Transition CPGE

Chapitre 0 : Outils latex

1. *[1] Calculer 1+1 0 :

La solution est triviale, on a 1+1 = 2.

1 Chapitre 1 : Rédaction, modes de raisonnements

1. 2 (Somme des cubes des n premiers cubes*) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On pose la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
P_1 est naturellement vérifiée. Supposons que P_n est vraie :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\iff \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n^3+3n^2+3n+1)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n^2+2n+1)+4n^3+12n^2+12n+4)}{4}$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3}{4}$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^4+6n^3+5n^2+12n+4}{4}$$

Or, d'après notre propriété, le numérateur vaudrait :

$$((n+1)(n+2))^2 = n^4+6n^3+5n^2+12n+4$$

D'où la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. 2 Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que :

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$$

Soit $P_n : \forall n, n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_n : 5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$.
Pour P_1 : On a $5^2 = 25 = 1 + (3) \cdot 2^3$.
D'où $\lambda_1 = 3$: L'initialisation est vérifiée.

Supposons P_n vraie :

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2} \iff 5^2 \cdot \left(5^{2^n}\right) = 5^2 \cdot \left(1 + \lambda_n 2^{n+2}\right)$$

$$\iff 5^{2^{n+1}} = 25 + 25\lambda_n 2^{n+2}$$