STAGE OLYMPIQUE JUNIOR 2017

Animath

du 23 au 27 octobre 2017

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

CNRS

Inria

École Polytechnique Université Paris-Saclay

Fondation mathématique FMJH Jacques Hadamard

Fondation Blaise Pascal

Crédit Mutuel Enseignant

CASIO

Fondation Solidarité Société Générale

Avant-propos

Le stage olympique junior de toussaint 2017 a été organisé à Cachan par l'association Animath.

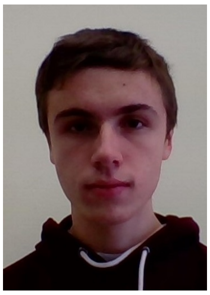
Son objet a été de rassembler des élèves de seconde et de collège, séléctionnés entre autres d'après leur participation à diverses compétitions comme le concours Kangourou et aux précédentes activités olympiques d'Animath, notamment la coupe Animath du 6 juin 2017, et de leur donner les bases nécessaires pour participer aux compétitions internationales. Presque tous les stagiaires ont passé, le 4 octobre 2017, le test de la Préparation Olympique Française de Mathématiques, mais celui-ci était trop tardif pour être pris en compte dans notre sélection. Cela dit, certains de nos stagiaires seront ainsi préparés à plusieurs compétitions internationales en 2018, dont la liste reste à préciser en fonction des possibilités d'Animath.

Nous tenons à remercier l'internat d'excellence de Cachan pour son formidable accueil.

Les Animatheurs


Mathieu Barré


Guillaume Conchon--Kerjan

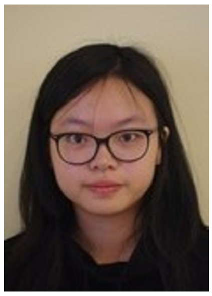

Yohann d'Anello


Colin Davalo


Cécile Gachet

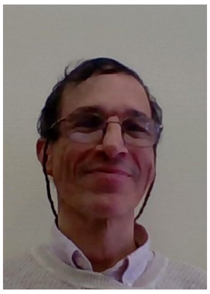

Héloïse Gachet


Linda Gutsche


Cindy Hua

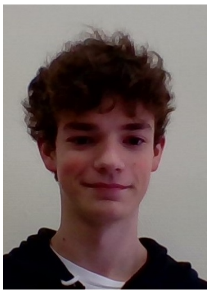

Vincent Jugé

Ilyas Lebleu


François Lo Jacomo


Eva Philippe


Myriam Qrichi Aniba

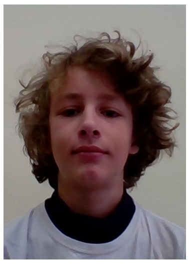

Martin Rakovsky

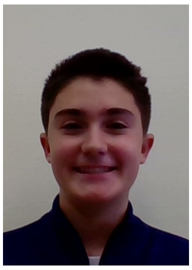
Les élèves


Solal Afota


Brice Andrieux

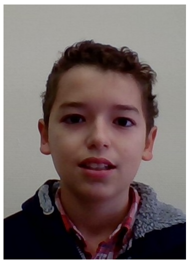

Sixtine Andrieux


Sacha Arrouès-Paykin

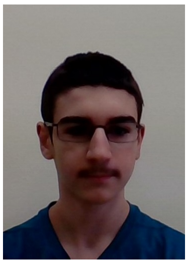

Etienne Azerad

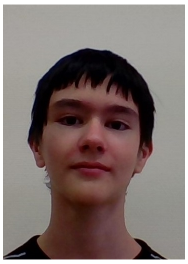

Dominique Bazin


Mehdi Belaidi


Maher Billon

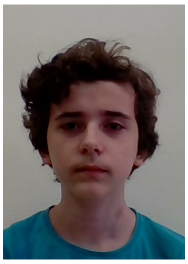

Thomas Blasiak

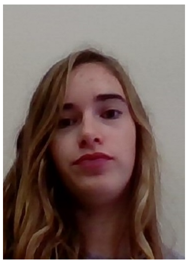

Elias Caerio

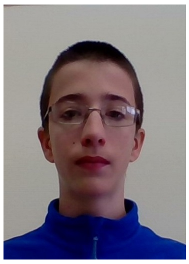

Loïc Chevalier

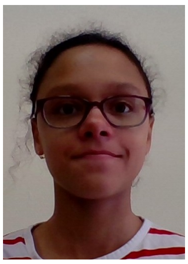

Maud De La Bretéche


Valeria Del Pio


Hugo Doppler

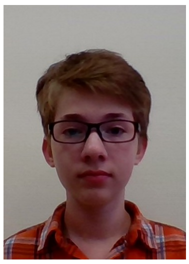

Méline Durot

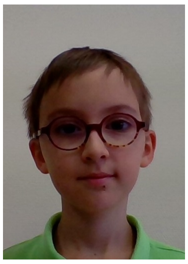

Pierre Fritsch


Laura Galindo


Ulysse Gaspar

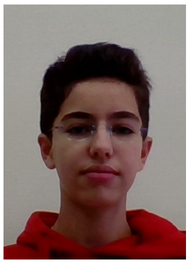

Mélissa Graine


Galileo Grey



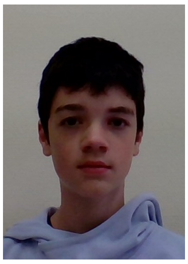
Paul Guichon

Chloé Israel

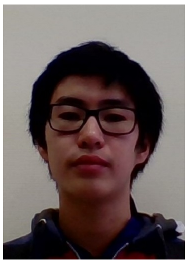


Isaline Jouve

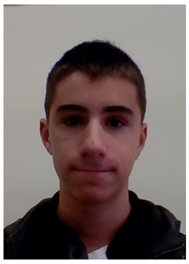
Julien Michot



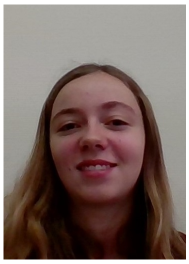
Ulysse Lacoustille



Charles Liu

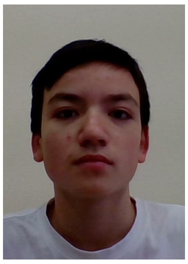


Brieux Madeline-Derou



Suzanne Mairesse

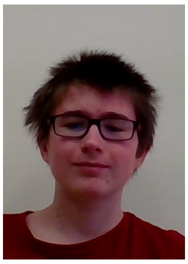
Noa Mbaye



Edouard Nakatani

Romeo Nazaret

Michaela Rosinska

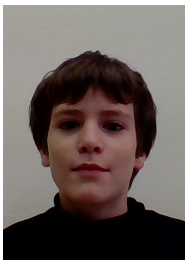


Clément Rougeron

Sophie Roulier

Domitille Saliou

Jeanne Treyer



Elie Verhille

Benoit Vogel

Table des matières

I. Déroulement du stage

C'est la neuvième année que nous organisons ce stage olympique junior, et toujours - sauf la première année - au foyer de Cachan, qui vient d'être rebaptisé lycée professionnel Robert Keller. En prévision des Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques, nous avons décidé de n'accepter que les élèves de collège ou de seconde nés en 2003 ou après, et nous avons refusé une dizaine de candidatures invalides de ce fait. Nous avons également dissuadé de venir plusieurs élèves ayant déjà un niveau olympique trop élevé. Parmi 57 candidatures restantes, après trois désistements (dont une à l'arrivée au stage, l'élève ne supportant pas l'idée de dormir à l'internat), nous avons ainsi admis 38 stagiaires, dont 11 de seconde, 23 de troisième et 4 de quatrième (âge moyen 13,9 ans), venus de 13 Académies dont les Académies de Paris (8 élèves), Versailles (5 élèves), Grenoble (4 élèves), Lyon (3 élèves) et Caen (4 élèves) - Académie habituellement peu représentée, mais dont nous avons invité les lauréats de l'Olympiade de Quatrième. Quatre élèves venaient de l'étranger, tout spécialement pour le stage : Suisse, Allemagne, mais aussi Qatar et Emirats Arabes Unis. La diversification géographique progresse lentement : moins de Paris / Versailles (34%), autant de Lyon / Grenoble / Montpellier (24%), et pour la deuxième fois, nous avions plus de 34% de filles (13 filles : 8 de troisième et 5 de seconde).

Le premier jour, trois animateurs sont arrivés entre 8 h 15 et 9 h 15 pour tout mettre en place, et les stagiaires sont arrivés entre 9 h 30 et 12 h 05. C'est le premier arrivé qui, après deux heures d'hésitation, a finalement renoncé à rester. Nous avions prévu un accueil en gares de Lyon et de Bercy par Yohann D'Anello pour huit élèves, un à une station de métro et gare Montparnasse par Eva Philippe pour trois élèves, et un, en dernière minute, gare Saint Lazare par la mère d'un animateur, Mme Lebleu. D'autres élèves arrivés par le train étaient accompagnés par leurs parents. Eva Philippe a réalisé très rapidement le trombinoscope. Après une rapide présentation du stage à 12 h, nous étions bien à l'heure pour le déjeuner à 12 h 30. L'après-midi, c'est au moyen d'entretiens avec les cinq animateurs présents et de petits exercices individuels que les élèves ont été répartis en deux groupes, et ceci très rapidement : à 16 h, heure du goûter, tout était terminé. Mais nous leur avions distribué le matin à leur arrivée une longue liste de quinze exercices d'échauffement dont la plupart ont été corrigés le soir même, après le dîner.

L'équipe organisatrice était particulièrement jeune, cinq animateurs étaient mineurs. Les horaires étaient ceux de l'an passé : petit déjeuner à 8 h, cours en parallèle de 9 h à 10 h 30 et de 11 h à 12 h 30, déjeuner à 12 h 30, cours de 14 h à 16 h et de 16 h 30 à 17 h 30 avec un goûter à 16 h, dîner à 19 h suivi généralement d'une soirée à 20 h. Puis les stagiaires pouvaient encore jouer, mais à 23 h, extinction des feux. Les 25 garçons avaient été placés dans l'aile des filles, quatre d'entre eux dans la grande chambre avec quatre douches, surveillés par moi-même et, se relayant, Martin Rakovsky, Yohann d'Anello et Vincent Jugé, et les filles dans l'aile des garçons, où se sont succédé Héloïse Gachet, Guillaume Conchon--Kerjan et Myriam Qrichi Aniba, et où Linda Gutsche, bien que mineure, a grandement contribué à la surveillance.

Mercredi matin, nous avons été interrompus une bonne vingtaine de minutes par un test d'alarme incendie. Ce n'était pas un exercice : personne ne nous attendait au point de rassemblement pour nous donner les instructions. Mercredi après-midi, une journaliste de Radio France Internationale est venue assister aux deux cours et interroger deux élèves en vue d'un reportage prévu pour un matin de la semaine suivante, sur la peur des maths (et, en contrepoint, la passion des maths : peut-on dire que les mathématiques sont jolies ?). Mardi soir, Linda Gutsche a fait découvrir la cryptologie en distribuant aux douze groupes de trois ou quatre élèves des exercices de cryptage et décryptage de messages qu'ils s'échangeaient. Le lendemain, Vincent Jugé leur a présenté un vaste panel de compétitions et autres activités proposées par notre association Animath et son partenaire informatique France IOI, sur la base, entre autres choses, de la nouvelle plaquette que nous venons d'éditer à ce sujet. La dernière soirée, jeudi, était traditionnellement libre. Nous n'avons organisé qu'un test le vendredi matin (9 h à 12 h) portant sur les trois journées de cours : stratégies de base, algèbre et combinatoire le matin, géométrie l'après-midi. Cette alternance avait déjà été expérimentée l'an dernier ainsi qu'aux stages d'été. Les énoncés du test n'étaient bien sûr pas les mêmes pour les avancés et les débutants. Vendredi après-midi, outre les formalités de départ (une dizaine d'élèves ont été raccompagnés dans quatre gares parisiennes), il restait à présenter la correction du test et rendre les copies, distribuer le polycopié, remettre les attestations et les factures... la fin du stage est prévue vers 16 h.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Débutants</th><th>Avancés</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Lundi</td><td>10h-12h</td><td colspan="2">Arrivée et installation</td></tr>
<tr><td>12h-12h30</td><td colspan="2">Présentation du stage</td></tr>
<tr><td>14h-16h</td><td colspan="2">Evaluation initiale</td></tr>
<tr><td>20h</td><td colspan="2">Correction des exercices d'échauffement</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mardi</td><td>Matin</td><td>principe des tiroirs
(Cindy Hua)</td><td>récurrence
(Martin Rakovsky)</td></tr>
<tr><td>Après-midi</td><td>chasse aux angles
(Héloïse Gachet)</td><td>puissance d'un point
(Linda Gutsche)</td></tr>
<tr><td>20h30</td><td colspan="2">Travaux pratiques de cryptologie (Linda Gutsche)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mercredi</td><td>Matin</td><td>algèbre
(Ilyas Lebleu)</td><td>combinatoire
(Vincent Jugé)</td></tr>
<tr><td>Après-midi</td><td>triangle
(Linda Gutsche)</td><td>homothéties
(Guillaume Conchon--Kerjan)</td></tr>
<tr><td>20h</td><td colspan="2">Olympiades et autres activités (Vincent Jugé)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Jeudi</td><td>Matin</td><td>invariants
(Yohann d'Anello)</td><td>combinatoire
(Colin Davalo)</td></tr>
<tr><td>Après-midi</td><td>géométrie
(Guillaume Conchon--Kerjan)</td><td>cercle d'Euler
(Ilyas Lebleu)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vendredi</td><td>9h-12h</td><td colspan="2">Test final</td></tr>
<tr><td>14h30</td><td colspan="2">Correction du test final - clôture du stage</td></tr>
</table>

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

— Le site d'Animath : `www.animath.fr` — Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`

II. Première journée

1 Test initial

1 Énoncés

Exercice 1 65 personnes sont alignées sur une colonne. À chaque étape, chaque personne effectue aléatoirement un pas soit vers la gauche, soit vers la droite (*tous les pas sont de même amplitude*). On suppose qu'il y a 17 colonnes et que chaque personne sont initialement sur la neuvième colonne.

a) Montrer qu'après chaque étape, au moins 8 colonnes sont vides.

b) Montrer qu'après chaque étape, il existe au moins une colonne qui contient au moins 8 personnes.

Exercice 2 On appelle « *anagramme* » d'un mot une permutation des lettres de ce mot. Par exemple, « *sujet* » et « *juste* » sont des anagrammes.

Dénombrer toutes les anagrammes distinctes de « YOANN »[1].

Exercice 3 Soit ABC un triangle. On note S le point d'intersection de la bissectrice issue de A et du cercle circonscrit de ABC.

Montrer que le triangle BCS est isocèle.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1

a) Colorions une colonne sur deux en rose, une colonne sur deux en vert, en commençant par le rose. Au départ, chacun se situe sur une colonne rose. Puis, à chaque opération, tout le monde change de couleur. Ainsi, tout le monde est toujours sur la même couleur à n'importe quel moment. Ainsi, soit toutes les colonnes roses sont vides, soit toutes les colonnes sont vides. Il y a alors toujours au moins 8 colonnes qui sont vides.

b) Les 65 personnes sont réparties en au plus 9 colonnes. En application du principe des tiroirs, au moins une colonne contient au moins $\left\lceil \frac{65}{9} \right\rceil$ = 8 personnes.

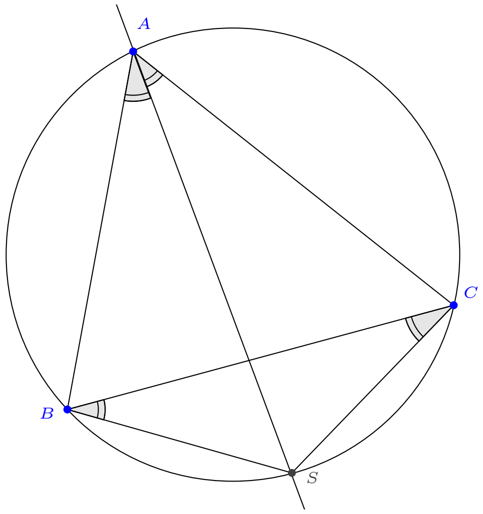
Solution de l'exercice 2 Traçons 5 traits sur lesquels on va placer les différentes lettres. On a d'abord 5 choix pour placer le Y. Puis, il nous reste 4 choix pour le O et 3 choix pour le A.

1. L'animatheur s'appelle en réalité « Yohann ». Pour éviter d'avoir des nombres trop grands à calculer, une lettre a été retirée.

Il nous reste alors deux emplacements pour les N, mais en permutant les N, les mots sont identiques.

Il existe alors $5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{2} = 60$ anagrammes distinctes du mot « YOANN ».

Solution de l'exercice 3



Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BAS} = \widehat{BCS}$. De même, $\widehat{SAC} = \widehat{SBC}$. Puisque $\widehat{BAS} = \widehat{SAC}$, il en découle que $\widehat{SBC} = \widehat{BCS}$.

3 Questions posées lors de l'entretien :

— Connais-tu le principe des tiroirs ?

— On suppose qu'il existe 10 millions de Parisiens qui ont au plus 600000 cheveux. Montrer qu'il existe un groupe de 167 personnes ayant chacun le même nombre de cheveux.

— As-tu déjà entendu parler du principe des invariants ou de parité ?

— Sais-tu ce qu'est une factorielle ou un coefficient binomial ?

— Connais-tu le théorème de l'angle inscrit ?

— Saurais-tu montrer que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$?

2 Exercices d'échauffement

Voici les exercices et énigmes posés le premier jour pour occuper les élèves (de style olympique, mais pas uniquement).

Énoncés

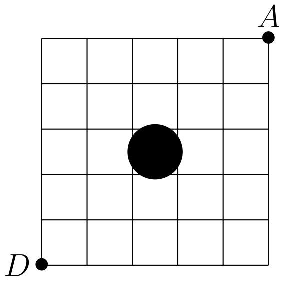
Exercice 1 On dispose d'un briquet et de deux ficelles qui brûlent chacune en une heure lorsqu'on les allume par une extrémité (mais pas forcément à une vitesse régulière). Comment mesurer trois quarts d'heure ?

Exercice 2 Un TGV part de Paris à 150km/h en direction de Marseille, à 800km de là. Un intercité part de Marseille à 50km/h vers Paris au même moment. Une hirondelle posée sur le TGV décolle à ce moment, à 200km/h, en direction de Marseille. Lorsqu'elle atteint l'intercité, elle fait demi-tour, puis lorsqu'elle rejoint le TGV, elle repart dans l'autre sens, etc. Quelle distance aura-t-elle parcouru lorsque les deux trains se croiseront ?

Exercice 3 2017 fourmis se trouvent sur un bâton de 10m de long. Au top départ, elles se mettent en mouvement à la même vitesse. Lorsque deux fourmis arrivent face à face, elles font demi-tour. Lorsqu'une fourmi arrive au bord du bâton, elle tombe. Est-on sûr que toutes les fourmis finiront par tomber ?

Exercice 4 A eux deux, les produits par quatre et par cinq d'un nombre entier utilisent chaque chiffre de 1 à 9 une fois, et une fois seulement. Quel est ce nombre ?

Exercice 5 Sur cette grille à mailles carrées, une fourmi veut se rendre du point D au point A en empruntant un chemin le plus court possible. Mais elle doit à tout prix éviter le piège représenté en noir sur la figure. De combien de façons différentes peut-elle effectuer ce déplacement ? Note : La fourmi se déplace uniquement sur les traits horizontaux et verticaux



Exercice 6 On écrit 2017 comme la somme de certains entiers positifs (par exemple $2017 = 1008 + 1009$ ou $2017 = 458 + 776 + 793$). Puis on multiplie ces entiers. Quel est le plus grand produit que l'on puisse obtenir ?

Exercice 7 Dans une classe, les élèves jouent à un jeu avec 960 jetons. Au début, chaque élève a reçu le même nombre de jetons. Quand le professeur rejoint les élèves, chaque élève lui donne 4 jetons. Après cela, on constate que tout le monde a encore le même nombre de jetons. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

Exercice 8 Sur chaque case d'un échiquier, on peut choisir de placer 0 ou 1 jetons, de telle sorte que le nombre de jeton sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale est au plus 4. Combien de jetons peut-on placer au maximum ?

Exercice 9 On colorie le recto d'une feuille de papier de deux couleurs : bleu et rouge. Est-il toujours possible de trouver deux points de même couleur séparés par une distance de 2 centimètres ?

Exercice 10 Alice et Bob jouent à un jeu : il y a 101 allumettes sur la table. Chacun à leur tour, ils peuvent prendre $1, 2$ ou 3 allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a gagné. Si Alice commence, Bob possède-t-il une stratégie pour gagner à tous les coups ?

Exercice 11 Alice et Bob jouent cette fois-ci au jeu suivant. 10 cartes numérotées de 1 à 10 sont alignées de façon aléatoire sur une table pour former une rangée. Chacun à leur tour, Alice et Bob prennent soit la carte la plus à gauche, soit la carte la plus à droite de la rangée. A la fin, le joueur avec les cartes dont la somme des numéros est la plus grande gagne. Si Alice commence, a-t-elle une strat̀egie pour gagner à tous les coups ?

Exercice 12 Un hexagone régulier et un triangle équilatéral ont le même périmètre. Quel est le rapport de leurs aires ?

Exercice 13 Un quadrilatère $ABCD$ est tel que $AC = DB$. Soit M un point quelconque du plan. Montrer $MA < MB + MC + MD$.

Éléments de solution

Solution de l'exercice 1 On allume une ficelle aux deux extrémités, et la deuxième à une extrémité. Lorsque la première est consumée, au bout d'une demi-heure, on allume la deuxième à l'autre extrémité.

Solution de l'exercice 2 L'hirondelle vole à 200km/h pendant les 4 heures qui s'écoulent entre le départ des trains et le moment où ils se croisent. Donc elle parcourt 800km.

Solution de l'exercice 3 Si, lorsque la fourmi A et la fourmi B se rencontrent, on échange A et B, on obtient la même dynamique. On peut ainsi supposer que les fourmis se croisent au lieu de se repousser mutuellement. Ainsi, chaque fourmi avance sans faire demi-tour et finit par tomber.

Solution de l'exercice 4 Soit n le nombre tel que $4n$ et $5n$ s'écrivent avec les 9 chiffres. $5n \geq 4n$ donc $5n$ a au moins 5 chiffres et $4n$ au plus 4. Ainsi, $4n \leq 9876 \leq 12345 \leq 5n$. Or $9876 = \frac{4}{5} \times 12345$, donc $4n = 9876$ et $5n = 12345$, ainsi $n = 2469$.

Solution de l'exercice 5 La fourmi ne pouvant que se déplacer vers la droite et le haut, on a la propriété suivante : le nombre de façons d'arriver sur une intersection de la grille est le nombre de façons d'arriver à l'intersection en-dessous plus celui d'arriver à l'intersection à gauche.

Solution de l'exercice 6 On constate qu'une décomposition en somme de 2017 utilisant un nombre ≥ 4 peut être battue ou égalée par une décomposition en remplaçant ce nombre par une somme de 2 et de 3. Ainsi, la valeur maximale est atteinte pour une décomposition n'utilisant que des 2 et des 3 (les 1 ne servent à rien ici). Comme $2^3 < 3^2$, on ne peut avoir plus de deux 2 dans une décomposition optimale, car on l'améliorerait en remplaçant trois 2 par deux 3.
On trouve $4 \cdot 3^{671}$.

Solution de l'exercice 7 Soit n le nombre d'élèves. On a $\frac{960}{n} - 4 = 4n$, soit $n(n+1) = 240$ donc $n = 15$.

Solution de l'exercice 8 Il y a huit lignes, donc au plus $4 \times 8 = 32$ jetons. Et on peut trouver une configuration à 32 jetons.

Solution de l'exercice 9 Considérer les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté 2cm.

Solution de l'exercice 10 Il s'agit d'une version du fameux jeu de Nim. Alice prend une allumette au premier tour, il en reste 100. À chaque fois que Bob en prend k, elle en prend $4 - k$. Comme 100 est un multiple de 4, elle va gagner.

Solution de l'exercice 11 La somme des dix cartes vaut 45 donc la somme des cartes paires (on leur attribue une position de 1 à 10 en allant de gauche à droite) est strictement plus grande que celle des cartes impaires, ou inversement. Mettons que la somme des cartes paires soit la plus grande. Alors Alice prend une carte paire à chaque tour, forçant Bob à en prendre une impaire. Elle va donc prendre les cinq en position paire et ainsi gagner.

Solution de l'exercice 12 Le côté de l'hexagone est moitié de celui du triangle. L'hexagone se découpe, partant du centre, en six triangles équilatéraux, dont le côté vaut donc la moitié de celui triangle. Ainsi, leur aire vaut un quart de la sienne, et l'aire de l'hexagone vaut $6/4 = 3/2$ de celle du triangle équilatéral.

Solution de l'exercice 13 D'après l'inégalité triangulaire, $MA < MC + AC = MC + BD < MC + MB + MD$.

III. Débutants

1 Le matin : stratégies de base et combinatoire

1 mardi 24 matin : Cindy Hua

Ce cours porte sur le théorème des tiroirs et ses applications.

Forme simple et première approche

Sauf mention contraire, n désignera un entier naturel non nul.

L'idée du principe des tiroirs est intuitive : si nous avons n tiroirs ($n \in \mathbb{N}^*$) et $n+1$ chaussettes, alors il existe un tiroir contenant au moins 2 chaussettes.

Exercice 1 : Nous disposons de $n \in \mathbb{N}^*$ paires de chaussettes de couleurs différentes. Combien faut-il en prendre pour garantir d'en avoir deux de même couleur ?

Exercice 2 : 51 nombres sont choisis entre 1 et 100 inclus. Montrer qu'il existe deux nombres consécutifs.

Exercice 3 : On considère un plan dont tous les points sont colorés en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe deux points de distance 1 de même couleur.

Exercice 4 : On considère un carré de coté 2 et 5 points dans ce dernier. Montrer qu'il existe deux de ces points dont la distance est inférieure à $\sqrt{2}$.

Exercice 5 : Montrer que dans un groupe de $n \in \mathbb{N}^*$ personnes, il existe deux personnes ayant le même nombre d'amis (on considèrera la relation "être ami" réciproque).

Exercice 6 : Montrer que parmi n+1 entiers, on peut en trouver 2 tels que leur différence est divisible par n.

Exercice 7 : Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un entier dont l'écriture décimale est composée uniquement de 0 et de 5, qui est divisible par n.

Exercice 8 : Sur un cercle de périmètre p, on marque les trois sommets d'un triangle équilatéral ainsi que les quatre sommets d'un carré. Ces sept points divisent le cercle en 7 arcs. Prouver que l'un de ces arcs est de longueur ne dépassant pas $\frac{p}{24}$.

Exercice 9 : On choisit 10 entiers distincts entre 1 et 100 inclus. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints formés de ces 10 nombres tels que la somme de leurs termes soit égale.

Exercice 10 : Soient a_1, a_2,..., a_n n entiers. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de $a_1, a_2, ..., a_n$ dont la somme des éléments est divisible par n.

Exercice 11 : On considére un plan dont tous les points sont colorés en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe un triangle équilatéral de côté 1 ou de côté $\sqrt{3}$ dont les sommets sont de même couleur.

Généralisation

Et s'il y avait beaucoup plus que $n + 1$ chaussettes ?

