Yassine Ait Mohamed
SMA-MIP

**Exercices: Analyse II**

# Exercice 1

Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. Montrer que la fonction $f : x \to E\left(\frac{1}{x}\right)$ est en escalier sur $[1/n, 1]$.
2. Calculer $\int_{1/n}^{1} f(x)\,dx$.

# Exercice 2

Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi, \mu \in E([a,b];\mathbb{R}) \text{ telles que } |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \text{ et } \int_a^b \mu(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

# Exercice 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Montrer que $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \psi_n, \varphi_n \in E([a,b];\mathbb{R}) \text{ telles que } \varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(x)\,dx < \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

# Exercice 4

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe deux suites $(\psi_n)$ et $(\varphi_n)$ de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$ :

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(x)\,dx = 0.$$

Montrer que $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

## Exercice 5

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $g : E \to \mathbb{R}$ (où $f([0,1]) \subset E \subset \mathbb{R}$) une fonction $k$-lipschitzienne. Montrer que la fonction composée $g \circ f$ est intégrable sur $[0,1]$.
2. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ est intégrable sur $[a,b]$, alors $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$.

## Exercice 6

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables sur $[0,1]$, avec $fg \geq 1$. Montrer que :
$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \geq 1.$$
2. Étant donné $a$ et $b$ tels que $0 < a < b$, montrer que :
$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq (b-a)\sqrt{ab}.$$
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, et $f, g$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Montrer que :
$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i + \int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 + \int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

## Exercice 7

Soit $f$ une fonction continue au voisinage de $0$. Montrer que :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt = \frac{f(0)}{2},$$
et que :
$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)\ln(2).$$

## Exercice 8

1. Montrer que pour toute fonction en escalier $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$
2. En déduire le résultat pour toute fonction intégrable sur $[a,b]$.

## Exercice 9

1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Calculer les deux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 g(x)\,dx.$$

2. Calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivants :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{2n+k}}, \quad v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, \quad w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor.$$

## Exercice 10

1. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt, \quad B = \int_0^\pi e^t\cos(2t)\,dt.$$

2. En utilisant un changement de variable, déterminer les primitives suivantes :

$$E(x) = \int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}, \quad F(x) = \int \frac{\sin(x)\,dx}{(\cos^2(x)+2\cos(x)+5)^2}, \quad G(x) = \int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\,dx.$$

## Exercice 11

Soit $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,dx$ et $J_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(x)\,dx$.

1. Montrer que $I_n = J_n$.
2. Établir une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+2}$.
3. En déduire les valeurs de $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$.
4. Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout entier $n$.
5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. En déduire qu'au voisinage de l'infini, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

## Exercice 12 : Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\,dt.$$

1. Montrer que $f$ est bien définie et impaire.
2. Montrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, et en déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée et en déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $f(x) \leq \ln(2)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire que $f$ admet une limite finie à droite en $0$.

# Exercice 14

Soit $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et admet une dérivée donnée par $f'(x) = e^{-x^2}$.
2. Montrer que $f$ est impaire.
3. Établir le développement asymptotique de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

# Exercice 15

1. Montrer que pour $p > 1$, l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx,$$

   et calculer sa valeur.
2. Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Montrer qu'elle converge pour $p > 1$ et établir un lien entre cette série et l'intégrale précédente.
3. Pour $p = 2$, calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.