

Mini-Projet C++/POO - Modèle de Goodwin

AIT SAID Yassine

Novembre 2023

Introduction

Le modèle de Goodwin est un concept économique qui cherche à modéliser les relations dynamiques entre les travailleurs et les capitalistes dans une économie capitaliste. Proposé par Richard Goodwin dans les années 1960, ce modèle s'articule autour des tensions inhérentes entre les deux groupes, en examinant les variations des parts relatives des revenus du travail et des revenus du capital au fil du temps. Dans ce qui suit, on propose deux formulations de ce modèle: chacune basée sur un système dynamique d'EDO différentes; les deux se ressemblent beaucoup, et appartenant toutes les deux à la famille d'équations de Lotka-Volterra.

1 Un premier modèle de Goodwin

Ce modèle est basé sur l'EDO proposée sur Wikipédia.

1.1 Équations du Modèle de Goodwin

Les équations différentielles ordinaires (ODE) décrivant le modèle de Goodwin sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \sigma(1-u)v - (\delta + \alpha + \beta)v \\ \frac{du}{dt} &= \rho vu - (\alpha + \gamma)u\end{aligned}$$

où u et v représentent respectivement La part des travailleurs dans la production et Le taux d'emploi. Les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma$ influencent les taux de croissance, les taux de productivité et les dynamiques du conflit social dans le système. Avec:

- α et β : Ces paramètres déterminent les taux de croissance relatifs des travailleurs et des capitalistes. Des valeurs plus élevées stimulent la croissance respective de chaque groupe.
- ρ : L'intensité du conflit social. Des valeurs plus élevées génèrent des cycles économiques plus marqués en amplifiant les tensions sociales.
- σ : L'élasticité de la demande de travail. Elle influence la réaction du modèle aux changements dans la demande de travail, pouvant affecter la stabilité du système.

1.2 Étude théorique

L'équation précédente donne deux points d'équilibre: en $(0,0)$ et en $(\frac{\alpha+\gamma}{\rho}, 1 - \frac{\delta+\alpha+\beta}{\sigma})$
La matrice jacobienne associée au système précédent s'écrit:

$$J(v, u) = \begin{bmatrix} \sigma(1-u) - (\delta + \alpha + \beta) & -\sigma v \\ \rho u & \rho v - (\alpha + \gamma) \end{bmatrix} \quad (1)$$

- En $(0,0)$, la matrice Jacobienne s'écrit:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \sigma - (\delta + \alpha + \beta) & 0 \\ 0 & -(\alpha + \gamma) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Cette matrice a les deux valeurs propres: $\lambda_1 = -(\alpha + \gamma) < 0$ et $\lambda_2 = \sigma - (\delta + \alpha + \beta)$. Ainsi, $(0,0)$ est un point d'équilibre stable si $\sigma < (\delta + \alpha + \beta)$, et c'est un point selle dans le cas contraire.

- En $(\frac{\alpha+\gamma}{\rho}, 1 - \frac{\delta+\alpha+\beta}{\sigma})$, la matrice Jacobienne s'écrit:

$$J(v, u) = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma \frac{\alpha+\gamma}{\rho} \\ \rho(1 - \frac{\delta+\alpha+\beta}{\sigma}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Le polynome caractéristique de cette matrice s'écrit: $P_J(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + \gamma)(-\sigma + \delta + \alpha + \beta)$. Si $\sigma < (\delta + \alpha + \beta)$, on obtient deux valeurs propres de signes opposés, donc le point est selle. Et si $\sigma > (\delta + \alpha + \beta)$, on obtient deux valeurs propres imaginaires pures, ce qui signifie que l'équilibre est un centre.

Ainsi, on ne considère dans la suite que le cas où $\sigma > (\delta + \alpha + \beta)$, ce qui signifie que le système va osciller autour de cet équilibre sans converger ni s'éloigner.

1.3 Résolution numérique

1.3.1 Solution u et v en fonction du temps

En suivant la même démarche pour la résolution des EDO des exemples du TP3, et aussi le même code avec les mêmes classes; On crée une nouvelle classe fille GoodwinOdeSystem1 de la classe OdeSystem. En choisissant comme paramètres: $\sigma = 3, \delta = 0.01, \alpha = 1.5, \beta = 0.0, \rho = 5, \text{ et } \gamma = 1$. On obtient alors des oscillations des deux variables u et v, et comme on le voit ci-dessous, l'amplitude des oscillations augmentent avec le temps lorsqu'on utilise Euler explicite comme schéma en temps. Cependant, l'amplitude reste la même en utilisant les méthodes de Runge Kutta d'ordre 3 et d'ordre 4, et de même pour la méthode d'Adams Bashforth qui est préférable pour la résolution d'un tel système.