Principe des tiroirs : Si n chaussettes sont placées dans $k \in \mathbb{N}^*$ tiroirs, au moins un tiroir contiendra $\lceil n/k \rceil$ chaussettes ou plus.

Exercice 12 (Nombre de Ramsey $R(3, 3)$) : Considérons 6 points dans un plan. Toutes les arêtes formées par deux de ces points sont colorées en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe un triangle formé par trois de ces points ayant leurs cotés d'une unique couleur.

Exercice 13 : 51 points sont placés dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe trois points qui peuvent être dans un même disque de rayon $\frac{1}{7}$.

Solution des exercices

Il conviendra de chercher les exercices pendant un minimum de temps avant de se jeter sur la correction...

Solution 1 : Il suffit de prendre $n + 1$ chaussettes.

Solution 2 : Considérons les doublets $\{1, 2\}$,$\{3, 4\}$,...,$\{99, 100\}$. D'après le principe des tiroirs, il existe un doublet dont les deux ééments ont été choisis.

Solution 3 : Considérons un triangle équilatéral de côté 1. D'après le principe des tiroirs, il existe deux sommets de même couleur.

Solution 4 : Découpons le carré de coté 2 en 4 carrés de côté 1. D'après le principe des tiroirs, il existe deux points dans le même carré. Ces deux points sont alors distants d'au plus $\sqrt{2}$ (longueur de la diagonale).

Solution 5 : Supposons par l'absurde qu'une personne ait 0 ami, une autre ait 1 ami, ..., qu'une $n-1$-ème personne ait $n-2$ amis. Si la n-ème avait un nombre d'amis différents de toutes les autres, alors elle aurait $n-1$ amis, ce qui contredit le fait que la première personne n'ait pas d'ami.

Solution 6 : D'après le principe des tiroirs, il existe deux de ces entiers ayant le même reste par la division euclidienne par n. Alors leur différence est divisible par n.

Solution 7 : Reprenons la propriété précédemment démontrée. Il suffirait donc de trouver n+1 entiers dont la différence est composée uniquement de 0 et de 5. Considérons par exemple, les entiers 5, 55, ..., 5...5 composés de n fois le chiffre 5. Alors la différence de ceux de ces nombres est composée de 0 et de 5 et il en existe une divisible par n.

Solution 8 : Si l'un de sommets du triangle est aussi un sommet du carré, la conclusion est immédiate. Sinon, les trois sommets du triangle équilatéral partagent le cercle en trois arcs de périmètre $\frac{p}{3}$ chacun. Les quatre sommets du carré se répartissent donc sur ces trois arcs, et le principe des tiroirs assure alors que deux des sommets consécutifs du carré, appartiennent à un même de ces trois arcs. La somme de deux de ces arcs est alors de $\frac{p}{3}-\frac{p}{4}=\frac{p}{12}$ donc l'un des deux arcs a une longueur d'au plus $\frac{p}{24}$.

Solution 9 : La somme d'un sous-emsemble est comprise entre 1 (singleton 1) et $995 (= 91+92+...+100)$. De plus, nous possédons $2^{10}-1=1023$ sous-ensembles différents. D'après le principe des tiroirs, il existe donc deux sous-ensembles ayant la même somme. Notons que si ces deux sous-ensembles ont des éléments en commun, il suffit de les considérer sans leurs éléments communs.

Solution 10 : Considérons les sommes suivantes : $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$,..., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que S_i est divisible par n, alors l'exercice est terminé. Sinon, d'après le principe des tiroirs, il existe $a, b \in [\![1,n]\!]$ tels que S_a et S_b ont le même reste par division euclidienne par n. Supposons $a<b$, alors $S_b - S_a$ est divisible par n.

Solution 12 : On nomme A, B, C, D, E, F les six points. Considérons, par exemple, les arêtes reliées point A. D'après le principe des tiroirs, il existe $\lceil 5/2 \rceil = 3$ arêtes de la même couleur. Supposons sans perte de généralités qu'elles sont rouges et qu'il s'agit des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Considérons alors les arêtes $[BC]$, $[CD]$ et $[DB]$. Si au moins l'une des trois est rouge, alors l'exercice est terminé. Sinon, elles sont toutes les trois bleues, ce qui conclut aussi l'exercice.

Solution 13 : Découpons le carré en 25 carrés de côté $\frac{1}{5}$. D'après le principe des tiroirs, il existe $\left\lceil \frac{51}{25} \right\rceil = 3$ points dans le même petit carré. Ils peuvent donc être encerclés par un cercle de rayon r tel que :

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{50}} < \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}.$$

2 mercredi 25 matin : Ilyas Lebleu

Manipulations algébriques et combinatoire

Symboles de somme et de produit

En mathématiques, des expressions impliquant une somme répétée, ou un produit répété, sont très courantes, notamment en combinatoire. Des symboles spéciaux sont utilisés pour les exprimer : $\sum$ et $\prod$. Nous les utilisons comme ceci :

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + ... + n$$

$$\prod_{i=0}^{n} f(i) = f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(n)$$

Manipulations de sommes de de produits

Le réel avantage de ces symboles est leur capacité à être modifiés, réordonnés, reconfigurés. Une manipulation astucieuse de ces outils est bien souvent la clé d'un problème d'algèbre combinatoire. Différentes opérations peuvent être appliquées à ces "opérateurs", le plus souvant correspondant à l'intuition que l'on a d'eux :

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n+1} f(i-1) \tag{III.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} f(n-i) \tag{III.2}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} f(i)g(j) = \sum_{i=0}^{m} f(i) \cdot \sum_{j=0}^{n} g(j) \tag{III.3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a \cdot f(i)) = a \cdot \sum_{i=0}^{n} f(i) \tag{III.4}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{\substack{i=0 \\ i\ impair}}^{n} f(i) + \sum_{\substack{i=0 \\ i\ pair}}^{n} f(i) \tag{III.5}$$

Les identités (III.1), (III.2) et (III.5) s'appliquent également aux produits, avec l'addition remplacée par la multiplication.

Mais attention :

$$\sum_{i=0}^{n} (f(i)^a) \neq (\sum_{i=0}^{n} f(i))^a \text{ et}$$
$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (f(i) + g(j)) = n \cdot \sum_{i=0}^{m} f(i) + m \cdot \sum_{j=0}^{n} g(j) \neq \sum_{i=0}^{m} f(i) + \sum_{j=0}^{n} g(j).$$

Factorielle de n

Nous notons $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$. Ce produit, nommé "factorielle de n", n'admet pas d'expression "simple", contrairement à la somme $\sum_{i=0}^{n} i$ et au produit $\prod_{i=0}^{n} i$

Exercice 1 Démontrer que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ Trouver une expression pour $\prod_{i=0}^{n} i$

Exercice 2 Trouver l'expression sans opérateurs de $\sum_{i=0}^{n} a^n$, où a est différent de 0 et de 1.

Exercice 3 Il existe $\phi(n)$ nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n. Donner une expression de leur somme.

Exercice 4 Exprimer en utilisant les factorielles le produit des n premiers nombres impairs.

Exercice 5 Exprimer le n-ième entier strictement positif possédant un nombre impair de diviseurs.

Exercice 6 n points sont disposés à égale distance sur un cercle, et numérotés de A_1 à A_n. Calculer la somme, pour tous les choix de trois nombres i, j et k distincts, des angles non orientés $\widehat{A_i A_j A_k}$

Exercice 7 Démontrer, sans faire de récurrence, que la somme des n premiers cubes est égale au carré de la somme des n premiers nombres.

Exercice 8 Démontrer que $n \cdot \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 \geq (\sum_{i=0}^{n} a_i)^2$

Dénombrement, formule du binôme

Dénombrement, coefficients binomiaux

Le dénombrement consiste, en quelque sorte, à dénombrer. C'est-à-dire à dénombrer, par exemple, le nombre de manières différentes d'arranger ou de choisir des éléments, ou tout simplement le nombre d'éléments. Pour cela, notre outil le plus utile sera le coefficient binomial. Le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est tout simplement le nombre de manières différentes de choisir k objets parmi n. Il possède de très nombreuses applications en combinatoire, comme nous allons le découvrir au fil de ce cours, et peut être vu ou bien sous un angle plus "mathématique", plus "calculatoire", ou bien de façon logique, intuitive.

Exercice 9 Démontrer $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exercice 10 Démontrer $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Exercice 11 Démontrer $\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

Principe de récurrence

Un autre outil très souvent utile est le principe de récurrence. Il dit, en quelque sorte, que si l'on sait aller jusqu'à un escalier, et qu'on sait monter d'une marche à la suivante, alors on sait monter où l'on veut sur l'escalier. En des termes plus précis, pour $P(n)$ une propriété sur l'entier n, montrer que $P(0)$ est vraie et que la véracité de $P(n)$ implique celle de $P(n+1)$ pour tout n suffit à montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n. On appelle la preuve de $P(0)$ l'initialisation, et le passage de $P(n)$ à $P(n+1)$ l'hérédité. Un principe similaire, celui de récurrence forte, utilise la véracité de toutes les propositions de $P(0)$ à $P(n)$ pour impliquer $P(n+1)$.

Exercice 12 Démontrer par récurrence que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

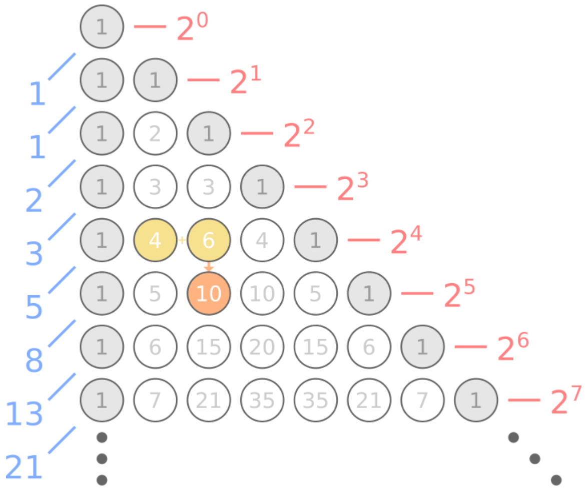
Exercice 13 *(Formule de Binet)* On définit la suite de Fibonacci comme $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et, pour tout $n > 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. On note ϕ et ψ les deux solutions de l'équation $x^2 = x + 1$, avec $\phi > \psi$. Démontrer que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)$

Exercice 14 Démontrer $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+k}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$

Exercice 15 De combien de manières différentes peut-on séparer n objets en m groupes : un groupe de k_1 objets, un groupe de k_2, etc. ?

Triangle de Pascal

En plaçant les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ sur une grille, en position (k, n), nous obtenons un triangle, nommé triangle de Pascal, possédant de nombreuses propriétés intéressantes. Notamment, les éléments de sa n-ième ligne correspondent aux coefficients dans l'expansion de $(1+x)^n$, et les sommes des éléments de chaque ligne correspondent aux puissances de 2.



Exercice 16 Démontrer que les sommes des entiers sur les diagonales du triangle de Pascal consituent la suite de Fibonacci.

Exercice 17 Dans le triangle de Pascal, il existe trois nombres consécutifs, sur une même ligne, dans le ratio $3 : 4 : 5$. Quelle est cette ligne ?

Exercice 18 Considérons un triangle de 11 lignes, tel que chaque élément soit la somme des deux présents juste au-dessus de lui. On écrit des 0 et des 1 sur la dernière colonne, puis on remplit le triangle à l'aide de la relation de récurrence. De combien de manières différentes peut-on placer les 0 et les 1 de sorte que le nombre inscrit sur la case au sommet du triangle soit un multiple de 3 ?

Exercice 19 Existe-il une bijection entre les entiers et les ensembles finis d'entiers ? En expliciter une, ou démontrer son impossibilité.

3 jeudi 26 matin : Yohann d'Anello

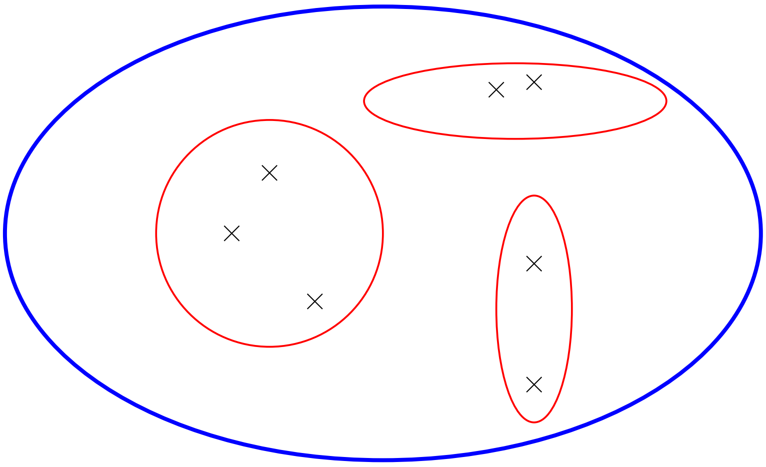
Invariants

Le principe des invariants est plutôt vague, c'est plus une méthode qu'un énoncé mathématique précis.

Définition 1. *(principe des invariants)*
Si une quantité est conservée par une certaine classe de transformations, alors il est impossible de passer d'une situation à une autre où la quantité est différente en utilisant seulement des transformations de cette classe.

Remarque 2. Ce sont souvent les seuls moyens dont nous disposons pour montrer que quelque chose est impossible (l'inverse peut se montrer par un exemple).

Remarque 3. On peut voir les invariants comme des *classes d'équivalence*. Une *classe d'équivalence* est ici l'ensemble des configurations possibles que l'on peut obtenir en effectuant diverses opérations. Chacune disposera d'une propriété commune, qu'on nommera $invariant$. On peut schématiser sous la formes de patates ces classes d'équivalence :



La grosse patate bleue représente l'ensemble des configurations possibles et les patates rouges représente les configurations disposant d'une propriété commune. Il est important que ces « patates » ne s'intersectent pas (que les propriétés soient deux à deux non compatibles), sinon, on ne prouve rien.

Pour clarifier tout ça prenons un exemple. On commence un jeu où on a au départ 4 cartes. À chaque tour, on pioche deux cartes. L'ensemble des configurations possibles représente alors l'ensemble des entiers, que l'on peut séparer en deux groupes : les pairs et les impairs. À la fin de chaque tour, on a toujours un nombre pair de cartes, ce qui signifie que l'on reste « dans la même patate », ou plutôt que la parité de notre nombre de cartes ne varie pas. Il sera donc impossible d'avoir à un moment 2017 cartes, qui est alors « dans une autre patate »puisque 2017 est impair.

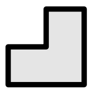
Il est donc important de bien choisir son invariant et de s'assurer qu'il ne varie effectivement pas entre deux opérations.

À noter que les configurations contenues dans la patate bleue ne sont pas forcément toutes atteignables, et même ne doivent pas être toutes atteignables puisqu'on souhaite montrer qu'une configuration ne peut pas être atteinte. L'essentiel est de montrer que toutes es configurations atteignables appartiennent à une même patate (mais pas forcément que toutes les configurations de la patate soient atteignables) et qu'une certaine configuration n'appartient pas à cette patate. Il faut par contre que chacune des sous-patates soient deux à deux disjointes : une même configuration ne peut pas appartenir à deux patates à la fois.

Pour reprendre l'exemple du dessus, une première patate peut représenter tous les entiers pairs, puis une autre les entiers impairs et enfin une dernière tous les autres nombres réels. 2 appartient bien à la même patate que 4 et pourtant il n'est pas possible d'aboutir à deux cartes dans la main. Cela ne nous dérange pour autant pas dans notre raisonnement puisque nous voulons montrer que 2017 n'est pas dans cette patate. Si on voulait montrer cette fois-ci qu'on ne pouvait pas atteindre 2, il aurait fallu choisir l'invariant que le nombre de cartes dans la main est supérieur ou égal à 4 (ce qui inclut alors 5, 7, ...).

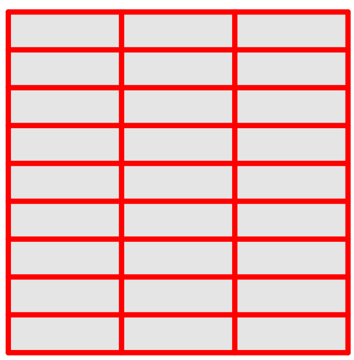
Remarque 4. La parité d'une quantité est un invariant courant.

Exercice 1 a) Est-il possible de paver un échiquier de taille 9x9 uniquement avec des dominos de taille 2x1 ?
b) Qu'en est-il avec des triominos de taille 3x1 ?
c) Et avec des « $\mathcal{L}$-*ominos* » comme celui ci-dessous ? (*Rotations autorisées*) (non traité en cours)

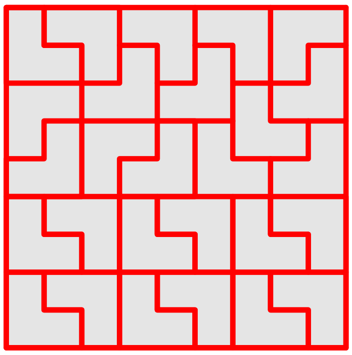


Solution de l'exercice 1 a) L'échiquier comporte 81 cases, qui est impair. En plaçant un domino, on recouvrira 2 cases et il restera alors toujours un nombre impair de cases. Ainsi, il est impossible d'arriver à 0 case qui est pair.

b) En prenant l'exemple ci-dessous, on montre qu'il est possible de paver l'échiquier. Cette solution n'est bien sûr pas unique.



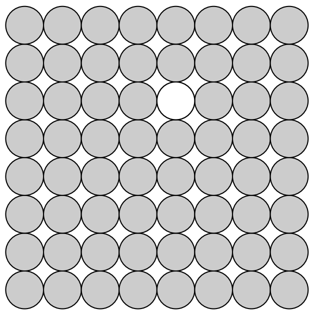
c) On peut utiliser cette solution (qui n'est pas unique) :



Exercice 2 Une feuille de papier est déchirée en 3 parties. Ensuite, l'une de ces parties est déchirée de nouveau en 3 parties, et ainsi de suite. Peut-on obtenir, à un moment donné, un total de 100 parties ? 2017 parties ?

Solution de l'exercice 2 On commence avec un nombre impair (1) de parties. À chaque opération, on divise une des parties en 3, ce qui a pour effet d'ajouter deux nouvelles parties, conservant le nombre de parties impair (notre invariant). Il est donc impossible d'obtenir un total de 100 parties. En revanche, en répétant l'opération 1008 fois, on obtient bien 2017 parties.

Exercice 3 Un plafond est quadrillé par une grille 8x8 où dans chaque case se trouve une ampoule. Sur le mur, des interrupteurs sont présents permettant d'inverser l'état[1] de chacune des ampoules d'une ligne ou d'une colonne. Au départ, elles sont toutes allumées. Est-il possible d'aboutir à une configuration où seule une ampoule est allumée ?



Solution de l'exercice 3 À chaque fois que l'on appuie sur un interrupteur, un nombre pair d'ampoules changent d'état, on a donc toujours un nombre pair d'ampoules allumées et un nombre pair d'ampoules éteintes. Il est donc impossible d'aboutir au fait que exactement 63 ampoules soient éteintes.

Exercice 4 24 tasses sont placées sur une table. Initialement, trois d'entre elles sont à l'envers. A chaque étape, on peut retourner 4 tasses. Peut-on toutes les retourner en moins de 100 étapes ?

Solution de l'exercice 4 De la même manière, le nombre de tasses retournées reste toujours impair, on ne pourra donc jamais arriver à un nombre pair de tasses retournées.

1. Éteindre l'ampoule si elle est allumée, l'allumer sinon.

Remarque 5. Lorsque de grands nombres tels que 2017 ou 2018 [2] apparaissent dans l'énoncé, c'est souvent parce qu'on vous demande de réfléchir pour un entier quelconque en général, afin qu'il ne soit pas humainement faisable de tester tous les cas. En revanche, il est souvent judicieux de tester l'énoncer avec des petits cas (1, 2, 3, 4, 5, ...) afin de bien comprendre ce qu'il se passe.

Exercice 5 (*non traité en cours*) On écrit au tableau tous les entiers entre 1 et 2017. Ensuite, on choisit deux de ces nombres a, b au hasard, on les efface et on écrit ensuite $|a-b|$ [3]. Puis on recommence suffisamment de fois jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul nombre au tableau.

Montrer que ce dernier est impair. [4]

Solution de l'exercice 5 Notons S_0 la somme de tous les termes affichés au tableau. À chaque opération, on ôte deux termes et on ajoute leur différence, ce qui fait que la parité de la somme de tous les éléments est conservée (notre invariant). Ainsi, la parité du dernier nombre est la même que $S_0 = \dfrac{2017 \times 2018}{2} = 2017 \times 1009$, dernier nombre qui est alors impair.

Exercice 6 (*non traité en cours*) 2018 élèves sont placés en cercle pour un jeu de cartes. Au départ, un élève a entre ses mains 2018 cartes et les autres n'ont rien. À chaque tour, une personne donne une carte à son voisin de gauche et une carte à son voisin de droite. Est-il possible que chacun se retrouve avec exactement une carte ?

Solution de l'exercice 6 Numérotons chacun des élèves de 1 à 2018. Posons S_0 la somme du nombre de cartes de chacune des personnes de rang pair et S_1 la somme du nombre de cartes des autres joueurs. On remarque qu'après chaque opération, les parités de S_0 et de S_1 sont conservées (notre invariant). Au départ, on a alors $S_0 = 2018$ et $S_1 = 0$. Ainsi, il est impossible que chacun ait exactement une carte puisque cela impliquerait $S_0 = S_1 = 1009$. Or, 1009 n'est pas de même parité que 2018 ou que 0.

Remarque 6. De manière plus générale, on pourra utiliser la divisibilité par un entier n comme invariant. La valeur de n à tester peut parfois être devinée par l'énoncé (Y a-t-il 5 sortes d'objets ? Regarder modulo 5, peut-être modulo 4 ou 6 ...).

Exercice 7 Est-ce que la multiplication :

$$79\ 133 \times 111\ 107 = 8\ 794\ 230\ 231$$

est exacte ? (Sans calculatrice)

Solution de l'exercice 7 Observons l'égalité modulo 3.

— $79\ 133 \equiv 7+9+1+3+3 \equiv 2 \pmod 3$

— $111\ 107 \equiv 1+1+1+1+0+7 \equiv 2 \pmod 3$

— $8\ 794\ 230\ 231 \equiv 8+7+9+4+2+3+0+2+3+1 \equiv 0 \pmod 3$

2. Plus généralement, l'année en cours ou la suivante.
3. La différence entre a et b, sans le signe. $|8-4| = 4$, $|2-42| = 40$. On appelle ce nombre la « valeur absolue » de $a-b$.
4. *Indication :* la somme de tous les entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Or, $2 \times 2 \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod 3$ (*le produit de nombres non multiples de 3 n'est pas un multiple de 3*), la multiplication est donc erronée. (*vrai résultat : 8 792 230 231*)

Exercice 8 Sur une île déserte vivent 34 caméléons. Au départ, 7 sont jaunes, 10 sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleur différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, il ne se passe rien. Au bout d'un an, tous les caméléons sur l'île sont devenus de la même couleur. Laquelle ? (Il faut non seulement déterminer la couleur, mais aussi prouver que c'est la seule possible)

Solution de l'exercice 8 Posons j, r et v le nombre de caméléons jaunes, rouges et verts. Remarquons que les différences $r-j,\ j-v,\ v-r$ ne varient pas modulo 3 au cours d'un changement de couleur de deux caméléons. Par exemple, si $j=7$, $r=10$, $v=17$, on a initialement $r-j \equiv 0 \pmod 3$, $j-v \equiv 2 \pmod 3$, $v-r \equiv 1 \pmod 3$, mais si un caméléon rouge et un jaune deviennent verts, on obtient toujours $(r-1)-(j-1) \equiv 0 \pmod 3$, $(j-1)-(v+2) \equiv 2 \pmod 3$ et $(v+2)-(r-1) \equiv 1 \pmod 3$. Il en va de même avec un vert et un jaune qui deviennent rouges ou un vert et un rouge qui deviennent jaunes.

Si on veut conserver ces quantités, il faut nécessairement $(j,r,v)=(0,0,34)$. Donc tous les caméléons sont verts et il n'y a pas d'autre possibilité.

Notons que l'on a pas prouvé ici qu'il est possible que tous les caméléons deviennent verts. On a seulement prouvé que si tous les caméléons devenaient d'une seule couleur, alors cette couleur est le vert. L'énoncé nous disait que cela était possible.

Remarque 7. Dès qu'il est question de somme de chiffres, il est intéressant de regarder modulo 3 ou modulo 9 (plutôt 9), puisque un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 3 et 9[5]. Il peut être aussi parfois utile de regarder le nombre modulo 11, qui consiste à additionner les chiffres de rang pair et de soustraire les chiffres de rang impair (par exemple : $123\,456\,789 \equiv -1+2-3+4-5+6-7+8-9 \equiv -5 \pmod{11}$).

Exercice 9 On écrit successivement tous les nombres de 1 à un million. Puis on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres. Puis on recommence, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des nombres à un chiffre. Quel chiffre apparaît le plus souvent ?

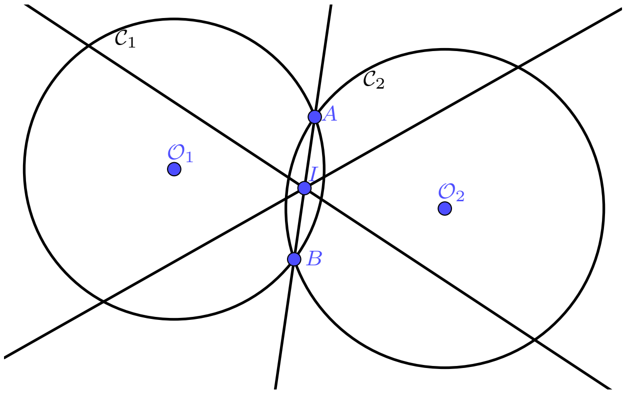
Solution de l'exercice 9 Parmi les entiers de 1 à 999 999, il y en a exactement 111 111 qui sont congrus à 1 modulo 9, 111 111 à 2, ..., 111 111 à 9. Puisqu'un entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9, on en conclut qu'il y aura 111 111 fois le chiffre 1 écrit, 111 111 fois le chiffre 2, ..., 111 111 fois le chiffre 9. Le nombre 1 000 000 quant à lui va s'écrire à la fin comme un 1 : il y aura alors 111 112 fois le chiffre 1 écrit, ce qui fait de lui le chiffre le plus fréquent.

Exercice 10 On trace deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui s'intersectent en deux points distincts A et B. On appelle I le milieu de $[AB]$.

a) Est-il possible de tracer des droites distinctes concourantes en I de sorte à ce que ces droites et les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ forment exactement 2017 points d'intersection ? 2018 ?

b) Qu'en est-il si I est cette fois si n'importe où sur l'aire délimitée par l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (mais pas sur $[AB]$) ?

5. C'est ce qui est, entre autres, à l'origine de la « preuve par 9 ».



Solution de l'exercice 10

a) En traçant une droite qui n'est pas (AB) passant par I, 2 points d'intersection vont être créés avec $\mathcal{C}_1$ puisque cette droite n'est pas tangente au cercle. De même, deux points sont créés avec $\mathcal{C}_2$. Si cette droite est (AB), alors les points d'intersection sont A et B.

Ainsi, on ne peut avoir qu'un nombre pair de points d'intersection : il est alors impossible d'avoir 2017 points.

