MOGPL

Projet: Jeu de dés

Kevin Meetooa Yassine Barreche

6 décembre 2019

Présentation du jeu

Dans ce projet, on se propose de modéliser une partie d'un jeu de dé suivant les règles suivantes. Le but est d'être le premier à atteindre au moins N points (par exemple $N = 100$). A chaque tour, on choisit de lancer entre 1 et D dés à six faces (par exemple $D = 10$). Le nombre de points marqués est 1 si l'un des dés au moins tombe sur 1. Dans le cas contraite, le nombre de points marqués est la somme des dés. Nous allons étudier deux variantes de ce jeu :

-Variante séquentielle : Les joueurs jouent à tour de rôle (le premier joueur a donc un avantage)

-Variante simultanée : Les joueurs jouent simultanément à chaque tour. Dans ce cas, si les deux joueurs atteignent N points ou plus lors du même tour, c'est le joueur qui dépasse le plus les N points qui l'emporte. Si les joueurs obtiennent le même nombre de points, alors ils sont ex-aequos

Le but du projet est de déterminer une stratégie de jeu optimale.

On dit qu'un joueur a un gain égal à 1 s'il remporte la partie, un gain égal à -1 s'il perd et un gain à 0 si la partie est nulle. C'est donc en particulier un jeu à somme nulle.

Probabilités

0.1 Probabiltés

Afin de pouvoir calculer des stratégies optimales, nous devons d'abord évaluer la probabilité de marquer un certain nombre de points lorsque l'on lance les dés.

Lorsqu'un joueur lance $d \geq 1$ dés, soit il obtient 1 point (si au moins un dé tombe sur 1), soit il obtient entre $2d$ et $6d$ points (il n'est donc pas possible d'obtenir entre 2 et $2d-1$ points). Soit $P(d,k)$ la probabilité qu'un joueur qui lance d dés obtienne k points. Nous avons facilement :

- $P(d,1) = 1 - (\frac{5}{6})^d$: C'est la probabilité qu'au moins un dé tombe sur 1

- $P(d,k) = 0$ lorsque $2 \leq k \leq 2d-1$

Lorsque $2d \leq$ k $\leq 6d$, on peut écrire $P(d,k) = (\frac{5}{6})^d$ $Q(d,k)$ où $Q(d,k)$ est la probabilité d'obtenir k points en jetant d dés sachant qu'aucun dé n'est tombé sur 1

Nous cherchons donc à calculer $Q(d,k)$ à l'aide d'une formule de récurrence lorsque $d \geq 2$ et $2d \leq$ k $\leq 6d$:

On peut réecrire $Q(d,k) = \frac{1}{5} * Q(d-1,k-2) + \frac{1}{5} * Q(d-1,k-3) + \frac{1}{5} * Q(d-1,k-4) + \frac{1}{5} * Q(d-1,k-5) + \frac{1}{5} * Q(d-1,k-6)$

En effet, la probabilité d'obtenir k points en lançant d dés sachant qu'aucun dé n'est tombé sur 1 peut se décomposer comme une somme de 5 termes.

Pour $2 \leq$j≤ 6, le terme $\frac{1}{5} * Q(d-1,k-j)$ correspond au fait que l'on peut obtenir k points en lançant d dés sachant qu'aucun dé n'est tombé sur 1 lorsque l'on a obtenu $k-j$ points en lançant d-1 dés (sans obtenir aucun 1).

Cela implique que le d^{eme} dé est tombé sur j avec une probabilité $\frac{1}{5}$ (car on se restreint au sous-univers où l'on a pas tiré de 1, ce qui nous laisse 5 choix possibles), d'où la multiplication par $\frac{1}{5}$

On remarque que la somme commence à j=2 car j=1 impliquerait que le d^{eme} dé est tombé sur 1.

Ainsi, on a $Q(d,k) = \sum_{j=1}^{6} \frac{Q(d-1,k-j)}{5}$ d'après la formule des probabilités totales.

