Logique, Ensembles et applications, Polynomes et Fractions rationelles

1 Bases de la logique

A/ 1) *Une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai ou faux.*

2) *La négation de la proposition P est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse. Elle est notée nonP.*

3) *Si P et Q sont deux propositions, P et Q est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.*

4) *Si P et Q sont deux propositions, P ou Q est la proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie.*

B/ *Les opérateurs non, et, ou, sont reliés par les formules suivantes :*

non (P et Q)=(non P) ou (non Q).
non (P ou Q)=(non P) et (non Q).

C/ *L'implication $P \implies Q$ est la proposition non P ou Q. Pour démontrer $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La négation de la proposition $P \implies Q$ est donc la proposition P et non Q.*

D/ *On dit que les proposition P et Q sont équivalentes lorsque l'on a à la fois $P \implies Q$ et $Q \implies P$ qui sont vraies. On note alors $P \iff Q$.*

E/ *La contraposée de la proposition $P \implies Q$ est la proposition non $Q \implies$ non P. Les deux propositions $P \implies Q$ et non $Q \implies$ non P sont équivalentes. L'une est vraie si et seulement si l'autre est vraie.*

F/ *Quantificateurs* :

a) *Le quantificateur pour tout ou quel que soit est noté $\forall$. La proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie lorsque, pour tout $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie.*

b) *Le quantificateur il existe (au moins un) est noté $\exists$. La proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.*

c) *Le quantificateur il existe un unique est noté $\exists!$. La proposition $\exists! x \in E,\ P(x)$ est vraie lorsqu'il existe un unique $x \in E$ telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.*

d) *La négation de $\forall x \in E,\ P(x)$ est $\exists x \in E,$ non $P(x)$.*

e) *La négation de $\exists x \in E,\ P(x)$ est $\forall x \in E,$ non $P(x)$.*

G/ *Conditions nécessaires, conditions suffisantes :*
Lorsque $P \implies Q$, on dit que P est une condition suffisante à Q, et que Q est une condition nécessaire à P.

H/ *Méthodes de raisonnement*

1) *Par implication : pour prouver que $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et on utilise différentes propriétés déjà connues pour établir que Q est vraie.*
2) *Par double implication / par équivalence : Pour démontrer que $P \iff Q$, il y a deux méthodes standard :*
   i) *On raisonne par double implication : on suppose d'abord que P est vraie, et on démontre que Q est vraie. Ensuite, on suppose que Q est vraie, et on démontre que P est vraie.*
   ii) *On passe de P à Q en utilisant uniquement des équivalences. C'est une méthode souvent déconseillée, car il faut faire très attention à ce que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence.*
3) *Par contraposée : pour démontrer que $P \implies Q$, il suffit de démontrer la contraposée de cette proposition, c'est-à-dire non $Q \implies$ non P.*
4) *Par l'absurde : pour démontrer que $P \implies Q$, on peut supposer que P et non Q sont toutes les deux vraies, et obtenir une contradiction; pour démontrer que P est vraie, on peut supposer que non P est vraie et obtenir une contradiction.*
5) *Par récurrence : Le raisonnement par récurrence est utilisé pour démontrer des propriétés qui dépendent d'un entier n. Il est basé sur le principe suivant :*

   Soit $P(n)$ une propriété concernant un entier naturel n. On suppose que $P(0)$ est vraie et que, pour tout entier naturel k, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   Pour bien rédiger une démonstration par récurrence, il est nécessaire de faire apparaitre clairement les 4 étapes : définir précisément quelle est la propriété $P(n)$ que l'on souhaite démontrer, écrire la phase d'initialisation, la phase d'hérédité, puis la conclusion. Il existe deux erreurs fréquentes de rédaction de la phase d'hérédité.