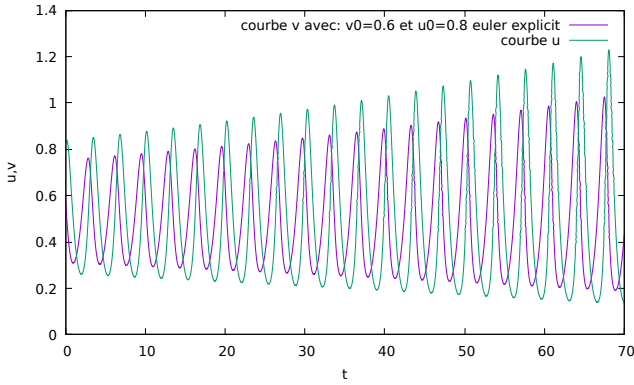


Figure 1: Solutions en utilisant Euler explicite

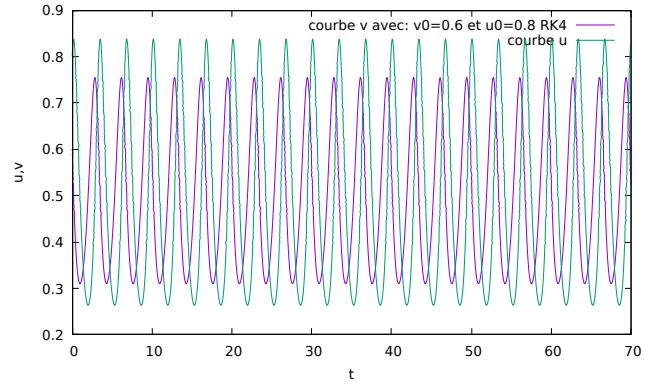


Figure 2: Solutions en utilisant Runge Kutta d'ordre 4

Figure 3: Courbes de solutions pour des paramètres respectant la condition $\sigma > (\delta + \alpha + \beta)$

1.3.2 Courbe de phase/trajectoire

On utilise les mêmes paramètres que précédemment, on trace la trajectoire associée au système.

