PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 18 MAI 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Trouver tous les entiers naturels non nuls a, b et c pour lesquels il existe des entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ et $z! = ca + 1$.

Remarque : Pour tout entier naturel non nul n, l'entier $n!$ désigne le produit $1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Solution de l'exercice 1 Soit (a, b, c) un triplet solution éventuel. Sans perte de généralité, et puisque a, b et c jouent des rôles symétriques, on suppose que $a \leqslant b \leqslant c$, de sorte que $x \leqslant z \leqslant y$ et que $x!$ divise à la fois $y!$ et $z!$.

Soit d un diviseur de $x!$, c'est-à-dire un diviseur commun à $x!$, $y!$ et $z!$. Puisque

$$ab \equiv bc \equiv ca \equiv -1 \pmod{d},$$

on sait que

$$-1 \equiv (ab)(bc)(ca) \equiv (abc)^2 \pmod{d},$$

est un carré modulo d. Or, -1 n'est pas un carré modulo 3. Ainsi, $d \neq 3$, ce qui signifie que $x \leqslant 2$.

Comme $x! = ab + 1 \geqslant 2 > 1!$, on en conclut que $x = 2$, de sorte que $ab = x! - 1 = 1$, donc que $a = b = 1$. Le triplet (a, b, c) est donc, à permutation près, égal au triplet $(1, 1, z! - 1)$.

Réciproquement, tout triplet de la forme $(1, 1, z! - 1)$ convient manifestement.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été très peu réussi : en effet, beaucoup d'élèves ont indûment supposé que le nombre $n! - 1$ était un nombre premier pour tout $n \geqslant 1$. C'est faux, par exemple pour $n = 5$, car $5! - 1 = 119 = 7 \times 17$. Certains élèves ont essayé d'appliquer le théorème de Wilson, sans grand succès : ici, ce théorème ne permettait pas d'avancer, car il ne permet pas de déterminer x, y et z en fonction de a, b et c ou inversement.

Exercice 2. Le gouvernement de Bosnie-Herzégovine a décidé de mettre en place un nouveau système de plaques d'immatriculations. Chaque plaque d'immatriculation devra contenir 8 chiffres, chacun pouvant valoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. En outre, deux plaques d'immatriculation distinctes devront toujours avoir au moins deux chiffres différents. Par exemple, s'il met en circulation la plaque 00000000, le gouvernement ne pourra pas mettre en circulation la plaque 00010000.

Trouver le nombre maximum de plaques d'immatriculation que le gouvernement peut mettre en circulation.

Solution de l'exercice 2 Nous allons montrer que le nombre maximal de plaques disponibles est égal à 10^7.

Tout d'abord, on dit que deux plaques font partie de la même *famille* si leur sept premiers chiffres sont différents. Chaque famille contient dix plaques, donc il y a 10^7 familles distinctes. Or, le gouvernement ne peut pas mettre en circulation plus d'une plaque par famille. Il met donc en circulation au plus 10^7 plaques.

Réciproquement, il peut se débrouiller pour créer 10^7 plaques en procédant comme suit : le dernier chiffre de chaque plaque est égal à l'opposé de la somme, modulo 10, des sept premiers chiffres de la plaque. Ainsi, il crée bien une plaque par famille.

En outre, la somme des chiffres de chaque plaque est divisible par 10. Mais si deux plaques ont exactement un chiffre de différence, les sommes de leurs chiffres ne peuvent être égales l'une à l'autre (modulo 10). Ainsi, deux plaques distinctes ont toujours au moins deux chiffres de différence, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Cet exercice difficile n'a été résolu intégralement que par un seul élève. Plusieurs élèves ont trouvé des constructions ou bornes inférieures intéressantes, leur permettant par exemple d'affirmer que l'on pourrait mettre en place au moins 10^4 ou $8! = 40320$ plaques d'immatriculation.

Cependant, très peu d'élèves ont réussi à obtenir la construction adéquate permettant d'atteindre 10^7 plaques. Le moyen le plus sûr d'obtenir une telle construction consistait à regarder ce qui se passait si on avait droit à 1 chiffre, puis 2 chiffres, puis 3 chiffres, et à repérer des motifs réguliers qui apparaissaient dans toutes les copies concernées : un entier était égal à la somme des autres.

Par ailleurs, et indépendamment, très peu d'élèves ont entrepris de trouver une borne supérieure sur le nombre de plaques possibles, alors même qu'une simple application du principe des tiroirs suffisait ici et que de nombreux élèves semblaient en avoir l'intuition. Il est toujours dommage de ne pas chercher des bornes supérieures **et** inférieures quand on cherche à évaluer une quantité, et même si ces bornes ne sont pas nécessairement faciles à trouver.

