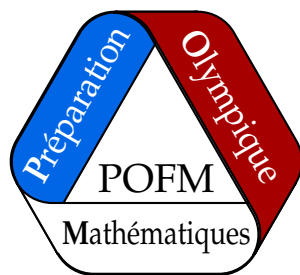


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 20 ET DU 21 FÉVRIER 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2006 ou avant et éligibles à l'EGMO.
Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls. On suppose que $a! + b! = c! + d!$. Démontrer que $ab = cd$.

Solution de l'exercice 1 Supposons sans perte de généralité que $a \leq b, c \leq d$ et $a \leq c$. Alors

$$b! = c! - a! + d! \geq d!,$$

donc $b \geq d$, de sorte que $a \leq c \leq d \leq b$. L'entier $c!$ divise donc $c! + d! - b! = a!$, ce qui signifie que $c \leq a$, et donc que $a = c$. On en conclut que $b! = d!$, donc que $b = d$ et que $ab = cd$.

Solution alternative n°1 Supposons de nouveau que $a \leq b, c \leq d$ et $a \leq c$. Si $a = c$, on conclut comme précédemment que $b = d$ et que $ab = cd$.

Sinon, on sait que $(a+1)! \geq 2a!$ divise $c! + d! = a! + b!$, donc ne divise ni $a!$, ni $b!$. Cela signifie que $a = b$. La double inégalité

$$a! + b! \geq c! + d! \geq 2 \times a! = a! + b!$$

devient alors une égalité, donc $a = b = c = d$, de sorte que $ab = cd$ malgré tout.

Solution alternative n°2 Supposons simplement que $a \leq b$ et $c \leq d$. Si $b < d$, alors

$$c! + d! > d! \geq (b+1)! = (b+1)b! \geq 2b! \geq a! + b!,$$

ce qui est absurde. On en déduit que $b \leq d$ et, de même, que $d \leq b$. Ainsi, $b = d$ et $a! = c!$, donc $a = c$ et $ab = cd$.

Commentaire des correcteurs L'exercice est globalement bien résolu, et les élèves ont eu beaucoup d'idées intéressantes, même si celles-ci ne permettaient pas toujours de conclure. Les élèves ont souvent ordonné a, b, c et d , mais parfois en faisant des erreurs de logique : par exemple, certains supposaient que c était le plus petit, montraient que si $c < a, c < b$ et $c < d$ on avait une contradiction, pour en déduire que $c = a$ ou $c = b$, oubliant ainsi le cas $c = d$. Plus généralement, il faut faire attention. Ainsi, on ne pouvait pas supposer d'emblée $a \geq c \geq d \geq b$, mais simplement $a \geq b, c \geq d$, et $a \geq c$: il n'y a pas de raison a priori que $d \geq b$, cela restait à prouver.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit D un point situé à l'intérieur du triangle ABC . Les droites (AD) et (BD) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 et B_1 . Le cercle circonscrit au triangle B_1DA recoupe la droite (AC) au point P . Le cercle circonscrit au triangle A_1BD recoupe la droite (BC) au point Q .

Démontrer que le quadrilatère $CPDQ$ est un parallélogramme.

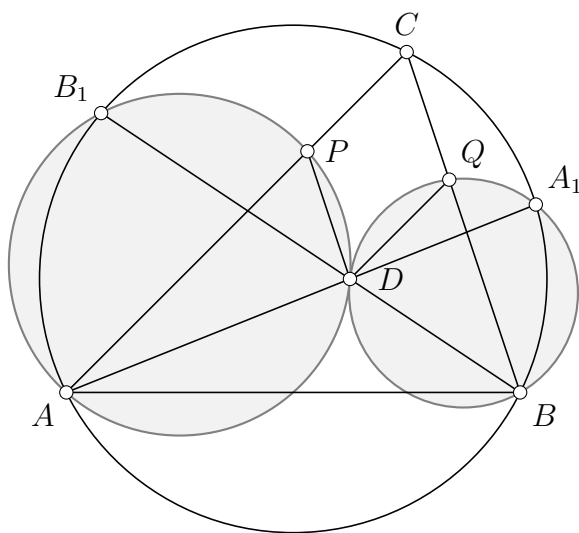
Solution de l'exercice 2 Une chasse aux angles de droites indique que

$$(QD, CB) = (QD, QB) = (A_1D, A_1B) = (A_1A, A_1B) = (CA, CB),$$

ce qui signifie que les droites (QD) et (AC) sont parallèles l'une à l'autre. On démontre de même que

$$(PD, CA) = (PD, PA) = (B_1D, B_1A) = (B_1B, B_1A) = (CB, CA),$$

ce qui signifie que les droites (PD) et (BC) sont parallèles l'une à l'autre. Le quadrilatère $CPDQ$ est donc un parallélogramme.



Commentaire des correcteurs L'exercice est très bien résolu.

Exercice 3. Maena et Théodore jouent à un jeu. Ils jouent sur une grille carrée formée de 99×99 cases. On considère que deux cases sont adjacentes si elles ont un sommet ou un côté en commun.