En revanche, en traçant 504 droites distinctes ainsi que (AB), on obtient bien 2018 points.

b) Pour 2018 points, on trace alors 503 droites distinctes passant par I mais pas par A ni par B, puis on trace (AI) et (BI). Pour avoir 2017 points, il faut soit que 2018 soit un multiple de 4 (ce qu'il n'est pas), soit que 2011 ou que 2014 le soient (ce qu'ils ne sont pas) de sorte à avoir 2017 points en traçant (AI) et/ou (BI). Il n'est donc toujours pas possible d'obtenir 2017 points.

Remarque 8. L'invariance ne se résume pas à la divisibilité. On peut tout à fait imaginer qu'une somme ou une différence soit conservée, ou bien même qu'un point ne bouge pas à travers diverses transformations géométriques !

Exercice 11 On s'intéresse à l'ensemble des mots [6] pouvant s'écrire avec les lettres x, y et t. On s'autorise les transformations suivantes :

(i) $xy \mapsto yyx$ et $yyx \mapsto xy$

(ii) $xt \mapsto ttx$ et $ttx \mapsto xt$

(iii) $yt \mapsto ty$ et $ty \mapsto yt$

La première condition signifie par exemple que lorsque l'on a un mot dans lequel apparaît les deux lettres x et y juste à côté, alors on s'autorise à remplacer ceux deux lettres par les trois lettres y, y et x. On s'autorise également à revenir en arrière, c'est la deuxième condition du (i).

Dire si les mots suivants sont équivalents :

(i) $xxyy$ et $xyyyyx$;

(ii) $xytx$ et $txyt$;

(iii) xy et xt.

6. Qui ont un sens ou non, qui n'ont en réalité surtout pas de sens

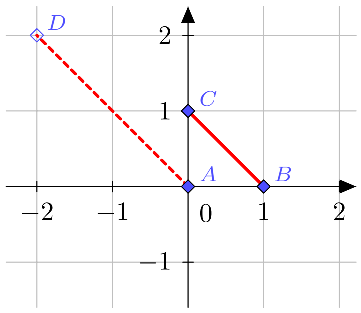
<u>*Solution de l'exercice 11*</u>

(i) $xxyy = x\ xy\ y \to x\ yyx\ y = xyy\ xy \to xyy\ yyx = xyyyyx$
Les mots $xxyy$ et $xyyyyx$ sont donc équivalents.

(ii) On remarque que les transformations (i), (ii) (iii) conservent le nombre de lettres x dans le mot. Ainsi, il est impossible de passer d'un mot comportant deux fois la lettre x à un mot ne comportant qu'une seule fois la lettre x.

(iii) Aucune transformation ne supprime totalement un y ou un t : les mots xy et xt ne sont donc pas équivalents.

Exercice 12 Trois sauterelles se promènent sur les points à coordonnées entières du plan. Les sauterelles sautent les unes après les autres, mais pour que la sauterelle puisse partir de A pour aller en D alors que ses amies sont en B et C, il faut que (AD) soit parallèle à (BC). Les sauterelles sont initialement en $(1,\ 0)$, $(0,\ 0)$ et $(0,\ 1)$. Peuvent-elles arriver à être sur les cases $(0,\ 0)$, $(-1,\ -1)$ et $(1,\ 1)$?



<u>*Solution de l'exercice 12*</u> On voit facilement en remontant le temps que pour les sauterelles finissent toutes les trois alignées, il faut qu'elles soient précédemment alignées. Puisqu'elles ne le sont pas initialement, elles ne le seront jamais.

Exercice 13 (*non traité en cours*) À partir d'un n-*uplet* $(x_1, \ldots, x_n)$, on effectue les opérations suivantes :

— On choisit deux nombres du n-*uplet*, mettons x et y ;

— On remplace x par $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ et y par $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ en laissant les autres nombres inchangés.

Est-il possible de transformer le quadruplet $\left(2, \sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ en $\left(1, 2\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>

Cette fois-ci, l'invariant est non pas la somme des termes mais la somme de leurs carrés. En effet,

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{2} = x^2+y^2$$

Or, $2^2+\sqrt{2}^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(-\sqrt{2})^2 = \dfrac{17}{2}$ alors que $1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{2}-2\sqrt{2} > 9$: il n'est donc pas possible de passer du premier quadruplet au second.

Coloriages

Remarque 9. Parfois, les invariants sont difficiles à déterminer. Il peut alors être judicieux d'utiliser un coloriage adéquat qui permet de rendre la solution évidente.

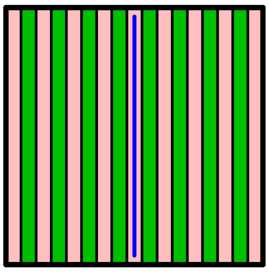
Exercice 14 (*donné dans le test initial*) 65 personnes sont alignées dans le Panthéon. À chaque étape, chaque personne effectue aléatoirement un pas soit vers la gauche, soit vers la droite (tous les pas sont de même amplitude). On suppose qu'il n'y a que 17 colonnes et que tout le monde est tout d'abord sur la neuvième colonne.

a) Montrer qu'après chacun des mouvements, au moins 8 colonnes sont vides.

b) Montrer qu'il y a toujours au moins une colonne qui contient au moins 8 personnes.

Solution de l'exercice 14

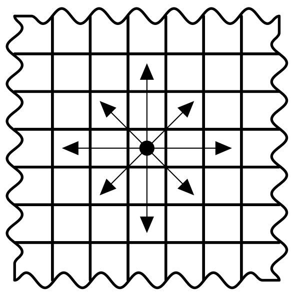
a) Colorions une colonne sur deux en rose, une colonne sur deux en vert, en commençant par le rose. Au départ, chacun se situe sur une colonne rose. Puis, à chaque opération, tout le monde change de couleur. Ainsi, tout le monde est toujours sur la même couleur à n'importe quel moment. Ainsi, soit toutes les colonnes roses sont vides, soit toutes les colonnes sont vides. Il y a alors toujours au moins 8 colonnes qui sont vides.



b) Les 65 personnes sont réparties en au plus 9 colonnes. En application du principe des tiroirs, au moins une colonne contient au moins $\left\lceil \frac{65}{9} \right\rceil = 8$ personnes.

Remarque 10. Si on prend on nombre suffisamment grand de personnes, de pas et de colonnes et que à la fin du mouvement, toutes les personnes avancent de sorte à remplir les trous des colonnes, on obtiendra normalement une gaussienne (une courbe en forme de cloche) : c'est le théorème central limite. Des essais concluant ont été réalisés lors de la MathMob au Panthéon le matin du 19 octobre avec la classe de MPSI2 du lycée Louis-Le-Grand, accompagnée de divers mathématiciens et normaliens. Cela n'a bien sûr aucun rapport avec les invariants.

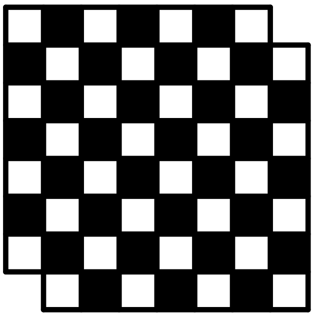
Exercice 15 Un loup-garou se déplace sur une grille de taille infinie. Il souhaite cette nuit se rendre dans un village située sur la case (42, 2017). Fou de joie, il ne peut que bondir en effectuant les mouvements suivants :



Sachant qu'il se situe initialement sur la case (26, 10), est-il possible qu'il atteigne son objectif ? Si oui : quel est le nombre de mouvements minimal ?

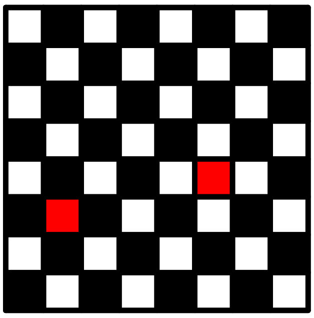
Solution de l'exercice 15 Colorions une case sur deux en noir ou en blanc tel un échiquier infini, en fixant la case (0, 0) en noir. Ainsi, les cases (x, y) avec $x \equiv y \pmod 2$ sont coloriées en noir et les autres en blanc. On remarque qu'à chaque fois que le loup se déplace, il reste une case de même couleur. Se situant initialement sur une case noire, il ne pourra alors jamais se rendre au village situé sur une case blanche, les villageois peuvent alors dormir sur leurs deux oreilles.

Exercice 16 Considérons un échiquier classique de taille 8x8 auquel on a retiré deux coins. Est-il possible de payer l'échiquier avec des dominos de taille 2x1 ?

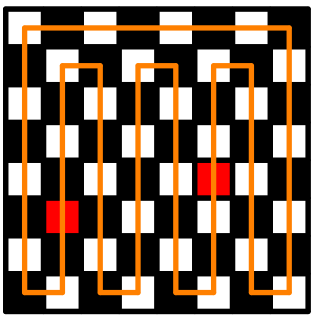


Solution de l'exercice 16 On a retiré 2 cases noires de l'échiquier. Il reste alors 32 cases blanches et 30 cases noires. Or, un domino recouvre exactement une case blanche et une case noire : il n'est donc pas possible de paver l'échiquier.

Exercice 17 On prend un nouvel échiquier de taille 8x8 auquel on a cette fois retiré deux cases, peu importe où sur le plateau. À quelle condition est-il possible de paver l'échiquier avec les mêmes dominos ?



Solution de l'exercice 17 Si les cases retirées sont de même couleur, on ne peut évidemment pas paver l'échiquier d'après l'exercice précédent. Supposons alors que les cases retirées sont de couleus opposées et traçons le chemin suivant :



On remarque qu'entre deux cases supprimées, il y a un nombre pair de cases sur notre chemin. On peut alors facilement paver notre échiquier si les deux cases retirées ne sont pas de même couleur.

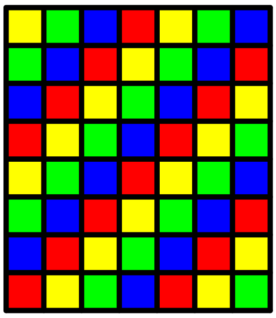
Exercice 18 Sur un échiquier classique[7], un cavalier est placé sur la case en bas à gauche. Peut-il atteindre la case en haut à droite en passant une et une seule fois sur chaque case ?

Solution de l'exercice 18 Si le cavalier passe une et une seule fois sur chaque case, cela signifie qu'il aura bougé 63 fois. Or, à chaque fois que le cavalier bouge, il passe d'une case blanche à une case noire ou inversement. Ainsi, il devrait se retrouver sur une case qui n'est pas de la couleur de la case de départ, ce qui n'est pas le cas s'il finit tout en haut à droite.

Remarque 11. Un coloriage ne se limite pas à deux couleurs !

Exercice 19 À quelle condition est-il possible de paver un échiquier de taille $a \times b$ avec des n-ominos de taille $1 \times n$?

Solution de l'exercice 19 Définissons une suite de n couleurs et colorions notre échiquier. On commence par colorier la colonne de gauche. Pour cela, on colorie la case du bas avec la première couleur, celle juste au-dessus avec la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on a épuisé sa palette. Puis on recommence avec la première couleur, jusqu'à ce que la colonne soit entièrement coloriée. Ensuite, on passe à la colonne suivante en introduisant un décalage : la première case (celle du bas) est coloriée avec la dernière couleur, puis la deuxième case avec la première couleur, la troisième avec la deuxième couleur, ... On répète ce processus jusqu'à ce que l'échiquier soit plein.



À partir de ce coloriage, on voit qu'un n-omino doit recouvrir exactement une case de chaque couleur. Ainsi, si les nombres de cases sont différents (si $n \nmid ab$), on ne pourra pas paver l'échiquier. De plus, si $n|a$ ou si $n|b$, alors on voit évidemment que l'on peut paver l'échiquier (en rangeant les n-ominos par lignes ou par colonnes). On peut alors retirer deux rectangles de taille $n \times x$ et $n \times x'$ de sorte à se ramener à un rectangle de taille $a' \times b'$ où $0 < a' < n$ et $0 < b' < n$ (en se plaçant dans le cas où n ne divise ni a ni b). Quitte à retourner l'échiquier, on peut supposer $a' > b'$. La première couleur apparaît alors en bas à gauche et sur toutes les lignes. La seconde couleur en revanche n'apparaît pas sur la dernière ligne : il n'est donc pas possible de paver la dernière ligne.

Ainsi, l'échiquier est pavable si et seulement si $n|a$ ou $n|b$.

Exercice 20 On place un *monomino*[8] sur un échiquier classique.

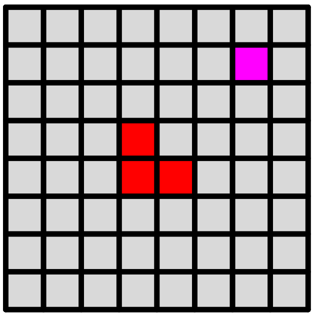
7. Un échiquier carré de taille 8x8
8. Un domino composé d'une unique case.

a) Montrer qu'il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos en forme de *$\mathcal{L}$-ominos*. Qu'en serait-il si l'échiquier était de taille $2^n \times 2^n$?

b) À quelle condition le reste de l'échiquier est-il pavable par des triominos droits de taille 3×1 ?

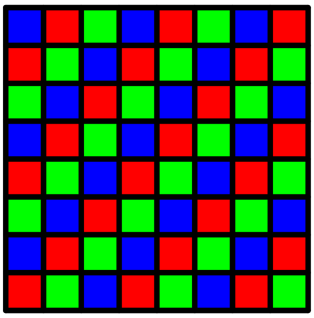
Solution de l'exercice 20 a) On va montrer directement le deuxième résultat par récurrence (la première partie de la question représente le cas $n = 3$). Quand $n = 0$, on a rien à faire. Quand $n = 1$, on a un seul $\mathcal{L}$-omino à poser.

Supposons que l'on sache faire pour un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ et montrons que l'on peut le faire pour un échiquier de taille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Il suffit alors de poser un $\mathcal{L}$-omino au mileu de l'échiquier, en plaçant le « trou du carré »dans le carré de taille $2^n \times 2^n$ où se situe le monomino. (*voir schéma ci-dessous*)

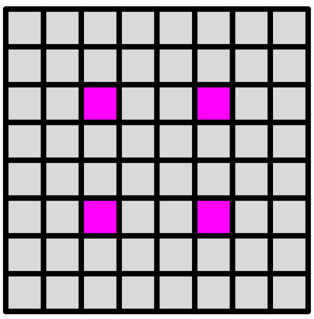


On se ramène alors à paver 4 grilles de taille $2^n \times 2^n$ où un monomino est placé dans chacune des grilles, chose que l'on sait faire d'après notre hypothèse de récurrence.

b) Colorions de la même manière que précédemment notre échiquier en rouge, bleu et vert. Remarquons que selon notre coloriage ci-dessous, on a 22 cases rouges, 21 cases bleues et 21 cases vertes. Il est alors nécessaire que le monomino soit situé sur une case rouge.



En effectuant les 4 rotations de l'échiquier, on se rend compte que le monomino n'a que quatre emplacements possibles :



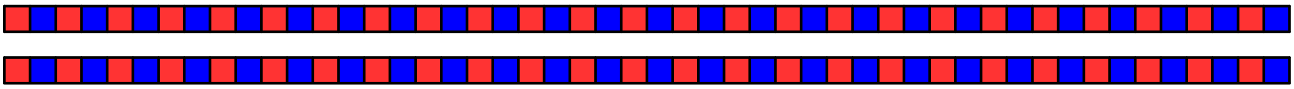
Réciproquement, on vérifie facilement que l'on peut paver l'échiquier lorsque le monomino se trouve sur l'une de ces cases.

Exercice 21 Est-il possible de réarranger les entiers $1, 1, 2, 2, \ldots, 50, 50$ de sorte qu'entre deux entiers k, il y ait exactement k éléments ?
À titre d'exemple, on peut réarranger $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3$ de cette façon :

$$3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2$$

<u>*Solution de l'exercice 21*</u> Alignons 100 cases et colorions 1 case sur deux en rouge, une case sur deux en bleu. À chaque fois que l'on place un entier k sur la case i, on place ce même entier sur la case $i+k+1$ (ou $i-k-1$ si $i+k \geq 100$). De ce fait, si k est pair, on remplira une case rouge et une case bleue et si k est impair, on remplit deux case de même couleur.

Supposons que l'on ait réussi à inscrire chacun des entiers pairs (chose qu'il est possible de faire puisque inscrire un entier pair sur une case rouge n'empêche pas d'inscrire un autre entier pair sur une autre case rouge libre). Il nous reste alors 25 cases bleues et 25 cases rouges pour 25 entiers impairs. Or, à chaque entier impair inscrit, deux cases de couleur identiques sont remplies, ce qui implique qu'il sera impossible d'inscrire un entier lorsqu'il ne restera qu'une case rouge ou bleue disponible.



2 L'après-midi : géométrie

1 mardi 24 après-midi : Héloïse Gachet

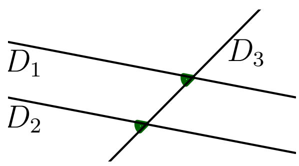
— Droites parallèles et triangles —

Points alignés

Proposition 12. Soit trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre si et seulement si la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ vaut $180°$.

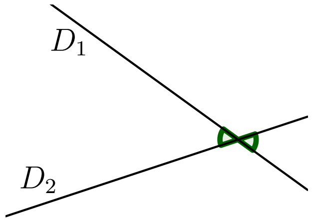
Angles correspondants

Proposition 13. Soit deux droites D_1 et D_2 et D_3 une droite qui intersecte D_1 et D_2. D_1 et D_2 sont parallèles si et seulement les deux angles entre D_1 et D_3 et entre D_2 et D_3 du même côté de la droite D_3 sont égaux. Ces angles sont appelés angles correspondants.



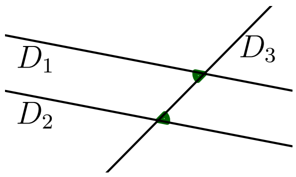
Angles opposés

Proposition 14. Soit deux droites D_1 et D_2 qui se coupent en un point alors les deux angles opposés au sommet sont égaux.



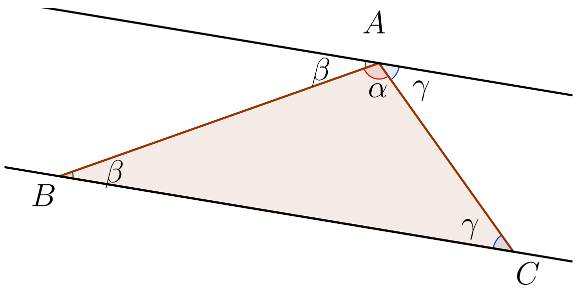
Angles alterne-internes

Proposition 15. Soit deux droites D_1 et D_2 et D_3 une droite qui intersecte D_1 et D_2.D_1 et D_2 sont parallèles si et seulement les deux angles entre D_1 et D_3 et entre D_2 et D_3 de part et d'autre de D_3 sont égaux. Ces angles sont appelés angles alterne-internes.



Ici est énoncé un résultat très important pour la résolution des exercices de chasse aux angles et sur lequel se baseront une grande partie des démonstrations.

Proposition 16. La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à $180°$.



Démonstration. Soit le triangle ABC. On note $\widehat{BAC} = \alpha$,$\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{BCA} = \gamma$. On introduit la droite D parallèle à BC et passant par A. Par angles alterne-internes, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

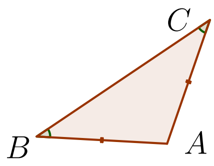
On en déduit le théorème suivant, qui est tout aussi utile en chasse aux angles :

Corollaire 17. La somme des mesures des angles d'un polygone (convexe ou concave) de n sommets est égale à $(n-2) \times 180°$.

Idée de la preuve : Démonstration par récurrence sur le nombre de sommets. L'initialisation se fait avec le triangle. Pour l'hérédité on considère un nouveau sommet puis on calcule le somme des mesures des angles du polygone en distinguant selon la position du nouveau point (qui crée un quadrilatère convexe ou concave).

Triangles isocèles et équilatéraux

Proposition 18. Soit ABC un triangle isocèle en A. On a alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

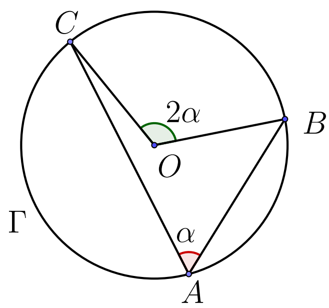


Proposition 19. Soit ABC un triangle équilatéral. On a alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60°$.

— Angles dans un cercle —

Angle au centre

Théorème 20. Soit Γ un cercle de centre O et trois points distincts A, B et C sur Γ. On note $\widehat{BAC} = \alpha$. On a alors $\widehat{BOC} = 2\alpha$.

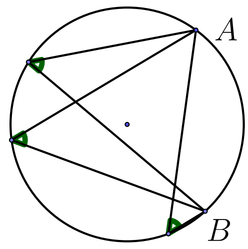


Démonstration. Dans le cas où O est dans le triangle ABC, on a : $2\alpha = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} + 2\widehat{OAC}$. Comme les triangles AOB et AOC sont isocèles en O, $2\alpha = \widehat{CAO}+\widehat{ACO}+\widehat{BAO}+\widehat{ABO}$. De plus la somme des angles d'un triangle étant égale à $180°$, on a $2\alpha = 180° - \widehat{COA} + 180° - \widehat{BOA} = \widehat{BOC}$.

Dans le cas où O n'est pas dans le triangle ABC, . on a : $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB}$. Comme les triangles AOB et AOC sont isocèles, $\widehat{BOC} = 180° - 2\widehat{OAC} - (180° - 2\widehat{OAC} - 2\widehat{CAB} = 2\widehat{CAB}$.
□

Angle inscrit

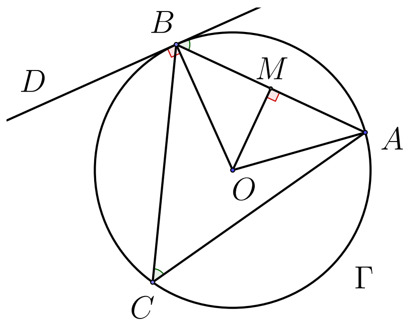
Théorème 21. Soit Γ un cercle et deux points distincts A et B sur ce cercle. Tous les angles $\widehat{AMB}$ avec M sur Γ (situés du même côté de l'arc AB) et qui interceptent le même arc AB ont la même mesure.



Démonstration. Pour chaque angle inscrit, on revient à l'angle au centre associé qui est le même pour tous les angles inscrits interceptant le même arc et situés du même côté de l'arc. □

Théorème de la tangente

Théorème 22. Soit Γ un cercle et trois points distincts A, B et C sur ce cercle. Soit D la tangente en B à Γ. En notant $\widehat{ACB} = \alpha$, l'angle entre AB et la tangente D vaut aussi α.



Démonstration. On pose $\widehat{ACB} = \gamma$, M le milieu de $[AB]$ et O le centre du cercle circonscrit à ACB. Le triangle OMB est rectangle en M (car OM est la médiatrice de $[AB]$) et la triangle AOB est isocèle donc $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \gamma$ (angle au centre). Ainsi dans le triangle MOB, $\widehat{MBO} = 180° - 90° - \widehat{MOB} = 90° - \gamma$. De plus, OB et la tangente à Γ en O sont perpendiculaires d'après la définition de la tangente.

Donc l'angle entre AB et la tangente D vaut $90° - (90° - \gamma) = \gamma$ □

Corollaire 23. Tout triangle dont les trois sommets sont sur un cercle dont un diamètre est l'hypoténuse de ce triangle est un triangle rectangle. Cela revient aussi à dire que le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse du triangle.

Points cocycliques

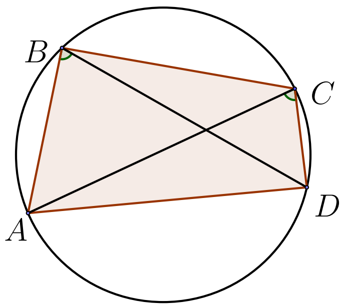
On dit que des points sont cocycliques (ou qu'un polygone est inscriptible) si ces points (ou les sommets du polygone) appartiennent à un même cercle.

On sait par exemple que tous les triangles sont inscriptibles (ils appartiennent à un cercle de centre O, point de concours des médiatrices du triangle)

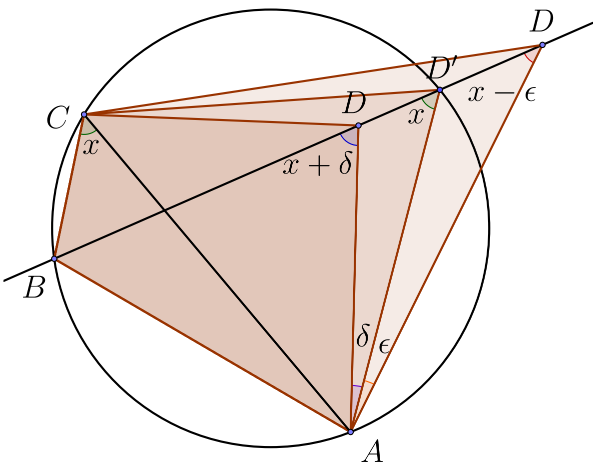
On cherche ensuite des conditions nécessaires et suffisantes au fait qu'un quadrilatère est inscriptible.

Proposition 24. Un quadrilatère non croisé $ABCD$ est inscriptible si et seulement si $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ avec B et C du même côté de l'arc AB.

Démonstration.



On voit bien que si le quadrilatère est inscrit dans un cercle, on a l'égalité d'angles d'après le théorème de l'angle inscrit.



Pour la réciproque, on montre la contraposée c'est à dire qu'on suppose que le quadrilatère n'est pas inscriptible,et on montre qu'alors on ne peut pas avoir l'égalité d'angles.

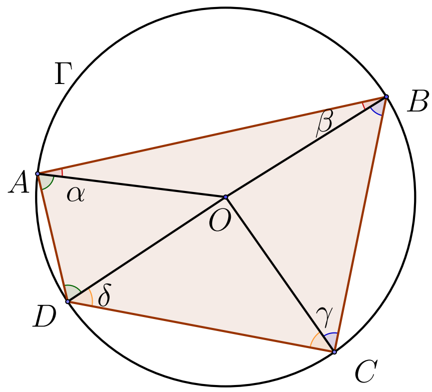
Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les sommets ne sont pas cocycliques. Alors le cercle circonscrit à ABC noté Γ ne passe pas par D. Soit D' l'intersection de Γ avec BD. Ainsi le quadrilatère $ABCD'$ est inscrit dans Γ donc $\widehat{BAC} = \widehat{BD'C}$. Comme $D \neq D'$, alors $\widehat{BDC} \neq \widehat{BD'C}$ donc $\widehat{BAC} \neq \widehat{BDC}$. $\square$

Proposition 25. Un quadrilatère non croisé $ABCD$ est inscriptible si et seulement si la somme de ses angles opposés est égale à $180°$.

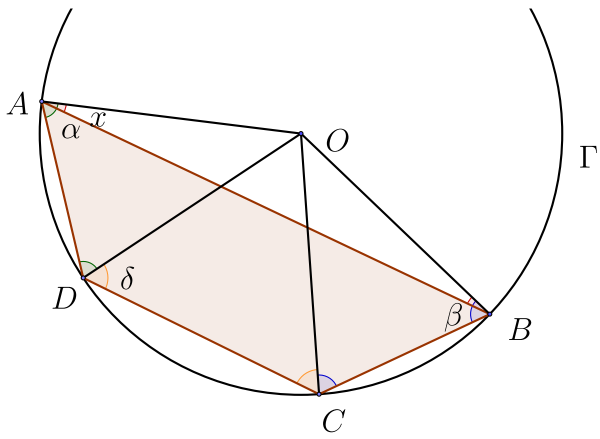
Démonstration. On montre tout d'abord que si un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle Γ de centre O, alors la somme de deux angles opposés est égale à $180°$.

