Le suréchantillonnage prélève des échantillons bien au-delà de la bande utile, n'apporte pas d'information supplémentaire et multiplie inutilement le nombre d'échantillons, augmentant ainsi le volume de données à stocker et à traiter.
- **Consommation d'énergie plus élevée** : Le suréchantillonnage entraîne une consommation d'énergie plus élevée, car il sollicite davantage le convertisseur analogique-numérique (ADC), le processeur et les circuits de traitement, qui doivent fonctionner à une fréquence d'échantillonnage plus rapide et traiter un flux de données plus important.
- **Limites physiques et bruit** : Même si on échantillonne plus vite, les circuits réels ont des limites (bande passante, précision de l'horloge, bruit des composants). Du coup, échantillonner plus ne crée pas d'information : ça peut même capturer plus de bruit hors bande si on ne filtre pas correctement avant l'ADC.
- **Complexité inutile du traitement** : Le suréchantillonnage alourdit inutilement la chaîne de traitement : il impose des filtres plus longs, des étapes de décimation, plus de mémoire tampon et de synchronisation, ce qui augmente la charge CPU/FPGA et la latence sans apporter d'information supplémentaire.

En résumé, le spectre d'un signal échantillonné n'est pas simplement une version discrète de celui du signal original : c'est une superposition infinie de répliques de ce spectre, espacées de la fréquence d'échantillonnage. Cette propriété fondamentale relie directement le temps discret et la périodicité fréquentielle, et elle explique pourquoi la condition $f_s > 2B$ est indispensable pour éviter l'aliasing et permettre la reconstruction parfaite d'un signal analogique à partir de ses échantillons.

2.2 reconstruction d'un signal

La reconstruction d'un signal consiste à retrouver un signal continu à partir de ses échantillons discrets. Elle repose sur la théorie de Shannon–Nyquist, selon laquelle un signal bande limité peut être parfaitement reconstruit s'il est échantillonné à une fréquence au moins deux fois supérieure à sa fréquence maximale. Dans le domaine fréquentiel, l'échantillonnage provoque la répétition du spectre du signal, et la reconstruction consiste à filtrer ces copies pour ne conserver que la bande originale. Mathématiquement, ce processus se traduit par une convolution avec une fonction sinc, qui sert de noyau idéal de reconstruction. Cette section servira à expliquer les aspects mathématiques de la reconstruction du signal, ce concept est ainsi utilisé dans de nombreuses applications modernes en télécommunications, imagerie et électronique embarquée.

2.2.1 Application du filtre passe-bas idéal

Lorsque l'on reconstruit un signal à partir de ses échantillons, le spectre du signal échantillonné est répété périodiquement en fréquence. Cela signifie que le spectre original apparaît plusieurs fois, décalé par des multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s) \quad (2.6)$$

Même si la condition de Shannon–Nyquist est respectée, ces copies existent mais ne se chevauchent pas. Pour extraire uniquement la bande originale, il faut filtrer toutes les copies indésirables. Le filtre passe-bas idéal permet de ne conserver que la bande contenant le signal original, et ainsi de reconstruire parfaitement le signal continu. Dans le cadre de la théorie nous pouvons nous demander comment on représente un filtre passe bas mathématiquement. Un filtre passe-bas idéal est défini en domaine fréquentiel par sa fonction de transfert $H(f)$:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (2.7)$$

Avec f_c qui représente la fréquence de coupure

- $H(f) = 1$ signifie que toutes les fréquences dans la bande passante sont laissées passer sans modification.
- $H(f) = 0$ signifie que toutes les fréquences hors bande sont complètement éliminées.

En domaine temporel, ce filtre correspond à une convolution avec la fonction sinc :

$$h(t) = 2.f_c.\text{sinc}(2.f_c.t) \quad (2.8)$$

faisons une petite parenthèse pour démontrer ce résultat afin que l'on sache d'où viennent les formules utilisées. Nous savons très bien que pour passer du domaine fréquentiel au domaine temporel Pour connaître l'effet de ce filtre sur le signal en temps, on calcule sa réponse impulsionnelle $h(t)$ qui est tout simplement la transformée de Fourier inverse de $H(f)$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.9)$$

Comme $H(f) = 0$ pour $|f| > f_c$, l'intégrale se réduit à :

$$h(t) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi ft} df \quad (2.10)$$

voici le détail du calcul de l'intégrale :

$$h(t) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi ft} df \quad (2.11)$$

$$= \left[\frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi t} \right]_{f=-f_c}^{f=f_c} \quad (2.12)$$

$$= \frac{e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t}}{j2\pi t} \quad (2.13)$$

$$= \frac{2 \sin(2\pi f_c t)}{2\pi t} \quad (2.14)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} \quad (2.15)$$

$$= 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (2.16)$$

où la fonction sinc est définie par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (2.17)$$

Donc comme constaté l'application d'un filtre passe bas revient à la multiplication de la fonction par une fonction "porte" (donc à un produit de convolution dans le domaine temporel, comme vu au cours de traitement du signal l'année passée).

2.2.2 Application de la transformée de Fourier inverse

Ce calcul correspond à une convolution dans le domaine temporel, comme la transformée de Fourier inverse a été définie plus tôt je ne la redéfinie pas ici mais on sait qu'en appliquant la transformée de Fourier inverse à $X_s(f)$ on obtient le signal $x_r(t)$:

$$x_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_s(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.18)$$

2.2.3 Expression finale de Shannon : somme de sinus cardinals

En utilisant les impulsions de Dirac du signal échantillonné, la convolution donne la formule classique :

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right) \quad (2.19)$$

C'est l'expression mathématique complète du signal reconstruit à partir de ses échantillons.

- La convolution avec cette sinc "étale" chaque impulsion en une fonction continue dans le temps, qui se superpose aux autres.
- Grâce à la propriété des sinc ($\operatorname{sinc}(n) = 0$ pour chaque $n \neq 0$), chaque échantillon contribue exactement à sa position et pas aux autres.

Une écriture plus condensée serait d'écrire :

$$x_r(t) = (x_s(t) * \operatorname{sinc}(t/T_e)) \quad (2.20)$$

Ceci marque la fin de la partie théorique de ce rapport, dans la section qui suit nous allons illustrer l'échantillonnage et la reconstruction du signal grâce au Modicom 1.

3 Explication du mode opératoire et utilisation du Modicom 1

4 Travail supplémentaire

Pour le travail supplémentaire nous avons décidé de faire une simulation de l'échantillonnage sur logiciel