   i) *commencer cette phase par la phrase : "supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie et prouvons $P(n+1)$". Si $P(n)$ est vraie pour tout entier n, il n'y a plus rien à prouver!*
   ii) *Commencer cette phase par la phrase : supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie et prouvons $P(n+1)$. L'erreur est plus subtile. Le principe de récurrence s'écrit formellement $\big(P(0)$ vraie ET $(\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \implies P(n+1))\big) \implies \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie. La dernière rédaction serait correcte si le principe de récurrence s'écrivait $\big(P(0)$ vraie ET $(\exists n \in \mathbb{N}\ P(n) \implies P(n+1))\big) \implies \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie. ce qui est faux*

2 Ensembles, applications, relations

A/ *On appelle élément d'un ensemble E tout objet qui appartient à E.*

B/ *Si E et F sont deux ensembles, on dit que E est une partie de F, que E est un sous-ensemble de F, ou encore que E est inclus dans F si tout élément de E est aussi élément de F. On note $E \subset F$.*

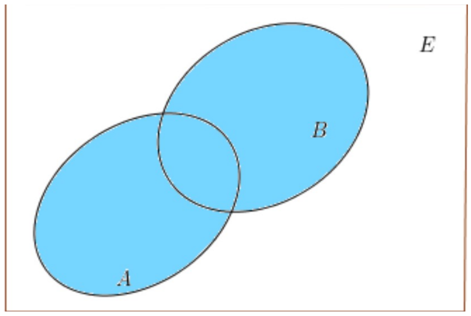
C/ *Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément, l'ensemble vide. Il est noté $\varnothing$.*

D/ *Un ensemble peut être écrit en extension, c'est-à-dire que l'on donne la liste de tous ses éléments, ou en compréhension, c'est-à-dire que l'on définit cet ensemble par une propriété. Par exemple, $E = \{a, b, c, d\}$ est défini en extension, et $F = \{n \in \mathbb{N};\ 2 \leq n < 6\}$ est défini en compréhension.*

E/ *L'ensemble des parties de E est lui-même un autre ensemble, appelé ensemble des parties et noté* $\mathcal{P}(E)$.

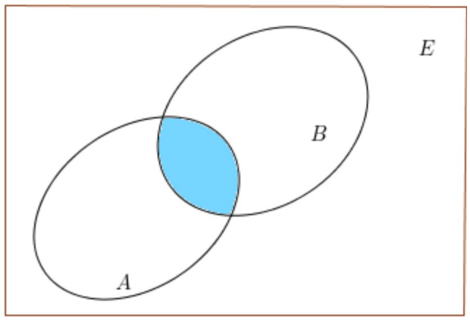
F/ *Étant donné un ensemble E et deux parties A et B de E, on peut définir*

i) *La réunion de A et B, noté $A \cup B$. $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B*



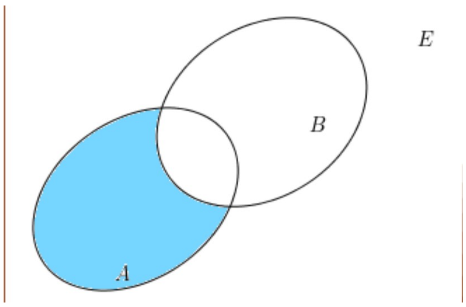
On a toujours $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

ii) *L'intersection de A et B, noté $A \cap B$. $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.*

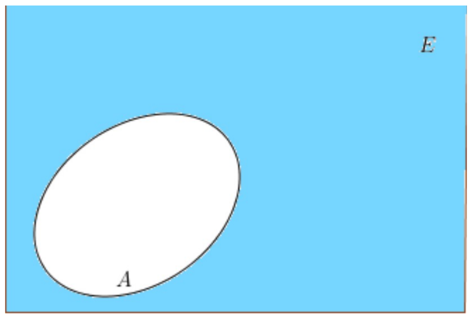


On a toujours $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

iii) *La différence $A \backslash B$: $A \backslash B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A, mais pas dans B.*



iv) *Le complémentaire de A dans E, noté $\bar{A}$, ou $C_E A$, ou $E \backslash A$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.*



v) *Si E et F sont deux ensembles, le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble constitué de tous les couples (x, y), où x est un élément de E et y est un élément de F.*

3 Applications

A/ *Soient E et F deux ensembles. Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. L'ensemble des applications de E dans F est noté* $\mathcal{F}(E,F)$, *ou* F^E.