On considère deux cas :

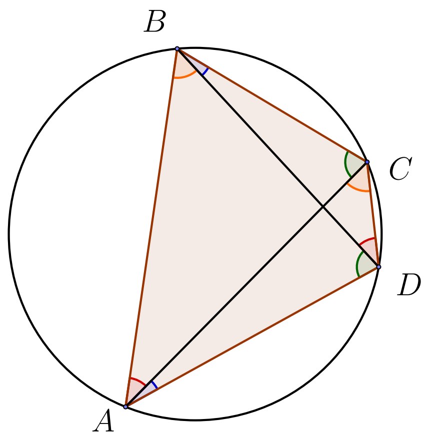
Cas 1 : On suppose que O est dans le quadrilatère $ABCD$. On note $\widehat{DAO} = \alpha$, $\widehat{ABO} = \beta$, $\widehat{BCO} = \gamma$ et $\widehat{CDO} = \delta$. Comme les triangles AOD, AOB, BOC et COD sont tous isocèles en O, $\widehat{ADO} = \alpha$, $\widehat{BAO} = \beta$, $\widehat{CBO} = \gamma$ et $\widehat{DCO} = \delta$. Ainsi $(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)+(\delta+\alpha) = 360°$ donc $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$.



Cas 2 : le centre O est en dehors du quadrilatère. On a alors par la même méthode que précédemment : $(\alpha - x) + \alpha + \delta + \delta + \beta + (\beta - x) = 360°$ donc $\alpha - x + \beta + \delta = 180°$.



Voici une autre méthode, qui permet de ne pas traiter plusieurs cas :

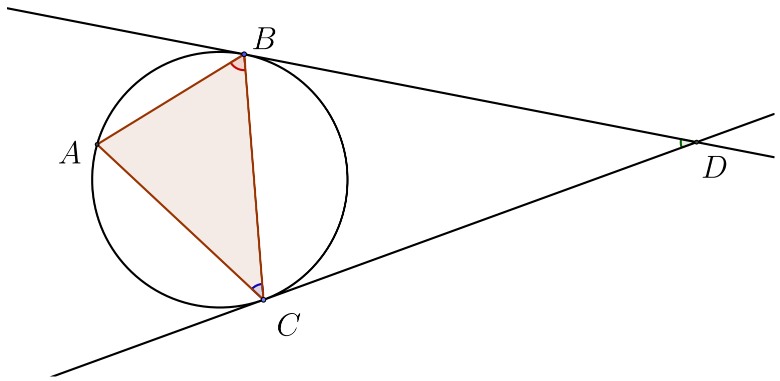


D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = x$, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = y$, $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = z$ et $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = w$. Comme le somme des angles d'un quadrilatère est égale à $360°$, on a $2x+2y+2z+2w = 360°$ donc $x+y+z+w = 180°$. Or $\widehat{ABC}+\widehat{ADC} = x+y+z+w = 180°$

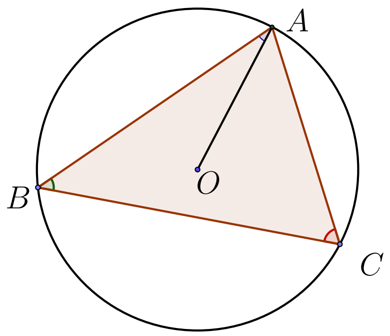
Réciproquement, on doit montrer que si un quadrilatère a la somme de ses angles opposés égale à $180°$, alors il est inscriptible. Cette réciproque se montre exactement de la même manière que la réciproque de la proposition 24. □

Exercices

Exercice 1 Soit la figure suivante avec DB et DC les tangentes à Γ en B et C respectivement. On a de plus $\widehat{ABC} = 62°$ et $\widehat{ACB} = 43°$. Trouver la mesure de l'angle BDC.



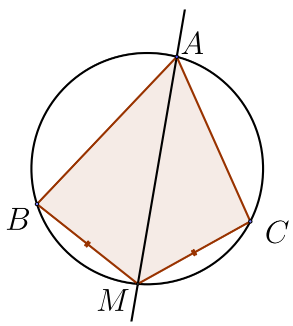
Exercice 2 Soit la figure suivante avec O le centre du cercle circonscrit à ABC (le cercle qui passe par les trois points A, B et C). On a de plus $\widehat{ABC} = 45°$ et $\widehat{ACB} = 62°$. Trouver la mesure de l'angle $\widehat{BAO}$.



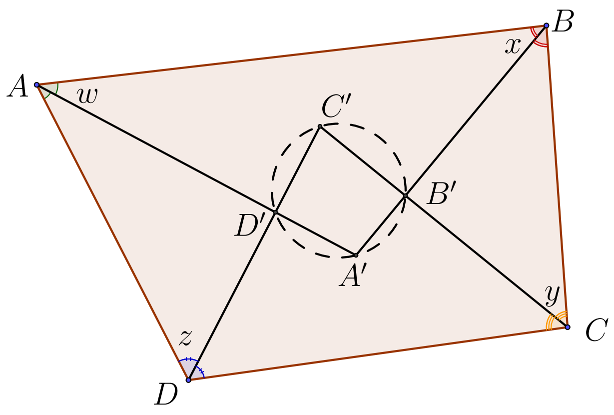
Exercice 3 Soit un triangle ABC et D, E, F trois points sur les trois côtés du triangle. Montrer que les cercles circonscrits à AED, BEF et CDF se coupent en un même point.

Exercice 4 Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points distincts A et B. Soit C et D deux points distincts de Γ_1 et différents de A et B tels que C' l'intersection de la droite (BC) avec le cercle Γ_2 et D' l'intersection de la droite (AD) avec Γ_2 sont distincts de A et B. Montrer que les droites (CD) et $(C'D')$ sont parallèles.

Exercice 5 Soit la figure ci-dessous avec M le milieu de l'arc BC. Montrer que $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.



Exercice 6 Soit la figure suivante avec $\widehat{D'AB} = \widehat{DAD'}$, $\widehat{B'BA} = \widehat{B'BC}$, $\widehat{B'CB} = \widehat{B'CD}$ et $\widehat{CDD'} = \widehat{D'DA}$. Montrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

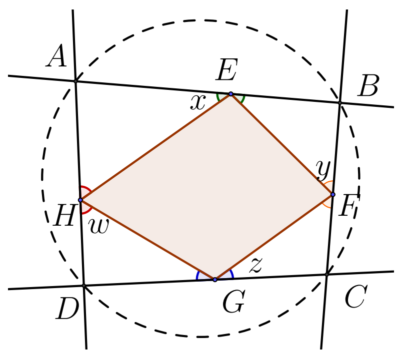


Exercice 7 Soit Γ un cercle et BC une corde de ce cercle. Soit A le milieu de l'arc BC. On considère deux cordes de Γ passant par A, qu'on note AD et AE et respectivement F et G les points d'intersection de ces cordes avec BC. Montrer que D, E, F et G sont cocycliques.

Exercice 8 Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles ayant deux points d'intersection P et Q. Soit d une droite qui coupe Γ_1 en deux points A et Cet Γ_2 en deux autres points B et D de sorte que A, B, C et D soient disposés dans cet ordre sur la droite d. Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 9 Soit A, B, C, D, A', B', C', D' des points tels que A, B, C, D cocycliques, A, A', B, B' cocycliques, B, B', C, C' cocycliques, C, C', D, D' cocycliques, D, D', A, A' cocycliques. Montrer que A', B', C', D' cocycliques.

Exercice 10 Soit la figure suivante avec $\widehat{AEH} = \widehat{FEB}$, $\widehat{EFB} = \widehat{CFG}$, $\widehat{CGF} = \widehat{DGH}$ et $\widehat{DHG} = \widehat{AHE}$. Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.



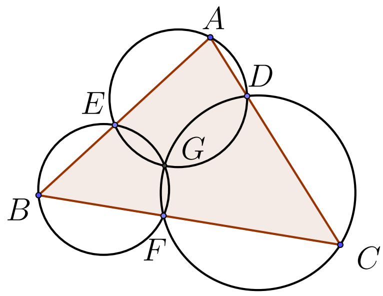
Exercice 11 Soit ABC un triangle équilatéral et D et E deux points de $[AB]$ tels que $AD = DE = EB$. Soit F appartenant à BC tel que $CF = AD$. Trouver la valeur de $\widehat{CDF} + \widehat{CEF}$.

Exercice 12 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 90$ et $\widehat{ABC} > \widehat{CDA}$. Soit Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[CD]$ tels que la droite QR coupe les droites AB et AD respectivement en P et S de sorte que $PQ = RS$. Soit M le milieu de $[BD]$ et N le milieu de $[QR]$. Montrer que les points M, N, A et C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1 Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180, $\widehat{BAC} = 180° - 62° - 43° = 75°$. D'après le théorème de la tangente, $\widehat{CBD} = \widehat{BCD} = 75°$. Donc $\widehat{BDC} = 180° - 75° - 75° = 30°$.

Solution de l'exercice 2 Comme l' angle inscrit $\widehat{ACB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc AB, on a $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 124°$. De plus, le triangle AOB est isocèle (car O est le centre du cercle circonscrit) donc $\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \frac{180°-124°}{2} = 28°$.

Solution de l'exercice 3 **Théorème de Miquel**



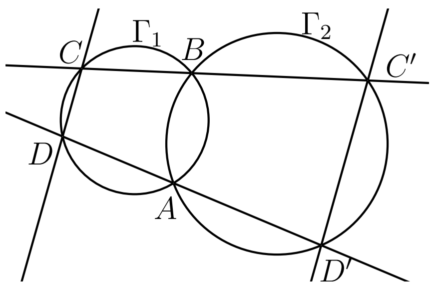
Cela revient à montrer que si $BEFG$ et $CDGF$ sont inscriptibles, alors A, E, G et D sont cocycliques.

On note $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{BCA} = \gamma$. Comme le quadrilatère $BEFG$ est inscriptible, on a $\widehat{EGF} = 180° - \beta$ et de même, $\widehat{FGD} = 180° - \gamma$. Ainsi, $\widehat{EGD} = 360° - (180° - \gamma) - (180° - \beta) = \beta + \gamma$.

De plus, comme la somme des angles dans un triangle est égale à $180°$, alors $\widehat{EAD} = 180° - \beta - \gamma$.

On a donc $\widehat{EAD} = 180° - \widehat{EGD}$ donc le quadrilatère $EAGD$ est inscriptible.

Solution de l'exercice 4



On a : $\widehat{BCD} = 180° - \widehat{BAD}$ car les points A, B, C et D sont cocycliques. De même $180° - (180° - \widehat{BAD}) = 180° - \widehat{BC'D'}$. Ainsi, $\widehat{BCD} = 180° - \widehat{BC'D'}$ donc ce sont des angles alterne-internes (ou correspondants) donc les droites CD et $C'D'$ sont parallèles.

Solution de l'exercice 5 On note $\widehat{BAC} = \alpha$. On a alors $\widehat{BMC} = 180° - \alpha$ car les points A, B, C et M sont cocycliques.

Comme le triangle BMC est isocèle en M, on a $\widehat{MBC} = \widehat{BCM} = \frac{180°-(180°-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Par angle inscrit, on obtient :$\widehat{BAM} = \widehat{MAC} = \frac{\alpha}{2}$.

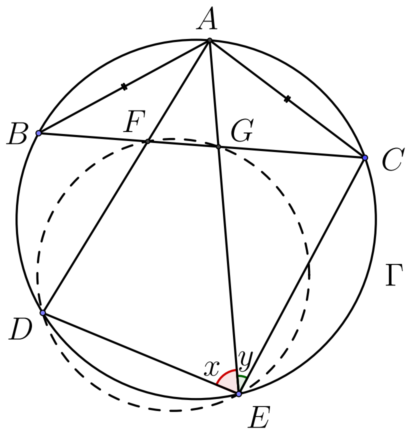
Remarque 26. Le point M est appelé pôle sud et il correspond au point de concours de la médiatrice de $[BC]$ et de la bissectrice de $\widehat{BAC}$

Solution de l'exercice 6 Comme la somme des angles d'un triangle est égale à 180, on a $\widehat{C'D'A'} = \widehat{AD'D} = 180° - w - z$ et $\widehat{C'B'A'} = \widehat{BB'C} = 180° - x - y$.

De plus, on a $2w + 2x + 2y + 2z = 360°$ donc $w + x + y + z = 180°$.

Ainsi $\widehat{C'B'A'} + \widehat{C'D'A'} = 180 - x - y + 180 - w - z = 360° - 180° = 180°$.

Solution de l'exercice 7

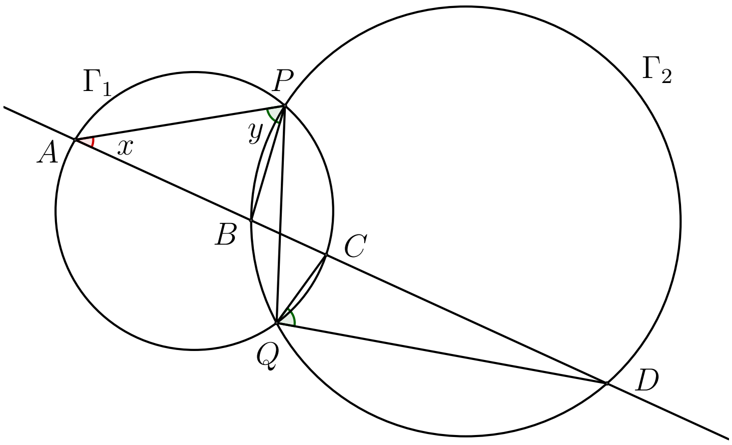


On note $\widehat{DEA} = x$ et $\widehat{CEA} = y$.

On a alors $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = y$ (angle inscrit) donc $\widehat{ACB} = y$ car le triangle ABC est isocèle en A. De plus, $\widehat{DCA} = x$ (angle inscrit).

Ainsi, $\widehat{DAC} = 180° - x - y$ car la somme des angles d'un triangle est égale à $180°$. Donc $\widehat{AFC} = 180° - (180° - x - y) - y = 180° - x$. Donc $\widehat{DFG} = 180° - \widehat{DEG}$.

Solution de l'exercice 8



On note $\widehat{APB} = y$ et $\widehat{BAP} = x$.

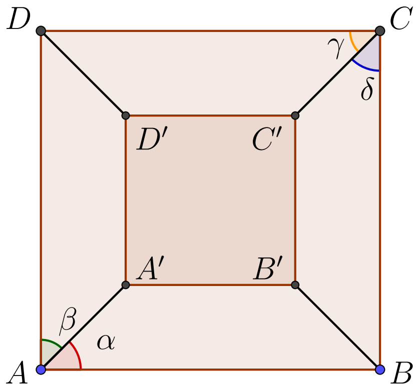
On a alors $\widehat{PBA} = 180° - x - y$ car la somme des angles d'un triangle est égale à $180°$ donc $\widehat{PBD} = x + y$.

De plus $\widehat{CQP} = \widehat{CAP} = x$ (angle inscrit) et $\widehat{DQP} = \widehat{DBP} = x + y$ (angle inscrit).

Ainsi, $\widehat{DQC} = \widehat{DQP} - \widehat{CQP} = x + y - x = y = \widehat{APB}$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> **Théorème du cube**

Plutôt que de faire une figure, on schématise la situation comme ci-dessous



Par cocyclicité, $\widehat{DD'C'} = 180° - \gamma$, $\widehat{DD'A'} = 180° - \beta$, $\widehat{A'B'B} = 180° - \alpha$ et $\widehat{BB'C'} = 180° - \delta$.

Ainsi, $\widehat{A'D'C'} = 360° - (180° - \gamma) - (180° - \beta) = \gamma + \beta$ et $\widehat{A'B'C'} = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \delta) = \alpha + \delta$. Comme A, B, C, D cocycliques, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Donc A', B', C', D' cocycliques.

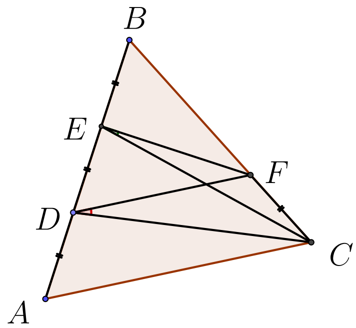
<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On note : $\widehat{AEH} = \widehat{FEB} = x$, $\widehat{EFB} = \widehat{CFG} = y$, $\widehat{CGF} = \widehat{DGH} = z$ et $\widehat{DHG} = \widehat{AHE} = w$.

On a dans le triangle AEH, $\widehat{HAE} = 180° - x - w$, dans le triangle FGC, $\widehat{GCF} = 180° - y - z$, dans le triangle EFB, $\widehat{EBF} = 180° - y - x$ et dans le triangle HDG, $\widehat{HDG} = 180° - w - z$.

Comme la somme des angles dans un quadrilatère est égale à $360°$, alors $180° - x - w + 180° - y - z + 180° - y - x + 180° - w - z = 360°$ donc $x + y + z + w = 180°$.

Ainsi, $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180° - x - w + 180° - y - z = 180°$.

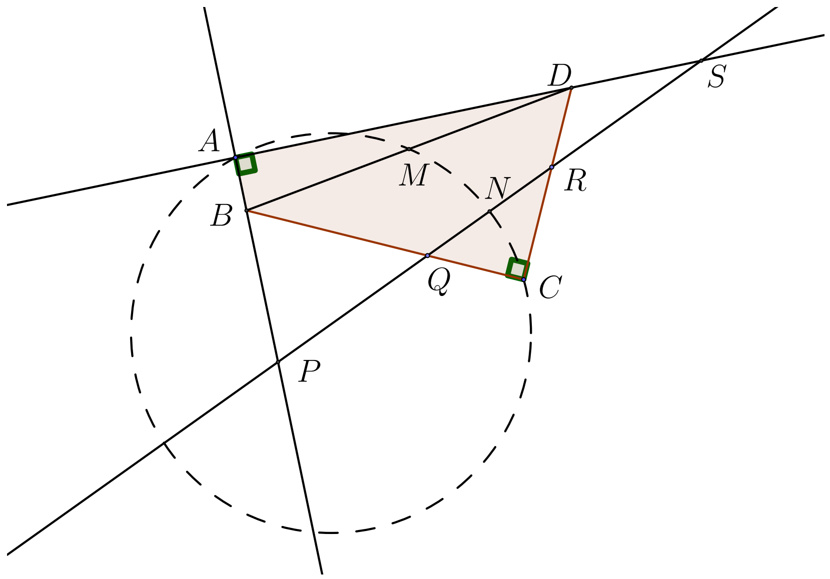
<u>*Solution de l'exercice 11*</u>



Les droites DF et AC sont parallèles d'après le théorème de Thalès donc $\widehat{CDF} = \widehat{DCA}$. Par symétrie du triangle équilatéral par rapport au milieu de $[AB]$, $\widehat{DCA} = \widehat{BCE}$.

Ainsi, $\widehat{CDF} + \widehat{CEF} = \widehat{FCE} + \widehat{CEF} = 180° - \widehat{EFC} = 180° - (180° - \widehat{BFE}) = \widehat{BFE}$. Comme BDF est équilatéral (triangle semblable à ABC et E est le milieu de $[BD]$, donc $\widehat{BFE} = \widehat{DFE} = \frac{60}{2} = 30$. Donc $\widehat{CDF} + \widehat{CEF} = 30$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> **EGMO 2017 Problème 1**



On a : $\widehat{DRS} = \widehat{CRQ}$ (angles opposés) $= \widehat{RCN}$ car le triangle CQR est rectangle et N est le milieu de son hypoténuse donc le centre de son cercle circonscrit.De la même manière, on a $\widehat{BDC} = \widehat{DCM}$ car BCD est un triangle rectangle et M est le milieu de son hypoténuse.

Ainsi, $\widehat{NCM} = \widehat{DCM} - \widehat{RCN}$.

Dans le triangle rectangle APS, comme N est le milieu de QR et $PQ = RS$, N est le milieu de l'hypoténuse donc le triangle ANS est isocèle donc $\widehat{PSA} = \widehat{SAN}$.

Dans le triangle rectangle BAD, M est le milieu de l'hypoténuse donc le triangle MAD est isocèle. Donc $\widehat{MAD} = \widehat{BDA}$. Comme les points A, D et S sont alignés, on a $\widehat{BDA} + \widehat{RDB} + (180° - \widehat{DRS} - \widehat{DSR}) = 180°$ donc $\widehat{BDA} = \widehat{DRS} + \widehat{DSR} - \widehat{RDB}$.

Ainsi, $\widehat{NAM} = \widehat{NAD} - \widehat{MAD} = \widehat{MAD} + \widehat{CDB} - \widehat{DRS} - \widehat{MAD} = \widehat{CDB} - \widehat{DRS} = \widehat{DCM} - \widehat{RCN} = \widehat{NCM}$ car le triangle MDC est isocèle (donc $\widehat{CDB} = \widehat{MCD}$). Donc les points A, M, N et C sont cocycliques.

2 mercredi 25 après-midi : Linda Gutsche

Tous les théorèmes vus en cours peuvent-être trouvés avec leur démonstration dans le magnifique polycopié de Cécile Gachet qui vous apprendra toutes les bases de la géométrie : http://www.animath.fr/IMG/pdf/geoma.pdf

Ce qui a été vu en cours sont les théorèmes suivants, et il fallait les prouver en guise d'exercice :

Théorème 27. Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Théorème 28. Les bissectrices d'un triangle sont concourantes.

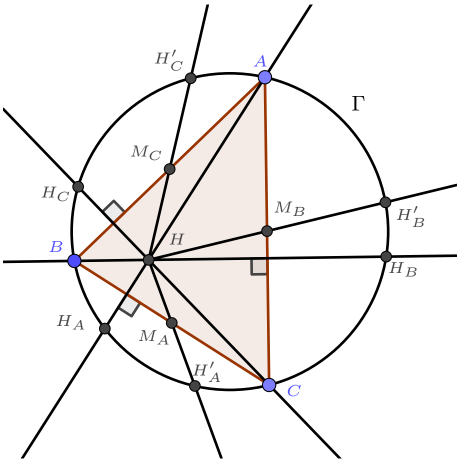
Théorème 29. Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Théorème 30. Les médianes d'un triangle sont concourantes.

Théorème 31. Symétriques de l'orthocentre
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, H son orthocentre, et M_A, M_B, et M_C respectivement les milieux de $[BC]$, $[CA]$, et $[AB]$.

— Les symétriques de H selon les trois symétries axiales d'axe $[BC]$, $[CA]$, et $[AB]$ appartiennent à Γ.

— Les symétriques de H selon les trois symétries centrales de centre M_A, M_B, et M_C appartiennent à Γ.



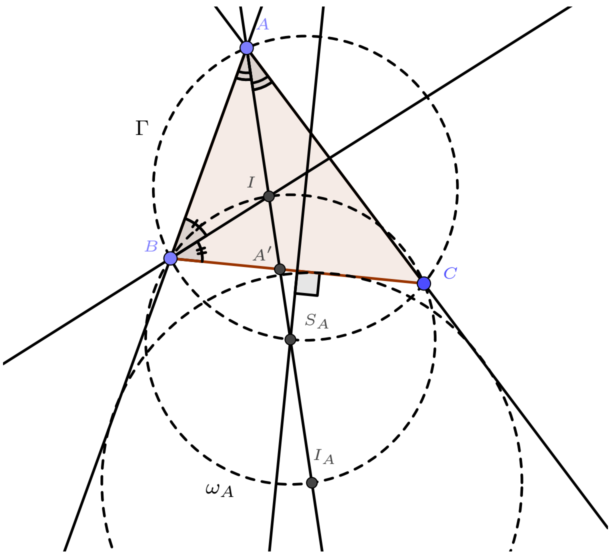
Théorème 32. Le Théorème du Pôle Sud
Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On appelle S_A le pôle sud issu de A dans le triangle ABC l'intersection entre la bissectrice issue de A dans le triangle ABC et la médiatrice de $[BC]$.

— $S_A \in \Gamma$.

— S_A est le centre du cercle circonscrit à BIC ; ce cercle étant appelé cercle antarctique issu de A dans le triangle ABC et étant noté ω_A (avec I le centre du cercle inscrit à ABC).

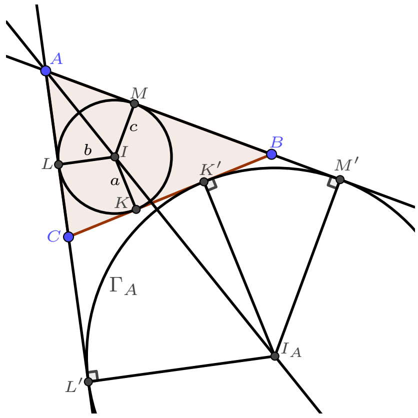
— Le point diamétralement opposé à I dans ω_A noté I_A est le centre du cercle exinscrit issu de A dans le triangle ABC.

— $S_A I^2 = S_A A' * S_A A$ avec A' le pied de la bissectrice issue de A dans ABC.



Théorème 33. Longueurs de tangentes pour cercle inscrit et exinscrit
Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle inscrit. Soit K, L, et M les points de tangence de respectivement $[BC]$, $[CA]$, et $[AB]$ avec $\mathcal{C}$, et a, b et c les longueurs de ces trois mêmes côtés. Soit $\mathcal{P}$ le périmètre de ABC.
Soit Γ_A le cercle exinscrit issu de A dans le triangle ABC, et K', L', et M' ses points de tangence avec respectivement (BC), (CA), et (AB).
On a alors :

— $AM + BK + CL = AL + CK + BM = \frac{\mathcal{P}}{2}$
— $x = AM = AL = \frac{b+c-a}{2}$
— $y = BK = BM = \frac{a+c-a}{2}$
— $z = CL = CK = \frac{b+c-a}{2}$
— $BK' = BM' = CK = z$
— $CK' = CL' = BK = y$



Démonstration. Idée : Par égalité de longueur des tangentes en comparant par rapport au périmètre : $\mathcal{P} = a + b + c$. Il s'agit uniquement de calculs avec les longueurs déjà introduites. □

3 jeudi 26 après-midi : Guillaume Conchon--Kerjan

Introduction

Ce cours est consacré aux triangles semblables : on dit que deux triangles sont *semblables* lorsqu'ils ont la même "forme", à savoir, que leurs angles sont égaux deux-à-deux, ou que, de façon équivalente, les longueurs de leurs côtés respectifs sont proportionnels. Ce concept réunit donc des égalités d'angles et de rapports de longueurs, et c'est ce qui fait son intérêt.

Proposition 34. Pour ABC et $A'B'C'$ deux triangles, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

— $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.
— $AB/AC = A'B'/A'C'$ et $BC/BA = B'C'/B'A'$.
— $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $AB/AC = A'B'/A'C'$.

Pour plus de détails sur le cours et les exercices, on pourra se reporter au cours de Jean-Louis Tu au stage junior de 2015 et au cours d'introduction à la géométrie olympique de Cécile Gachet, sources de ce présent cours.

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Prouver que

— $CH \times CB = CA^2$.

— $BH \times BC = BA^2$.

— $BH \times CH = AH^2$.