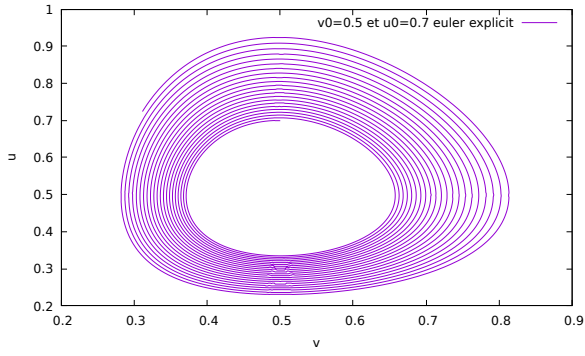


Figure 4: Trajectoire obtenue en utilisant Euler explicite

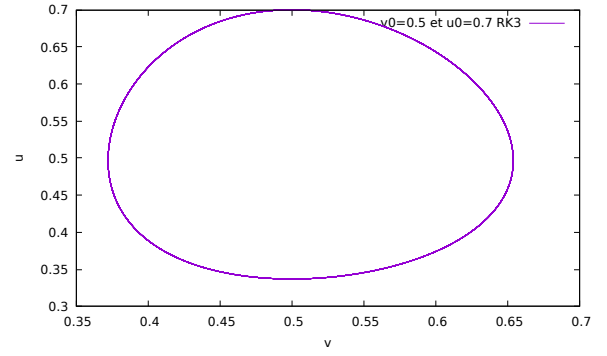


Figure 5: Trajectoire obtenue en utilisant Runge Kutta d'ordre 3

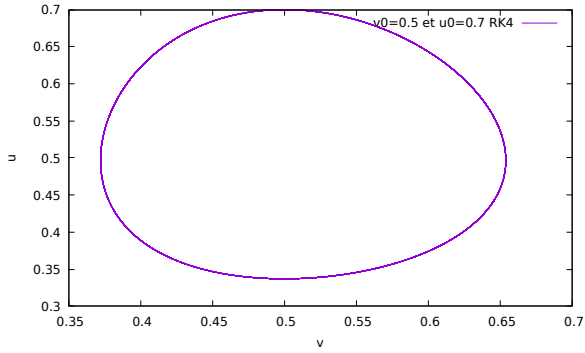


Figure 6: Trajectoire obtenue en utilisant Runge Kutta d'ordre 4

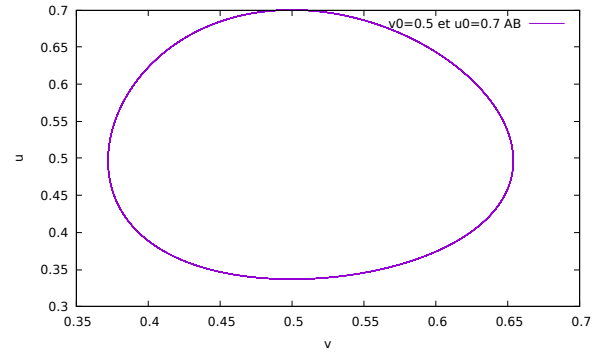


Figure 7: Trajectoire obtenue en utilisant AdamsBashforth

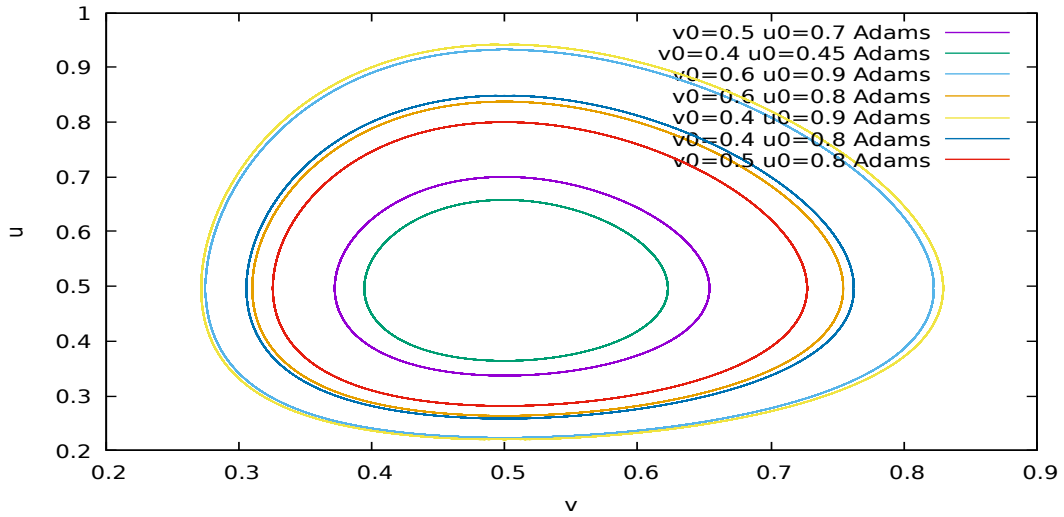


Figure 8: Trajectoire obtenue en utilisant AdamsBashforth en utilisant différentes conditions initiales

- On remarque qu'on a obtenu un équilibre centre, ce qui est cohérent avec la théorie et le choix de $\sigma > \alpha + \beta$.
- Pour la méthode d'Euler explicite, on obtient une courbe sous forme spirale, d'où ce schéma est déconseillé pour ce genre de système. Cependant, les autres schémas de Runge-Kutta et AdamsBashforth donnent une trajectoire fermée, d'où la caractérisation du modèle de Goodwin par modèle de croissance cyclique.

1.3.3 Interprétation du diagramme de phase

Les valeurs de u et v pour lesquelles la croissance de v et la croissance de u sont nulles, définissent le point d'équilibre, du système économique, suivant: $(v^*, u^*) = (\frac{\alpha+\gamma}{\rho}, 1 - \frac{\delta+\alpha+\beta}{\sigma})$. les deux équations: $u = u^*$ et $v = v^*$, accompagnées de restrictions sur les paramètres pour s'assurer que ni u ni v ne dépassent 1, divisent le cycle en quatre régions distinctes. Dans la représentation graphique ci-dessous, les flèches indiquent le mouvement de l'économie dans chaque région. Par exemple, dans la région nord-ouest (caractérisée par un emploi élevé et une faible part du travail dans la production), l'économie se déplace vers le nord-est (augmentation de l'emploi et de la part des travailleurs dans la production). Une fois qu'elle aura franchi la ligne u^* (la ligne horizontale sur la figure), elle commencera à se déplacer vers le sud-ouest.