Exercice 3. Soit x, y et z trois nombres réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Trouver les valeurs minimale et maximale possibles du nombre réel $xy + yz - zx$.

Solution de l'exercice 3 En vertu de l'identité

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz - zx) = 1 - 2(xy + yz - zx),$$

il s'agit ici de trouver les valeurs extrêmes que peut prendre le nombre $(x - y + z)^2$.
Tout d'abord, puisque $(x - y + z)^2 \geqslant 0$, avec égalité lorsque $x = y = 1/\sqrt{2}$ et $z = 0$, on a bien

$$xy + yz - zx = \frac{1 - (x - y + z)^2}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

avec égalité lorsque $x = y = 1/\sqrt{2}$ et $z = 0$.
En outre, l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que

$$(x - y + z)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2) \times (1^2 + (-1)^2 + 1^2) = 3,$$

avec égalité si et seulement si les triplets (x, y, z) et $(1, -1, 1)$ sont colinéaires. Par conséquent, on a bien

$$(xy + yz - zx) = \frac{1 - (x - y + z)^2}{2} \geqslant \frac{1 - 3}{2} = -1,$$

avec égalité lorsque $x = -y = z = 1/\sqrt{3}$.
En conclusion, les valeurs extrémales recherchées sont -1 et $1/2$.

Solution alternative n°1 On peut aussi démontrer l'inégalité $xy + yz - zx \geqslant -1$ comme suit. Il s'agit d'appliquer directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux triplets (x, y, z) et $(y, z, -x)$, pour constater que

$$(xy + yz - zx)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 1,$$

donc que $xy + yz - zx \geqslant -1$.
Par la suite, on est dans le cas d'égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $(x, y, z) = \lambda(y, z, -x)$. Mais alors les quatre réels x, y, z et λ sont non nuls et $xyz = -\lambda^3 xyz$, donc $\lambda = -1$ et $x = -y = z = \pm 1/\sqrt{3}$, auquel cas on a bien $xy + yz - zx = -1$.

Commentaire des correcteurs Cet exercice a rencontré un succès mitigé. On peut distinguer quelques bons réflexes : tester des valeurs particulières de x, y et z pour se faire une idée, chercher à contrôler le produit de deux nombres par la somme des carrés... À l'inverse, on donne ici les deux défauts majeurs rencontrés dans les copies des élèves :

- ▷ Beaucoup d'élèves cherchent à argumenter que l'extremum est forcément atteint dans une situation où les x, y et z atteindrait des valeurs extrémales. Cette argumentation est souvent constituée d'un raisonnement purement qualitatif : « il faut que xy soit petit, donc on prend x et y tels qu'il soit le plus petit possible pour atteindre l'extremum ». Le problème de ce raisonnement est qu'il ne tient pas compte des effets possibles de compensation : choisir x et y de sorte que xy soit minimal peut forcer z, et donc les termes yz et $-yz$, à être très grands, ce qui compensera la minimisation de xy. Ainsi, chercher à minimiser les termes un par un ne permet pas en général d'obtenir le minimum de l'expression totale.

  La façon la plus efficace, la plus fiable et la plus convaincante de montrer qu'une expression atteint un minimum est de faire des inégalités qui sont valables pour tous les (x, y, z) satisfaisant l'hypothèse de départ. Plusieurs solutions contenaient des longs paragraphes explicatifs, alors qu'on attend ici des calculs.

▷ Pratiquement tous les élèves qui ont réussi à obtenir une borne ont oublié de montrer que celle-ci était bien atteinte. Il est très bien de montrer que l'expression considérée est inférieure ou égale à 3, mais si il n'existe pas de (x, y, z) tels que $xy + yz - zx = 3$, alors 3 n'est pas notre maximum. Cet oubli était systématiquement pénalisé d'un point, ce qui est vraiment dommage pour les élèves qui avaient fait le plus gros du travail.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BC$. Soit P un point situé sur le prolongement du segment $[AB]$ au-delà de B. Soit Q le point d'intersection, autre que D, entre le segment $[PD]$ et le cercle circonscrit à ACD. Soit ensuite R le point d'intersection, autre que P, entre le segment $[PC]$ et le cercle circonscrit à APQ.
Démontrer que les droites (AQ), (BR) et (CD) sont concourantes.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord, on constate que