Le cas d'initialisation est Q(1,k) $= \frac{1}{5}$ avec $2 \leq$k≤ 6

Variante séquentielle

0.2 Stratégie aveugle

En première approche, on peut seulement lancer un nombre de dés qui nous assure en moyenne un nombre de points maximal. Si on lance d dés, l'espérance $EP(d)$ du nombre de points obtenus est donnée par la formule $EP(d) = 4d(\frac{5}{6})^d + 1 - (\frac{5}{6})^d$

Ainsi, si l'on note D le nombre de dés disponible, la stratégie aveugle consiste à trouver le $d \in [1, D]$ maximisant la fonction EP pour maximiser l'espérance du nombre de points.

Cependant, cette stratégie n'est pas optimale.

En effet, notons A_i l'évènement "le dé i est égal à 1"

Alors d'après la formule de Poincaré,

$P(\bigcup\limits_{i=1}^{d} A_i) = \sum_{k=1}^{d}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq d} P(A_{i_1} \bigcap ... \bigcap A_{i_n})$

De plus, $\bigcup\limits_{i=1}^{d} A_i$ correspond à l'évènement *"Observer au moins un 1 parmi les d dés"* et d'après la formule précédente, il apparaît que si l'on choisit $d > 1$, alors on a plus de chances d'obtenir un 1 qu'en prenant un seul dé.

Sur un exemple concret, on peut remarquer que le nombre de dés à lancer selon cette stratégie reste constant quelque soit l'avancement de la partie. Supposons que ce nombre soit supérieur ou égal à 2. Alors dans le cas où l'on est à $N - 2$ points, le choix optimal serait de lancer un seul dé car dans ce cas, la probabilité de victoire est de $1 - \frac{1}{6}$ (probabilité de ne pas obtenir de 1). Or, la stratégie aveugle proposerait de lancer un nombre supérieur de dés, ce qui impliquerait une chance plus grande d'obtenir un 1 et donc de ne pas gagner la partie lors de ce coup.

0.3 Programmation dynamique

Nous cherchons donc une stratégie permettant de maximiser l'espérance de gain plutôt que l'espérance du nombre de points.

Soit (i, j) l'état où le premier et le deuxième joueur ont cumulé respectivement i et j points et où c'est au joueur 1 de jouer.

Alors on peut calculer $EG(i, j)$ comme suit :

$EG(i, j)$= $\max_d \sum_{k=1}^{6d} P(d, k)$*($\min_{d'} \sum_{k'=1}^{6d'} P(d', k') * EG(i + k, j + k')$)

Les cas d'initialisation sont $EG(i, N) = -1$ pour $i \in [0, N - 1]$ et $EG(N, j) = 1$ pour j $\in [0, N - 1]$

Cette expression vient du fait que le joueur 1 cherche à maximiser son gain tandis que le joueur 2 cherche à minimiser sa perte car ils jouent tous les deux de façon optimale.

Pour retourner une stratégie optimale à partir d'un état (i, j) donné, il suffit de retourner le d maximisant l'expression de $EG(i, j)$

Si jamais le nombre de points marqués lorsqu'un 1 est tiré était de 0 et non plus de 1, nous remarquons que les deux sommes dans l'expression de $EG(i,j)$ commenceraient respectivement à k et $k' = 0$ et non plus 1. Ainsi, l'expression de $EG(i,j)$ dépendrait de $EG(i,j)$ ce qui pourrait conduire à des erreurs de segmentation dues à un trop grand nombre de récursions.

Voici le tableau renvoyant le nombre de dés à jouer d la stratégie optimale dans le cas où $N = 18$ et $D = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
6	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
7	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
8	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
9	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
10	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
11	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
12	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
13	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
14	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
15	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0.4 Mise en oeuvre

En plus de la stratégie aveugle et de la stratégie optimale, nous avons implémenté une stratégie aléatoire simple consistant à jouer un nombre de dés aléatoire entre 1 et D à chaque tour.

