Yassine Ait Mohamed
ENS-MIP

**Série 1: Nombres réels**

## Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1. $\sqrt{1+x} = 1 - x$.
2. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 1$.
3. $\sqrt{4-x} > x + 5$.

## Exercice 2

Ètablir les inégalités suivantes, où $a$, $b$, et $c$ sont des réels :

1. $2ab \leq a^2 + b^2$.
2. $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

## Exercice 3

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $|a+b| = |a| + |b|$ si et seulement si $a$ et $b$ sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. En déduire que $|a-b| = |a-c| + |b-c|$ si et seulement si $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$.

## Exercice 5

Montrer que :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leq 1$.

## Exercice 6

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx) \quad (*)$$

où $E(y)$ est la partie entière du réel $y$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que
$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n}.$$
On pourra appuyer son raisonnement en traçant la droite réelle et en plaçant $E(x)$, $x$, $x + \frac{k}{n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $E(x) + 1$ et $x + \frac{p+1}{n}$.
2. En déduire que :
$$nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p$$
et $E(nx)$ en fonction de $n$, $E(x)$ et $p$.
3. Calculer $E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ et calculer $E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{p+1, \dots, n-1\}$.
4. En coupant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ en deux parties, montrer l'égalité $(*)$.

## Exercice 7

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$,
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$
2. En déduire que
$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$
admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

## Exercice 8

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure et une borne supérieure, et si oui, les déterminer :

1. $A = \left\{ \frac{2n}{2n-1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
2. $B = \left\{ \frac{1}{1-2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
3. $C = \left\{ \frac{x^3}{|x^3-1|}, x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \right\}$,
4. $D = \left\{ \frac{x^n}{|x^n-1|}, x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

## Exercice 9

Soit $X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Montrer que $X$ est majoré et minoré.
2. En déduire que $X$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.

## Exercice 10

Soit $X = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que $X$ est minoré et majoré.
2. Montrer que $X$ admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que $X$ admet une borne supérieure et une borne inférieure, et les déterminer.

## Exercice 11

Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}; \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}.$$

1. À quoi est égal $A + B$ dans le cas où $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4[$ ? Dans le cas où $A = ]-\infty, 0]$ et $B = [1, 2]$ ?
2. On suppose $A$ et $B$ majorés. Montrer que $A + B$ est majoré, et que :

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$