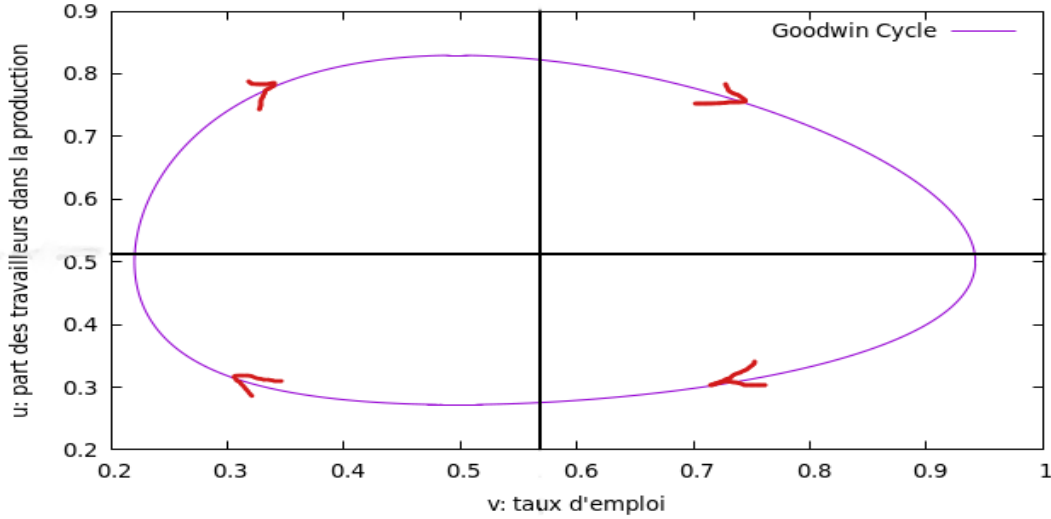


Figure 9: Diagramme de phase du modèle de Goodwin

2 Un deuxième modèle de Goodwin

2.1 Équations du Modèle

Les équations différentielles ordinaires (EDO) décrivant ce modèle de Goodwin sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \Phi_0 + \frac{\Phi_1}{(1-u)^2}v - \alpha v \\ \frac{du}{dt} &= \frac{1-v}{\nu}u - (\alpha + \beta + \delta)u\end{aligned}$$

où u et v représentent respectivement le taux d'emploi et le taux des salaires. Les paramètres $\Phi_0, \Phi_1, \delta, \nu, \alpha, \beta$ influencent les taux de croissance, les taux de productivité et les dynamiques du conflit social dans le système.

2.2 Estimation des paramètres du modèle

L'estimation des paramètres du modèle se fait à travers des tests statistiques. Ci-dessous, un exemple d'estimations des paramètres du modèle pour plusieurs pays.