Nous avons ensuite comparé expérimentalement la qualité des différentes stratégies en fonction de D et N. Voici les résultats obtenus

Les figures 1 et 2 montrent que la stratégie aléatoire est dominée par la stratégie aveugle indépendamment de l'ordre des joueurs, ce qui est cohérent car la stratégie aveugle est la stratégie maximisant l'espérance du nombre de points.

De même, les figures 3 et 4 montrent que la stratégie aléatoire est toujours dominée par la stratégie optimale, peu importe l'ordre des joueurs.

Cependant, les figures 5 et 6 montrent que la stratégie optimale est légèrement meilleure que la stratégie aveugle, ce qui est cohérent. Le ratio est d'environ 60% de victoires pour la stratégie optimale contre 40% pour la stratégie aveugle.

On remarque que dans toutes les figures citées précedemment, nous avons uniquement fait varier N : Lorsque D varie, les résultats obtenus sont similaires.

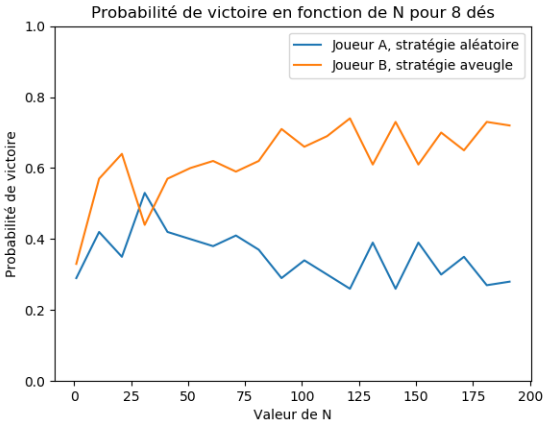

FIGURE 1 – Le joueur A joue avec une stratégie aléatoire, le joueur B avec une stratégie aveugle

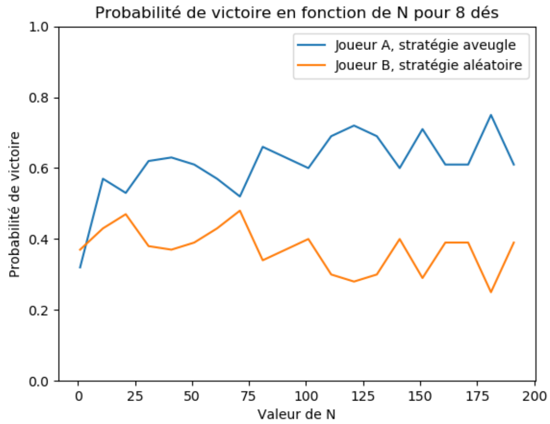

FIGURE 2 – Le joueur A joue avec une stratégie aveugle, le joueur B avec une stratégie aléatoire

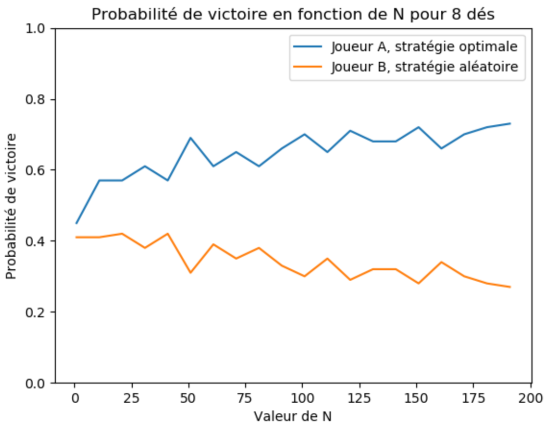

FIGURE 3 – Le joueur A joue avec une stratégie optimale, le joueur B avec une stratégie aléatoire