B/ *On appelle graphe de l'application* $f : E \to F$ *la partie* Γ *de* $E \times F$ *définie par*

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

C/ *Si A est une partie de E, l'application indicatrice de A, notée* $\mathbf{1}_A$, *est la fonction définie par*

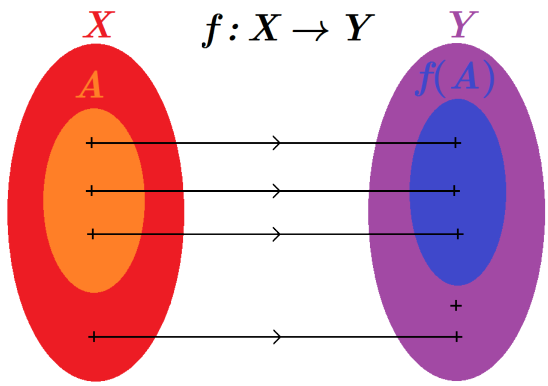
$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in A \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

D/ *Si E est un ensemble, l'application identité de E est la fonction* Id_E, *définie de E dans E par* $Id_E(x) = x$.

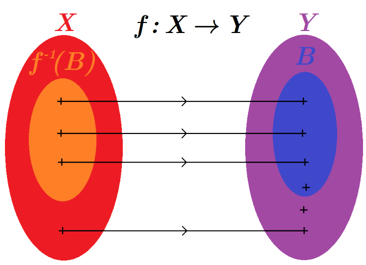
E/ *Si f est une fonction de E dans F, on appelle restriction de f à A, et on note* $f_{|A}$ *la fonction définie sur A par*

$$f_{|A}(x) = f(x).$$

F/ *Si f est une application de E dans F et si A est une partie de E, on appelle image directe de A par f l'ensemble* $f(A) := \{f(x);\ x \in A\}$. *Ainsi,* $y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ y = f(x)$.



G/ *Si f est une application de E dans F et si B est une partie de F, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble* $f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$. *Ainsi,* $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.



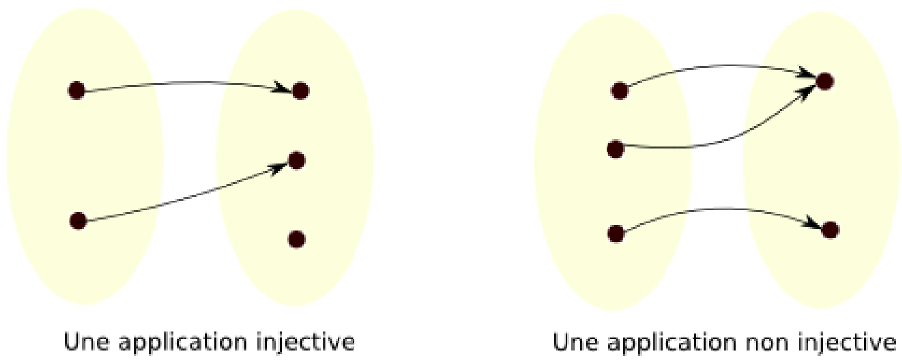
H/ *Si E, F et G sont trois ensembles et si* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *sont deux applications, on appelle application composée de f et g l'application notée* $g \circ f : E \to G$ *définie par la formule*

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

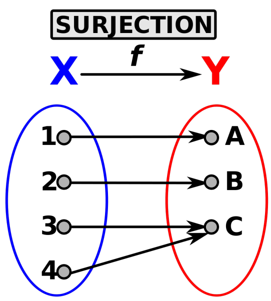
4 Injection, surjection, bijection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est

