Yassine Ait Mohamed

Td n° 1

ALGÉBRE 1

Exercice 1. *Soient les quatre assertions suivantes :*

$$(a)\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad (b)\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$$

$$(c)\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0 \quad (d)\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ y^2>x.$$

1. *Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?*
2. *Donner leur négation.*

Exercice 2. *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.*
2. *L'application f est croissante.*
3. *L'application f est croissante et positive.*
4. *Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.*
5. *Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$.*

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 3. *Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :*

1. *f est majorée ;*
2. *f est bornée ;*
3. *f est paire ;*
4. *f est impaire ;*
5. *f ne s'annule jamais ;*
6. *f est périodique ;*
7. *f est croissante ;*
8. *f est strictement décroissante ;*
9. *f n'est pas la fonction nulle ;*
10. *f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;*
11. *f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;*
12. *f est inférieure à g ;*
13. *f n'est pas inférieure à g.*

Exercice 4. *Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :*

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)(A \cap B = A \cap C$ *et* $A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$.

Exercice 5 (Différences symétriques)**.** *Soit E un ensemble ; A et B des sous-ensembles de E. On rappelle que $A \setminus B = A \cap B^c$ et on définit la différence symétrique de A et B par*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Faire un dessin pour illustrer cette définition
2. *Soient A, B, C, D des sous-ensembles de E. Prouver que*
   i) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$
   ii) $A \triangle B = \emptyset$ *ssi* A=B
   iii) *Si* $A \triangle B = A \triangle C$ *alors* $B = C$
   iv) *Si* $A \triangle B = A \cap B$ *alors* $A = B = \emptyset$.

Exercice 6. *Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Démontrer que :*
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\, (A \subset B) \Longrightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F)\, f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F)\, f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 7 (Injective, surjective, bijective)**.** *Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, bijective, surjective ?*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \textit{si } n \textit{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 8. *Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.*

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. *Montrer que si f est bijective alors* $\forall n \in \mathbb{N}\ (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Exercice 9 (Application caractéristique)**.** *On définit, pour E ensemble, et A partie de E, l'application caractéristique de A par :*

$$\begin{aligned}\chi_A \ : E &\longrightarrow \{0,1\}\\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & sinon\end{cases}\end{aligned}$$

Montrer les propriétés suivantes :

1. *L'application* $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E,\{0,1\})$ *définie par* $A \longmapsto \chi_A$ *est bijective.*
2. $A \subset B \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_B$
3. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$
5. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$
6. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1-\chi_B)$
7. $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B = (\chi_A - \chi_B)^2 = |\chi_A - \chi_B|$

Exercice 10. *Soient E, F et G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.*

1. Montrer que : $g \circ f$ *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective*
2. Montrer que : $g \circ f$ *injective* $\Rightarrow f$ *injective*

Exercice 11. *Soit E un ensemble et f une application injective de E dans E, c'est à dire une application vérifiant :*

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

On définit par récurrence sur $n \geq 1$ des applications f^n par

$$f^1 = f \qquad\qquad f^n = f \circ f^{n-1}$$

où $f \circ g$ désigne la fonction composé de g par f définie par

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

pour tout $x \in E$ et toute application $g : E \longrightarrow E$.

1) *Montrer que pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est injective.*
2) *Montrer que si f surjective, on a de même pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est surjective.*

Exercice 12. *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.*

1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2) *Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?*

Exercice 13. *Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation suivante :*

$$A\mathcal{R}B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \bar{B},$$

où $\bar{B}$ est le complémentaire de B (dans E). Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 14. *Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Deux parties B et C de E sont en relation, noté $B\mathcal{R}C$, si $B\Delta C \subset A$.*

1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2) *Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la classe de B est $\{(B \cap A^c) \cup K;\ K \in \mathcal{P}(A)\}$.*

Exercice 15. *Effectuer les divisions euclidiennes de*
$3X^5 + 4X^2 + 1$ *par* $X^2 + 2X + 3$,
$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ *par* $X^3 + X + 2$,
$X^4 - X^3 + X - 2$ *par* $X^2 - 2X + 4$.

Exercice 16. *Effectuer la division selon les puissances croissantes de :*

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre } 2.$$

Exercice 17. *Calculer pgcd(P,Q) lorsque :*

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ *et* $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ *et* $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 18. *Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynomes suivants en facteurs irréductibles.*

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

Exercice 19.

1. *Décomposer* $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
2. *Décomposer* $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
3. *Décomposer* $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
4. *Décomposer* $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
5. *Décomposer* $\frac{X}{X^2-4}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
6. *Décomposer* $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
7. *Décomposer* $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
8. *Décomposer* $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
9. *Décomposer* $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.
10. *Décomposer* $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{C}$.
11. *Décomposer* $\frac{X+i}{X^2+i}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{C}$.
12. *Décomposer* $\frac{X}{(X+i)^2}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{C}$.
13. *Décomposer* $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
14. *Décomposer* $\frac{X}{X^4+1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
15. *Décomposer* $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
16. *Décomposer* $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
17. *Décomposer* $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
18. *Décomposer* $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
19. *Décomposer* $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
20. *Décomposer* $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.