

# Test 2\*

## Partie 1

Soit  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées  $3 \times 3$  à coefficients réels, et soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  défini par :

$$F = \{M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Donner une base de  $F$ . Quelle est la dimension de  $F$  ?
3. Donner, en fonction des valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , le rang de  $M(a, b, c)$ .
4. Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $M(a, b, c)$  soit inversible.

## Partie 2

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  une base de  $E$ . On considère la famille  $\mathcal{S} = \{u, v, w\}$  de  $E$  avec  $u = e_1 - e_3$ ,  $v = -e_2$  et  $w = e_1 + e_3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est donnée par :

$$A = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  est une base de  $E$ .
2. Calculer le déterminant de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle inversible ?
3. Calculer  $f(u)$ ,  $f(v)$  et  $f(w)$  en fonction de  $u$ ,  $v$  et  $w$  et en déduire la matrice  $D = [f]_{\mathcal{S}}$  de  $f$  dans  $\mathcal{S}$ .
4. Donner la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{S}$  et calculer son inverse  $P^{-1}$ .
5. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

---

\*SMA-MIP