$$(RA, RC) = (RA, RP) = (QA, QP) = (QA, QD) = (CA, CD) = (AC, AB) = (BA, BC),$$

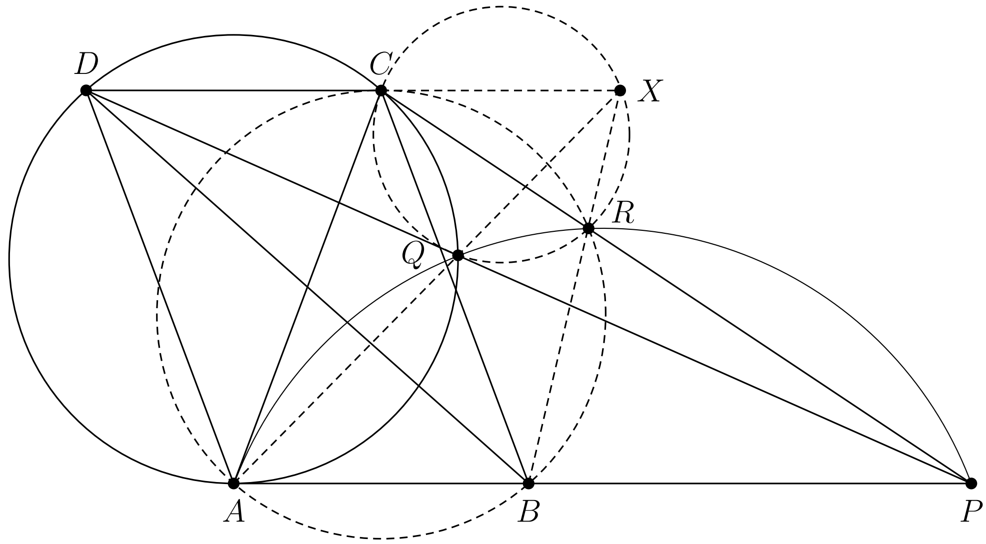
ce qui signifie que les points A, B, C et R sont cocycliques.
De même, si l'on note X le point d'intersection des droites (AQ) et (CD), on constate que

$$(QR, QX) = (QR, QA) = (PR, PA) = (CR, CX),$$

ce qui signifie que les points C, Q, R et X sont cocycliques.
On en conclut que

$$(RC, RX) = (QC, QX) = (QC, QA) = (DC, DA) = (BA, BC) = (AC, AB) = (RC, RB),$$

ce qui signifie que, comme annoncé, les points B, R et X sont alignés.



Commentaire des correcteurs Si l'exercice n'a été résolu en entier par aucun élève, quelques élèves courageux ont développé des idées très intéressantes : abordé le problème sous l'angle des axes radicaux, montré que des points étaient cocycliques etc... Tous les élèves qui ont rendu une tentative ont fait preuve d'initiative, ont tracé une figure sur laquelle ils pouvaient raisonnablement effectuer des conjectures (et sur laquelle les correcteurs ont pu suivre leur raisonnement) et ont démarré un raisonnement dans le but d'aller vers la solution. Même si cela ne rapportait pas toujours des points, c'est le genre d'effort qui permettra à ces élèves de progresser sur la durée.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BC$. Soit P un point situé sur le prolongement du segment $[AB]$ au-delà de B. Soit Q le point d'intersection, autre que D, entre le segment $[PD]$ et le cercle circonscrit à ACD. Soit ensuite R le point d'intersection, autre que P, entre le segment $[PC]$ et le cercle circonscrit à APQ.
Démontrer que les droites (AQ), (BR) et (CD) sont concourantes.

Solution de l'exercice 5 Tout d'abord, on constate que

$$(RA, RC) = (RA, RP) = (QA, QP) = (QA, QD) = (CA, CD) = (AC, AB) = (BA, BC),$$

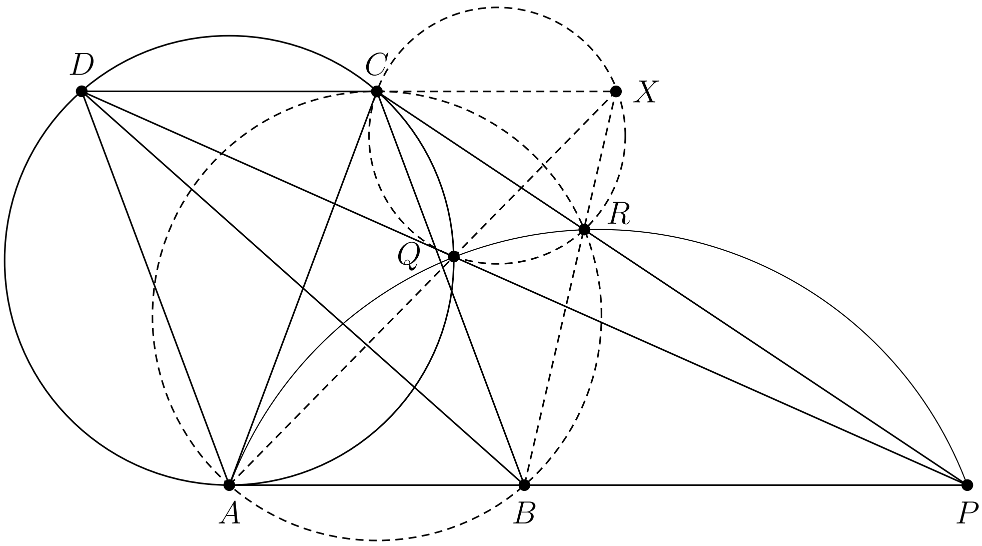
ce qui signifie que les points A, B, C et R sont cocycliques.
De même, si l'on note X le point d'intersection des droites (AQ) et (CD), on constate que