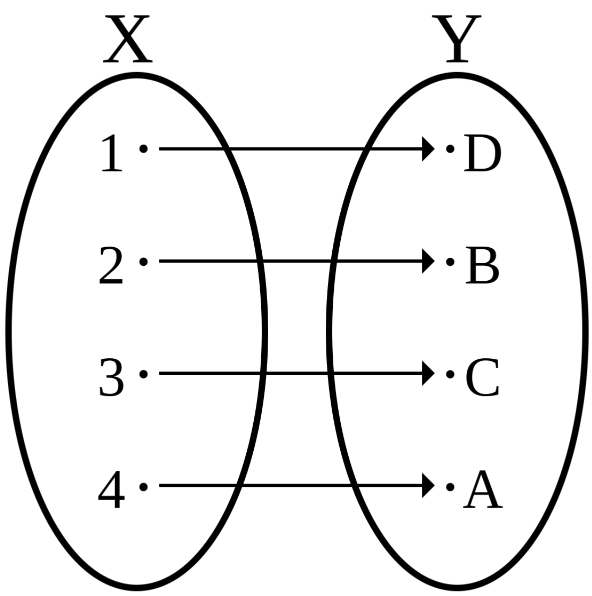
1) *injective pour tout couple $(x, x') \in E^2$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.*



2) *surjective si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution $x \in E$.*



3) *bijective si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution $x \in E$.*



5 Relations binaires

On appelle relation binaire sur un ensemble E la donnée d'une partie Γ de $E\times E$. On dit que x est en relation avec y et on écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x,y)\in\Gamma$.
On dit que la relation $\mathcal{R}$ est

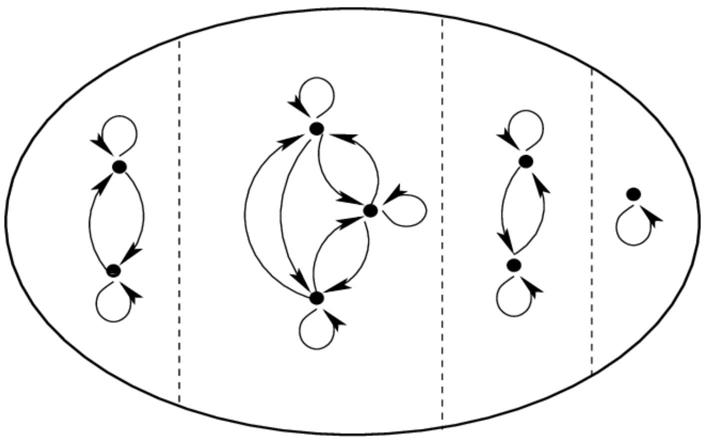
i) *réflexive si, pour tout $x\in E, x\mathcal{R}x$.*

ii) *symétrique si, pour tous $x,y\in E$, si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.*

iii) *anti-symétrique si, pour tous $x,y\in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x=y$.*

iv) *transitive si, pour tous $x,y,z\in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.*

1) *Une relation d'équivalence est une relation réflexive, symétrique, transitive.*
Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et x est un élément de E, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble des éléments y de E tels que $x\mathcal{R}y$. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ forment une partition de E.



2) *Une relation d'ordre est une relation réflexive, anti-symétrique, transitive.*
Si $\prec$ est une relation d'ordre sur E, alors :

   a) *on dit que l'ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments de E : pour tous $x,y\in E$, on a $x\prec y$ ou $y\prec x$. Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est partiel.*

   b) *si A est une partie de E et M est un élément de E, on dit que M est un majorant de A si, pour tout $x\in A$, on a $x\prec M$.*

6 Polynômes

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A/ *On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ une suite finie $(a_0,\dots,a_N)$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On note ce polynôme $\sum_{n\geq 0} a_nX^n$, où X est appelée l'indéterminée. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

B/ *On définit sur $\mathbb{K}[X]$ les opérations suivantes :*
Si $P(X)=\sum_{n\geq 0} a_nX^n$ et $Q(X)=\sum_{n\geq 0} b_nX^n$ (où les suites (a_n) et (b_n) sont nulles à partir d'un certain rang), on pose

$$(P+Q)(X)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)X^n$$

$$(PQ)(X) = \sum_{n\geq 0} c_n X^n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ces deux opérations font de $\mathbb{K}[X]$ un anneau.