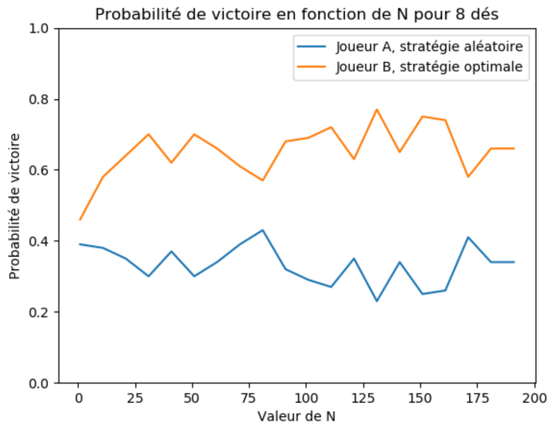

FIGURE 4 – Le joueur A joue avec une stratégie aléatoire, le joueur B avec une stratégie optimale

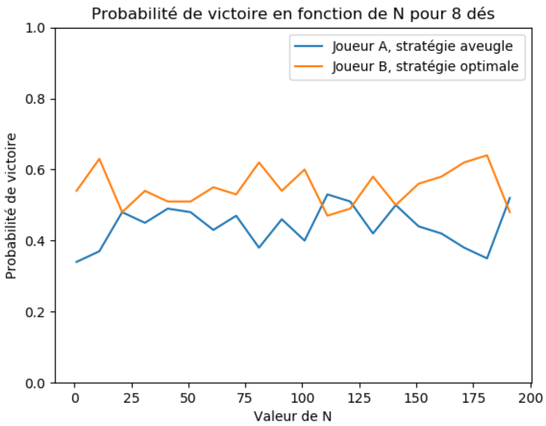

FIGURE 5 – Le joueur A joue avec une stratégie aveugle, le joueur B avec une stratégie optimale

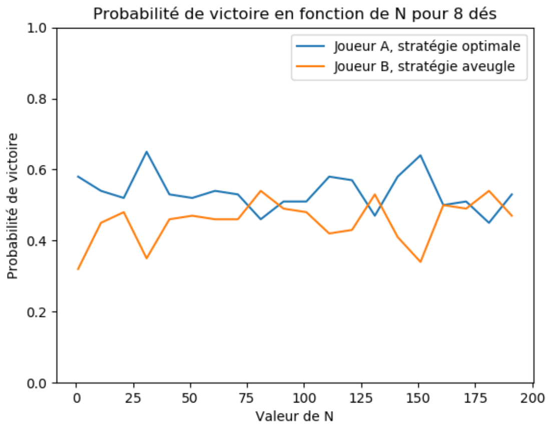

FIGURE 6 – Le joueur A joue avec une stratégie optimale, le joueur B avec une stratégie aveugle

Variante simultanée

Dans la variante séquentielle, il existait une stratégie optimale déterministe : en fonction de l'état du jeu, on détermine le nombre optimal de dés à lancer. Si les deux joueurs jouent à chaque tour de façon simultanée, alors la stratégie optimale dans un état (i, j) donné n'est plus nécessairement déterministe : elle peut être randomisée. Ainsi, nous considérons des stratégies randomisées (dites mixtes), consistant à donner un vecteur p $= [p(1), p(2), ..., p(D)]$ où $p(d)$ est la probabilité avec laquelle nous lançons d dés. Bien sûr, p(d) ≥ 0 et $\sum_{d=1}^{D} p(d) = 1$

On considère en première approche une version simpliée où l'on ne lance qu'une fois les dés. Le gagnant est simplement celui qui remporte le plus de points (toujours selon la même règle : 1 point si au moins un des dés tombe sur 1, la somme des dés sinon). En cas d'égalité, la partie est nulle. On note $EG_1(d_1, d_2)$ l'espérance de gain du joueur 1 s'il lance d1 dés alors que le joueur 2 en lance d2.