$$(QR, QX) = (QR, QA) = (PR, PA) = (CR, CX),$$

ce qui signifie que les points C, Q, R et X sont cocycliques.
On en conclut que

$$(RC, RX) = (QC, QX) = (QC, QA) = (DC, DA) = (BA, BC) = (AC, AB) = (RC, RB),$$

ce qui signifie que, comme annoncé, les points B, R et X sont alignés.



Commentaire des correcteurs L'exercice est plutôt bien réussi. Il est à noter que beaucoup d'élèves ont tenté, avec plus ou moins de succès, une approche avec de la géométrie dynamique.

Dans un tel problème, où il faut montrer que trois objets concourent, il est toujours possible de faire des erreurs de raisonnement, par exemple en utilisant une propriété qui est apparente sur la figure mais que l'on n'a pas encore démontrée et qui génère un raccourci dans la solution. Ainsi, plusieurs élèves se sont retrouvés à montrer l'énoncé sans même utiliser tous les points de la figure. Pour pallier ce danger, quelques élèves ont tracé des figures volontairement inexactes (sans pour autant perdre en propreté), sur lesquelles par exemple les droites (CD), (AQ) et (BR) ne sont pas concourantes, en plus de leur figure de départ, pour être sûr de ne pas supposer sans le vouloir la concourance des trois droites dans leur résolution. Ces initiatives et le niveau global des élèves sur le problème nous confortent dans l'idée que les élèves sont armés pour affronter les problèmes de compétitions internationales.

Exercice 6. Un chasseur et un lapin invisible jouent sur une grille infinie à maille carrée, c'est-à-dire où chaque case a quatre voisines : à gauche, à droite, en haut et en bas. Tout d'abord, le chasseur colorie chaque case de la grille, mais ne peut utiliser qu'un nombre fini de couleurs. Le lapin choisit ensuite une case de la grille, qui sera son point de départ. Il commence alors à se déplacer : chaque minute, il indique au chasseur la couleur de la case sur laquelle il se trouve, puis il se déplace sur une des quatre cases adjacentes. Évidemment, comme il est invisible, les seules informations auxquelles le chasseur a accès sont les couleurs que le lapin annonce chaque minute juste avant de se déplacer.

Le chasseur gagne si, au bout d'une durée finie,

▷ il peut identifier la case que le lapin avait initialement choisie, ou bien si

▷ le lapin revient en une case où il s'était déjà trouvé précédemment.

Le chasseur dispose-t-il d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 6 Le chasseur dispose en effet d'une stratégie gagnante, par exemple celle que nous donnons ci-dessous. Tout d'abord, il identifie la grille à l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, puis il associe à chaque case $\mathbf{c} = (x, y)$ le triplet $\varphi(\mathbf{c}) = (x, y, x + y)$.

Chaque fois que le lapin se déplace, deux composantes du triplet $\varphi(\mathbf{c})$ varient de ± 1, et la troisième composante ne change pas. En outre, connaître deux des coordonnées de $\varphi(\mathbf{c})$ suffit à identifier $\mathbf{c}$. En particulier, s'il existe un ensemble fini E tel que, à tout moment, le lapin se trouve en une case $\mathbf{c}$ telle que deux des composantes (au moins) de $\varphi(\mathbf{c})$ soient dans E, on sait que lapin est contraint d'évoluer dans un ensemble fini de cases, ce qui entraînera immanquablement sa défaite et sa transformation en civet.

On sait donc qu'au moins deux des trois composantes de $\varphi(\mathbf{c})$ prendront une infinité de valeurs. Si le chasseur parvient à identifier, à un instant donné, les valeurs prises par ces composantes, il en déduira la position réelle du lapin et aura donc gagné.