Initialement, Maena numérote les cases de la grille de 1 à 99^2 , de façon arbitraire. Théodore place alors un jeton sur l'une des cases du carré, puis il s'autorise des mouvements de la forme suivante : il peut déplacer le jeton d'une case vers une autre uniquement si ces cases sont adjacentes et si la nouvelle case sur laquelle se retrouve le jeton a un numéro strictement plus grand que l'ancienne case.

Combien de mouvements au minimum Théodore peut-il garantir, quelle que soit la manière avec laquelle Maena a placé ses entiers ?

Solution de l'exercice 3 Tout d'abord, Théodore peut toujours se débrouiller pour effectuer au moins trois mouvements. Pour ce faire, il lui suffit de sélectionner un carré de taille 2×2 à l'intérieur du carré de taille 99×99 , puis d'en parcourir les quatre cases, qui sont nécessairement adjacentes puisqu'elles ont un sommet en commun.

Réciproquement, voici comment peut procéder Maena pour empêcher Théodore d'effectuer plus de trois mouvements. Elle numérote lignes et colonnes de 1 à 99, puis regroupe les 99×99 cases du carré en quatre catégories :

- ▷ la catégorie 1 contient les cases situées en une ligne et une colonne impaires ;
- ▷ la catégorie 2 contient les cases situées en une ligne impaire et une colonne paire ;
- ▷ la catégorie 3 contient les cases situées en une ligne paire et une colonne impaire ;
- ▷ la catégorie 4 contient les cases situées en une ligne et une colonne paires.

Deux cases de la même catégorie ne sont jamais adjacentes.

Ensuite, Maena place ses entiers, dans l'ordre croissant, dans des cases de catégorie 1, puis de catégorie 2, puis de catégorie 3, et enfin de catégorie 4. Ainsi, Théodore ne peut jamais se déplacer entre deux cases de même catégorie, et encore moins baisser de catégorie. Tout mouvement augmente donc la catégorie de la case dans laquelle se trouve le jeton de Théodore, qui se voit ainsi limité à effectuer au plus trois mouvements.

Commentaire des correcteurs Dans un problème tel que celui-ci, il y a deux choses à faire :

1. proposer une stratégie que pourra utiliser Maena pour empêcher Théodore de faire trop de mouvements ;
2. proposer une stratégie que pourra utiliser Théodore pour faire au moins k mouvements (avec k à choisir) quelle que soit la stratégie de Maena.

Parmi les élèves qui ont recherché une stratégie pour Maena, nombreux sont ceux qui ont conclu qu'elle pouvait empêcher Théodore de faire plus de trois mouvements. Parmi ceux qui ont recherché une stratégie pour Théodore, nombreux sont ceux qui ont conclu qu'il pouvait toujours faire au moins trois mouvements.

Malheureusement, peu nombreux sont les élèves qui ont pensé à rechercher des stratégies pour Maena **et** pour Théodore. En particulier, démontrer que Théodore peut toujours faire au moins trois mouvements quand Maena suit la stratégie qu'elle a choisi est à peu près inutile, puisque Maena a encore $(99^2)! - 1 \approx 10^{34864}$ manières alternatives de numéroté la grille, et qu'il reste alors à démontrer que Théodore peut aussi faire au moins trois mouvements dans chacun de ces $(99^2)! - 1$ cas.

Exercice 4. Soit p et q deux nombres premiers distincts, tels que $p < 2q$ et $q < 2p$. Démontrer qu'il existe deux entiers consécutifs dont l'un a p pour plus grand facteur premier et l'autre a q pour plus grand facteur premier.

Solution de l'exercice 4 Supposons sans perte de généralité que $p < q$. Le théorème de Bézout indique qu'il existe des entiers a et b tels que $ap + bq = 1$.

On peut toujours remplacer un tel couple (a, b) par $(a \pm q, b \mp p)$. Par conséquent, si on cherche un couple pour lequel la valeur de $|a|$ est minimale, on sait que $|a - q| \geq |a|$ et $|a| \leq |a + q|$, de sorte que $|a| \leq q/2 < p$.

En outre, puisque $|ap + bq| = 1 \leq p + q$, les entiers a et b sont de signes opposés, ce qui signifie que les entiers $n = |a|p$ et $m = |b|q$ sont deux entiers consécutifs.

Puisque $|a| < p$, l'entier n a donc p comme facteur premier maximal. En outre, $m \leq n + 1 \leq p^2 \leq q^2$, donc m a q comme facteur premier maximal. Les entiers m et n satisfont donc les contraintes de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs Seuls deux élèves ont résolu ce problème particulièrement difficile. L'idée était de trouver un nombre n , éventuellement négatif, de la forme $n = ap = bq - 1$, où a et b n'auraient que de petits facteurs premiers.

Deux approches étaient alors *a priori* possibles : soit s'assurer que a et b seraient des puissances de p et de q , auquel cas le petit théorème de Fermat aurait pu être pertinent, soit s'assurer qu'ils étaient petits. Or, dès que l'on impose à a d'être une puissance de p telle que $ap \equiv 1 \pmod{q}$, on n'a plus aucun contrôle sur les facteurs de b . Il convenait donc de choisir a , b et n petits, ce qui exigeait de faire appel au théorème de Bézout.

Une dernière difficulté était que l'on devait, au besoin, ne pas hésiter à choisir n négatif, quitte à passer ensuite à la valeur absolue.