Exercice 2
Soit $\mathcal{C}$ un cercle, et A, B, C, D quatre points sur celui-ci. On suppose que (AB) et (CD) se rencontrent en un point M. Trouver deux triangles semblables.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, A', B', C' les pieds des hauteurs et H l'orthocentre. Trouver des triangles semblables.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de la diagonale $[AC]$ et E et F les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AD) respectivement. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{CD}{AD}$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle isocèle en A, Γ le cercle tangent à (AB) et (AC) en B et C, et M un point de l'arc de Γ intérieur au triangle ABC. On définit D et E les projetés orthogonaux de M sur $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, et D son projeté orthogonal sur $[BC]$. Prouver que $MD^2 = ME \times MF$.

Exercice 6 : Retour au pôle Sud
Soit ABC un triangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit, A' le pied de la bissectrice issue de A et S_A le point d'intersection de cette bissectrice avec $\mathcal{C}$. S est appelé *pôle sud de ABC par rapport à A*.

— Montrer que S est sur la médiatrice de $[BC]$, puis que $BS_A = CS_A = IS_A$.

— Montrer que ABS_A et $BA'S_A$ sont semblables.

Solutions

Pour des corrections plus détaillées, voir donc le polycopié de Cécile Gachet (exercices 5.4,5.5,5.6) concernant les exercices 1,2,6 et celui de Jean-Louis Tu (exercices 3,4,5,6) concernant les exercices 3,4,5.

Solution de l'exercice 1 Une rapide chasse aux angles montre que les triangles rectangles ABC, HAC et HBA sont semblables. Ainsi, $AC/BC = HC/AC$, $AB/BC = HB/BA$ et $HB/HA = HA/HC$, ce qui permet de prouver respectivement les trois égalités de l'énoncé.

Solution de l'exercice 2 On peut supposer que A, B, M et C, D, M sont alignés dans cet ordre. Dans ce cas, MAB et MDC sont semblables.

Note : On a donc $MA \times MB = MC \times MD$. Si le point M est fixé, pour toute droite passant par M et coupant le cercle en E et F, le produit $ME \times MF$ est donc constant. Cette quantité est appelée *la puissance de M par rapport au cercle $\mathcal{C}$*. On trouve un cours à ce sujet dans le vieux polycopié de géométrie.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> B, C', B', C sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, donc $\widehat{ACB} = \widehat{B'CB} = 180° - \widehat{B'C'B} = \widehat{AC'B'}$. Comme $\widehat{C'AB'} = \widehat{ABC}$, on en déduit que ABC et $AC'B'$ sont semblables. De même, $BA'C'$ et BCA sont semblables, et $CA'B'$ et CBA aussi.

De plus, $\widehat{HCA'} = 90° - \widehat{C'BA'} = \widehat{C'AH}$, donc les triangles rectangles BAA' et HCA' sont semblables.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> $\frac{ME}{MF} = \frac{DA}{DC}$ si et seulement si MEF et DAC sont semblables. On remarque que A, E, F, M sont sur le cercle de diamètre $[AM]$, donc $\widehat{MEF} = \widehat{MAF} = \widehat{DAC}$ par théorème de l'angle inscrit. De même, $\widehat{EFM} = \widehat{EAM} = \widehat{BAC}$. Or $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ car ils sont alternes-internes. Ainsi MEF et DAC sont semblables, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> A, D, F, M sont cocycliques, car $\widehat{AFM} = \widehat{ADM} = 90°$. Ainsi $\widehat{MDF} = \widehat{MAF}$. De même, $\widehat{MED} = \widehat{MBD} = \widehat{MBA}$ car B, D, E, M sont cocycliques. Enfin, $\widehat{MAF} = \widehat{MBA}$ car (AF) tangente au cercle circonscrit à MBA. Ainsi $\widehat{MDF} = \widehat{MED}$.
De même, on prouve que $\widehat{MDE} = \widehat{MFD}$. Donc MDF et MED sont semblables, ce qui implique que $MD/MF = ME/MD$, soit $MD^2 = ME \times MF$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Pour la figure, voir le cours de Linda Gutsche, mercredi 25 après-midi. Par théorème de l'angle inscrit, $\widehat{S_ABC} = \widehat{S_AAC}$ et $\widehat{S_ACB} = \widehat{S_AAB}$. Or $\widehat{S_AAB} = \widehat{S_AAC}$ donc $\widehat{S_ABC} = \widehat{S_ACB}$ et le triangle S_ABC est isocèle en S_A. Donc S_A est sur la médiatrice de $[BC]$.

IV. Avancés

1 Le matin : stratégies de base et combinatoire

1 mardi 24 matin : Martin Rakovsky

Quand on rédige une récurrence, il y a des étapes importantes à mettre en évidence. Partons de l'exemple suivant.

Exemple 35. Montrer que pour tout entier strictement positif n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La première étape est d'annoncer que l'on va faire une récurrence : Procédons par récurrence sur n. La deuxième étape est l'initialisation : Si $n = 1$, alors on a bien $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$. La deuxième étape est l'hérédité qui commence habituellement par : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain naturel $n \geq 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. On a $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ par hypothèse de récurrence donc

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =& \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ =&(n+1) \cdot \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \\ =&(n+1) \cdot \frac{(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$ ce qui conclut.

Pour commencer

Exercice 1 Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 2 Montrer l'inégalité de Bernouilli :

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $a > -1$:

$$(1 + a)^n \geq na + 1$$

Exercice 3 On considère une suite (u_n) de premier terme u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Exprimer le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite en fonction de u_0

Exercice 4 Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Exercice 5 On définit la suite (F_n) appelée suite de Fibonnaci de la façon suivante : $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout naturel n :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que pour tout entier n naturel.

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Récurrence forte

Exercice 6 On considère la suite (a_n) de premier terme $a_1 = 1$ et définie par la relation suivante : Pour tout entier strictement positif n,

$$a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Exprimer a_n en fonction de n.

Exercice 7 Soit a un réel vérifiant que $a + \frac{1}{a}$ est un entier. Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $a^n + \frac{1}{a^n}$ est un entier relatif.

Comptage par récurrence

Exercice 8 De combien de façons peut-on paver un rectangle $2 \times n$ avec des dominos 2×1 ?

Exercice 9 Dans le plan, on a tracé n droites de telle façon qu'il n'y a ni deux droites parallèles ni trois droites concourantes. Combien de régions sont délimitées par ces droites ?

Solution de l'exercice 1 Montrons la propriété par récurrence sur n. Pour $n = 4$ on a $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$ donc la propriété est vraie pour $n = 4$. Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier $n \geq 4$ et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. Par hypothèse de récurrence, $2^n \geq n^2$, donc

$$2^{n+1} \geq 2 \times 2^n \geq 2n^2 \geq n^2 + n^2 \geq n^2 + 4n \geq n^2 + 2n + n \geq n^2 + 2n + 1 \geq (n+1)^2.$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2 On montre l'inégalité par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $(1+a)^0 \geq 0 \cdot a + 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$. On suppose désormais qu'elle est vraie pour un naturel

n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$. Par hypothèse de récurrence on a $(1+a)^n \geq na+1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &\geq (na+1)(a+1)\\ &= na^2+na+a+1\\ &= (n+1)a+1+na^2\\ &\geq (n+1)a+1\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3 On distingue deux cas. Si $a=1$, la suite (u_n) est simplement définie par $u_{n+1}=u_n+b$. Ainsi

$$\begin{aligned}u_n-u_0 &= (u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\ldots+(u_2-u_1)+(u_1-u_0)\\ &= b+b+\ldots+b+b\\ &= nb\end{aligned}$$

Et on en déduit directement que $u_n=u_0+nb$. Si $a\neq 1$, alors on commence par montrer que $1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. En effet, on remarque que :

$$(1-a)(1+a+a^2+\ldots a^n)=(1+a+a^2+\ldots+a^n)-(a+a^2+\ldots a^{n+1})=1-a^{n+1}$$

Alors, on peut commencer à regarder les premiers termes de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}&u_1=au_0+b\\ &u_2=a(au_0+b)+b=a^2u_0+b(1+a)\\ &u_3=a(a^2u_0+b(1+a))+b=a^3u_0+b(1+a+a^2)\end{aligned}$$

On peut donc conjecturer que pour tout n, $u_n=a^nu_0+b(1+a+\ldots+a^n)=a^nu_0+b\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Nous allons montrer cette conjecture par récurrence sur n. L'initialisation correspond à $u_0=u_0$. On suppose donc que la formule est vraie pour $n\geq 0$ et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$. Par hypothèse de récurrence on a $u_n=a^nu_0+b\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Donc :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= au_n+b\\ &= a(a^nu_0+b\frac{1-a^{n+1}}{1-a})+b\\ &= a^{n+1}u_0+b\left(a\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+1\right)\\ &= a^{n+1}u_{n+1}+b\frac{a+1-a-a^{n+2}}{1-a}\\ &= a^{n+1}u_{n+1}+b\frac{1-a^{n+2}}{1-a}\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$ ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> L'astuce est de montrer par récurrence que

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$$

On peut le prouver directement par récurrence sur n (à vos stylos !) ou alors on peut utiliser le fait que pour tout entier $k\geq 2$ on a $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. On télescope alors la somme :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}.$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Une fois encore, on peut procéder par récurrence on télescoper comme précédemment en utilisant que $F_k^2=F_k(F_{k+1}-F_{k-1})=F_kF_{k+1}-F_kF_{k-1}$ et en gardant à l'esprit que $F_0=0$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On calcule les premiers termes : $a_2=a_1+a_1=2$ et $a_3=a_1+a_2=3$. On commence à se demander si $a_n=n$ pour tout entier strictement positif n. On procède par récurrence forte sur n. L'initialisation étant déjà faite, on s'attèle à l'hérédité. Puisque $a_k=k$ pour tout entier $k\leq n$, on a $a_{n+1}=a_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}+a_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lceil\frac{n}{2}\rceil$ Pour montrer que $\lceil\frac{n}{2}\rceil+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=n+1$, on peut étudier la parité de $n+1$ ou on peut aussi utiliser les inégalités relatives aux parties entières et supérieures pour obtenir $n<\lceil\frac{n}{2}\rceil+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor<n+2$ et conclure.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On procède par récurrence double. On a déjà par hypothèse $a+\frac{1}{a}$ et on a également $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$ qui est bien un entier relatif. On suppose que la propriété est vraie pour $n\geq 2$ et pour $n-1$. On trouve

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)=a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}+a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}$$

donc $a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}$ est bien un entier en tant que difference d'un produit d'entiers et d'un entier.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> On place le rectangle à l'horizontal. On pose u_n le nombre de façon de paver le rectangle. On observe $u_1=1$ et $u_2=2$. On considère un entier $n\geq 2$. Si le domino le plus à droite est placé à l'horizontal, les deux dernières colonnes sont occupées par deux dominos horizontaux, le reste du rectangle pouvant être pavé de u_{n-2} façons. Si le domino le plus à droite est placé à la vertical, la dernière colonne est donc occupée par un domino vertical et le reste du rectangle peut être pavé de u_{n-1} façons. On obtient donc la relation de récurrence $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. On reconnaît la suite de Fibonacci, le nombre de façon de paver un rectangle $2\times n$ est donc F_{n+1}.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Quand il n'y a pas de droites, il y a 1 région. On pose u_n le nombre de régions délimitées lorsqu'il y a n droites en position générale. Considérons une configuration de n droites en position générale. Lorsque l'on rajoute une droite, elle coupe chaque autre droite en 1 point. On numérote les points d'intersection par abscisse croissante. Avant le premier point d'intersection, la droite coupe une région en 2 nouvelles. Entre chaque point d'intersection, la droite coupe une autre région en 2. Après le dernier point d'intersection, la

droite coupe une autre région en 2. On obtient donc $n+1$ région. Donc $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout naturel n. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n - u_0 &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1 - u_0 \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

On obtient pour tout entier n que $u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

2 mercredi 25 matin : Vincent Jugé

Invariants

Exercice 1 On considère un échiquier (de taille 8×8) dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

Exercice 2 On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2017. À chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la $2016^{\text{ème}}$ étape peut-il être égal à 1 ? Peut-il être égal à 2 ?

Exercice 3 6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ? Et si l'on avait eu 2018 arbres avec un oiseau par arbre ?

Exercice 4 Les entiers de 1 à 20 sont écrits au tableau. On peut effacer deux nombres quelconques, a et b, et écrire à leur place le nombre $a+b-1$. Quel nombre sera écrit au tableau après 19 opérations ? Et si on écrivait $a+b+ab$ au lieu de $a+b-1$?

Principe de l'extremum

Exercice 5 Montrer que tout entier naturel non nul est un produit de nombres premiers.

Exercice 6 Soit E un ensemble non vide de points du plan. On suppose que tout point de E est le milieu de deux autres points de E. Montrer que E est infini.

Exercice 7 À chaque point à coordonnées entières du plan on associe un entier naturel. On suppose que la valeur de chaque point est égale à la moyenne des valeurs de ses quatre voisins. Montrer que tous les points ont la même valeur.

Exercice 8 (Théorème de Sylvester) Soit E un ensemble fini de points du plan. On suppose que les points de E ne sont pas tous alignés. Montrer qu'il existe une droite qui contient exactement deux points de E.

Exercice 9 On numérote les cases d'une grille $n \times n$ à l'aide des entiers $1, 2, \ldots, n^2$. Montrer qu'il existe deux cases voisines, ayant au moins un côté en commun, et dont les numéros diffèrent d'au moins $(n+1)/2$. Peut-on obtenir de meilleures estimations quand n est grand ?

Exercice 10 Un pays est formé de $2n+1$ villes, avec $n \geqslant 1$, dont les distances sont deux à deux distinctes. Dans chaque ville, le maire de la ville décide de rendre visite à la ville la plus proche. Montrer qu'au moins une ville ne recevra la visite d'aucun maire.

Exercice 11 Soit $n \geqslant 4$ un entier naturel. Considérons un parlement composé de n députés. On suppose que chaque député a exactement 3 ennemis, et que la relation d'inimitié est symétrique : si a est ennemi de b, alors b est ennemi de a. Montrer qu'il est possible de séparer le parlement en deux commissions telles que chaque député ait au plus un ennemi dans sa commission.

Monovariant

Exercice 12 (Problème 3 de l'OIM 1986) À chaque sommet d'un pentagone régulier on associe un entier relatif, de sorte que la somme de ces cinq nombres soit strictement positive. Si, à trois sommets consécutifs, correspondent les nombres x, y, et z avec $y < 0$, alors l'opération suivante est permise : « remplacer le triplet (x, y, z) par $(x + y, -y, y + z)$ ».

Une telle opération est répétée tant qu'au moins un des cinq nombres est strictement négatif. Ce processus prendra-t-il nécessairement fin après un nombre fini d'opérations ?

Solutions

Solution de l'exercice 1 Les cases de l'échiquier sont coloriées en blanc et noir : quitte à échanger les couleurs, on peut supposer que les cases que l'on a découpées, en haut à gauche et en bas à droite, étaient blanches. Il reste donc 32 cases noires et 30 cases blanches à paver. Or, chaque domino pave exactement 1 case de chaque couleur. Il n'est donc pas possible de pavec nos 62 cases restantes avec des dominos.

Solution de l'exercice 2 Il est possible que le dernier entier obtenu soit égal à 1, par exemple en procédant comme suit. Tout d'abord, pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 1008$, on efface les deux entiers $2n$ et $2n + 1$, que l'on remplace par l'entier 1. Le tableau contient maintenant l'entier 1 écrit 1009 fois. Puis on regroupe les entiers 1 en 504 paires, que l'on efface pour écrire l'entier 0 à la place ; on a laissé de côté une seule occurrence de l'entier 1, que l'on n'a pas effacée. Enfin, 504 fois d'affilée, on efface cet entier 1 et l'un des entiers 0, et on réécrit 1 à la place : le dernier entier obtenu est bien 1.

Au contraire, il est impossible que le dernier entier obtenu soit 2. En effet, chaque opération ne change pas la parité de la somme des entiers écrits au tableau. Or, cette somme est initialement impaire, puisqu'on a réussi à la transformer en l'entier 1. On ne pourra donc jamais la transformer en une somme paire, que l'on aurait obtenue si le dernier entier avait été 2.

Solution de l'exercice 3 On associe un entier 0 ou 1 à chacun des arbres, de sorte que deux arbres voisins aient deux valeurs distinctes : ceci est bien possible puisque 6 est pair. Puis on associe à chaque oiseau la valeur de l'arbre sur lequel il se trouve, et on considère la parité de la somme des valeurs des oiseaux, somme que l'on note S.

Lorsqu'un oiseau vole d'un arbre à un voisin, sa valeur change de parité. Quand deux oiseaux changent d'arbre, la somme S garde donc sa parité inchangée. En particulier, initialement, on avait $S = 3$, donc S restera impaire. Or, si on avait nos six oiseaux sur le même arbre, S vaudrait 0 ou 6, donc serait devenue paire. Ceci est donc impossible.

De même, si on avait eu 2018 arbres, on aurait eu une somme initiale $S = 1009$, donc impaire, de sorte que les oiseaux n'auront jamais pu se retrouver tous sur le même arbre.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> À tout moment, si les entiers $n_1, \ldots, n_k$ sont écrits au tableau, on considère la somme $S = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k$. Alors, lors de chaque opération, la somme S ne change pas. En particulier, après 19 opérations, il restera un unique entier n tel que $n = S + 1 = (1 + 2 + \ldots + 20 - 20) + 1 = \frac{19 \times 20}{2} + 1 = 191$.

Si on écrit $a + b + ab$ au lieu de $a + b - 1$, la quantité intéressante à observer n'est plus S, mais $P = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$. En effet, lors de chaque opération, on divise P par $(a + 1)(b + 1)$ avant de le multiplier par $a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1)$, de sorte qeu P ne change pas. Par conséquent, après 19 opérations, il restera un unique entier n tel que $n = P - 1 = 2 \times 3 \times \cdots \times 21 - 1 = 21! - 1$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n qui ne soit pas un produit de nombres premiers. Sans perte de généralité, on suppose que n est le plus petit entier ayant cette propriété. Soit alors $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de n, avec $d_1 = 1$ et $d_k = n$:

— si $k = 1$ alors $n = 1$, et est bien le produit de zéro nombre premier, ce qui contredit la définition de n ;

— si $k = 2$ alors n est un nombre premier, et est le produit d'un seul nombre premier (lui-même), ce qui contredit aussi la définition de n ;

— si $k \geqslant 3$, alors d_2 et n/d_2 sont des entiers naturels non nuls strictement inférieurs à n, donc sont eux-mêmes des produits de nombres premiers, et n est donc aussi un tel produit, ce qui contredit sa définition.

Notre supposition était donc fausse.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Si E est fini, on peut dessiner son enveloppe convexe $\mathcal{E}$, et on considère un sommet P de $\mathcal{E}$. Alors P ne peut pas être le milieu de deux points de $\mathcal{E}$, ce qui est absurde : E est donc infini.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soit P un point dont la valeur, m, est minimale parmi les valeurs de tous les points de $\mathbb{Z}^2$. Alors les quatre voisins de P sont de valeurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \geqslant m$ telles que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 4m$, donc $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = m$. Une récurrence aisée montre alors que, s'il existe un chemin (formé d'arêtes entre points voisins de $\mathbb{Z}^2$) de longueur $k \geqslant 0$ entre P un point $Q \in \mathbb{Z}^2$, alors Q est aussi de valeur m. Par conséquent, tous les points ont bien la même valeur.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Tout d'abord, remarquons que E contient au moins trois points. Supposons alors que sur toute droite passant par deux points de E se trouve un troisième point de E. On considère des paires (P, Δ) ou Δ est une droite passant par deux points de E et P est un point de E tel que $P \notin \Delta$.

Parmi toutes ces paires, on en choisit une qui minimise la distance de P à Δ. Soit A, B, C trois points de $E \cap \Delta$, et soit H le projeté orthogonal de P sur Δ. On peut supposer que A, B et H sont alignés dans cet ordre. Alors on pose $\Delta' = (AP)$ et $P' = B$: alors

$$\text{distance}(P', \Delta') < \text{distance}(H, \Delta') \leqslant HP = \text{distance}(P, \Delta),$$

ce qui contretit la minimalité de la distance $\text{distance}(P, \Delta)$. Notre supposition initiale était donc fausse.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Considérons les deux cases de numéros 1 et n^2. Ces deux cases sont reliées par un chemin, formé d'une succession de cases donc chacune a un sommet commun

avec la suivante, de longueur au plus $n-1$. La somme des différences entre ces cases est de $n^2-1 \geqslant (n-1)(n+1)$, donc on a deux cases avec un sommet commun, disons A et B, dont la différence vaut au moins $n+1$.

Si A et B ont un côté commun, on a gagné. Sinon, soit C une case avec un côté commun à la fois avec A et avec B. Alors B diffère d'au moins $(n+1)/2$ soit avec A, soit avec B.

D'autre part, si n est grand, on peut aussi procéder comme suit. En posant $k \approx \lambda n$, avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, on retire quatre triangles rectangles isocèles de k cases de côté des quatre coins du carré. On a donc retiré $4(1+2+\ldots+k) = 2k(k+1)$ cases. Parmi les $n^2-2k(k+1)$ cases restantes, il en existe deux dont les valeurs diffèrent d'au moins $n^2-2k(k+1)-1$.

Ces deux cases sont reliées par un chemin, formé d'une succession de cases donc chacune a un côté commun avec la suivante, de longueur au plus $2n-2k-1$. Il y a donc deux cases qui partagent un côté et dont les valeurs diffèrent d'au moins

$$\frac{n^2-2k(k+1)-1}{2n-2k-1} \approx \frac{1-2\lambda^2}{2(1-\lambda)n}.$$

Pour $\lambda = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, on a $\dfrac{1-2\lambda^2}{2(1-\lambda)}n = (2-\sqrt{2})n \approx 0.5858n$, ce qui est mieux que $(n+1)/2 \approx n/2$.

Solution de l'exercice 10 Supposons que chaque ville reçoit la visite d'un maire, et que n est l'entier minimal ayant cette propriété. Alors $n \geqslant 1$. Soit A et B deux villes dont la distance est minimale. Le maire de A va en B, et réciproquement, de sorte que nul autre maire ne visite A ou B.

Par conséquent, si A et B font sécession, on aura quand même un pays à $2(n-1)+1$ villes, dont chaque maire visite la ville la plus proche, et où chaque ville reçoit la visite d'un maire. Ceci contredit la minimalité de n, ce qui montre que notre supposition était incorrecte.

Solution de l'exercice 11 Considérons un partage du parlement en deux commissions C_1 et C_2 qui minimise le nombre de paires de députés ennemis siégeant au sein de la même commission. Supposons alors qu'il existe un député, disons A, qui siège au sein d'une commission, disons C_1 en même temps que deux (voire trois) de ses ennemis.

Si on change A de commission, alors on supprime au moins deux paires de députés ennemis siégeant au sein de C_1, et on crée au plus une paire de députés ennemis siégeant au sein de C_2 : au total, le nombre de paires de députés ennemis siégeant au sein d'une même commission a strictement décrû. Ceci contredit notre hypothèse sur les commissions C_1 et C_2, ce qui montre que notre supposition était fausse, donc que le notre partage correspondait aux attentes de l'énoncé.

Solution de l'exercice 12 On commence par numéroter les sommets de 1 à 5, et on note x_i l'entier écrit sur le sommet n°i. Alors on remarque aisément que la somme $S_0 = \sum_{i=1}^5 x_i$ ne varie pas lors d'une opération, donc restera éternellement supérieure ou égale à 1. On s'intéresse donc à d'autres quantités, par exemple $S_1 = \sum_{i=1}^5 x_i x_{i+1}$ (en posant $x_6 = x_1$) ou $S_2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2$.

Supposons, sans perte de généralité, que l'on vient d'appliquer l'opération remplaçant le triplet (x_1, x_2, x_3) par $(x_1+x_2, -x_2, x_2+x_3)$, avec $x_2 \leqslant -1$. Alors S_1 devient une nouvelle quantité S_1' telle que

$$S_1' - S_1 = x_2(x_5 + x_4 - 2x_1 - 2x_3 - 2x_2),$$

et S_2 devient une nouvelle quantité S_2' telle que

$$S_2' - S_2 = 2x_2(x_1 + x_2 + x_3).$$

Par conséquent, la quantité $2S_1 + 3S_2$ devient une nouvelle quantité $2S_1' + 3S_2'$ telle que

$$(2S_1' + 3S_2') - (2S_1 + 3S_2) = 2x_2(x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1) = 2S_0x_2 \leqslant 2x_2 \leqslant -2.$$

En particulier, elle décroît d'au moins 2 à chaque opération, donc finira par devenir strictement négative si suffisamment d'opérations se succèdent.

Or, on observe également que

$$2S_1 + 3S_2 = \sum_{i=1}^{5} 3x_i^2 + 2x_ix_{i+1} = \sum_{i=1}^{5}(x_i + x_{i+1})^2 + x_i^2 \geqslant 0.$$

Par conséquent, on ne pourra pas enchaîner un nombre infini d'opérations successives.

3 jeudi 26 matin : Colin Davalo

L'objectif de ce cours est d'enseigner les techniques de base du dénombrement, et de les appliquer à des exercices d'olympiades. Il a été mention de la notion d'injection, surjection, bijection, des coefficients binomiaux, du binôme de Newton, du triangle de Pascal, de double comptage, et des nombres de Catalan.

Les résultats et notions qui ont été montrés durant le cours peuvent être retrouvés dans les cours de combinatoire énumérative d'Igor Kortchemski sur le site de la POFM.

Coefficients binomiaux

Exercice 1 On considère un rectangle de taille $m \times n$. Combien y a-t-il de chemins partant de la case en bas à gauche, jusqu'à la case en haut à droite, en ne faisant que des pas vers le haut ou vers la droite ?

Solution de l'exercice 1 Choisir un chemin ne faisant que des pas à droite ou vers le haut arrivant en haut à droite du rectangle $m \times n$ équivaut à choisir parmi les $m+n$ pas au total les n pas à effectuer vers le haut. Ainsi on a bien $\binom{m+n}{n}$ chemins possibles.

Une autre solution est la suivante : on écrit sur chaque case (a, b) du rectangle le nombre de chemins qui partent du coin en bas à droite et qui finissent sur cette case, en ne faisant que des pas en haut ou à droite. L'entier écrit sur la case (a, b) est la somme des entiers écrits sur les cases $(a-1, b)$ et $(a, b-1)$, et l'entier 1 est écrit sur la case $(0, 0)$. Ainsi, on montre par récurrence double sur a puis sur b que le nombre écrit sur la case (a, b) l'entier $\binom{a+b}{b}$. Remarquons que l'on observe ici le triangle de Pascal, tourné, dont le sommet est le coin en bas à droite du rectangle.

Exercice 2 Montrer les identités suivantes pour tout entiers positifs n et k :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Solution de l'exercice 2 On considère un groupe de $n+1$ personnes : n enfants et un professeur. Choisir un sous ensemble de $k+1$ personnes (ce qui fait $\binom{n+1}{k+1}$ choix) équivaut à choisir un groupe de $k+1$ élèves (ce qui fait $\binom{n}{k+1}$ choix), ou de choisir k élèves avec le professeur (ce qui fait $\binom{n}{k}$ choix). Ainsi, on a bien $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

La deuxième formule se déduit de l'identité $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ par un simple calcul. On peut également la démontrer de façon combinatoire : On considère le nombre de façons de choisir une équipe de k personnes et un chef (dans l'équipe) parmi n personnes. Ainsi, on peut choisir le chef, puis choisir le reste de l'équipe parmi les personnes restantes(ce qui fait $n\binom{n-1}{k-1}$ choix). On peut cependant également choisir l'équipe, et choisir parmi le sk membres de l'équipe le capitaine (ce qui fait $k\binom{n}{k}$ choix). On compte bien la même quantité dans les deux cas, doù le résultat.

