Université Paris–Est–Créteil
UFR de Sciences et Technologies
Année 2020–2021

M1 Mathématiques et Applications
Outils Numériques
J. Printems

PROJET
Un exemple d'option dans un modèle de volatilité stochastique.

À rendre sur EPREL `https://eprel.u-pec.fr/eprel : M1 Outils Numériques -> Travaux -> Projet 2020` en cliquant sur Nouvelle soumission.
Date limite : 08/01/21 minuit.

On considère l'évolution du prix d'un actif $(S_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ en des dates t_n régulièrement espacées sur un intervalle $[0,T]$. Afin de prendre en compte la dépendance en temps de la volatilité, on remplace le modèle log-normal (voir Cours C) par le modèle suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_{n+1} &=& S_n\Big(1+r\,\Delta t+\sigma_n Z^1_{n+1}\sqrt{\Delta t}\Big),\quad 0\leq n\leq N-1\\ \sigma_n &=& \sqrt{v_n},\\ v_{n+1} &=& v_n+k(a-v_n)\,\Delta t+\theta\,\sigma_n Z^2_{n+1}\sqrt{\Delta t},\end{array}\right.$$

où $(Z^1_n)_{n\geq 1}$ et $(Z^2_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites i.i.d. selon $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $\mathcal{F}_n=\sigma((S_k,\sigma_k),\ k\leq n)$. On suppose que Z^1_{n+1} et Z^2_{n+1} sont indépendants de $\mathcal{F}_n$ mais **pas entre eux**. En fait, la structure de dépendance entre S_n et σ_n est donnée par la matrice de covariance suivante :

$$\mathrm{Cov}\left(\left[\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n},\ v_{n+1}-v_n\right]\mid\mathcal{F}_n\right)=\sigma_n^2\,\Delta t\begin{bmatrix}1&\rho\\ \rho&1\end{bmatrix}$$

Paramètres : $S_0=100$ (spot), $\sigma_0=0.2$, $r=0.03$, $k=2$ (taux de retour à la moyenne), $a=0.04$ (variance asymptotique), $\theta=0.1$ (« vol de la vol »), $\rho=-0.5$ (corrélation entre le sous-jacent et la vol).

Q1. *Étude statistique du modèle.*

— Générez et tracez M trajectoires de $n\mapsto S_n$ et $n\mapsto\sigma_n$.
— Histogrammes de S_{100} et v_{100} pour deux valeurs de ρ différentes (positive et négative).
— Tracez le nuage de points (S_{100},v_{100}) (c.-à-d. à la date $T=1$), puis *une* trajectoire du couple $n\mapsto(v_n,S_n)$ pour au moins plusieurs valeurs de ρ toutes valeurs des paramètres autres étant égales. Que représente ρ ? Quelle est son influence ?

Pour cela, on pourra former des tableaux `stock` et `vol` de taille $N\times M$ tel que par exemple `stock(t,i)` = valeur du sous-jacent à la date `t` selon le scénario `i` par exemple.

Q2. On considère trois types d'options :

Option 1 : option d'achat standard de prix d'exercice K de payoff :

$$H_1=(S_N-K)_+,\quad V_1=e^{-rT}\mathbb{E}(H_1).$$

Option 2 : option d'achat sur moyenne :

$$H_2 = \left(\frac{1}{N}(S_0 + \cdots + S_N) - K\right)_+, \quad V_2 = e^{-rT}\mathbb{E}(H_2).$$

Option 3 : option d'achat sur max :

$$H_3 = \left(\max_{1\le n\le N} S_n - K\right)_+, \quad V_3 = e^{-rT}\mathbb{E}(H_3).$$

Pour chacune des options évaluer le prix de l'option V_i par une Monte Carlo en précisant à chaque fois les intervalles de confiance (95%).

Q3. Réduction de variance :

Élaborer une méthode de réduction de variance pour le calcul de V_1 et V_3.

Pour le calcul de V_2, montrez que (relation de parité asiatique)

$$\text{Call} - \text{Put} = S_0\left(\frac{1-e^{-rT}}{rT}\right) - Ke^{-rT}.$$

On pose

$$H_{CPar} = e^{-rT}\left(K - \frac{1}{N}(S_0 + \cdots + S_N)\right)_+ + S_0\left(\frac{1-e^{-rT}}{rT}\right) - Ke^{-rT},$$

puis $Z_\lambda = \lambda H_C + (1-\lambda)H_{CPar} = H_{CPar} + \lambda(H_C - H_{CPar})$. On remarque $\mathbb{E}(Z_\lambda) = \mathbb{E}(H_C) = \mathbb{E}(H_{CPar})$. Déterminez λ de sorte que $\text{Var}(Z_\lambda)$ soit minimum. Déterminer alors un prix de l'option V_2 avec son intervalle de confiance.