Enfin, de manière surprenante, plusieurs élèves se sont contentés de regarder ce qui se passait dans certains cas particuliers, par exemple $p = 2$ et $q = 3$, ou encore $p = 3$ et $q = 5$. Regarder des petits cas est **toujours** une excellente chose, mais il est évidemment indispensable de s'intéresser ensuite au cas général.

Problèmes Senior

Exercice 5. Soit \mathcal{S} un ensemble infini d'entiers naturels non nuls contenant quatre entiers a, b, c, d deux à deux distincts tels que $\text{pgcd}(a, b) \neq \text{pgcd}(c, d)$. Démontrer que \mathcal{S} contient trois entiers x, y, z deux à deux distincts tels que $\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(y, z) \neq \text{pgcd}(z, x)$.

Solution de l'exercice 5 Ci-dessous, on note $m \wedge n$ le plus grand diviseur commun à deux entiers m et n . On considère alors le graphe colorié infini dont les sommets sont les éléments de \mathcal{S} , et où chaque paire de sommets (u, v) distincts l'un de l'autre est reliée par une arête de couleur $u \wedge v$.

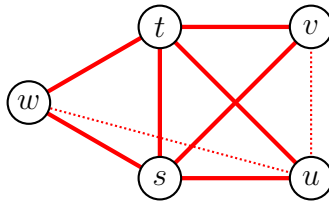
Supposons que les entiers x, y, z n'existent pas. Cela signifie que tout triangle est colorié en utilisant soit une seule couleur, soit exactement trois couleurs.



Soit maintenant u, v et w trois éléments de \mathcal{S} . Puisque u, v et w comptent chacun un nombre fini de diviseurs, la fonction $f: x \mapsto (u \wedge x, v \wedge x, w \wedge x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Parmi l'infinité d'éléments de \mathcal{S} distincts de u, v et w , il en existe donc deux, disons s et t , tels que $f(s) = f(t)$, c'est-à-dire que

$$s \wedge u = t \wedge u, s \wedge v = t \wedge v \text{ et } s \wedge w = t \wedge w.$$

Les triangles (s, t, u) , (s, t, v) et (s, t, w) sont donc monochromes, et puisqu'ils partagent l'arête (s, t) , ils sont de la même couleur, disons \mathcal{C} . Mais alors les triangles (s, u, v) et (s, u, w) ont chacun deux arêtes de couleur \mathcal{C} , dont ils sont eux aussi monochromes de couleur \mathcal{C} , de sorte que $u \wedge v = u \wedge w$.



Ainsi, deux arêtes ayant un sommet commun sont nécessairement de la même couleur, et notre graphe est monochrome. Cela signifie en particulier que

$$a \wedge b = c \wedge d,$$

en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. Notre hypothèse initiale était donc invalide, ce qui conclut.

Solution alternative n°1 Soit k le PGCD des éléments de \mathcal{S} . Si l'on divise chaque élément de \mathcal{S} par k , on obtient un ensemble \mathcal{S}' qui vérifie toujours l'énoncé et, réciproquement, si \mathcal{S}' vérifie l'énoncé, \mathcal{S} le vérifie aussi. On remplace donc \mathcal{S} par \mathcal{S}' , c'est-à-dire que l'on suppose désormais que $k = 1$.

Soit x et y deux éléments de \mathcal{S} tels que $x \wedge y \neq 1$. Il suffit, par exemple, de choisir $(x, y) = (a, b)$ ou $(x, y) = (c, d)$. Si \mathcal{S} admet un élément z premier avec x et y , on a $x \wedge z = y \wedge z = 1 \neq x \wedge y$, ce qui constitue le résultat souhaité.

Sinon, parmi les facteurs premiers de xy , il en existe au moins un, disons p , qui divise une infinité d'éléments de S . Notons S_p l'ensemble des éléments de S qui sont divisibles par p . Puisque $k = 1$, il existe un élément t de S qui n'appartient pas à S_p . Comme S_p est infini, et puisque la fonction $n \mapsto t \wedge n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque n varie, il existe deux éléments u et v de S_p tels que $t \wedge u = t \wedge v$. Puisque p divise $u \wedge v$ mais pas $u \wedge v$, on en conclut que $t \wedge u = t \wedge v \neq u \wedge v$, ce qui donne de nouveau le résultat souhaité.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été assez discriminant : peu d'élèves ont eu des éléments intéressants et permettant de bien avancer sans avoir intuité et trouvé la solution. Beaucoup des élèves n'ayant pas réussi à avancer se sont focalisés sur a, b, c et d . Cependant un élément était clé pour pouvoir avancer : l'infinité de S . C'est l'hypothèse la plus cruciale de l'énoncé, et il est dommage que certaines copies se retrouvent à n'utiliser nulle part ce fait, qui est pourtant le plus intéressant de l'énoncé, et incitait à appliquer le principe des tiroirs.

Dans un exercice, même si celui-ci a un aspect arithmétique apparent, il ne faut pas forcément se limiter à ce domaine et aux considérations qui y sont directement liées : l'exercice peut se situer à l'interface entre plusieurs domaines. Ici, certains ont présenté des preuves très combinatoires, d'autres plus arithmétiques : il est important de ne pas se limiter à sa première impression.