Exercice 3 Montrer les identités suivantes pour tout entiers $n > 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = 3^n$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Les deux premières identités sont des conséquences de la formule du binôme de Newton : pour tout x, y réels on a $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}\binom{n}{k}$. La première égalité est le cas particulier $x = y = 1$. On peut également la montrer de façon combinatoire : choisir un sous ensemble de $\{1\ldots,n\}$ équivaut à choisir un entier $0 \leq k \leq n$, puis une partie de $\{1\ldots,n\}$ à k éléments. Cependant on peut également choisir pour chaque élément i de $\{1,\ldots,n\}$ si on choisit de prendre i dans le sous ensemble (2 choix), et puisqu'on fait un tel choix pour tous les n entiers, on a 2^n choix.

On a vu précédemment que $\sum_{k=0,k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0,k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Or en appliquant la formule de Newton avec $x = 1$, $y = -1$, on obtient $\sum_{k=0,k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0,k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ (c'est le seul endroit dans l'exercice où on utilise que $n \neq 0$). Ainsi, on a bien $\sum_{k=0,k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0,k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$. On peut montrer également montrer qu'il y a autant de parties paires que impaires. En effet soit f la fonction qui a une partie A associe la partie A', qui contient les éléments de A différents de 1, et qui contient 1 si et seulement si A ne contient pas 1. On vérifie que f est une bijection entre l'ensemble des parties de cardinal pair et les parties de cardinal impair, donc il y en a autant.

La troisième identité revient à compter le nombre de façon de choisir un chef et un ensemble de personnes parmi n personnes de deux façons, comme fait précédemment.

La dernière identité revient à choisir un sous ensemble A d'un sous ensemble B d'un ensemble E à n éléments. Ainsi cela revient à se donner $A, B \setminus A$ et $E \setminus B$, trois sous ensembles formant une partition de E. Ainsi, on a trois choix pour chaque élément de E : on a 3^n façons de choisir A et B.

Exercice 4 Comptez de deux manières différentes le nombre de façon de choisir un chef, un sous-chef, et une équipe parmi n personnes.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Comme précédemment on a deux possibilités : choisir le chef puis le sous-chef en premier, ou choisir l'équipe contenant le chef et le sous chef en premier. On

obtient l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Exercice 5 Donner deux preuves de l'identité de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{d}\binom{n}{k}\binom{m}{d-k} = \binom{n+m}{d}$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> La première preuve est combinatoire : On compte le nombre de façons de choisir d personnes parmi un groupe de n personnes et un groupe de m personnes. Cela équivaut à choisir un entier k, puis un groupe de k personnes parmi les n premières, puis de choisir $d-k$ personnes parmi les m autres.

On peut également le montrer de façon plus algébrique. Considérons le coefficient devant x^d que l'on obtient en développant $(1+x)^{m+n}$. Par le binôme de Newton c'est $\binom{n+m}{d}$, mais également celui obtenu en développant $(1+x)^n(1+y)^m = (\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k)(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k)$, qui vaut $\sum_{k=0}^{d}\binom{n}{k}\binom{m}{d-k}$.

Exercice 6 Montrer que pour tout entiers n, k, r, s on a :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r}\binom{r}{s} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{r-s}\binom{n-r}{k-r}$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Les deux membres de l'égalité comptent de deux manières différentes le nombre de manières de choisir A inclus dans B inclus dans C un ensemble E de cardinal n tels que A est de cardinal s, B de cardinal r, et C de cardinal k. En effet il est équivalent de choisir A dans E, $B \setminus A$ dans $E \setminus A$ et $C \setminus B$ dans $E \setminus B$.

Dénombrements

Exercice 7 Combien y a-t-il de façons de placer n billes identiques dans m sacs numérotés de 1 à m, de façon à ce qu'aucun des sacs ne soit vide ?

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On dessine les n billes en ligne. Les placer dans m sacs numérotés équivaut à placer $m-1$ barres séparant les m sacs, avec $n-1$ emplacements disponibles, sans mettre deux barres sur le même emplacement. Ainsi on a $\binom{n-1}{m-1}$ possibilités.

Remarquons que si on n'impose pas que les sacs soient vides, cela revient eu même problème si on ajoute une bille par sac. Ainsi le nombre de façons de placer n billes identiques dans m sacs numérotés de 1 à m qui peuvent être vides est $\binom{n+m-1}{m-1}$.

Exercice 8 Je place n paires de chaussettes (donc $2n$ chaussettes) en ligne de façons à ce que la chaussette gauche soit plus à droite que la chaussette droite pour chaque paire. Combien de manières différentes ai-je je placer mes chaussettes ainsi ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Si on place les $2n$ chaussettes en ligne sans se soucier de la condition (la chaussette gauche d'une paire est toujours à droite de l'autre chaussette de la paire), on

obtient une permutation des $2n$ chaussettes, donc on a $(2n)!$ possibilités. Une fois que l'on a fait cela on peut "corriger" la premutation : il suffit d'échanger éventuellement les positions de chaussettes gauche et droite d'une même paire pour obtenir une configuration satisfaisant la condition.

Cependant, en raisonnant ainsi, on a compté plusieurs fois la même configuration : en effet 2^n permutations donnent après correction la même configuration, car on a n paires qui peuvent avoir été échangées ou non. Ainsi, le nombre de telles configurations est $\frac{(2n)!}{2^n}$.

Exercice 9 Combien y a t-il d'anagrammes du mot "$ABRACADABRA$" ? Et pour un mot quelconque ?

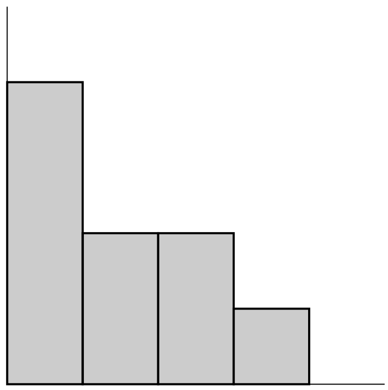
<u>Solution de l'exercice 9</u> On dispose de 11! permutations des 11 lettres de ce mot (11 ! façons de les réordonner). Cependant certaines de ces permutations donnent le même anagramme. En effet, on peut pour chaque anagramme permuter les 5 "A", les 2"B", et les 2 "R". Ainsi on compte $5! \times 2! \times 2!$ fois le même anagramme. Ainsi on a : $\frac{11!}{5!2!2!} = 83160$ différends anagrammes possibles.

Exercice 10 On organise un tournois de tennis avec 16 joueurs : chaque joueur rencontre exactement un autre joueur. De combien de façon peut-on répartir les $2n$ joueurs en paires (non-ordonnées) ?

<u>Solution de l'exercice 10</u> On mets les joueurs en ligne, puis on choisit des mettre les joueurs $2k+1$ et $2k+2$ ensemble pour $0 \leq k \leq n$. Cependant on a compté $2^n n!$ fois chaque configuration : en effet pour chaque configuration on peut permuter les n paires, et échanger les 2 éléments de chaque paire. Ainsi le résultat est $\frac{(2n)!}{n!2^n} = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3) \times (2n-1)$

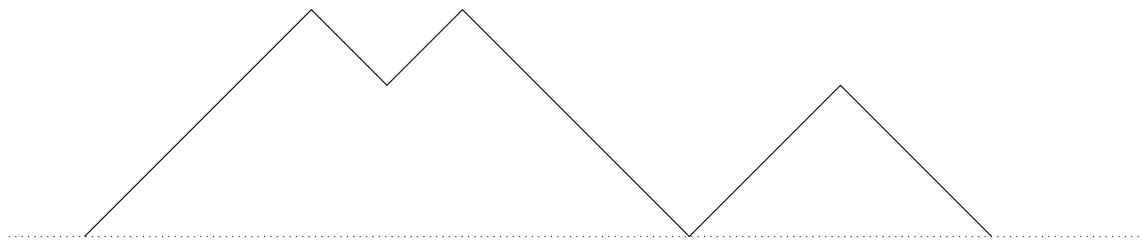
Exercice 11 Une partition de n est un k-uplet d'éléments $(a_1, \ldots, a_k)$ avec $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$ et $a_1 + \cdots + a_k = n$ pour un certain entier k, qui est dit la taille de la partition. Montrer qu'il y a autant de partitions de taille au plus k que de partitions dont tous les éléments sont plus petits que k.

<u>Solution de l'exercice 11</u> Les partitions des entiers disposent d'une représentation qui s'appelle *Diagramme de Ferrers*. La partition $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ de n (i.e $a_1 + \ldots + a_k = n$), est représentée par des rectangles de hauteurs a_i, de largeur 1 placés par ordre décroissants sur l'axe des abscisses donc celui de hauteur a_k, puis a_{k-1}, ect... (voir l'illustration pour $(1, 2, 2, 4)$ et $n = 9$).



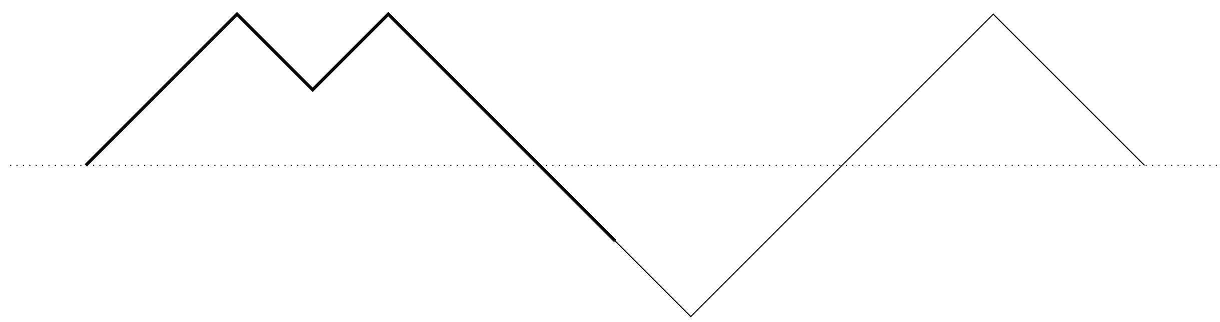
Si on effectue la symétrie dont l'axe la première bissectrice, on remarque que l'on obtient une représentation de n : dans cet exemple, on obtient la partition $(1, 1, 3, 4)$. On remarque que si une partition de n est de taille au plus k, la partition obtenue par symétrie est une partition dont les éléments sont plus petits que k, et réciproquement. De plus cette fontion qui a une partition associe la partition avec une représentation symétrique est bijective, on a autant de partitions de taille au plus k que de partitions dont tous les éléments sont plus petits que k.

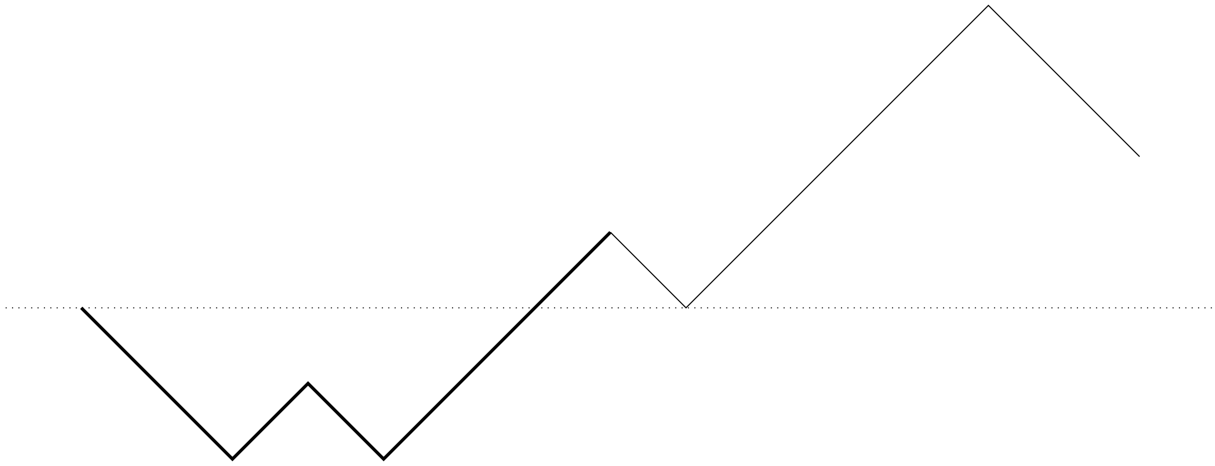
Exercice 12 Un *chemin de Dyck* de longueur $2n$ est un chemin partant du point $(0,0)$ du plan, et finissant au point $(2n,0)$, en ne faisant des pas vers le nord-ouest et vers le sud-ouest (avançant de 1 vers la droite et de 1 verticalement) sans jamais passer en dessous de l'axe des abscisses, comme sur la figure suivante. Combien y a-t-il de chemins de Dyck de taille $2n$?



Solution de l'exercice 12 Avant de commencer la preuve, remarquons que l'on peut obtenir une relation de récurrence sur le nombre C_n de chemin de Dyck de longueur $2n$. En effet, considérons un chemin de Dyck de longueur n. Alors soit $0 \leq k < n$ le plus grand entier tel que le chemin passe sur l'axe des abscisses à l'étape $2k$ (par un argument de parité si le chemin touche l'axe des abscisses c'est à une abscisse paire). Pour un k donné, si on veut construire un chemin de Dick de longueur $2n$, il faut et il suffit d'en construire un de longueur $2k$, puis de monter, puis de construire un mot de Dick de taille $2(n-k-1)$ qui ne touchera pas l'axe des abscisses, puis de redescendre de un pas (sur l'image il faut remplacer les traits en pointillés par des chemins de Dyck). Ainsi, on montrez que $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$.

Avec cette relation on pourrait vérifier par récurrence le résultat. Mais nous allons chercher une méthode plus directe pour obtenir C_n. On considère la fonction f suivante : considérons un chemin qui n'est pas de Dyck mais qui finit en $(2n,0)$. Soit $2k+1$ la plus petite abscisse pour laquelle le chemin est en dessous de l'axe des abscisses. La fonction f lui associe le chemin symétrique par rapport à l'axe des abscisses rentre les abscisses 0 et $2k+1$, puis le même chemin translaté de 2 vers le haut (comme illustré ci-dessous pour $n = 14$ sur un chemin particulier).





On vérifie que cette fonction est bien une bijection entre les chemins finissant en $(2n, 0)$ n'étant pas de Dyck et les chemins finissant en $(2n, 2)$, en construisant l'inverse de f. Ainsi on a $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Ce sont les nombres de Catalan, qui ont de nombreuses interprétations combinatoires !

Exercices plus difficiles

Exercice 13 *(BxMO 2009)* Soit $n \geq 1$ un entier. Dans la ville X il y a n filles et n garçons, et chaque fille connaît chaque garçon. Dans la ville Y il y a n filles, $g_1, g_2, \ldots, g_n$, et $2n-1$ garçons $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}$. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$ la fille g_i connaît les garçons $b_1, b_2, ..., b_{2i-1}$ et pas d'autres garçons. Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq n$. Dans chacune des villes aura lieu une fête où r filles de la ville et r garçons de la même ville sont supposés danser ensemble en formant r couples. Cependant, chaque fille veut seulement danser avec un garçon qu'elle connaît. On note $X(r)$ le nombre de façons de choisir r couples de danseurs dans la ville X ; on note $Y(r)$ le nombre de façons de choisir r couples de danseurs dans la ville Y. Montrer que $X(r) = Y(r)$ pour $r = 1, 2, \ldots, n$.

Solution de l'exercice 13 Pour cet exercice nous allons raisonner par récurrence. Soit n un entier, on note $X_n^{(k)}$ le nombre de façons de choisir k couples dans la ville X, et $Y_n^{(k)}$ dans la ville Y. Dans la ville X, choisir k couples avec n personnes revient à choisir k filles, k garçons, et une permutation des filles (une façon de faire des paires entre les garçons et filles choisis). Ainsi on a $X_n^{(k)} = \binom{n}{k}^2 k!$.

Dans la ville Y on va seulement chercher une relation de récurrence. Soient n et k deux entiers, choisir un couple dans la ville Y revient à choisir k couples sans utiliser g_n, ou de choisir $k-1$ couples, puis de choisir une cavalière à g_n parmi les $2n+1-k$ restantes. Ainsi on a $Y_n^{(k)} = Y_{n-1}^{(k)} + (2n-2-k)Y_{n-1}^{(k-1)}$.

On montre par récurrence sur n que l'on a bien $X_n^{(k)} = Y_n^{(k)}$ pour tout k, en effet pour $n = 1$ on obtient 1 dans les deux villes si $k = 1$ et 0 sinon. De plus on a :

$$X_n^{(k)} = \binom{n}{k}^2 k! = \binom{n-1}{k}^2 k! + \binom{n-1}{k-1}^2 k! + 2\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k} k!$$

$$X_n^{(k)} = X_{n-1}^{(k)} + \binom{n-1}{k-1}^2 \left(k! + 2k!\frac{n-k-1}{k}\right) = X_{n-1}^{(k)} + = X_{n-1}^{(k-1)}(2n-2-k)$$

En utilisant plusieurs identités sur les coefficients binomiaux de l'exercice 2. On obtient la même relation de récurrence, donc $X_n^{(k)} = Y_n^{(k)}$ pour tous entier n et k.

Exercice 14

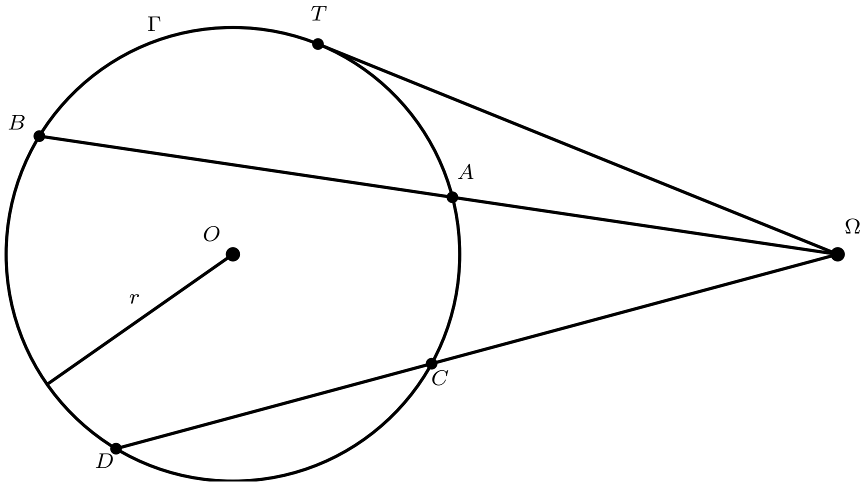
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Cette identités se montre encore par double comptage. On considère le nombre de façons de colorier n cases parmi $2n+1$ cases. On suppose que nos cases sont regroupées par deux, sur des dominos, sauf la dernière. Alors choisir n cases à colorer revient à choisir combien de dominos seront à moitié colorés (ce qui correspond à l'entier k, donc on a $\binom{n}{k}$ choix), à choisir pour chacun de ces dominos laquelle des deux cases est coloriée (donc 2^k choix), puis à choisir les $\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ dominos restants à colorer entièrement ($\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$ choix). Enfin, il faut, selon la parité de k et n éventuellement colorer le dernier élément, mais il ne nous reste qu'une façon de le faire. Ainsi on en déduit la formule !

2 L'après-midi : géométrie

1 mardi 24 après-midi : Linda Gutsche

Théorème 36. Puissance d'un point par rapport à un cercle :
$P_\Gamma(\Omega) = \Omega A \times \Omega B = \Omega C \times \Omega D = \Omega T^2 = \Omega O^2 - r^2$.



Démonstration. Exercice n°1 □

Exercice 1 Prouver le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle : on définira $P_\Gamma(\Omega)$ comme étant le produit $\Omega A \times \Omega B$, et il s'agit donc de prouver les trois autres égalités.

Exercice 2 Théorème des axes radicaux :

On admet que me lieu géométrique des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles est une droite.

Trouver comment construire l'axe radical de deux cercles : par quels points remarquable passe-t-il ? Quel propriété a-t-il par rapport à des objets déjà connus ? Quand y a-t-il des points qui ont même puissance par rapport à trois cercles ? Comment trouver ces points ?

Exercice 3 Soit ABC un triangle aigu. La hauteur issue de B dans ABC intersecte le cercle de diamètre (AC) en K et L, et la hauteur issue de C dans ABC intersecte le cercle de diamètre (AB) en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Exercice 4 Soit ABC un triangle, et I le centre de son cercle inscrit. Soit D, L, et M les points de tangence du cercle inscrit avec (BC), (AC), (AB). Soit P l'intersection de (ML) et (BC). Montrer que $(AD) \perp (IP)$.

Exercice 5 Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$. Les points D et E sont respectivement les pieds des hauteurs issues de B et C. On note X et Y les milieux respectifs de $[EM]$ et $[DM]$. (XY) coupe la parallèle à (BC) passant par A en T. Montrer que $TA = TM$.

Exercice 6 (USAMO 1998) Soient C_1 et C_2 deux cercles concentriques, C_2 à l'intérieur de C_1. Soit A un point de C_1 et B un point de C_2 tels que (AB) est tangente à C_2. Soit C le second point d'intersection de (AB) avec C_1, et soit D le milieu de $[AB]$. Une droite passant par A coupe C_2 en E et F de sorte que les médiatrices de $[DE]$ et $[CF]$ se coupent en un point M de (AB). Déterminer le ratio AM/MC.

Solution de l'exercice 1

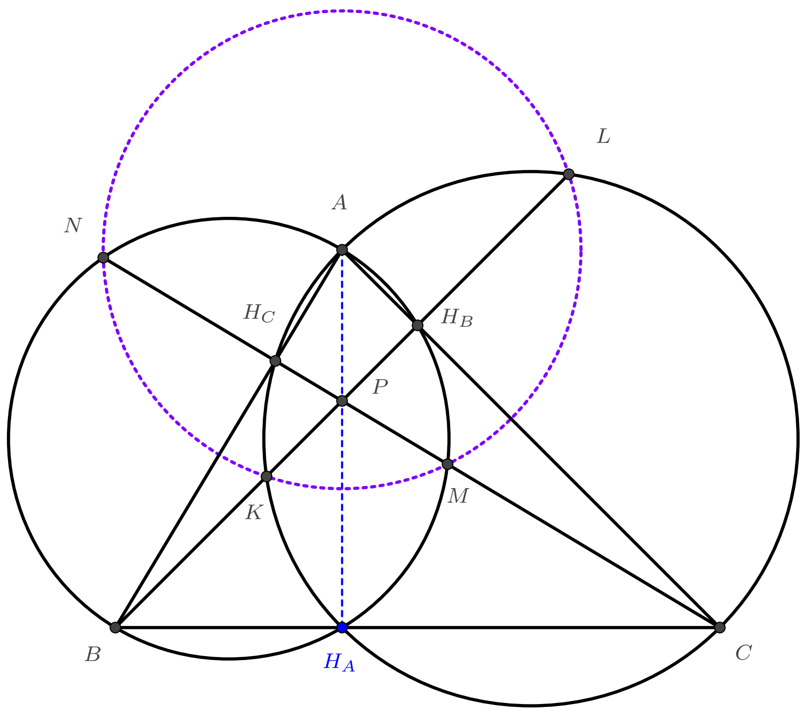
1. Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{\Omega AC} = \widehat{\Omega DB}$. Or, $\widehat{A\Omega C} = \widehat{D\Omega B}$. Donc $A\Omega C \sim D\Omega B$, puis $\frac{\Omega A}{\Omega D} = \frac{\Omega C}{\Omega B}$, c'est-à-dire $\Omega A \times \Omega B = \Omega C \times \Omega D$.

2. On a montré que, quelque soit la droite qui passe par Ω et qui coupe Γ en A_1 et B_1, on a $P_\Gamma(\Omega) = \Omega A_1 \times \Omega B_1$. En particulier, on a donc $P_\Gamma(\Omega) = \Omega T \times \Omega T = \Omega T^2$.

3. Par tangente, on a $\widehat{\Omega TO} = 90°$. Or, $OT = r$. On a donc $\Omega T^2 = \Omega O^2 - OT^2 = \Omega O^2 - r^2$.

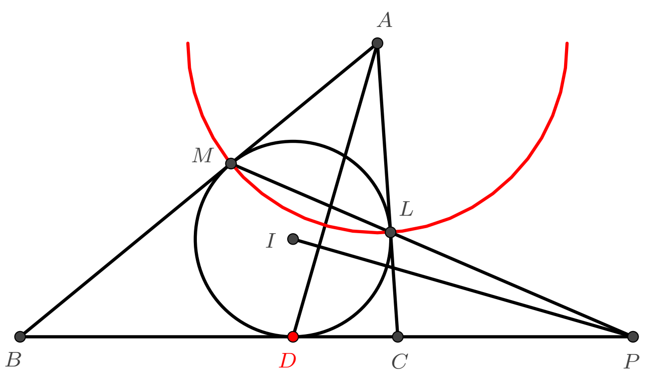
Solution de l'exercice 2 Voici quelques éléments de réponse. S'il n'y a pas un cercle à l'intérieur de l'autre, l'axe radical passe par le milieu des tangentes communes. Si les cercles s'intersectent, l'axe radical passe par les deux points d'intersections. L'axe radical est perpendiculaire à la droite joignant les centre des deux cercles.
Le lieu géométrique des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles est soit un point, soit une droite, soit n'existe pas (axes radicaux concourants, confondus ou parallèles). On prouve que si deux axes radicaux s'intersectent en un point alors le troisième passe également par ce point avec le même argument que pour l'intersection des trois médiatrices dans un triangle.

Solution de l'exercice 3



Soit H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans ABC. Soit C_C le cercle de diamètre $[AB]$ et C_B le cercle de diamètre $[AC]$ Soit P l'orthocentre de ABC. Comme $\widehat{BH_AA}$ et $\widehat{CH_AA}$ sont des angles droits, C_C et C_B passent par H_A. P est donc sur l'axe radical de ces deux cercles. Donc $P_{C_C}(P) = P_{C_B}(P)$. Donc $PK \times PL = PM \times PN$. Donc K, L, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Comme M et L sont les points de tangence de (AB) et (AC) avec le cercle inscrit, on a $AM = AL$. Donc il existe un cercle de centre A passant par M et L. Soit Γ ce cercle. Par puissance de P par rapport au cercle inscrit, $PD = PL \times PM$. Donc P a même puissance par rapport au cercle Γ et au cercle étant le point D. Donc P est sur l'axe radical de D et Γ.

La puissance de I par rapport à D est D^2. Or $(IL) \perp (AL)$ car (AL) tangente au cercle inscrit. Donc (IL) est tangente à Γ. Donc la puissance de I par rapport à Γ est IL^2. Mais I est centre d'un cercle passant par D et L. Donc $ID^2 = IL^2$. Donc I a même puissance par rapport à D et Γ. Donc I est sur l'axe radical de D et Γ.

Donc (IP) est l'axe radical de D et de Γ. Or l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite reliant les deux centre des cercles. Donc $(AD) \perp (IP)$.

