Institut für Analysis
Leibniz Universität Hannover
Dr. Marco Meyer

Stochastik A

Übungsblatt 8 — WiSe 2023/24

Abgabe bis Donnerstag, 07.12., Besprechung am 08./12.12.2023

Aufgabe 22 (3+4 = 7 Punkte)

(a) Es sei $X \sim \mathrm{Poi}(8)$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{4^X}\right).$$

(b) Ihnen wird folgendes Spiel angeboten: Ein fairer Würfel wird mehrfach hintereinander geworfen, bis zum ersten Mal eine 6 fällt. Dann erhalten Sie eine Auszahlung, und zwar: Falls in der k-ten Durchführung die erste 6 gewürfelt wird, bekommen Sie $100/k!$ Euro ausgezahlt (wir rechnen hier ohne Runden auf Cent-Beträge oder ähnliches). Für die Teilnahme sollen Sie 20 Euro bezahlen. Lohnt sich die Teilnahme (im Sinne eines für Sie positiven Erwartungswertes)?

Aufgabe 23 (2+1,5+2,5 = 6 Punkte)

Die Zufallsvariable X bezeichne die minimale Augenzahl beim gleichzeitigen Werfen von zwei fairen Würfeln.

(a) Berechnen Sie die Verteilung von X. Hinweis: Sie können hier die Resultate von Aufgaben vorheriger Übungsblätter nutzen und zitieren.

(b) Sie bieten ein Glücksspiel an, bei dem die minimale Augenzahl des Wurfes mit zwei fairen Würfeln angibt, wie viele Geldeinheiten Sie dem Spieler ausbezahlen müssen. Wie viele Geldeinheiten verlangen Sie, um den Spielern ein faires Spiel (im Sinne einer erwarteten Auszahlung von ± 0 zu bieten?

(c) Berechnen Sie Varianz und Standardabweichung von X.

bitte wenden!

22a) $X \sim Poi(8)$

$$E\left(\frac{1}{4^x}\right) = \sum_{x \in \Omega_x} \frac{1}{4^x} \mathbb{P}(X=x)$$ korrekt

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4^x} \cdot e^{-8} \frac{8^x}{x!}$$ ✓

Potenzreihe

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} \cdot e^{-8} = e^{-8} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!}$$

$$= e^{-8} \cdot e^{2} = e^{-6}$$ ✓ [3/3]

b)

Sei G die Zufallsvariable, die den Gewinn repräsentiert.

Es gilt: $X(k) = \frac{100}{k!}$

$p(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$, da $k-1$ mal keine 6 gewürfelt wurde. keine ✓

$\rightsquigarrow \mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{100}{k!} \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}, & \text{wenn } x = \frac{100}{k!} \text{ für ein konkretes } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{100}{n!}$$

$$= \frac{100}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{n!} = \frac{100}{6} \cdot \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{100}{n!}\right) - 1\right)$$

für $\boxed{n=0}$ erhält man hier nicht 1.

$$= \frac{100}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \cdot \frac{1}{n!} - \frac{100}{6}$$

Folgefehler

$$= \frac{100}{6} \cdot e^{\frac{5}{6}} - \frac{100}{6} = \frac{50}{3}\left(e^{\frac{5}{6}} - 1\right) \approx 21{,}68$$

Also gewinnt man im Schnitt 21,68 €. Da man 20 € Teilnahme-Gebühr zahlt, ist der Erwartungswert für das Spiel 1,68, es lohnt sich also zu spielen. Interpretation ok. ✓

[2.5/4]

(23) a)

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 \quad , \quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36} \ \forall \omega \in \Omega$$

Ok.

$$X((\omega_1,\omega_2)) = \underline{\min(\omega_1,\omega_2)} \qquad \text{mit } (\omega_1,\omega_2) \in \Omega$$

A_i mit $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ sei $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = i\}$

$A_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$; $|A_1| = 11$

$A_2 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$; $|A_2| = 9$

$A_3 = \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(5,3),(6,3)\}$; $|A_3| = 7$