Par ailleurs, plus d'un élève sur cinq n'a pas rendu de copies au problème : en olympiades, le premier problème est difficile, mais les problèmes sont en ordre graduel. Il est donc dangereux de faire l'impasse sur le premier problème en espérant mieux réussir après.

Exercice 6. Soit A, B, C et D quatre points situés sur un cercle Ω . Soit E et F les points d'intersection des demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ avec la tangente à Ω en D . Soit T un point, situé à l'intérieur du triangle ABC , tel que (TE) soit parallèle à (CD) et que (TF) soit parallèle à (AD) . Enfin, soit K le point du segment $[DF]$, autre que D , tel que $TD = TK$.

Démontrer que les droites (AC) , (DT) et (BK) sont concourantes.

Solution de l'exercice 6 Soit P et Q les points d'intersection des droites (TE) et (TF) avec (AC) . Puisque (ED) est tangente à Ω , on sait que

$$(PA, PE) = (CA, CD) = (DA, DE),$$

donc que les points A, D, E et P sont appartenent à un même cercle α . On démontre de même que les points C, D, F et Q appartenent à un même cercle β .

Cela signifie en outre que

$$(PQ, PE) = (PA, PE) = (DA, DE) = (FQ, FE),$$

donc que les points E, F, P et Q appartenent à un même cercle γ . Ainsi, T est le centre radical des trois cercles α, β et γ . On s'intéresse donc à l'axe radical des cercles α et β , qui semble être leur tangente commune en D . On note donc d et d' les tangentes à α et à β en D , et on vérifie que

$$(d, d') = (d, DE) + (DF, d') = (AD, AE) + (CF, CD) = (AD, AB) + (CB, CD) = 0^\circ,$$

ce qui signifie bien que les tangentes d et d' sont confondues. En particulier, cette tangente commune contient T .

Par conséquent, et puisque le triangle TDK est isocèle en K , on sait que

$$(TP, TK) = (PE, ED) + (ED, TK) = (DP, DT) + (TD, DK) = (DP, DK),$$

ce qui signifie que P appartient au cercle circonscrit à DKT . On démontre de même que Q appartient à ce cercle circonscrit, que l'on note τ .

Forts de toutes ces relations de cocyclicité et de tangence, ensuite que

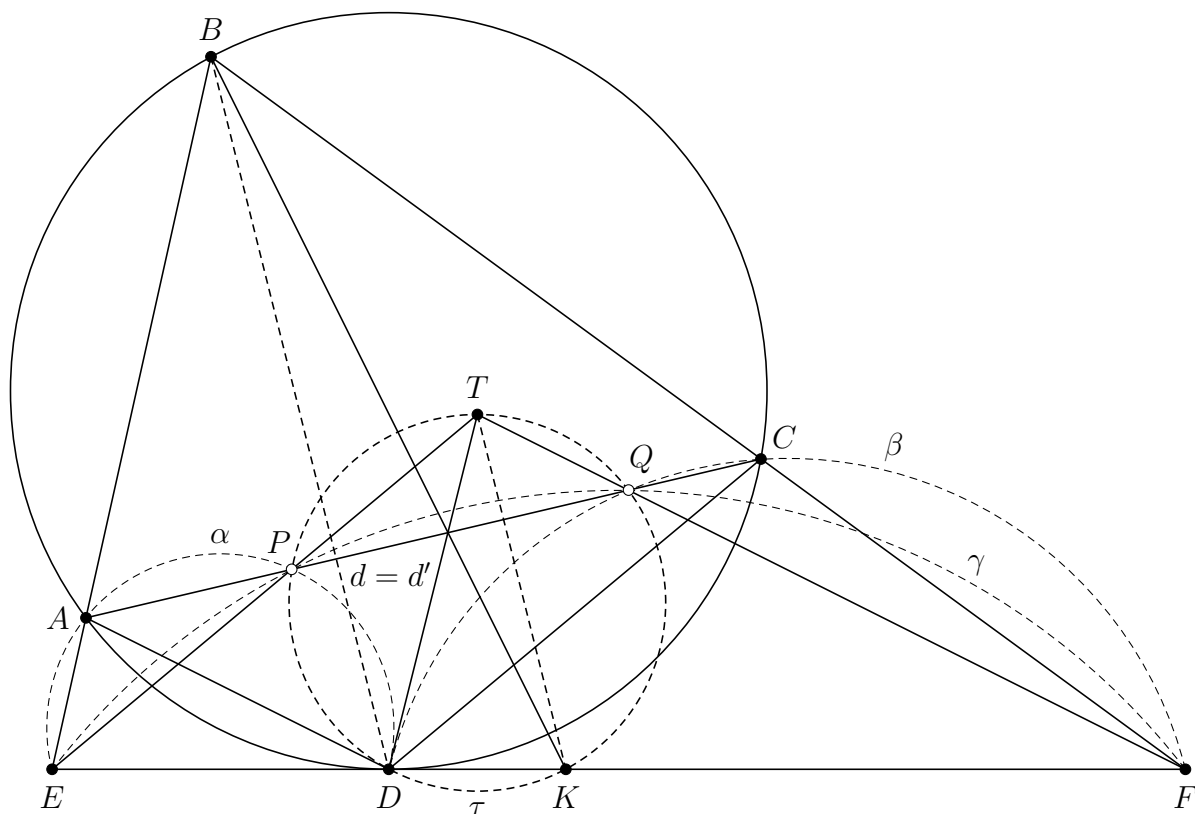
$$(KT, KD) = (DK, DT) = (DE, d) = (AE, AD) = (AB, AD) = (BD, DK),$$