Solution de l'exercice 5 (N'a pas été fait en cours, mais voici une esquisse de la solution)
La droite (DE) étant antiparallèle à (BC) par rapport aux droites (AB) et (AC), elle est également antiparallèle à (TA) par rapport à ces mêmes droites. Ainsi, en notant Γ le cercle circonscrit à ADE, la droite (TA) est tangente à Γ (se prouve également par chasse aux angles).
Le cercle de diamètre $[BC]$ admet M pour centre et passe par E et D. Une chasse ayux angles montre alors que (MD) et (ME) sont tangentes à Γ.
Les points X et Y ont alors même puissance par rapport au cercle Γ et au cercle réduit au point M (le cercle de centre M et de rayon nul). Le point T appartient donc aussi à l'axe radical de ces cercles, ce qui permet d'écrire $TA^2 = TM^2$.
Donc on a bien $TA = TM$.

Solution de l'exercice 6 (N'a pas été fait en cours non plus)
Idée : En utilisant la puissance d'un point par rapport à un cercle, montrer que D,E,F,C sont cocycliques. Montrer que M est le centre du cercle correspondant.

2 mercredi 25 après-midi : Guillaume Conchon--Kerjan

Cours

On se réfère au poly sur les transformations de Thomas Budzinski, qui porte aussi sur les rotations et les similitudes.

Exercices

Exercice 1
Soit PQR un triangle acutangle. Construire un carré ayant un sommet sur $[PQ]$, un sommet sur $[QR]$ et deux sommets sur $[PR]$.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un trapèze avec $(AB)//(CD)$, M le milieu de $[AB]$, P un point de (BC). On nomme X l'intersection de (PD) et (AB), Q celle de (PM) et (AC), et Y celle de (DQ) et (AB). Montrer que M est le milieu de $[XY]$.

Exercice 3
Soit Γ et Γ' deux cercles tangents, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit T le point de tangence des deux cercles, B un autre point de Γ', et M, N les points d'intersection de la tangente à Γ' en B avec Γ. Montrer que $\widehat{BTM} = \widehat{BTN}$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, D le point de contact du cercle inscrit avec $[BC]$, J le centre du cercle exinscrit en A et M le milieu de la hauteur issue de A. Montrer que D, M, J sont alignés.

Exercice 5 (Théorème de Monge-d'Alembert)
Soit Γ_1, Γ_2, Γ_3 trois cercles de rayons différents et dont les disques correspondants sont disjoints. Soit X_1 le point d'intersection des tangentes extérieures communes à Γ_2 et Γ_3. On définit de même X_2 et X_3. Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont alignés.

Exercice 6
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, et Γ_A un cercle à l'intérieur de celui-ci, tangent à $(AB), (AC)$ et à Γ, en un point A'. On définit de même B' et C'. Montrer que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

Exercice 7
Soit (d_1), (d_2) et (d_3) trois droites parallèles, comment construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune d'entre elles ?

Exercice 8
Soit ABC un triangle équilatéral, M un point de son cercle circonscrit sur l'arc (BC) ne contenant pas A. Montrer que $MB + MC = MA$.

Exercice 9
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, E, F, G, H des points tels que ABE et CDG soient équilatéraux et tournés vers l'extérieur de $ABCD$, et BCF et DAH équilatéraux vers l'intérieur. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 10 (Point de Fermat)
Soit ABC un triangle dont les angles sont inférieurs à 120^o degrés. Montrer qu'il existe un unique point F à l'intérieur de ABC tel que $\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^o$. Montrer alors que pour tout X à l'intérieur de ABC, $AX + BX + CX \geq AF + BF + CF$.

Exercice 11 (Théorème de Napoléon)
Soit ABC un triangle, A', B' et C' tels que ABC', $AB'C$ et $A'BC$ soient équilatéraux et extérieurs à ABC. Soit A_1, B_1, C_1 les centres de ces trois triangles, montrer que $A_1B_1C_1$ est équilatéral.

Corrigé succinct

Solution de l'exercice 1 Les deux droites parallèles donnent envie d'en envoyer une sur l'autre par des homothéties. Leurs centres doivent idéalement se trouver sur plusieurs sécantes à ces deux parallèles. P et Q sont donc des bons candidats. On considère ainsi h_P l'homothétie de centre P envoyant (AB) sur (CD) et h_Q de centre Q envoyant (CD) sur (AB). Si h est la composée de h_P puis h_Q, on voit que h a pour centre M (car $h(M) = M$) et pour rapport -1 car B est envoyé sur A. Elle envoie X sur Y, d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 2 On considère h l'homothétie positive de centre T qui envoie Γ' sur Γ, elle envoie la tangente en B sur une parallèle, tangente à Γ. On introduit B', M', N' les images de B, M, N par h. Une chasse aux angles (angle inscrit, angle tangent, angles alternes-internes) permet de conclure.

Solution de l'exercice 3 A est intersection des tangentes extérieures au cercle inscrit et au cercle exinscrit en A, donc centre d'une homothétie envoyant D sur D', le point "en bas" du cercle exinscrit. Donc A, D, D' alignés, donc il existe une unique homothétie de centre D envoyant A sur D'. Elle envoie (AM) sur une droite parallèle, donc $(D'J)$. Si H pied de la hauteur issue de A et H' point de contact du cercle exinscrit et (BC), elle envoie H sur H' (car (BC) est envoyée sur elle-même). Donc le milieu de $[AH]$ est envoyé sur celui de $[D'H]$, soit M sur J. Donc D, M, J alignés.

Solution de l'exercice 4 X_1 centre de l'homothétie positive envoyant Γ_2 sur Γ_3, X_2 de celle envoyant Γ_3 sur Γ_1. Leur composée est positive et envoie Γ_2 sur Γ_1, donc son centre est l'intersection des tangentes extérieures, soit... X_3. Le centre de la composée est aligné avec les centres des deux homothéties que l'on compose, d'où le résultat. Ce théorème est vrai en remplaçant DEUX paires de tangentes extérieures par les tangentes intérieures (pour des questions de signe, on aura deux homothéties négatives dont la composition en donne une positive).

Solution de l'exercice 5 On introduit ω le cercle inscrit, et X le centre de l'homothétie positive envoyant ω sur Γ. A est le centre de celle envoyant. En raisonnant comme dans l'exercice précédent, $X \in (AA')$. De même, $X \in (BB')$ et $X \in (CC')$, d'où la conclusion.

3 jeudi 26 après-midi : Ilyas Lebleu

Ce cours est dédié à l'étude du cercle d'Euler.

Définition et construction du cercle d'Euler

L'objectif de cette partie est de construire pas à pas un cercle aux propriétés remarquables : le cercle d'Euler d'un triangle. Ce cercle permettra de mettre en évidence de nombreuses relations entre de multiples points remarquables du triangle, que nous allons mentionner ici. Soit ABC un triangle. On note :

— H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C, et H l'orthocentre du triangle ;

— I_A, I_B, I_C les milieux des côtés BC, CA et AB, G le centre de gravité de ABC, et O le centre du cercle circonscrit à ABC ;

— J_A, J_B, J_C les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$;

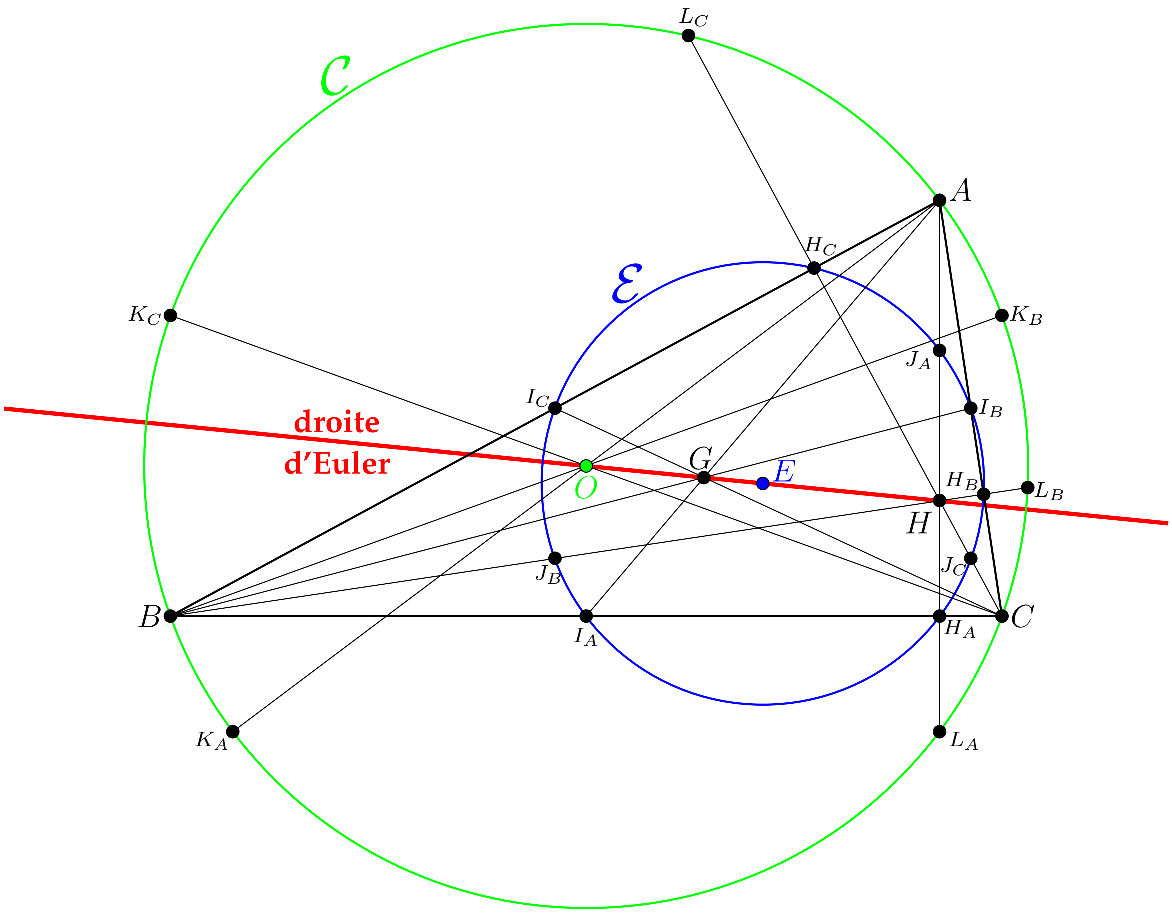
— K_A, K_B, K_C les symétriques de A, B et C par rapport à O ;

— L_A, L_B, L_C les symétriques de H par rapport aux côtés BC, CA et AB ;

— E le milieu du segment $[OH]$;

— C le cercle circonscrit à ABC, et $\mathcal{E}$ le cercle circonscrit à $I_AI_BI_C$.

Le cercle $\mathcal{E}$ n'est autre que le fameux cercle d'Euler.



Exercice 1 Montrer que l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ envoie le cercle C sur $\mathcal{E}$.

Exercice 2 Montrer que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

Exercice 3 Montrer que E est le centre du cercle $\mathcal{E}$.

Exercice 4 Montrer que le milieu I_A de BC est également le milieu du segment $[K_A H]$.

Exercice 5 Montrer que K_A et L_A appartiennent au cercle C.

Exercice 6 Montrer que l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ envoie également le cercle C sur le cercle $\mathcal{E}$.

Exercice 7 Montrer que J_A et H_A appartiennent au cercle $\mathcal{E}$.

On a donc montré que :

— les points A, B, C, K_A, K_B, K_C, L_A, L_B, L_C appartiennent tous au cercle circonscrit C ;

— les points I_A, I_B, I_C, H_A, H_B, H_C, J_A, J_B, J_C appartiennent tous au cercle d'Euler $\mathcal{E}$;

— les points O, G, E et H appartiennent tous à la droite (OH), que l'on appellera dorénavant droite d'Euler du triangle ABC.

Utilisation du cercle d'Euler

Exercice 8 Démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, puis que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 9 Soit ABC un triangle acutangle, C son cercle circonscrit et E son cercle d'Euler. Montrer que les cercles C et E n'ont aucun point d'intersection.

Exercice 10 Soit ABC et XYZ deux triangles acutangles, tels que les points A, B, C, X, Y, Z soient cocycliques. On note M_{BC}, M_{CA}, M_{AB}, M_{YZ}, M_{ZX}, M_{XY} les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, $[YZ]$, $[ZX]$ et $[XY]$. On suppose alors que les points M_{BC}, M_{CA}, M_{AB} et M_{YZ} appartiennent à un même cercle $\mathcal{E}$. Montrer que M_{ZX} appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si M_{XY} appartient à $\mathcal{E}$.

Exercice 11 Soit ABC un triangle non dégénéré (c'est-à-dire que A, B et C sont distincts) et soit H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C. On appelle triangle orthique de ABC le triangle $H_AH_BH_C$, et on note h la transformation qui, à chaque triangle non rectangle, associe son triangle orthique. Montrer qu'il existe un entier n tel que le triangle $h_n(ABC)$ sera soit rectangle, soit de périmètre strictement inférieur à celui de ABC, où h_n désigne l'itérée n-ième de la transformation h.

Exercice 12 Soit ABC un triangle d'orthocentre H, et soient X_A, X_B et X_C les centres des cercles circonscrits aux triangles HBC, HAC et HAB. Démontrer que les triangles ABC et $X_AX_BX_C$ sont semblables, et ont le même cercle d'Euler.

Exercice 13 Soit ABC un triangle, et δ le symétrique de sa droite d'Euler par rapport à BC. Démontrer que le triangle EAA' est isocèle, où E est le centre du cercle d'Euler et A' est le projeté orthogonal de A sur δ.

Exercice 14 Soit ABC un triangle de cercle circonscrit O, et P un point quelconque hors des côtés du triangle. D, E, F sont les centres des cercles d'Euler des triangles PBC, PCA, PAB, et X, Y, Z ceux de DBC, ECA, FAB. Démontrer que la perpendiculaire à BC passant par X, celle à AC passant par Y et celle à AB passant par Z sont concourantes avec la droite OP.

V. Dernier jour : test final

1 Énoncés

1 Débutants

Exercice 1 Sur la table se trouvent deux tas de pièces : l'un contient une pièce et l'autre aucune. On dispose des opérations suivantes :

(i) Enlever une pièce d'un tas et ajouter 3 pièces sur l'autre tas ;

(ii) Enlever 4 pièces d'un tas.

Montrer qu'il n'est pas possible de vider les deux tas.

Exercice 2 Soit ABC un triangle. On note Γ son cercle circonscrit et H son orthocentre. On note M_A, M_B et M_C les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

$a)$ Montrer que les symétriques respectifs de H par rapport à (BC), (CA), (AB) appartiennent à Γ.

$b)$ Montrer que les symétriques respectifs de H par rapport à M_A, M_B, M_C appartiennent à Γ.

Exercice 3 On dispose d'un triangle équilatéral de côté 1 et de 5 points à l'intérieur de ce triangle (*les points peuvent être sur le triangle*). Montrer qu'il existe deux points à distance d'au plus $\frac{1}{2}$. Aurait-on le même résultat avec une distance d'au plus 0,49 ?

Exercice 4 Dans un parallélogramme $ABCD$, on prend un point M sur la diagonale (AC). De M, on trace (ME) perpendiculaire à (AB) et (MF) perpendiculaire à (AD).

Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

2 Avancés

Exercice 1 Soit ABC un triangle isocèle en A et ω un cercle tangent à (AC) en C. On note K le centre de ω et H le second point d'intersection de (BC) et de ω. Montrer que (HK) est perpendiculaire à (AB).

Exercice 2 Soit m et n deux entiers naturels non nuls :

(a) si $m \leqslant n$, combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$ vers l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$?

(b) dans le cas général, combien y a-t-il de fonctions croissantes de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$ vers l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Exercice 3 Soient ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit, D le point de tangence du cercle inscrit avec $[BC]$, J le centre du cercle A-exinscrit, E le pied de la hauteur issue de A et K le projeté orthogonal de I sur cette hauteur.

Montrer que (DK) et (EJ) sont parallèles.

Exercice 4 Trois fourmis se promènent dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$. Elles se trouvent initialement sur les points de coordonnées respectives $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Puis, pendant chaque minute, l'une des fourmis se déplace selon un axe parallèle à la droite formée par ses deux consœurs (*attention : elle peut très bien s'arrêter en un point de coordonnées non entières*). Est-il possible que, au bout d'un certain temps, les trois fourmis occupent les points de coordonnées respectives $(0, -1)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$?

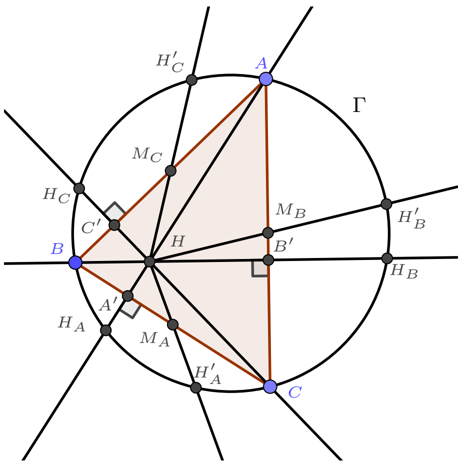
2 Corrigés

1 Débutants

Solution de l'exercice 1 Au départ, la somme du nombre de pièces dans chaque tas est impaire. L'opération (i) enlève une pièce dans un tas et en ajoute 3 dans l'autre : cette somme augmente donc de 2 et ne change pas de parité. L'opération (ii) fait diminuer la somme de 4, ne modifiant toujours pas la parité.

Il n'est donc pas possible d'obtenir une somme paire de pièces.

Solution de l'exercice 2



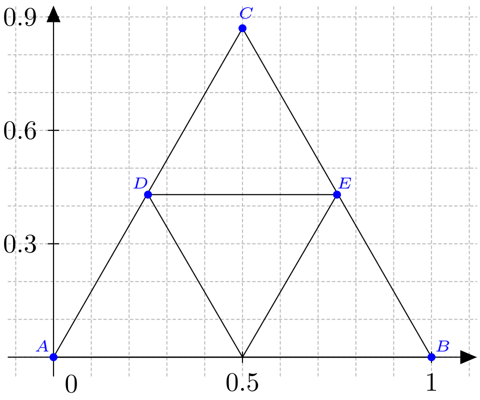
Notons α, β, γ les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ et A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On note H_A, H_B, H_C les symétriques de H par rapport à (BC), (CA), (AB) et H'_A, H'_B, H'_C les symétriques de H par rapport à M_A, M_B, M_C. Puisque $\widehat{AC'C} = 90°$, $\widehat{ACC'} = 90° - \alpha$. Puisque $\widehat{HB'C} = 90°$, $\widehat{C'HC} = \alpha$. Donc $\widehat{BHC} = 180° - \alpha$.

Par symétrie par rapport à (BC), $\widehat{CH_AB} = 180° - \alpha$. Puisque $\widehat{BAC} = \alpha$, les points B, A, C, H_A sont cocycliques et $H_A \in \Gamma$.

Par symétrie par rapport à M_A, $\widehat{CH'_AB} = 180° - \alpha$, d'où $H'_A \in \Gamma$.

De même, $H_B,\ H_C,\ H'_B,\ H'_C \in \Gamma$.

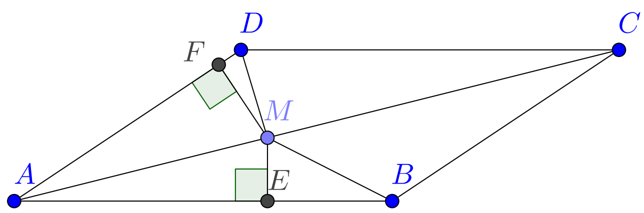
Solution de l'exercice 3



Découpons le triangle en quatre triangles équilatéraux de côté 0,5. D'après le principe des tiroirs, au moins deux points sont situés dans le même triangle de côté 0,5, ce qui implique qu'ils sont distants d'au plus 0,5 (les deux points les plus éloignés d'un triangle étant nécessairement les extrémités du côté le plus long).

L'exemple ci-dessus en prenant les sommets du grand triangle équilatéral ainsi que les milieux de deux côtés montre que cinq points peuvent être distants d'au moins 0,5 deux à deux. Ainsi, il n'existe pas nécessairement 2 points distants d'au plus 0,49 quelque soit les points choisis.

Solution de l'exercice 4



Pour montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$, soit $\frac{ME}{MF} = \frac{DA}{DC}$, il suffit de montrer que les triangles MEF et DAC sont semblables.

Puisque $\widehat{MFA} = \widehat{AEM} = 90°$, les points A, E, M et F sont cocycliques. Ainsi, $\widehat{FEM} = \widehat{FAM}$. Puisque $\widehat{FAM} = \widehat{DAC}$, on a bien $\widehat{FEM} = \widehat{DAC}$.

De même, $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{ACD}$. Les triangles MEF et DAC sont alors semblables, ce qui permet de conclure.

Solution alternative

On remarque simplement que, si $M \neq A$, alors

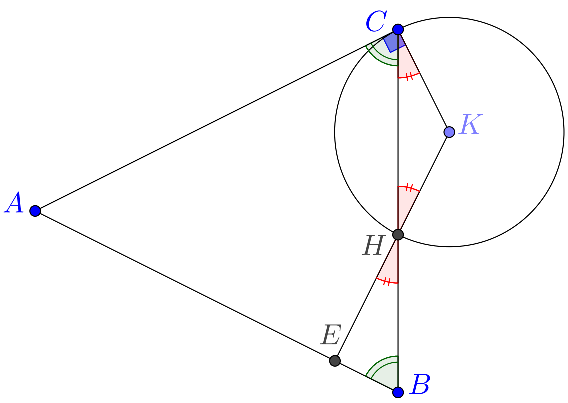
$$\begin{aligned}\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB} &\Leftrightarrow AB \times ME = AD \times MF \\ &\Leftrightarrow AB \times AM \sin(\widehat{BAC}) = AD \times AM \sin(\widehat{DAC}) \\ &\Leftrightarrow AB \sin(\widehat{BAC}) = AD \sin(\widehat{DAC}).\end{aligned}$$

L'égalité à démontrer ne dépend donc pas de la position de M sur la droite (AC), donc il suffit de la démontrer pour $M = C$. Or, pour $M = C$, on remarque que $AB \times ME/2$ est l'aire du triangle ABC et que $AD \times MC/2$ est l'aire du triangle BCD. Ces deux triangles sont imsométriques, puisque la symétrie de centre le milieu de $[AC]$ envoie l'un sur l'autre. Ils ont donc la même aire, ce qui conclut l'exercice.

2 Avancés

Solution de l'exercice 1 Soit E le point d'intersection de (AB) et de (KH). Grâce à une chasse aux angles, on calcule donc

$$\begin{aligned}
\widehat{BEK} &= 180^\circ - \widehat{CBA} - \widehat{EHB} \\
&= 180^\circ - \widehat{BCA} - \widehat{EHB} && \text{car } ABC \text{ est isocèle en } A \\
&= 180^\circ - \widehat{BCA} - \widehat{CHK} && \text{car } \widehat{EHB} \text{ et } \widehat{CHK} \text{ sont opposés par le sommet} \\
&= 180^\circ - \widehat{BCA} - \widehat{HCK} && \text{car } CHK \text{ est isocèle en } H \\
&= 180^\circ - 90^\circ && \text{car } (AC) \text{ est tangente à } \omega \text{ en } C \\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$

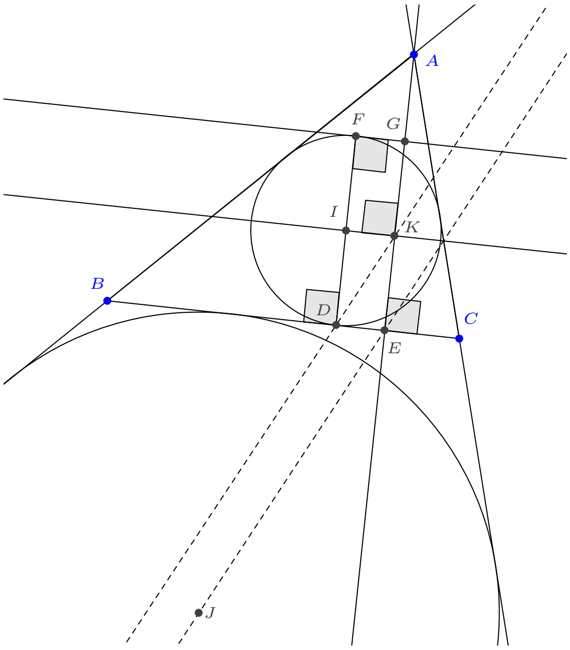


Solution de l'exercice 2

(a) Choisir une fonction $f : \{1, 2, \ldots, m\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ strictement croissante revient à choisir l'image de $\{1, 2, \ldots, m\}$ par f, c'est-à-dire l'ensemble $\{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$. En effet, une fois f choisie, alors cet ensemble est défini sans ambiguïté alors que, réciproquement, si l'on connaît l'ensemble $\{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$, on sait que $f(k)$ est le $k^{\text{ème}}$ plus petit élément de cet ensemble. Or, il existe $\binom{n}{m}$ manières de choisir un tel ensemble : il existe donc $\binom{n}{m}$ fonctions $f : \{1, 2, \ldots, m\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ strictement croissantes.

(b) Une fonction $f : \{1, 2, \ldots, m\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ est croissante si et seulement si la fonction $g : \{1, 2, \ldots, m\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m+n\}$ définie par $g : x \mapsto f(x)+x$ est strictement croissante : il existe autant de fonctions $f : \{1, 2, \ldots, m\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ croissantes que de fonctions $g : \{1, 2, \ldots, m\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m+n\}$ strictement croissantes. Il existe donc $\binom{m+n}{m}$ telles fonctions.

Solution de l'exercice 3



Soit h l'homothétie de centre A qui envoie le cercle exinscrit issu de A sur le cercle inscrit ω : on s'intéresse à l'image de (EJ). On a $h(J) = I$. De plus, $h(BC)$ est parallèle à (BC), différente de (BC) et tangente à ω. Si on note F le point de ω diamétralement opposé à D, $h(BC)$ est donc la tangente à ω en F, donc $h(E)$ est l'intersection de cette tangente avec (AE), que l'on note G. Les droites (EJ) et (GI) sont donc parallèles.

Il suffit de montrer que (DK) est parallèle à (GI), donc de montrer que $DIGK$ est un parallélogramme. Il suffit alors de montrer que $DI = GK$ car (DI) et (GK) sont toutes les deux perpendiculaires à (BC). Or $GK = FI$ car $FGKI$ est un rectangle, et $FI = DI$ est le rayon de ω, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 4 Notons A, B et C les points où se trouvent les fourmis. Lorsqu'une fourmi, par exemple celle en C, se déplace et se rend en un point C', alors les droites (AB) et (CC') sont parallèles. Les triangles ABC et ABC', respectivement formés par les fourmis avant et après le déplacement, sont donc de même aire. Les fourmis forment initialement un triangle d'aire $1/2$; il est donc impossible qu'elles forment un jour un triangle d'aire 1. La réponse au problème est donc **non**.

VI. Conférences

1 Mardi soir : Codes secrets (Linda Gutsche)

Par équipes de trois, les élèves doivent coder un message selon une clef qui leur est donnée, puis doivent décoder les messages de deux équipes différentes, l'un à l'aide de sa clef, et l'autre sans aucune aide.

Voici les clef qui ont été données :

Pour le premier message :
Vous chiffrerez/déchiffrerez ce message en décalant l'alphabet de deux rangs.
Exemples : A devient C, B devient D, Y devient A, et Z devient B.

