

Stochastik A

Übungsblatt 9

WiSe 2023/24

Abgabe bis Donnerstag, 14.12., Besprechung am 15.12.2023/09.01.2024

Aufgabe 25 (2,5+2+2,5 = 7 Punkte)

- (a) Es sei X eine Zufallsvariable auf einem diskreten W-Raum, die die drei Werte $-1, 0, 1$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ annimmt. Zeigen Sie, dass X und $|X|$ unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.
- (b) Es sei $Y \sim \text{Ber}(p)$ für ein $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie $\text{Var}(Y)$. Für welchen Parameterwert p wird die Varianz maximal und wie groß wird sie dann?
- (c) Es sei $Z \sim \text{Poi}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Bestimmen Sie $\text{Var}(Z)$.

Aufgabe 26 (2+2+2 = 6 Punkte)

Bestimmen Sie in folgenden Situationen jeweils $\text{Cov}(X, Y)$ und $\text{Corr}(X, Y)$. Dabei gibt die Tabelle jeweils die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y an, d.h. die Werte $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ sind tabelliert.

(a)

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0

(b)

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\frac{1}{3}$	0	0
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	0	0	$\frac{1}{3}$

(c)

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{3}$	0	0

Aufgabe 27 (2+2,5+2,5 = 7 Punkte)

Diese Aufgabe ist ein Vorgriff auf Kapitel 6 der Vorlesung. Der Zusammenhang zur Stochastik wird erst dann deutlich werden.

Wir betrachten für eine Konstante $c > 0$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-\lambda x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

bitte wenden!

- (a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ endlich? Bestimmen Sie für diese Werte von λ den Wert der Konstante c so (in Abhängigkeit von λ), dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Tipp: Erinnern Sie sich an die Formel zur partiellen Integration:

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

- (b) Rechnen Sie jetzt mit dem Wert der Konstante c aus (a) weiter und bestimmen Sie für alle $\lambda > 0$

$$E := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

in Abhängigkeit von λ .

- (c) Rechnen Sie weiter mit den Werten von c und E aus (a) und (b) und bestimmen Sie für alle $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E)^2 f(x) dx$$

in Abhängigkeit von λ .