ce qui signifie que les droites (BD) et (KT) sont parallèles. De manière analogue,

$$\begin{aligned} (KP, KD) &= (QP, QD) = (QP, QF) + (QF, QD) = (EP, EF) + (CF, CD) \\ &= (CD, KD) + (BC, CD) = (BC, KD), \end{aligned}$$

donc (KP) est parallèle à (BC) . On démontre de même que (KQ) est parallèle à (AB) .

Ces relations de parallélisme indique qu'il existe une homothétie qui envoie $ABCD$ sur $QKPT$, et le centre de cette homothétie appartient bien aux droites $(AQ) = (CP) = (AC)$, (BK) et (DT) .

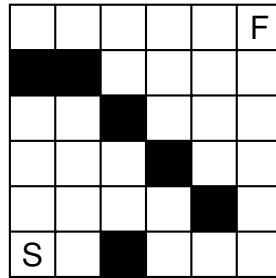


Commentaire des correcteurs L'exercice était très long. Dans chacune des solutions possibles, il y avait des points à introduire et beaucoup de relations à deviner puis à démontrer. Beaucoup d'élèves ont bien su démarrer sur l'une ou l'autre des solutions et montrer les premières relations. Une poignée d'élèves est parvenue à tout démontrer.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier. Une grenouille se déplace dans une grille de $3n \times 3n$ cases, sautant chaque fois d'une case vers la case située juste au-dessus ou juste à droite. Elle souhaite aller du coin en bas à gauche, marqué d'un S, au coin en haut à droite, marqué d'un F. Malheureusement, certaines cases sont piégées, et si la grenouille saute sur une telle case, elle y restera prisonnière.

On dit qu'un ensemble de cases piégées est *bloquant* s'il empêche la grenouille d'aller de la case S à la case F. On dit aussi qu'un ensemble bloquant est *minimal* si, dès lors que l'on retire le piège de l'une des cases de cet ensemble, notre ensemble n'est plus bloquant.

Par exemple, les cases noires de la grille ci-dessous forment un ensemble bloquant minimal.



- Démontrer qu'il existe un ensemble bloquant minimal qui contient au moins $3n(n-1)$ cases.
- Démontrer que tout ensemble bloquant minimal contient au plus $3n^2$ cases.

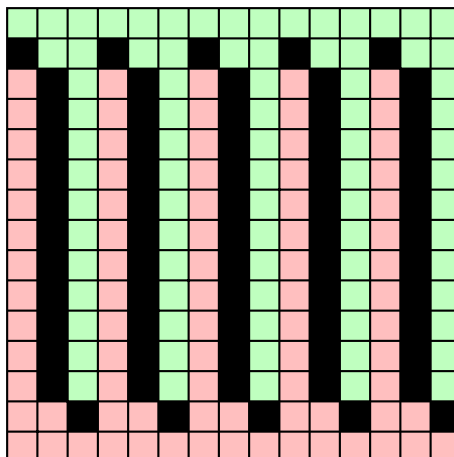
Solution de l'exercice 7 Colorions notre grille en trois couleurs :

- ▷ en noir, les cases piégées ;
- ▷ en rose, les cases non piégées auxquelles la grenouille peut accéder depuis la case S ;
- ▷ en vert, les cases non piégées depuis lesquelles la grenouille peut accéder à la case F.

Notons que notre grille contient éventuellement des cases incolores.

Notre ensemble de cases piégées est bloquant si et seulement si nulle case n'est à la fois rose et verte, c'est-à-dire si nulle case verte n'est située juste au-dessus ou juste à droite d'une case rose. Notre ensemble bloquant est donc minimal s'il consiste en la seule case S, ou bien en la seule case F, ou bien ne contient aucune de ces cases et si toute case noire est située juste au-dessus ou juste à droite d'une case rose, et juste en-dessous ou juste à gauche d'une case verte.

De la sorte, on vérifie aisément que la construction ci-dessous nous fournit un ensemble bloquant minimal composé de $n(3n-2) \geq 3n(n-1)$ cases piégées.

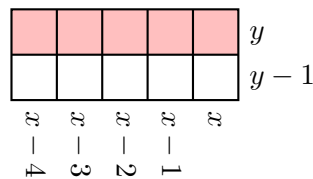


On démontre maintenant que tout ensemble bloquant minimal contient au plus $3n^2$ cases. Étant donné un tel ensemble bloquant minimal, soit r le nombre de cases roses, p le nombre de cases piégées et v le nombre de cases vertes. Au vu de la minimalité de notre ensemble bloquant, et à part la case S, chaque case rose ou noire se trouve juste au-dessus ou juste à gauche d'une case rose. On en déduit que $r - 1 + p \leq 2r$, c'est-à-dire que $p \leq r + 1$. On démontre de même que $p \leq v + 1$, et on en conclut que $3n^2 \geq (r + p + v)/3 \geq p - 2/3$, donc que $p \leq 3n^2$.