C/ *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B = \sum_{n=0}^{N} b_n X^n$. Alors on appelle composé de A par B le polynôme de $\mathbb{K}[X]$*

$$B \circ A = \sum_{n=0}^{N} b_n A^n.$$

D/ *Si $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ n'est pas nul, il existe un plus grand indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$. Cet entier s'appelle le degré de P, noté $\deg(P)$. Le coefficient a_n correspondant s'appelle le coefficient dominant de P. Par convention, si P est nul, son degré vaut $-\infty$.*

E/ *Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est appelé unitaire.*

F/ *Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non nuls, on a*

$$\begin{aligned} \deg(P+Q) &\leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) \\ \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q) \\ \deg(P \circ Q) &= \deg(P) \times \deg(Q). \end{aligned}$$

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

G/ *Dérivation :*
Pour $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, on note $P' = \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1}$ appelé polynôme dérivé de P. Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

i) *Formule de Leibniz : Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X] et n \in \mathbb{N}$, alors*

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

ii) *Formule de Taylor : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors $P(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$.*

H/ *Divisibilité, division euclidienne*

1) *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec Q non nul. On dit que Q divise P s'il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$. On dit aussi que Q est un diviseur de P ou que P est un multiple de Q.*

2) *Deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont dits associés si P divise Q et si Q divise P. Ceci revient à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha Q$.*

3) *Théorème (division euclidienne des polynômes) : Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec Q non nul. Il existe un unique couple $(A, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$.*

4) *Fonction polynomiale, racine :*
Un polynôme $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ définit une fonction polynomiale $\tilde{P} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ par $\tilde{P}(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Le plus souvent, on identifie polynôme et fonction polynomiale.
On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$. Ceci est équivalent à dire que $(X-a)$ divise P.

i) *Si $a_1, \ldots, a_p$ sont des racines distinctes de P, alors $(X-a_1)\cdots(X-a_p)$ divise P.*

ii) *Un polynôme de degré $n \geq 0$ admet au plus n racines.*

iii) *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $m \in \mathbb{N}$. On dit que a est racine d'ordre de multiplicité m si*

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

   i) *a est racine de P de multiplicité m.*

   ii) *$(X-a), \ldots, (X-a)^m$ divisent P, et $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.*

iv) *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré m est dit scindé s'il se factorise en*

$$P(X) = a_m \prod_{j=1}^{m} (X - z_j)$$

.

5) *Arithmétique des polynômes*

Soit P,Q dans $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Tout diviseur commun à P et Q de degré maximal est appelé pgcd de P et Q. Tous les pgcd de P et Q sont associés. En particulier, un seul est unitaire, on l'appelle parfois le pgcd de P et Q. Il est noté $P \wedge Q$. Comme pour les entiers, le pgcd de deux polynômes peut se calculer à l'aide de divisions euclidiennes successives et de l'algorithme d'Euclide.

On dit que P et Q sont premiers entre eux si $P \wedge Q = 1$.

   i) Théorème de Bézout : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non-nuls. Alors $P \wedge Q = 1$ si et seulement s'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = 1$.

   ii) Lemme de Gauss : Soient $P, Q, T \in \mathbb{K}[X]$ non-nuls. On suppose que $P \wedge Q = 1$. Alors si $P|QT$, on a $P|T$.

Soient P,Q dans $\mathbb{K}[X]$ non-nuls. Tout multiple commun à P et Q de degré minimal est appelé ppcm de P et Q. Tous les ppcm de P et Q sont associés. En particulier, un seul est unitaire, on l'appelle parfois le ppcm de P et Q. Il est noté $P \vee Q$.

6) *Polynômes irréductibles*

   a) *Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non-constant admet une racine dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, tout polynôme non-constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.*

   b) *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si tous ses diviseurs sont les polynômes constants ou les polynômes associés à P (c'est-à-dire les polynômes qui s'écrivent λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$).*

   c) Décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

      i) *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

      ii) *Tout polynôme non nul est produit de son coefficient dominant et de polynômes irréductibles unitaires. Cette décomposition est unique à l'ordre des termes près. En particulier, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non-constant se factorise en*

$$P(X) = a_N \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{\mu_k}$$

où $z_1, \ldots, z_r$ sont les racines distinctes de $P dans \mathbb{C}$ de multiplicités respectives $\mu_1, \ldots, \mu_r$.