Table 5: Final Estimation Results for Goodwin Model

| | Australia | Canada | Denmark | Finland | France | Germany | Italy | Norway | UK | US |
|-------------------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| $\hat{\alpha}$ | 0.0145 | 0.0105 | 0.0161 | 0.0244 | 0.0163 | 0.0086 | 0.0181 | 0.0214 | 0.0206 | 0.0149 |
| $\hat{\beta}$ | 0.0182 | 0.0180 | 0.0048 | 0.0042 | 0.0077 | 0.0145 | 0.0041 | 0.0108 | 0.0048 | 0.0150 |
| $\hat{\nu}$ | 2.996 | 2.427 | 3.498 | 3.628 | 2.984 | 3.710 | 3.421 | 3.800 | 2.586 | 2.523 |
| $\hat{\phi}_0$ | -8.23E-03 | 1.64E-02 | 1.59E-02 | 1.89E-02 | -5.40E-03 | 1.22E-03 | -1.11E-02 | -1.72E-02 | 2.05E-02 | 1.64E-02 |
| $\hat{\phi}_1$ | 2.30E-05 | -6.37E-05 | 8.52E-07 | 1.02E-05 | 5.33E-05 | 2.74E-06 | 8.15E-05 | -9.81E-06 | 6.83E-07 | -4.17E-06 |
| $\hat{\delta}$ | 0.0932 | 0.0964 | 0.0803 | 0.0802 | 0.0673 | 0.0746 | 0.0662 | 0.0949 | 0.0697 | 0.0788 |
| $\hat{\omega}^*$ | 0.623 | 0.697 | 0.646 | 0.605 | 0.728 | 0.637 | 0.698 | 0.517 | 0.754 | 0.726 |
| $\hat{\omega}$ | 0.635 | 0.639 | 0.700 | 0.694 | 0.725 | 0.721 | 0.749 | 0.633 | 0.699 | 0.676 |
| $\hat{\lambda}^*$ | 0.968 | 0.896 | 0.940 | 0.957 | 0.950 | 0.981 | 0.947 | 0.000† | 0.938 | 0.947 |
| $\bar{\lambda}$ | 0.936 | 0.919 | 0.939 | 0.929 | 0.927 | 0.937 | 0.912 | 0.968 | 0.934 | 0.939 |
| Period | 0.0794 | 0.4151 | 0.2222 | 0.1400 | 0.1441 | 0.0407 | 0.1736 | 0.0000† | 0.1864 | 0.1463 |

Figure 10: Estimation des paramètres du modèle de Goodwin. ($\omega = v$ et $\lambda = u$)

2.3 Résolution pour quelques cas réels

On crée une seconde classe fille GoodwinOdeSystem2 de la classe OdeSystem pour résoudre le système de ce modèle. Pour tracer des exemples, on utilise le tableau ci-dessus qui introduit des estimations des valeurs des paramètres.

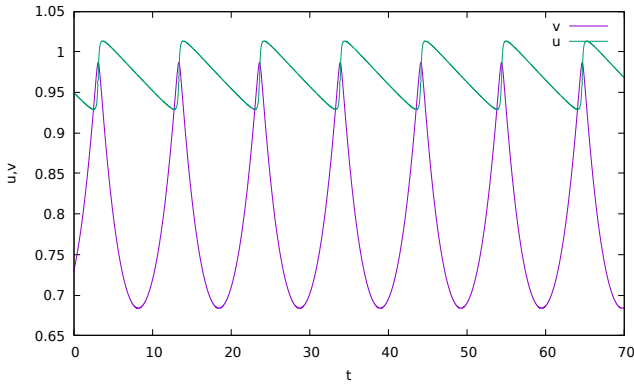


Figure 11: Le taux d'emploi u et le taux des salaires v en fonction du temps en France

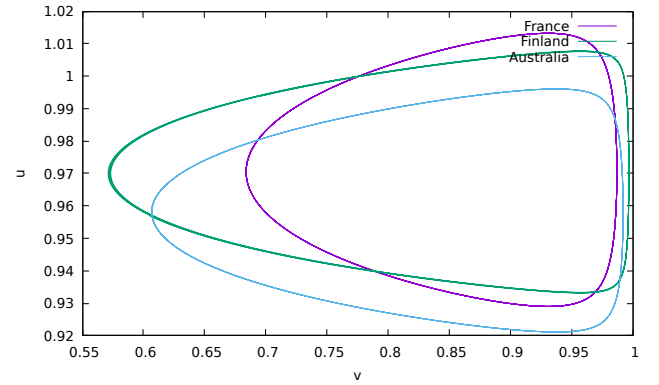


Figure 12: Diagramme de phase pour les trois pays: France, Australie et Finlande

Figure 13: Exemples de courbes avec des paramètres réels

Le cycle de France est d'une période plus courte que celui de la Finlande et l'Australie.

Conclusion

Ce travail a été l'occasion d'appliquer le concept de la programmation orientée objet qui serve à bien organiser le code, notamment les notions d'héritage et de polymorphisme qui servent à réduire la taille du code et à le simplifier, en exploitant les propriétés des classes mères et les utiliser pour les classes filles. Quant aux schémas numériques, le préférable est d'utiliser celui d'Adamsbashforth, car il est stable et plus rapide. Enfin, la POO semble mieux adaptée pour les codes industrielles plus complexes.