Solution alternative n°1 Voici une manière alternative, plus progressive mais nettement plus longue, de démontrer que tout ensemble bloquant minimal contient au plus $3n^2$ cases. On suppose évidemment que cet ensemble n'est pas constitué de la seule case S ou de la seule case F, auquel cas on aurait déjà gagné.

On aimerait bien découper dans la grille $3n \times 3n$ des rectangles 3×1 ou 1×3 contenant chacun une case de chaque couleur, de sorte que les cases n'appartenant à aucun rectangle ne soient pas piégées. On disposerait alors de la borne supérieure tant désirée.

On commence par démontrer que la grille $3n \times 3n$ ne contient aucune case incolore. En effet, si une case rose (x, y) a pour voisine une case incolore, il s'agit de sa voisine de gauche ou du dessous. Quitte à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale (SF), on suppose que c'est la voisine du dessous, c'est-à-dire $(x, y - 1)$. On démontre alors par récurrence sur k que les cases $(x - k, y)$ et $(x - k, y - 1)$ sont rose et incolore, comme illustré ci-dessous, les cases incolores étant simplement laissées en blanc.



En effet,

- ▷ la case $(x - k - 1, y)$ est nécessairement rose, ce sans quoi aucune des voisines de gauche et du dessous de la case $(x - k, y)$ ne serait rose ;
- ▷ la case $(x - k - 1, y - 1)$ n'est ni rose (sinon sa voisine de droite serait rose), ni verte ou noire (sinon l'une de ses voisines du haut ou de droite serait verte).

En particulier, la case $(0, y)$ est rose tandis que la case $(0, y - 1)$ est incolore, ce qui est absurde.

Puis, si une case noire (x, y) a pour voisine de gauche ou du dessous une case incolore, on suppose toujours, à symétrie près, que cette case incolore est $(x, y - 1)$. Mais alors $(x - 1, y)$ est rose et $(x - 1, y - 1)$ est incolore, ce qui est impossible.

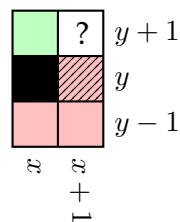
Enfin, quitte à effectuer une symétrie par rapport à la médiatrice de [SF] et à échanger les couleurs rose et verte, une case incolore ne peut pas non plus se situer en haut ou à droite d'une case noire, ni être adjacente à une case verte. Ainsi, nulle case n'est incolore.

On entreprend désormais de démontrer que chaque case noire, sauf les éventuels coins noirs, a soit une case rose à sa gauche et une case verte à sa droite, soit une case rose en-dessous et une case verte au-dessus. Dans les deux cas, on dira que ces trois cases forment un rectangle tricolore.

Si une case noire est disposée sur le côté bas, sa voisine de gauche est nécessairement rose, et sa voisine de droite n'est ni rose ni noire, donc elle est verte. On traite de même les autres cases noires situées sur les côtés, et on s'intéresse désormais aux cases éloignées des côtés.

Supposons que l'on dispose d'une case noire, disons en position (x, y) , dont la voisine de droite, en position $(x + 1, y)$, est rose ou noire. Toute case rose ou noire a une case rose à sa

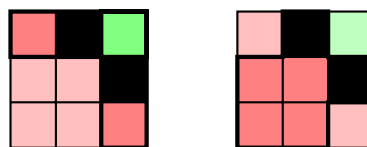
gauche ou juste en-dessous. Par conséquent, la case $(x + 1, y - 1)$ est rose. De même, toute case verte ou noire a une case verte à sa droite ou juste au-dessus, donc la case $(x, y - 1)$ est rose et la case $(x, y + 1)$ est verte. La case (x, y) appartient donc à un rectangle tricolore.



Quitte à appliquer une symétrie par rapport au milieu de $[SF]$, ce qui échangera les couleurs verte et rose, on démontre de même que, si la voisine de gauche de (x, y) est verte ou noire, la case (x, y) appartient à un rectangle tricolore. Enfin, si la voisine de gauche de (x, y) est rose et sa voisine de droite est verte, la case (x, y) appartient *de facto* à un rectangle tricolore horizontal.

On peut donc, pour chaque case noire autre que les cases situées dans les coins, choisir un rectangle tricolore dont elle est la case centrale. Par ailleurs, si une case noire est située dans le coin en haut à gauche ou en bas à droite, on peut tout de même l'insérer dans un L tricolore plutôt que dans un rectangle tricolore. Il reste à étudier le cas où deux zone de notre sélection (qui seront communément des rectangles) auraient une case commune.

Si deux rectangles tricolores partagent leur case verte, disons (x, y) , on est dans la situation représentée ci-dessous. Par construction, les cases $(x - 1, y)$ et $(x, y - 1)$ sont noires et les cases $(x - 2, y)$ et $(x, y - 2)$ sont roses, puis on montre que les quatre cases du carré 2×2 situé en bas à gauche sont roses elles aussi. Cette situation est illustrée ci-dessous, à gauche, les deux rectangles étant mis en surbrillance.