Corollaire :*Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec Q non nul. Alors Q divise P si et seulement si toutes les racines de Q sont des racines de P, et leur multiplicité en tant que racine de P est supérieure ou égale à leur multiplicité en tant que racine de Q.*

En particulier, deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racines communes.

d) *Décomposition en produit d'irréductibles sur* $\mathbb{R}[X]$ *:*

   i) *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.*

   ii) *Tout polynôme non nul est produit de son coefficient dominant et de polynômes irréductibles unitaires. Cette décomposition est unique à l'ordre des termes près.*

7 Corps des fractions, opérations, degré

a) *Une fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est le quotient* $\frac{P}{Q}$ *de deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *avec* $Q \neq 0$. *Par définition,* $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ *si et seulement si* $PS = QR$. *On note* $\mathbb{K}(X)$ *l'ensemble des fractions à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

b) *On définit l'addition et la multiplication de fractions rationnelles de façon naturelle :*

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}, \qquad \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}.$$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{K}(X)$ *est un corps.*

c) *Le degré d'une fraction rationnelle* $\frac{P}{Q}$ *est par définition* $\deg(P) - \deg(Q)$. *C'est un élément de* $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

e) *Fraction irréductible, zéros, pôles*

   i) *Une fraction rationnelle* $F \in \mathbb{K}(X)$ *s'écrit* $\frac{P}{Q}$ *où* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *sont premiers entre eux. Cette écriture est unique, à un facteur multiplicatif près. Elle s'appelle la représentation irréductible de* F.

   ii) *Si* $F \in \mathbb{K}(X)$ *s'écrit sous forme irréductible* $\frac{P}{Q}$, *alors les zéros de* F *sont les zéros de* P, *les pôles de* F *sont les zéros de* Q. *La multiplicité d'un zéro ou d'un pôle de* F *est par définition sa multiplicité en tant que zéro de* P *ou de* Q.

c) *Décomposition en éléments simples*

   i) *Si* $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *on appelle partie entière de* F *le quotient dans la division euclidienne de* P *par* Q.

   ii) *Théorème : Soit* $F \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle non-nulle. Alors il existe un unique polynôme* $E \in \mathbb{K}[X]$, *des uniques polynômes irréductibles* $H_1, \ldots, H_p$ *des uniques polynômes* $J_{i,k}$ *pour* $1 \leq i \leq p$ *et* $1 \leq k \leq n_i$ *avec* $\deg(J_{i,k}) < \deg(H_i)$ *tels que*

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{J_{i,1}}{H_i} + \frac{J_{i,2}}{H_i^2} + \cdots + \frac{J_{i,n_i}}{H_i^{n_i}} \right).$$

   De plus, E *est la partie entière de* F, *et si* $\frac{P}{Q}$ *est une représentation irréductible de* F, *alors on a*

$$Q = \lambda H_1^{n_1} \cdots H_p^{n_p}, \ \lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}.$$

   iii) *Décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{C}$ *: Soit* $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ *non-nulle écrite sous forme irréductible et soit* E *la partie entière de la fraction rationnelle. Si* Q *se factorise dans* $\mathbb{C}$ *sous la forme* $\prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{\mu_k}$, *alors il existe une unique famille* $(\lambda_{k,j})$ *de complexes telle que*

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X - z_k)^j} \right).$$

iv) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$: Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ non-nulle écrite sous forme irréductible et soit E la partie entière de la fraction rationnelle. Si Q se factorise dans $\mathbb{R}$ sous la forme $\prod_{k=1}^{r}(X-z_k)^{\mu_k}\prod_{k=1}^{s}(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^{\nu_k}$ avec $\beta_k^2-4\gamma_k<0$, alors il existe trois uniques familles $(\lambda_{k,j}), (\theta_{k,j})$ et $(\tau_{k,j})$ de réels telle que

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\mu_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-z_k)^j}\right) + \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{\theta_{k,j}X+\tau_{k,j}}{(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^j}\right).$$