Institut für Analysis
Leibniz Universität Hannover
Dr. Marco Meyer

Stochastik A

Übungsblatt 10 WiSe 2023/24

Abgabe bis Donnerstag, 21.12.2023, Besprechung am 12.01./16.01.2024

Aufgabe 28 (3,5+2,5 = 6 Punkte)

(a) Es sei $X \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{3})$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.

(b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob in den Skizzen in Abbildung 1 jeweils der Graph einer Verteilungsfunktion abgebildet ist oder nicht.
Hinweis: Bei den Skizzen zeigt – im Fall, dass der Graph nicht eindeutig ist – ein schwarzer Punkt den Funktionswert an, den die Funktion an dieser Stelle annimmt.

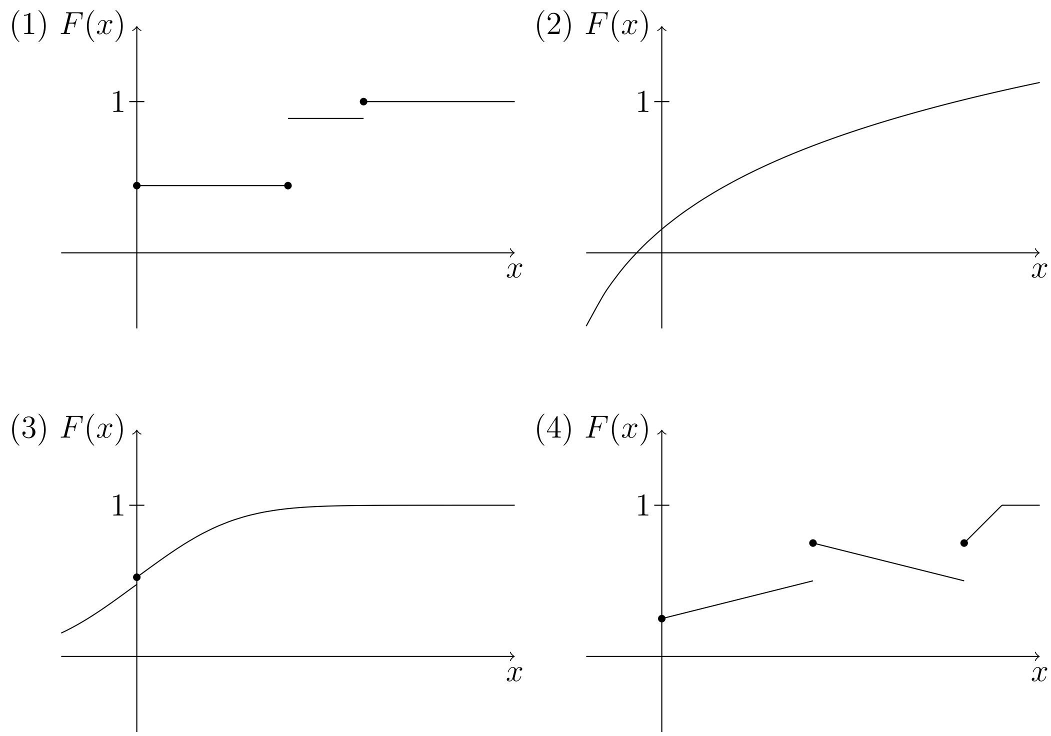

Abbildung 1: Skizzen zu Aufgabe 28

bitte wenden!

Aufgabe 29 (2+2,5+1+1,5 = 7 Punkte)
Die reellwertige Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{1+e^{-x}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F_X auf dem Intervall $(0, \infty)$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{d}{dx} \ln(F_X(x)) = 1 - F_X(x) .$$

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ unter Ausnutzung folgender Formel, die wir an späterer Stelle begründen werden:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\, dx.$$

(c) Begründen Sie, ob es sich bei $\mathcal{A}$ in folgender Konstellation um eine σ-Algebra über Ω handelt:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{A} = \big\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}\big\} .$$

(d) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestimmen Sie die kleinste σ-Algebra, die alle folgenden Mengen enthält (”kleinste” bedeutet dabei: Fügen Sie nicht mehr Mengen als nötig hinzu!): $\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}$.

Aufgabe 30 (3+4 = 7 Punkte)
Die reellwertige Zufallsvariable X auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ besitze die Verteilungsfunktion F_X.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen $a < b$ gilt:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) .$$

(b) Jetzt sei F_X konkret gegeben durch

$$F_X(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ c + \frac{1}{2}(x-1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass F_X eine Verteilungsfunktion ist. Berechnen Sie dann die folgenden Wahrscheinlichkeiten unter Verwendung der Formel aus (a) (unter anderem!):

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{5}{3}\right), \quad \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right), \quad \mathbb{P}\left(0 < X \leq \frac{3}{2}\right), \quad \mathbb{P}\left(X > 3\right) .$$