Pour le second message :
Vous chiffrerez/déchiffrerez ce message en associant à chaque lettre de l'alphabet latin raccourci la lettre de même rang de l'alphabet grec ; l'alphabet latin raccourci étant celui où i et j sont la même lettre, ainsi que u et v.
Exemples : animath devient $\alpha\nu\iota\mu\alpha\tau\theta$ et fgz devient $\zeta\eta\omega$.

Pour le troisième message :
Vous chiffrerez/déchiffrerez ce message en utilisant la méthode du rouleau à dix colonnes : vous écrirez le message ligne par ligne de gauche à droite dans un tableau à 10 colonnes, mettant une lettre ou un espace par case, puis recopierez le message en lisant cette fois-ci colonne par colonne de haut en bas.
Exemple :

V	O	U	S		C	H	I	F	F
R	E	R	E	Z		C	E		M
E	S	S	A	G	E		E	N	
U	T	I	L	I	S	A	N	T	

nous permet d'obtenir VREUOESTURSISEAL ZGIC ESHC AIEENF NTFM.

Pour le quatrième message :
Vous chiffrerez/déchiffrerez ce message en associant à chaque lettre un numéro à deux chiffres : son rang dans l'alphabet, puis vous choisirez deux chiffres quelconques et vous placerez ces quatre chiffres dans l'ordre de votre choix. Puis, devant cette séquence vous ajouterez deux chiffres ; le premier indiquant la place des dizaines du numéro de la lettre dans la séquence à quatre chiffres, et le second donnant la place des unités.

Exemple : ANIMATH peut entre autres devenir 434910 314910 424910 313210 433210 243210 431080

Pour le cinquième message :
Vous chiffrerez/déchiffrerez ce message en remplaçant la n-ième lettre du message qui est, mettons, de rang x (le rang correspondant à la place dans l'alphabet usuel) par la lettre de rang $n + x$ (en ramenant la valeur du rang entre 1 et 26 par division euclidienne).
Exemple : ANIMATH devient BPLQFZO.

Pour le sixième message :
Vous chiffrerez/déchiffrez ce message en utilisant la clé de chiffrement ANIMATH : A la n-ième lettre du message vous associerez en fonction de son rang x dans l'alphabet la lettre de rang $x + y$ (en ramenant la valeur du rang entre 1 et 26 par division euclidienne) avec y le rang de la n-ième lettre du mot ANIMATHANIMATHANIMATHANI...
Exemples : AAA AAAAA AA AAAAA AAAA devient BOJ NBUIB OJ NBUIB OJN et ABCDEFG devient BPLQFZO.

A la fin du jeu, deux chiffrements différents du même message ont été donnés aux élèves (qui les ont déchiffrés dans la soirée) :

47 82 70 46 73 68 78 73 75 76 65 45 83 82 85 79 67 78 79 67 46 87 87 87 32 58 32 82 85 83 32 83 78 79 73 84 65 77 82 79 70 78 73 39 68 32 83 85 76 80 32 33 32 73 68 78 73 75 76 65 32 83 82 85 79 67 78 79 67 32 85 65 32 69 82 73 82 67 83 78 73 32 83 85 79 86 32 69 68 32 83 69 85 81 73 84 65 77 69 72 84 65 77 32 69 68 32 82 85 69 83 83 69 70 79 82 80 32 69 82 84 79 86 32 65 32 90 69 68 78 65 77 69 68 32 44 85 69 74 32 69 67 32 69 77 73 65 32 90 69 86 65 32 83 85 79 86 32 73 83 32 33 32 83 85 79 84 32 65 32 79 86 65 82 66

et :

BLCHO C JOIL ! KU HOIK CHYD CUQY AY TYI, ZYQCPZYD C HOJLY NLOXYKKYIL ZY QCJVYQCJUMIYK ZY HOIK UPKALULY CI AOPAOILK CRSUPZU ! NRIK Z'UPXOL-QCJUOP KIL : GGG.AOPAOILK-CRSUPZU.XL/

2 Mercredi soir : Les Olympiades (Vincent Jugé)

Non aux figures fausses !

Le mercredi soir, une conférence de présentation d'Animath par Vincent était prévue. Vincent étant très en avance pour préparer sa conférence, Yohann en a profité pour présenter une preuve que tous les triangles sont équilatéraux au tableau, le temps que Vincent ouvre tous les onglets nécessaires. Cette preuve a laissé sans voix bon nombre de personnes, qui ne voyaient alors pas où était l'arnaque (qui est très bien dissimulée !), jusqu'à ce qu'enfin Ulysse L. trouve une erreur de construction dans la figure. Cela a alors permis aux élèves de comprendre pourquoi il était important en géométrie de faire des figures, et des figures justes.

Concours Castor Informatique

Suite à ce meublage (beaucoup trop long !), la présentation pouvait enfin commencer. En tant que sublime informaticien, Vincent commence par présenter le concours Castor Informatique. Ce concours est ouvert à tout élève de la CM1 à la Terminale, et permet de s'évaluer en informatique (et non pas en castors !), *sans programmation*. Mais est-il réellement possible de parler informatique sans parler programmation ? Mais oui, c'est possible [1] ! Ce concours est relativement *ludique*, sans non plus n'être que du jeu. Vous devez réaliser vous-même des algorithmes (imagés), optimiser des configurations, . . . Le mieux est que vous alliez directement voir les annales sur le site : `http://castor-informatique.fr/` Attention : ce n'est pas parce que le concours est ouvert aux CM1 qu'il est très facile ! Même si naturellement les terminales réussissent mieux.

Le concours se déroule en classe (le jour et l'heure étant déterminés par le professeur), pendant 45 minutes. En 2017, le concours aura lieu du 12 novembre au 8 décembre, alors parlez-en à vos professeurs et inscrivez-vous [2] !

Concours Algoréa

À l'issue de du concours Castor, les meilleurs sont sélectionnés pour le concours Algoréa. Ce nouveau concours, toujours d'informatique, est cette fois-ci plus orienté programmation : il est demandé d'écrire des programmes en *Blockly*, *Scratch*, *Javascript* (même si Loïc nie son existence) ou *Python* en un temps limité avec des contraintes de lignes de codes (pour favoriser les boucles et l'optimisation). Ce concours est également ouvert du CM1 à la terminale, même si les terminales ne sont toutefois pas invités à la finale. On peut cette fois participer seul chez soi ou bien toujours en classe.

On dénombre 5 étapes : tout d'abord se déroulent trois phases éliminatoires de 45 minutes, où les questionnaires sont différents en fonction du niveau (de programmation, pas de la classe). Puis les meilleurs à l'issue de la troisième phase sont sélectionnés pour participer à une demi-finale de 3 heures, où il faut écrire 6 algorithmes dans les mêmes langages, auxquels s'ajoutent le C, le C++ et le Java. Cette fois-ci, plus de contrainte de taille, mais des contraintes d'utilisation de la mémoire et de temps d'exécution. Les meilleurs qui ne sont pas en terminale sont ensuite amenés à participer à la finale pendant une semaine à Paris, permettant de gagner de nombreux lots, comprenant par exemple une imprimante 3D ou des calculatrices. Les suivants et les terminales peuvent néanmoins passer la finale « pour le plaisir » chez eux.

Tout comme Castor Informatique, le concours Algoréa est entièrement gratuit, si on néglige la consommation électrique et la connexion à Internet.

On visitera le site pour plus d'informations : `http://www.france-ioi.org/concours/algorea`

1. avec la carte Kiwi
2. C'est un ordre.

Concours AlKindi

Depuis 2015, Animath et France-IOI collaborent pour organiser le concours AlKindi. Tout d'abord introduit en 2015 uniquement pour les secondes, il a l'année dernière été étendu pour les élèves en classe de quatrième ou de troisième. AlKindi est une compétition qui porte sur la cryptanalyse : l'art de déchiffrer les codes secrets. Ce concours fait découvrir aux élèves une application des mathématiques en s'amusant et les sensibilise à la question importante de la sécurité de l'information. Aucune connaissance en cryptanalyse n'est requise.

Le concours est à nouveau gratuit et comporte 3 tours par équipes de 1 à 4 (premier tour en 45 minutes du 11 au 23 décembre en classe, second en temps illimité du 29 janvier au 10 mars chez soi ou en classe, troisième en 1h30 en classe du 22 mars au 7 avril). On trouvera plus d'informations sur le site : `http://www.concours-alkindi.fr/`

Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

Revenons à un domaine dont nous sommes plus proches : les mathématiques. Au mois d'avril aura lieu le Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens ($\mathbb{TFJM}^2$), un peu partout en France (Paris, Lyon, Toulouse, Rennes, Strasbourg, Lille). Le $\mathbb{TFJM}^2$ est une compétition par équipe de 4 à 6 lycéens (il va falloir patienter un peu !). Chaque équipe est accompagnée d'un ou deux encadrants, des professeurs de mathématiques, des doctorants ou encore d'anciens participants. Le tournoi se compose d'un tournoi régional et d'une finale. Les tournois régionaux auront lieu lors d'un week-end début avril dans les villes citées ci-dessus, puis les meilleures équipes de chaque région seront invitées à participer à la finale nationale fin mai à l'École Polytechnique.

Plus d'informations sur le site : `https://tfjm.org/`

$$\mathbb{TFJM}^2$$

Club virtuel de mathématiques Mathmosphère

Parce qu'à Animath, on n'aime pas les disparités, *Mathmosphère* est né l'année dernière. Mathmosphère est un club virtuel de mathématiques. Dans un premier temps, il a pour objectif de proposer un contenu mathématique extrascolaire capable d'intéresser tout élève français ou francophone en classe de troisième ou de seconde, curieux et motivé par la découverte des mathématiques au-delà du cadre scolaire (vous ?).

Il s'adresse tout particulièrement aux jeunes qui sont isolés, soit par leur localisation géographique, soit par leur origine sociale (à titre indicatif, il existe en France plus de 10000 établissements scolaires ; dans la très grande majorité d'entre eux, les élèves intéressés par les mathématiques se sentent très isolés, et ne bénéficient d'aucun soutien).

Concrètement, le club se propose de publier toutes les deux semaines une séance : cours et exercices sur une plateforme dédiée, fournie par le GIP FUN-MOOC. Les cours virtuels se rapprochent du concept de MOOC par son format mais s'en différencient par ses caractéristiques et ses objectifs. Chaque cours est constitué d'une seule séance, ou exceptionnellement deux ou trois, et est indépendant des autres et doit pouvoir être suivi et compris en une heure par l'élève chez lui. Le cours est composé d'une grande partie textuelle, enrichie par la présence de vidéos, exercices et forums, qui permettent la mise en activité immédiate des élèves et sont utilisés comme des outils pour améliorer leur compréhension (notamment, nous ne cherchons aucune forme d'évaluation). À chaque fois, un TD à difficulté progressive, dont certaines questions demandant beaucoup de réflexion, est proposé pour amener à des discussions et une résolution collective ; dans l'idéal, cela se ferait par des clubs d'élèves dans chaque établissement, de préférence avec l'accompagnement d'un professeur de mathématiques. Le projet est aussi ouvert à toute initiative de ces derniers, les professeurs, pour utiliser le contenu de la plateforme et le proposer à leur manière, par exemple pour un club de mathématiques.

De manière régulière, des stages sont proposés pendant les vacances : les élèves s'inscrivent pour suivre, pendant une période d'une semaine, une série de plusieurs séances. Le stage de Valbonne était par exemple disponible sur Mathmosphère.

Les cours proposés n'ont pas de domaine mathématique préférentiel. Nous visons toutefois à proposer des cours différents de ceux du programme scolaire, accessibles au public visé, ludiques et interactifs si cela est au profit de la compréhension, ayant chacun un objectif précis (comme résoudre tel problème). Le cours doit également être utile dans le sens où l'on doit pouvoir proposer un grand nombre d'exercices à l'élève qu'il peut résoudre grâce à ce qu'il a appris dans le cours. Il ne s'agit donc en aucun cas de présenter vaguement un domaine récent de la recherche, présentation déjà facilement trouvable sur internet, mais bien de proposer des théories du niveau de l'élève et qu'il peut utiliser pour résoudre des problèmes qu'il peut comprendre voire se poser lui-même. En somme, on peut voir le contenu abordé comme ce qu'on aurait pu mettre dans le programme scolaire si l'on avait eu plus de temps à accorder aux élèves.

Plus d'informations sur le site : https://animath.fun-campus.fr/

Rendez-vous des jeunes mathématiciennes

Les filles sont relativement minoritaires en mathématiques, ce qui est regrettable. Cela est souvent dû à un manque de confiance en soi, ou <insérer une raison ici>. C'est pourquoi Animath organise depuis 2016 les « Rendez-vous des jeunes mathématiciennes » avec l'association *femmes et mathématiques*. Le week-end s'articule autour de différentes actions de sensibilisation et de découverte à destination de filles motivées (conférences, ateliers de recherche, speed-meeting,...), pour les encourager à affirmer leur intérêt pour les mathématiques et à s'engager dans les nombreuses activités périscolaires qui sont proposées en mathématiques : stages, clubs de mathématiques, compétitions – toutes activités qui sont bien sûr mixtes.

L'inscription est ouverte aux filles de première et de terminale S ici :

http://www.animath.fr/spip.php?article2991&lang=fr

En 2017, quatre rendez-vous sont prévus (contre un seul à Paris en 2016) :

— Toulouse du 2 au 4 novembre (date limite de candidature : déjà passée de toute façon)

— Paris les 25 et 26 novembre (date limite de candidature : lundi 30 octobre à minuit)

— Lyon les 2 et 3 décembre (date limite de candidature : dimanche 5 novembre à minuit)

— Rennes du 8 au 10 décembre (date limite de candidature : dimanche 19 novembre à minuit)

Venez nombreuses ! ... Même si vous ne pouvez en réalité pas venir puisque vous n'êtes ni en première ni en terminale ...

Olympiade Internationale de Mathématiques

L'Olympiade Internationale de Mathématiques (OIM) est un concours mettant aux prises des lycéens venus de la planète entière. Cette compétition existe depuis 1959, et n'a eu de cesse de grandir en importance depuis, au point d'accueillir 615 participants provenant de 111 pays en 2017. L'OIM se déroule tous les ans, généralement au mois de juillet, et à chaque fois dans un nouveau pays : chaque équipe envoie donc un maximum de six élèves de lycée (voire de collège, même si ce cas de figure arrive très rarement en pratique), qui concourrent ensuite individuellement.

La compétition dure une semaine, et a généralement en été. Les épreuves elles-mêmes ont lieu sur deux journées consécutives : le matin de chacune de ces deux journées, les élèves ont 4 h 30 pour résoudre trois problèmes de mathématiques, de difficultés croissantes (allant de « difficile » à « très difficile » et enfin « inhumain »). Durant les jours qui suivent, et avant la fin de la compétition, le chef de délégation de l'équipe et son adjoint ont pour charge de corriger les copies de leurs élèves, en fonction d'un barême précis auparavant établi par le jury de l'Olympiade ; leur seconde mission est ensuite de convaincre des correcteurs indépendants du bien-fondé de la note qu'ils proposent, ou bien de discuter avec eux pour arriver à un consensus sur le nombre de points à attribuer à telle ou telle copie.

Depuis l'édition 2014 de l'Olympiade, il a été décidé que les quatre problèmes « difficiles » et « très difficiles » recouvriraient les quatre domaines principaux des mathématiques représentés à l'Olympiade, à savoir : l'algèbre, l'arithmétique, la combinatoire et la géométrie. Cette décision a pour but de pousser les élèves à exceller dans chaque domaine, sans faire d'impasse, et en même temps de donner sa chance à chacun, afin de pallier d'éventelles lacune dans un domaine particulier.

Enfin, les élèves se voient remettre des médailles ainsi que des mentions : les élèves ayant terminé dans les meilleurs 8% reportent une médaille d'or ; dans les meilleurs 25%, une médaille d'argent ; dans les meilleurs 50%, une médaille de bronze ; enfin, les élèves ayant parfaitement résolu un problème, s'ils n'ont pas de médaille, se voient décerner une mention honorable.

Les prochaines éditions de l'Olympiade Internationale de Mathématiques auront lieu en 2018 à Cluj-Napoca (en Roumanie), puis en 2019 à Bath (au Royaume-Uni), et en 2020 en Russie (le choix de la ville n'a pas encore eu lieu).

Plus d'informations sur le site : https://www.imo-official.org/

Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques

L'Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques (JBMO) est un concours analogue à l'OIM, qui a lieu tous les ans, usuellement fin juin. Ce concours concerne cette fois-ci des candidats âgés d'au plus 15 ans et demi le jour des épreuves, donc majoritairement issus de collège (voire de lycée, pour les élèves ayant une année d'avance ou plus). Comme son nom l'indique, elle est organisée par les pays de la Conférence Balkanique de Mathématiques, situés en Europe du sud-est. À cette compétition participent les pays de la Conférence ainsi qu'une dizaine de pays invités, dont la France fait partie depuis 2013.

Comme à l'OIM, les équipes sont formées de six élèves, qui concourrent à titre individuel, ainsi que d'un chef de délégation et de son adjoint. Cependant, le format de l'épreuve et sa difficulté sont adaptés à des candidats plus jeunes : il n'y a qu'une seule journée d'épreuves au lieu de deux, et les élèves ont quatre heures pour résoudre quatre problèmes au lieu de 2×4 h 30 pour résoudre 2×3 problèmes. Enfin, là encore comme à l'OIM, les quatre problèmes sont proposés par ordre croissant de difficulté supposée, et concernent chacun des quatre grands domaines des mathématiques représentés à l'Olympiade.

Les prochaines éditions de la JBMO auront lieu en Albanie en 2018, puis à Chypre en 2019, dans des villes qui restent à déterminer.

Plus d'informations sur le site : http://www.massee-org.eu/index.php/mathematical/jbmo

Olympiade de Mathématiques du Benelux

L'Olympiade de Mathématiques du Benelux (BxMO) est elle aussi un concours analogue à l'OIM, organisée conjointement par la Belgique, le Luxembourg et les Pays-Bas. Elle concerne des lycéens, et chaque équipe nationale compte usuellement dix membres. Comme à la JBMO, il y a une seule journée d'épreuves, qui dure quatre heures, et au cours de laquelle quatre problèmes sont proposés. Chaque année, à la discrétion du pays organisateur, d'autres pays peuvent être conviés à participer à la BxMO. En 2015, le Luxembourg avait ainsi invité la France, et il est prévu qu'il la réinvite pour l'édition qui aura lieu en avril 2018.

Plus d'informations sur le site : `http://www.bxmo.org/`

Olympiade Européenne Féminine de Mathématiques

L'Olympiade Européenne Féminine de Mathématiques (EGMO) est elle aussi claquée sur le modèle de l'OIM. Elle se tient chaque année, depuis 2012, dans un pays européen. Elle est destinée aux lycéennes, et chaque équipe nationale compte quatre membres ; d'autres pays non européens sont habituellement invités à l'EGMO, par exemple les États-Unis et la Chine. Les épreuves de l'EGMO sont réparties sur deux journées, chaquee journée consistant en une session de 4 h 30 lors de laquelle sont proposés trois problèmes de difficultés croissantes.

Les prochaines éditions de l'EGMO auront lieu en 2018 à Florence (en Italie), en 2019 à Kiev (en Ukraine), et en 2020 aux Pays-Bas, dans une ville qui reste à déterminer.

Plus d'informations sur le site : `https://www.egmo.org/`

Romanian Masters in Mathematics

Le *Romanian Masters in Mathematics* (RMM) se tient lui aussi chaque année, en Roumanie, usuellement à Bucarest. Lors de chaque édition, les hôtes roumains invitent une vingtaine de pays : les pays en question sont sélectionnés sur la base de leurs performances lors des éditions récentes de l'OIM ou du RMM. Comme à l'OIM et à l'EGMO, il y a deux épreuves de 4 h 30 chacune, où sont proposés trois problèmes, organisées deux jours consécutifs. Les équipes nationales sont composées de six élèves chacune. Les pays participants au RMM s'étant déjà distingués par leurs résultats dans d'autres compétitions de mathématiques, la difficulté des problèmes proposés lors du RMM est généralement très élevée, plus encore que lors de l'OIM. La France a été invité à prendre part aux trois dernières étitions du RMM, et est de nouveau convié à participer en février 2018.

Plus d'informations sur le site : http://rmms.lbi.ro/rmm2018/

Préparation Olympique Française de Mathématiques – Association Animath

La Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM), anciennement appelée Olympiade Française de Mathématiques, se charge de la formation et de la constitution de la délégation française aux différentes olympiades de mathématiques mentionnées ci-dessus. Cette préparation est organisée en cycles d'une durée de un an, même si de nombreux élèves participent à plusieurs cycles durant leurs années de collège et de lycée. La préparation elle-même consiste en des cours et TD que les élèves font chez eux ou en classe, mais également en plusieurs tests en temps limité, à des fins d'entraînement ou de sélection pour les diverses olympiades, ainsi qu'en un stage usuellement organisé février.

À côté des événements organisés par la POFM, on trouve également d'autres stages organisés directement par l'association Animath, tels que les stages olympiques « junior » (à la

Toussaint) et « senior » (à la fin août) ou encore les coupes Animath de printemps et d'automne, cette dernière donnant entre autres accès à la POFM. La POFM est une action pédagogique de l'association Animath.

Association France-IOI

L'association France-IOI est une association partenaire d'Animath, centrée sur la découverte de l'apprentissage de l'informatique sous toutes ses formes, par exemple l'algorithmique ou encore la programmation. Elle est entre autres à l'origine des concours Castor Informatique et Algoréa, ainsi qu'Al Kindi (dans le cadre d'une collaboration avec Animath). France-IOI gère en outre la préparation de la délégation française à plusieurs olympiades d'informatique, telles que l'Olympiade Internationale d'Informatique (IOI) ou encore l'Olympiade Junior Européenne d'Informatique (EJOI). Le site de l'association propose également des cours en ligne centrés sur l'apprentissage de la programmation et de l'algorithmique.

Plus de renseignements sont disponibles sur : http://www.france-ioi.org/

Clubs de mathématiques

De multiples clubs de mathématiques proposent régulièrement aux élèves de collège et de lycée de se réunir pour découvrir les mathématiques de multiples manières : au travers de conférences centrées sur les mathématiques, de mini-cours ou bien de séquences de cours organisées sur plusieurs sessions d'affilée, de séances d'exercices, parfois centrés sur les olympiades de mathématiques, parfois plus éclectiques et touchant des domaines des mathématiques plus variés.

Parmi les clubs les plus actifs en France figurent :

— le club de mathématiques discrètes, à Lyon :
  http://math.univ-lyon1.fr/~lass/club.html

— le club Parimaths, à Paris :
  http://www.parimaths.fr/

— le cercle Sofia Kovalevskaïa, à Toulouse :
  http://www.animath.fr/spip.php?article2706&lang=fr

- le cercle mathématique de Strasbourg :
  http://www-math.u-strasbg.fr/CercleMath/
- le club mathématiques de Nancy :
  http://depmath-nancy.univ-lorraine.fr/club/
- le club de mathématiques de Grenoble :
  kazantsc@univ-grenoble-alpes.fr

VII. Citations mémorables

En cours...

- ▷ Guillaume : « On dirait qu'elle n'a plus d'encre cette craie, parfois elle écrit en noir... »
- ▷ Vincent qui rentre dans la salle calmement puis voit une figure lourde au tableau : « - Aaaaahhhh... » Et il repart.
- ▷ Linda : « Au tableau, on voit deux droites perpendiculaires à une troisième passant par un même point, mais pas très confondues... Et il y a aussi des hauteurs pas très concourantes dans un triangle... »

  Et soudain arrive le théorème de la droite épaisse et surtout du très très gros point ; et le problème est réglé !

  Morale de l'histoire :

  Liste des « théorèmes du tableau » :

  - le théorème de la patate : toute ligne qui se referme approximativement est une droite si la personne au tableau le dit ;
  - le théorème du gros point : toutes droites sont concourantes en un point suffisamment grand ;
  - le théorème de la droite courbe : le nom parle de lui-même.
- ▷ Vincent : « Un objet se comporte gentiment. En géométrie, c'est simple : les droites sont parallèles et on a fini. Par contre, en combinatoire, il faut définir l'objet ET la gentillesse. »
- ▷ Vincent : « Le jour où j'ai perdu 5 points aux IMOs parce que j'ai écrit comme un porc, je m'en suis voulu. »
- ▷ Vincent : « J'invente une opération ♡ parce que j'aime bien les maths. Elle est associative et commutative, du coup je peux coeuriser un ensemble de nombres a, b, c et $(a\heartsuit b)\heartsuit c = a \heartsuit(b\heartsuit c)$ »

  Un élève : « Tout cela m'écœure ! »
- ▷ Vincent : « Donc vous faites des récurrences comme vous avez toujours su faire depuis que vous êtes petits, ... c'est-à-dire depuis hier, ... et vous les appliquez vu que vous-êtes grands... à partir d'aujourd'hui ! »
- ▷ Vincent : « Tu prends l'ensemble A des entiers méchants, et tu montres qu'il est vide.

  On va cœuriser l'ensemble fini d'entiers. »
- ▷ Vincent : « Avancez, le groupe des avancés ! »
- ▷ Ilyas : « Le châtiment du pal, c'est comme s'asseoir sur une punaise de 1m80. »

- François : « D'habitude il n'y a pas de goûter le matin, mais... »
- Ilyas : « J'explique les symboles qui font peur avec des mots qui font peur. Vous n'avez pas trop eu peur pour l'instant ? »
- Un membre du personnel de service à un élève : « C'est bientôt les vacances, tu pourras te reposer ! »
- Pendant un exercice où l'animatheur s'emmêle :

  Un élève : « Mais le théorème de Miquel, il n'a pas d'hauteurs ? »

  Le professeur : « Si, c'est Miquel. »

  Les élèves : « Ça, ça va directement dans les citations mémorables ! »

  Le professeur, bien perdu : « ? ? ? » Puis, après un long instant de silence : « Aaaaaaaaah ! »

- Vincent : « C'est bien que le groupe des avancés soit dans la salle B, parce que B c'est avancé. »
- Guillaume : « C'est quoi, h(O) ? »

  Loïc : « C'est l'O ! »
- Loïc : « ... Et le point D' ... »
- Un élève : « 2 puissance 3 ça ne fait pas 8 ? Juré ! »
- Un animatheur : Qu'est-ce qu'un quantificateur universel ?

  Un élève : C'est quand l'homme est prétentieux !
- Un élève encouragé par les pitreries du professeur (pour ne pas nommer Vincent) : « Un monovariant, c'est juste un animateur qui change ? »

- « La Roumanie, c'est super sympa comme ville. »
- « Un pays très exotique comme le Royaume-Uni »
- « Le Kangourou c'est payant mais pas cher, et Castor c'est gratuit et pas cher non plus. »
- « Et même sur Bing ça marche ! »
- « pour Toulouse c'est la loose. »
- « Il faudrait peut-être éviter les blagues à propos des « Rennes » des Maths. »
- « J'ai fait l'armée et je sais comment briser l'esprit des élèves récalcitrants. »
- « Ça sera au Pays-Bas, on ne sait pas encore dans quelle ville, mais on sait déjà que la nourriture sera infecte ! »

Lors de parties de loup garou...

- Sixtine : « Osez José, votez pour moi ! »
- Yohann : « Je corrige vos copies vendredi, donc votez pour moi. »
- Yohann : « Le boucher va prendre cher. »
- Yohann : « Vous vous couchez à quelle heure ? Je vous rappelle que je dors ici cette nuit. »