On décide alors de supprimer nos deux rectangles et les remplacer par la zone en forme de \blacksquare et mise en surbrillance ci-dessus, à droite. Celle-ci a certes le mauvais goût de ne plus contenir deux cases de chaque couleur, mais elle ne contient néanmoins que deux cases noires sur six. En outre, aucune case de notre motif n'appartient à un rectangle autre que ceux que nous avons supprimés, ni à un autre motif \blacksquare que nous aurions créé, car un tel motif est bordé par des rectangles tricolores de notre sélection sur ses côtés haut et droit.

De même, chaque case noire de notre motif ne sera intégrée à aucun autre motif ou rectangle, et chaque case rose du motif

Le même phénomène peut bien sûr être mis en place si deux rectangles ont une case rose commune, auquel cas on les remplace par une zone \blacksquare formée de deux cases piégées et de quatre cases vertes n'appartenant à aucun rectangle.

Enfin, le coin en haut à gauche est piégé, et si le L tricolore auquel il appartient partage sa case verte avec un rectangle tricolore, comme illustré ci-dessous à gauche, on le remplace par le rectangle formé des cases $(1, 3n - 2)$, $(1, 3n - 1)$, $(1, 3n)$, comme illustré ci-dessous à droite. Les autres cas d'intersection entre un L situé dans un coin et un rectangle se traitent de la même manière.



En conclusion, nous sommes parvenus à découper dans notre grille $3n \times 3n$ des zones deux à deux disjointes dont chacune contient un tiers de cases piégées, et dont l'union recouvre l'ensemble des cases piégées. Ainsi, comme désiré, au plus un tiers des cases de la grille sont piégées.

Commentaire des correcteurs La question a) était difficile et la question b) était très difficile, au point que seul un élève l'a résolue.

L'idée, pour trouver la construction de la question a), était de partir d'un coloriage des lignes de la grille en rose, noir, vert, rose, noir, vert, etc, puis de le modifier à la marge pour que ce coloriage respecte les règles de l'énoncé : en-dessous ou à gauche d'une case rose ou noire se trouve une case rose, et au-dessus ou à droite d'une case noire ou verte se trouve une case verte.

Pour la question b), plusieurs élèves ont tenté des approches analogues à celle, longue et ardue, de la solution alternative. En particulier, l'affirmation selon laquelle tout carré 3×3 de la grille contient au plus trois cases piégées est incorrecte.

Enfin, plusieurs élèves ont eu le mauvais réflexe de regarder uniquement les cas $n = 1$ et $n = 2$, trouvant sans surprise des ensembles piégés minimaux à $3n \geq 3n(n - 1)$ cases. C'est bien sûr à partir de $n = 3$, c'est-à-dire lorsque $3n < 3n(n - 1)$, que l'on pouvait espérer voir des ensembles bloquants minimaux pertinents.

Problèmes EGMO

Exercice 8. Cet exercice ne doit pas être diffusé.

Exercice 9. Trouver les entiers n pour lesquels l'égalité

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{i \times j}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)}{4}$$

est vérifiée.

On rappelle que, pour tout nombre réel x , la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Solution de l'exercice 9 Pour tout entier k , on note $r_{n+1}(k)$ le reste de la division euclidienne de k par $n+1$, c'est-à-dire le plus petit entier naturel tel que $n+1$ divise $k - r_{n+1}(k)$. La double somme de gauche se réécrit alors comme

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \frac{ij - r_{n+1}(ij)}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=0}^n j \right) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_{n+1}(ij) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_{n+1}(ij) \\ &= \frac{n^2(n+1)}{4} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_{n+1}(ij). \end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver les entiers n pour lesquels

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n r_{n+1}(ij) = (n+1) \left(\frac{n^2(n+1)}{4} - \frac{n^2(n-1)}{4} \right) = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Soit alors i un entier, puis soit $d = \text{PGCD}(i, n+1)$ et $k = (n+1)/d$ et $\ell = i/d$. Les entiers k et ℓ sont premiers entre eux, donc les k entiers $0, \ell, 2\ell, \dots, (k-1)\ell$ représentent les k résidus modulo k , et les k entiers $0, i, 2i, \dots, (k-1)i$ représentent les k résidus $0, d, 2d, \dots, (k-1)d$ modulo $n+1 = kd$. En particulier, pour tout entier t , on sait que

$$\sum_{j=kt}^{(k+1)t-1} r_{n+1}(ij) = \sum_{j=0}^{k-1} jd = d \frac{k(k-1)}{2},$$

de sorte que

$$\sum_{j=0}^{n-1} r_{n+1}(ij) = \sum_{t=0}^{d-1} \sum_{j=kt}^{(k+1)t-1} r_{n+1}(ij) = d^2 \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-d)}{2}.$$

En particulier,

$$\sum_{j=0}^{n-1} r_{n+1}(ij) \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

avec égalité si et seulement si $d = 1$, donc si i et $n+1$ sont premiers entre eux. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n r_{n+1}(ij) \leq \frac{n^2(n+1)}{2},$$

avec égalité si et seulement si $n+1$ est premier avec chacun des entiers $1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire si $n+1$ est un nombre premier.

En conclusion, les entiers recherchés sont les entiers n tels que $n+1$ est premier.

