Feuille d'exercices: Topolgie générale

Yassine Ait Mohamed

Exercice 1

A)- *Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F.*

1) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles de E. Montrer que $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ et que si f est injective alors on a égalité. Réciproquement, montrer que si on a toujours égalité, alors f est injective.*
2) *Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.*
3) *Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.*

B)- 1) *Soit $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}+$ une application croissante qui vérifie que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x, y \geq 0$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.*
On suppose que f ne soit pas identiquement nulle et l'on considère un espace métrique (E, d). Montrer que l'application $(x, y) \longmapsto f(d(x, y))$ une distance sur E.

2) *Vérifier que, sur $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |arctan(x) - arctan(y)|$ est une distance.*
3) *Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que l'application η définie sur $E \times E$ par $\eta(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, pour $x, y \in E$, est une distance.*

C)- 1) *Soient (E, d) un espace métrique, F un ensemble et $\psi : E \longrightarrow F$ une bijecion.*

a) *Montrer que $d_\psi : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d_\psi(x, y) = d(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}1(y))$ une distance sur F.*

b) *Montrer que ψ une isométrie de (E, d) sur (F, d_ψ).*

Exercice 2

1) *Montrer que l'intersection d'une famille de topologies est une topologie.*

Soient A, B deux parties d'un espace topologique X.

a) Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Montrer l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

c) Montrer l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 3 *On pose* $X :=]0, +\infty[=$ *et pour tout* $\alpha \leq 0$, *on pose* $\theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[\subset X$. *On considère* τ *la famille de parties de* X *donné par*

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{\theta_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+\}$$

1) Monter que τ *est une topologie sur* X.

2) Determiner les fermés de (X, τ).

3) Donner $int(A)$ *et* $adh(A)$ *dans des cas suivantes :*

$$A =]0, 1[, \quad A := [\frac{1}{2}, +\infty[$$

Exercice 4

Soit $X := \{a, b, c, d\}$ *un ensemble à 4 éléments et soit* τ *la famille de* $P(X)$ *suivante :*

$$\tau := \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}$$

1) Monter que τ *est une topologie sur* X.

2) Donner les fermés de (X, τ).

Exercice 5

Soient X *et* Y *deux espaces topologiques et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. Montrer que les propositions suivantes*

i) f *est continue.*

ii) $\forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

iii) $\forall B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

iv) $\forall B \subset Y$, $f^{-1}(\mathring{B}) \subseteq \widehat{f^{-1}(B)}^{\circ}$.

sont équivalentes.

Exercice 6 *Soit (X,τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Monter que si A est un ouvert. Alors on a*

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}.$$

Exercice 7 *Soit (X,τ) un espace topologique et soient U et V deux ouverts disjoints de X. Monter que on a :*

$$\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset.$$

Exercice 8

Soient (X,τ) un espace topologique et Y une partie non vide de X. Monter que la famille τ_Y de parties de Y définie par :

$$\tau_Y := \{U \cap Y / \, U \in \tau\}.$$

est une topologie sur Y.

Exercice 9 *Soit (X,τ) un espace topologique. Pour tout $x \in X$, on désigne par F_x l'ensemble de tous les voisinages fermés de x. Montrer que X est séparé si et seulement si on a :*

$$\forall x \in X, \bigcap_{V \in F_x} V = \{x\}.$$

Exercice 10 *Soient (X,τ) un espace topologique et $\gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ l'application qui associe à toute partie A de E, la partie $\gamma(A) := \overset{\circ}{\overline{A}}$ de X.*

1) Montrer que pour tous A, $B \in \mathcal{P}(X)$, on a :

$$A \subseteq B \Longrightarrow \gamma(A) \subseteq \gamma(B)$$

2) *Montrer que pour toute partie ouverte A de X, on a :*

$$A \subseteq \gamma(A).$$

3) *Montrer que pour toute partie A de X, on a*

$$\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A).$$

4) *Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints de X, alors $\gamma(U)$ et $\gamma(V)$ sont aussi disjoints.*

5) *On dit qu'une partie A de X est un ouvert régulier si l'on a : $\gamma(A) = A$. Montrer qu'une intersection de deux ouverts réguliers de X donne un ouvert régulier de X.*

Exercice 11 *Soient X, Y des espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$*

1) *Montrer que si A et B sont fermés alors $A \times B$ est fermé.*

2) *Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.*

Exercice 12 *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application de X dans Y. Montrer que si Y est séparé et f est injective et continue alors X est séparé.*

Exercice 13 *Soient X et Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soient aussi τ une topologie sur X et $\tau^{'}$ la topologie la plus fine de Y qui rend l'application*

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (F, \tau^{'})$$

continue

1) *Montrer que l'on a*

$$\tau^{'} := \{U \in \mathcal{P}(F) \,|\, f^{-1}(U) \in \tau\}$$

2) *En déduire que si f est une bijection. Alors $f : (X, \tau) \longrightarrow (F, \tau^{'})$ est un homéomorphisme.*

Exercice 14 *Vérifier que les espaces suivants sont des espaces métriques :*

1) $\mathbb{R}^*$ *avec* $d(x,y) := |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.

2) $E := \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ $d(f,g) := sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$

3) $\mathbb{R}$ $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$

Exercice 15

Soient (E,d) *un espace métrique,* $x \in E$ *et* $r > 0$.

1) *Montrer que la boule ouverte* $B(x,r)$ *est un ouvert de* E.

2) *Montrer que* $\{x\}$ *est un fermé de* E

Exercice 16 *Soient* E *un ensemble et* $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie pour tous* x *et* y *par :* $d(x,y) = 1$ *si* $x \neq y$, $d(x,y) = 0$ *si* $x = y$.

1) *Démontrer que* d *est une distance sur* E, *elle est appelée distance discréte sur* E.

2) *Déterminer* $B(x,r)$ *ou* $x \in E$ *et* $r > 0$.

3) *Déterminer les ouverts puis les fermés de* (E,d).

Exercice 17 *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $x \in X$. *Monter que les propositions suivantes sont equivalentes :*

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) *il existe une suite de points de* A *convergeant vers* x.

iii) $d(x,A) = 0$.

iv) *tout voisinage de* x *a une intersection non vide avec* A.

Exercice 18 *Soit (X,d) un espace métrique. Pour tous $x,y,z \in X$, montrer que*

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$

.

Exercice 19 *(Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$)*

On se place dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle.

1) Soient $a,b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \leq b$. Montrer que les intervalles fermés $[a,b]$, $]-\infty,a]$ et $[a,+\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$

Exercice 20 *Soient (X,d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :*

i) $A \neq \emptyset$.

ii) Pour toute partie $D \subseteq X$ dense dans X, on a $D \cap A \neq \emptyset$.

Exercice 21

Soit (E,d) un espace métrique. On rappelle que la distance à une partie A de E est la fonction

$$d(x,A) := inf\{d(x,y) : y \in A\}, \quad (x \in E).$$

1) Montrer que $\forall A \in P(E)$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$$

est 1-lipschitzienne $\Big($i.e. qu'elle vérifie

$$\forall x,y \in E \ \ |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)\Big)$$

2) Soient $A, B \in P(E)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.

3) En déduire que si F et G sont deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts U et V tels que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 22 *Soient E, F deux espaces métriques et $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications continues.*

a) Montrer que $\Delta = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.

b) Soit $A \in P(E)$. Montrer que si A est dense dans E et si $f \equiv g$ sur A, alors $f \equiv g$ sur E.

c) Montrer que $\Gamma_f := \{(x, f(x))/x \in E\}$ est un fermé dans $E \times F$.