On peut calculer $EG_1(d_1, d_2)$ de la façon suivante :
$EG_1(d_1, d_2) = \sum_{\substack{k_1,k_2 \\ k_1>k_2}} P(d_1, k_1)P(d_2, k_2) - \sum_{\substack{k_1,k_2 \\ k_1<k_2}} P(d_1, k_1)P(dd_2, k_2)$

0.5 Stratégie optimale du joueur 2

Si le joueur 2 connaît le vecteur de probabilités $[p_1(1), p_1(2), ..., p_1(D)]$ du joueur 1, alors sa stratégie optimale est le vecteur $[p_2(1), p_2(2), ..., p_2(D)]$ donnée par la résolution du programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min_{p_2}(p_1^\top * EG_1 * p_2) \\ \sum_{i=1}^{D} p_2(i) = 1 \\ p_1(i) \geq 0, p_2(i) \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \min_j \sum_{1\leq i,j\leq D} p_1(i) * p_2(j) * EG_1(i, j) \\ \sum_{j=1}^{D} p_2(j) = 1 \\ \forall i, j \in [1, D]^2, p_1(i) \geq 0, p_2(i) \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Avec $p_1 = \begin{pmatrix} p_1(1) \\ \vdots \\ p_1(D) \end{pmatrix}$ et $p_2 = \begin{pmatrix} p_2(1) \\ \vdots \\ p_2(D) \end{pmatrix}$

En effet, le joueur 2 essaye de répondre de façon optimale donc il essaye de minimiser le gain du joueur 1 exprimé en fonction de la matrice de gain EG_1 du joueur 1. De plus, le joueur J_1 choisit à chaque fois de lancer d dés avec une probabilité $p_1(d)$.

Ainsi, si l'on note z la fonction objectif définie par $z = \sum_{1\leq i,j\leq D} p_1(i) * p_2(j) * EG_1(i, j)$, alors J_2 essaye de jouer systématiquement l'action minimisant le coefficient $p_1(i) * EG_1(i, j)$ dans la fonction objectif donnée ci-dessus. D'où le programme linéaire 2.

0.6 Stratégie optimale du joueur 1

On rappelle que les deux joueurs J_1 et J_2 adoptent une stratégie mixte définie par les vecteurs de probabilité respectifs $P_1 = [p1(1), p1(2), ..., p1(D)]$ et $P_2 = [p2(1), p2(2), ..., p2(D)]$

De plus, nous avons supposé que J_2 répondait optimalement à J_1. Nous cherchons maintenant à trouver la stratégie optimale de J_1 maximisant son espérance de gain.

L'espérance de gain de J_1 selon la stratégie P_1 est donnée par $(p_1^t * EG_1 * p_2)$

De plus, nous pouvons calculer la stratégie optimale de J_2 d'après le programme linéaire 1

On en déduit que pour que la stratégie de J_1 soit optimale, elle doit maximiser son gain sachant que J_2 joue avec une stratégie qui le minimise.

On doit donc résoudre $\max_i min_{j=1,...,D}(\sum_{j=1} Dp_1(i) * EG_1(i,j))$

Ceci peut s'exprimer sous la forme du programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max_{p_1} \min_{p_2}(p_1^\top * EG_1 * p_2) \\ \sum_{i=1}^D p_1(i) = 1 \\ \sum_{i=1}^D p_2(i) = 1 \\ p_1(i) \geq 0, p_2(i) \geq 0 \forall i \in [1, D] \end{cases} \tag{3}$$

La figure 7 montre que la stratégie optimale est meilleure que la stratégie aléatoire pour le jeu en un coup.

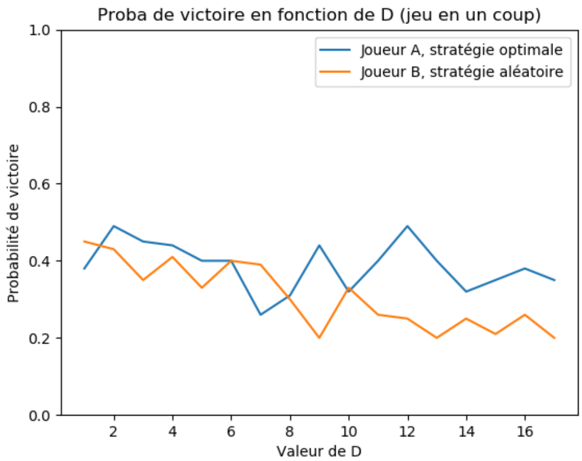

FIGURE 7 – Comparaison expérimentale des stratégies optimale et aléatoire pour le jeu en un coup