Institut für Analysis
Leibniz Universität Hannover
Dr. Marco Meyer

Stochastik A

Übungsblatt 5 — WiSe 2023/24

Abgabe bis Donnerstag, 16.11., Besprechung am 17./21.11.2023

Aufgabe 13 (2+5 = 7 Punkte)
Seien $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ zwei W-Räume. Dabei sei $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$ und $\Omega_2 = \{a, b, c\}$, und die W-Funktionen p_1 von $\mathbb{P}_1$ und p_2 von $\mathbb{P}_2$ wie folgt gegeben:

$$p_1(1) = \frac{2}{5}, \quad p_1(2) = \frac{1}{5}, \quad p_1(3) = \frac{2}{5},$$
$$p_2(a) = \frac{1}{5}, \quad p_2(b) = \frac{1}{2}, \quad p_2(c) = \frac{3}{10}\,.$$

(a) Bestimmen Sie das Produktmaß $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$. Dazu genügt es, die Werte von $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$ auf allen einelementigen Teilmengen von $\Omega_1 \times \Omega_2$ anzugeben. Dies können Sie z.B. in Tabellenform machen, wenn Sie exemplarisch die Berechnung eines Wertes erläutern und begründen.

(b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit mit dem W-Maß $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$ für folgende zwei Mengen:

$$\begin{aligned} A &:= \big\{(1, a), (3, b), (3, a), (1, b)\big\}\,, \\ B &:= \big\{(3, a), (2, b), (2, c), (1, c)\big\}\,. \end{aligned}$$

Geben Sie für A und B jeweils an, ob sich die entsprechende Wahrscheinlichkeit auch als Produkt $\mathbb{P}_1(C_1) \cdot \mathbb{P}_2(C_2)$ für geeignete Mengen C_1, C_2 berechnen lässt. Begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, dann geben Sie geeignete Mengen an und prüfen Sie nach, dass $\mathbb{P}_1(C_1) \cdot \mathbb{P}_2(C_2)$ den richtigen Wert ergibt. Sind A und B unabhängig?

Aufgabe 14 (5 Punkte)
Betrachten Sie den gleichzeitigen Wurf zweier fairer Würfel. Geben Sie einen passenden W-Raum sowie passende Abbildungsvorschriften für Zufallsvariablen X und Y an (also: was ist $X(\omega)$ bzw. $Y(\omega)$, was ist Ω_X bzw. Ω_Y?), sodass X die minimale Augenzahl und Y die maximale Augenzahl des Wurfes beschreibt. Charakterisieren Sie die sogenannte gemeinsame Verteilung von (X, Y), indem Sie für alle Wertepaare (x, y) die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

angeben. Dazu können Sie eine x-y-Tabelle angeben und exemplarisch drei unterschiedliche Werte der Tabelle mit Begründung ausrechnen.

bitte wenden!

Aufgabe 15 (3,5 + 1,5 + 3 = 8 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen, die jeweils nur die Werte $1, 2, 3$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ sind für verschiedene Wertepaare (x, y) in folgender (unvollständiger) Tabelle angegeben:

x \ y	1	2	3
1	1/10	1/20	1/20
2	1/5		
3	3/20	1/20	1/10

Zudem ist bekannt, dass gilt:

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = \frac{3}{10}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die beiden fehlenden Wahrscheinlichkeiten in obiger Tabelle mit Begründung.

(b) Stellen Sie (qualitativ!) die Mengen Ω, $\{X = 1\}$ und $\{Y = y\}$ für $y = 1, 2, 3$ in einer gemeinsamen Skizze dar. Qualitativ bedeutet dabei, dass die Flächen nicht die Wahrscheinlichkeiten widerspiegeln müssen.

(c) Berechnen Sie die die Verteilung von X und die Verteilung von Y. Dafür genügt es, die Wahrscheinlichkeiten für alle einelementigen Teilmengen von Ω_X bzw. Ω_Y anzugeben.

Aufgabe P.4 (Präsenzaufgabe für die Übung, keine Hausaufgabe!)
Wir behandeln das sogenannte Ziegenproblem aus der Vorlesung: Der Kandidat einer Spielshow hat die Möglichkeit den Hauptpreis zu gewinnen, wenn er errät, hinter welcher von drei Türen dieser Preis steht. Hinter den anderen zwei Türen steht jeweils eine Ziege.
Im ersten Schritt wählt der Kandidat eines der drei Tore aus. Dann öffnet der Moderator eines der zwei anderen Tore und zwar eines, hinter dem eine Ziege steht. Anschließend bietet er dem Kandidaten an, sich noch einmal umzuentscheiden und das andere der beiden verbliebenen Tore zu wählen. Manchmal bietet er ihm für einen Wechsel sogar Geld an oder er verlangt Geld für den Wechsel.
Lohnt sich ein Wechsel für den Kandidaten (zunächst mal ohne Berücksichtigung einer Extra-Zahlung in die eine oder andere Richtung)? Lohnt er nicht? Oder ist es egal?