$A_4 = \{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$; $|A_4| = 5$

$A_5 = \{(5,5),(5,6),(6,5)\}$; $|A_5| = 3$

$A_6 = \{(6,6)\}$; $|A_6| = 1$

Da alle $\omega \in \Omega$ die gleiche Wahrscheinlichkeit haben,
gilt $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(A_x) = |A_x| \cdot \frac{1}{36}$, also Ok ✓

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{11}{36}$ ✓

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{9}{36}$ ✓

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{7}{36}$ ✓

$\mathbb{P}(X=4) = \frac{5}{36}$ ✓

$\mathbb{P}(X=5) = \frac{3}{36}$ ✓

$\mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{36}$ ✓

[2/2]

---

b) $$E(X) = \sum_{n=1}^{6} \mathbb{P}(X = n) \cdot n$$ ✓

$$= \frac{11}{36} + \frac{18}{36} + \frac{21}{36} + \frac{20}{36} + \frac{15}{36} + \frac{6}{36} = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$$ ✓

Für ein faires Spiel muss man also 2,53 GE verlangen.

[1.5/1.5]

c)

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$E(X) = \frac{91}{36}$$

$$Var(X) = \sum_{n=1}^{6} \mathbb{P}(X=n) \cdot (n - 2{,}53)^2$$

$$= \frac{11}{36} \cdot (-1{,}53)^2 + \frac{9}{36} \cdot (-0{,}53)^2 + \frac{7}{36} \cdot (0{,}47)^2 + \frac{5}{36} \cdot (1{,}47)^2 + \frac{3}{36} \cdot (2{,}47)^2 + \frac{1}{36} \cdot (3{,}47)^2$$

$$\approx 1{,}97$$

$$S(X) = +\sqrt{Var(X)} = +\sqrt{\frac{11}{36} \cdot (-1{,}53)^2 + \frac{9}{36} \cdot (-0{,}53)^2 + \frac{7}{36} \cdot (0{,}47)^2 + \frac{5}{36} \cdot (1{,}47)^2 + \frac{3}{36} \cdot (2{,}47)^2 + \frac{1}{36} \cdot (3{,}47)^2}$$

$$\approx 1{,}40$$

[2,5/2,5]

Aufgabe 24 (4,5+2,5 = 7 Punkte)

(a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $g\colon \Omega_X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wollen den Erwartungswert von $Y = g(X)$ berechnen. Beweisen Sie, dass sowohl die Berechnung über die Formel aus Definition 4.2 als auch die über die Formel aus Satz 4.3 (jeweils angewendet auf Y) zum gleichen Ergebnis führen, nämlich

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)\,,$$

was Lemma 4.7 für den Spezialfall $n = 1$ bestätigt. Wir nehmen hierbei an, dass die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergent ist.

(b) Es seien X und Y zwei unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass dann für die Varianz gilt:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\,.$$

Aufgabe P.7 (Präsenzaufgabe für die Übung, keine Hausaufgabe!)
Falls $\mathrm{Var}(X) = 0$ ist, warum muss es dann zwangsläufig eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ geben, sodass $\mathbb{P}(X = x) = 1$ ist? Welche reelle Zahl ist das in diesem Fall?

A24

Aufgabe 24 (4,5+2,5 = 7 Punkte)

(a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $g \colon \Omega_X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wollen den Erwartungswert von $Y = g(X)$ berechnen. Beweisen Sie, dass sowohl die Berechnung über die Formel aus Definition 4.2 als auch die über die Formel aus Satz 4.3 (jeweils angewendet auf Y) zum gleichen Ergebnis führen, nämlich

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)\,,$$

5)

$$Var(X) := E((X-E(X))^2)$$

$$Var(Y) := E((Y-E(Y))^2)$$

$$Var(X+Y) = E((X+Y-E(X+Y))^2)$$

Linearität von E

$$= E((X+Y-E(X)-E(Y))^2)$$

$$= E(((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2)$$

Klammern fehlen

$$= E\left((X-E(X))^2 + 2\cdot(X-E(X))\cdot(Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2 \right)$$

$$= E((X-E(X))^2) + 2\cdot \underbrace{E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))}_{Cov(X,Y)=0,\text{ da unabhängig}} + E((Y-E(Y))^2)$$

$$= Var(X) + Var(Y)$$

$\square$

[2.5/2.5]

Σ 14/20

Miguel Adamus