Solution alternative n°1 Dans la suite, on pose $s_{i,j} = ij/(n+1)$ et $\mathcal{S}_i = \sum_{j=1}^n \lfloor s_{i,j} \rfloor$. Pour tout $j \leq n$, on note que $s_{i,j} + s_{i,n+1-j} = i$. Par conséquent, si l'on pose $s_{i,j} = k + x$ avec k entier et $0 \leq x < 1$, on en déduit que

$$\lfloor s_{i,j} \rfloor + \lfloor s_{i,n+1-j} \rfloor = \lfloor k + x \rfloor + \lfloor (i - k - 1) + (1 - x) \rfloor = i - 1 + \lfloor 1 - x \rfloor,$$

de sorte que $\lfloor s_{i,j} \rfloor + \lfloor s_{i,n+1-j} \rfloor \geq i - 1$ avec égalité si et seulement si $x \neq 0$, c'est-à-dire si $n+1$ ne divise pas ij .

Or, quand j décrit l'ensemble $\{1, 2, \dots, n-1\}$, $n+1-j$ décrit aussi cet ensemble. On en déduit que

$$2\mathcal{S}_i = \sum_{j=1}^n \lfloor s_{i,j} \rfloor + \lfloor s_{i,n+1-j} \rfloor \geq \sum_{j=1}^n (i - 1) = n(i - 1),$$

avec égalité si et seulement si $n+1$ ne divise aucun produit ij , c'est-à-dire si $n+1$ est premier avec i . On en conclut alors que

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}_i \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n (i - 1) = \frac{n^2(n - 1)}{4},$$

avec égalité si et seulement si $n+1$ est premier avec tous les entiers i , c'est-à-dire si $n+1$ est un nombre premier.

Ainsi, les entiers n recherchés sont exactement ceux pour lesquels $n+1$ est premier.

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile, et peu d'élèves ont réussi à avancer. Une vraie difficulté était de se convaincre qu'il existait des entiers n arbitrairement grands pour lesquels l'énoncé était vrai. Ici, traiter les petits cas donnait une bonne intuition des n solutions, mais il fallait en traiter beaucoup. Par conséquent, de nombreuses élèves ont essayé d'utiliser des inégalités pour montrer que, lorsque n était arbitrairement grand, la somme allait devenir plus grande ou plus petite que $n^2(n-1)/4$. Au vu de la solution de cet exercice, cette stratégie était malheureusement vouée à l'échec.

Les élèves ayant trouvé le problème ont fait comme dans la solution 2, dont l'astuce principale est non sans rappeler la solution du problème 16 de la coupe Animath d'automne : il est important de lire les corrigés des exercices non trouvés, car ceux-ci peuvent aider à avancer dans des problèmes très différents.

Exercice 10. Soit n un entier naturel. On dit qu'un ensemble fini d'entiers est n -équilibré s'il y a exactement n manières de le partitionner en deux sous-ensembles de même somme. Par exemple, l'ensemble $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est 2-équilibré, car les seules manières de le partitionner en deux sous-ensembles de même somme sont de le partitionner en $\{1, 3, 4, 5\}$ et $\{6, 7\}$, ou bien en $\{1, 5, 7\}$ et $\{3, 4, 6\}$.

Trouver tous les entiers $n \geq 0$ pour lesquels il existe un ensemble n -équilibré.

Solution de l'exercice 10 Tout d'abord, l'ensemble $\{1\}$ est 0-équilibré et l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est 1-équilibré.

Étant donné un entier $n \geq 2$, nous allons démontrer que l'ensemble

$$E = \{k : 3n \leq k \leq 4n - 1\} \cup \{k : 4n + 1 \leq k \leq 5n\} \cup \{8n(n - 2)\}$$

est n -équilibré. En effet, si l'on note Σ_X la somme des éléments d'un ensemble X , partitionner E en deux sous-ensembles de même somme revient à choisir un sous-ensemble X de E contenant l'entier $8n(n - 2)$ et dont la somme vaut

$$\Sigma_X = \frac{\Sigma_E}{2} = \frac{1}{2} \left(8n(n - 2) + \sum_{\ell=1}^n ((4n - \ell) + (4n + \ell)) \right) = \frac{1}{2} (8n(n - 2) + 8n^2) = 8n(n - 1).$$

Autrement dit, cela revient à sélectionner un sous-ensemble Y de $E' = E \setminus \{8n(n - 2)\}$ pour lequel $\Sigma_Y = 8n$.

Puisque $\max E' < 8n < 3 \min E'$, un tel ensemble Y contient exactement 2 éléments. Les ensembles Y recherchés sont donc les ensembles de la forme $\{4n - \ell, 4n + \ell\}$ avec $1 \leq \ell \leq n$. Il existe n tels ensembles, donc E est bien n -équilibré, comme souhaité.

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile, et une seule élève est parvenue à le résoudre. Une première étape consistait à étudier les petites valeurs de n . Ici, il est dommage que plusieurs élèves aient oublié le cas $n = 0$. Une difficulté importante était ensuite de se figurer que tout entier était en fait solution. L'idée, pour le démontrer, était d'imposer l'apparition d'un ou plusieurs nombres dans l'ensemble E , que l'on aura préalablement choisis aussi grands que possible, de manière à se ramener à un problème légèrement plus simple : étant donné une somme s et un ensemble E combien y a-t-il de sous-ensembles de E dont la somme vaut s ?