Test 1

Exercice I (8 points, temps estimé = 20 minutes)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (1 pt) Déterminer les valeurs propres de A. *(Attention, il faut détailler vos calculs.)*
2. (3 pts) Déterminer les espaces propres correspondants.
3. (2 pts) Montrer que A est diagonalisable. Puis diagonaliser la matrice A, c'est-à-dire, déterminer P (inversible) et D (diagonale) telles que $A = PDP^{-1}$. *(Pas besoin de calculer P^{-1}.)*
4. (2 pts) Sans faire le calcul de valeurs propres et de vecteurs propres, diagonaliser la matrice $A^n + 2A + 3I$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice II (5 points, temps estimé = 15 minutes)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}$, où a et b sont dans $\mathbb{C}$.

1. Quelles conditions de valeur de (a, b) sont nécessaires et suffisantes pour que A soit diagonalisable ? *Attention, vous ne devez pas diagonaliser explicitement la matrice A.*

Exercice III (8 points, temps estimé = 25 minutes)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, $O \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice nulle et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. (2 pts) Montrer que les valeurs propres de A sont aussi des valeurs propres de B.
2. (3 pts) Montrer que les valeurs propres de B sont aussi des valeurs propres de A.
3. (3 pts) Montrer que $\dim(\ker(B)) = 2\dim(\ker(A))$.