Devoir 3

Exercice 1 : Dans l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels $M_n(\mathbb{R})$, on considère les sous-ensembles :

$$S_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = A\} \quad \text{et} \quad A_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$$

où A^T est la matrice transposée de la matrice A.

1. Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$.
3. **Application** : Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.
   Déterminer les matrices $S \in S_2$ et $A \in A_2$ telles que $M = S + A$.

Exercice 2 : On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P) = (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\ker(\varphi - 5I)$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel réel. On rappelle qu'un projecteur P de E est un endomorphisme de E qui vérifie l'égalité $P \circ P = P$.

1. Montrer que si P est un projecteur de E, alors :
   $$\mathrm{Im}(I_E - P) = \ker(P) \quad \text{et} \quad \ker(I_E - P) = \mathrm{Im}(P),$$
   où I_E est l'endomorphisme identité de E.
2. Soient P et Q deux projecteurs de E.
   (a) Montrer les équivalences suivantes :
   $$\begin{cases} P \circ Q = 0 & \iff \mathrm{Im}(Q) \subset \ker(P), \\ P \circ Q = P & \iff \ker(Q) \subset \ker(P), \\ Q \circ P = P & \iff \mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Im}(Q). \end{cases}$$
   (b) On pose :
   $$E_1 = \ker(Q) \cap \ker(P), \quad E_2 = \ker(Q) \cap \mathrm{Im}(P),$$
   $$E_3 = \mathrm{Im}(Q) \cap \ker(P), \quad E_4 = \mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Im}(P).$$
   Montrer que si $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$, alors $P \circ Q = Q \circ P$.

Exercice 4 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur si $p \circ p = p$.

1. (a) Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a $p(y) = y$.
   (b) En déduire que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
   On dit que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
2. (a) Démontrer que p est un projecteur de E si et seulement si $\mathrm{Id} - p$ est aussi un projecteur de E.
   (b) Montrer que si p est un projecteur, alors les relations suivantes sont vérifiées :
$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \ker(p), \quad \ker(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p).$$
3. Démontrer qu'un projecteur p commute avec un endomorphisme u de E si et seulement si son noyau et son image sont stables par u (c'est-à-dire, $u(\ker(p)) \subset \ker(p)$ et $u(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$).
4. On suppose désormais que E est de dimension finie n.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle p a pour matrice
$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   où r est le rang de p, I_r est la matrice identité d'ordre r et 0_{n-r} est la matrice nulle d'ordre $n - r$.
   (b) En déduire que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice 5 : Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et φ un endomorphisme de E tel que $\varphi^2 = 0$ (l'application nulle) et $\varphi \neq 0$. Posons $r = \mathrm{rg}(\varphi)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \ker(\varphi)$. En déduire que $r \leq 3 - r$ et calculer r.
2. Soit $e_1 \in E$ tel que $\varphi(e_1) \neq 0$. Posons $e_2 = \varphi(e_1)$.
   (a) Montrer (sans le chercher) qu'il existe $e_3 \in \ker(\varphi)$ tel que la famille $\{e_2, e_3\}$ soit libre.
   (b) Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n (c'est-à-dire, $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$). On note :
$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}.$$

1. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit a un vecteur de E tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ constitue une base de E.
3. Soit $\varphi_a : C(f) \to E$ l'application définie par $\varphi_a(g) = g(a)$. Montrer que φ_a est un isomorphisme.
4. En déduire que $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$.