Ce faisant, le chasseur s'est ramené au problème unidimensionnel suivant : étant donné un lapin invisible qui se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$ par pas de -1, 0 ou $+1$ et qui est contraint à passer par une infinité d'entiers, comment colorier $\mathbb{Z}$ en usant d'un nombre fini de couleurs peut-il permettre au chasseur d'identifier la position initiale du lapin le long de cet axe ? Une fois un tel coloriage $\mathsf{col}\colon \mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, \kappa - 1\}$ utilisant κ couleurs numérotées de 0 à $\kappa - 1$, le chasseur n'aura plus qu'à utiliser κ^3 couleurs, identifiées aux éléments de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, \kappa - 1\}^3$, et à colorier la case $\mathbf{c} = (x, y)$ avec la couleur $(\mathsf{col}(x), \mathsf{col}(y), \mathsf{col}(x + y))$.

Pour répondre à ce nouveau problème unidimensionnel, le chasseur colorie $\mathbb{Z}$ en utilisant trois couleurs, numérotées de 1 et à 3, et peint en couleur c tous les entiers n tels que $n \equiv c \pmod 3$. De la sorte, il sait à tout instant si le lapin se déplace vers la gauche ou vers la droite.

Puis il repeint avec la couleur 4 les entiers, préalablement de couleur 3, qui sont de la forme $3 \times (-3)^n$ avec n entier naturel. Ainsi, il ne perd pas son information précédente sur la valeur des cases modulo 3, ni sur la valeur (-1, 0 ou $+1$) des mouvements du lapin. Par conséquent, si jamais il arrive à identifier la position du lapin à un moment donné, il connaît sa position à tout moment du jeu.

Enfin, le lapin passera par deux éléments consécutifs de l'ensemble $\mathcal{E} = \{3 \times (-3)^n : n \geqslant 0\}$. Si ces deux éléments sont $3 \times (-3)^n$ et $3 \times (-3)^{n+2}$, la différence entre eux, en valeur absolue, est 8×3^n. Si ce sont 3 et -9, cette différence, en valeur absolue, est égale à 12. Par conséquent, après que le lapin est passé par deux éléments consécutifs de $\mathcal{E}$, le chasseur identifie aisément ces deux éléments et, en fonction des variations de position du lapin, l'élément de $\mathcal{E}$ en lequel le lapin vient d'arriver. Il en déduit alors la position initiale du lapin, ce qui lui permet de gagner le jeu unidimensionnel, donc de gagner le jeu bidimensionnel d'origine.

Solution alternative n°1 Afin de suivre à la trace les mouvements du lapin, et au lieu de superposer trois pavages unidimensionnels utilisant chacun trois couleurs, le chasseur aurait tout aussi bien pu utiliser une coloration du plan en cinq couleurs, avec la fonction de coloriage $\mathsf{col}(x, y) = x + 2y \pmod 5$.

Voici ce que donnent les deux coloriages obtenus. Dans la grille de gauche, chaque case contient trois entiers, qui représentent les couleurs (entre 0 et 2) associés aux jeux unidimensionnels horizontal, vertical et diagonal. Dans la grille de gauche, chaque case contient un unique entier entre 0 et 4.

${}^{0}0_{0}$	${}^{1}0_{1}$	${}^{2}0_{2}$	${}^{0}0_{0}$	${}^{1}0_{1}$	${}^{2}0_{2}$	${}^{0}0_{0}$
${}^{0}2_{2}$	${}^{1}2_{0}$	${}^{2}2_{1}$	${}^{0}2_{2}$	${}^{1}2_{0}$	${}^{2}2_{1}$	${}^{0}2_{2}$
${}^{0}1_{1}$	${}^{1}1_{2}$	${}^{2}1_{0}$	${}^{0}1_{1}$	${}^{1}1_{2}$	${}^{2}1_{0}$	${}^{0}1_{1}$
${}^{0}0_{0}$	${}^{1}0_{1}$	${}^{2}0_{2}$	${}^{0}0_{0}$	${}^{1}0_{1}$	${}^{2}0_{2}$	${}^{0}0_{0}$
${}^{0}2_{2}$	${}^{1}2_{0}$	${}^{2}2_{1}$	${}^{0}2_{2}$	${}^{1}2_{0}$	${}^{2}2_{1}$	${}^{0}2_{2}$
${}^{0}1_{1}$	${}^{1}1_{2}$	${}^{2}1_{0}$	${}^{0}1_{1}$	${}^{1}1_{2}$	${}^{2}1_{0}$	${}^{0}1_{1}$
${}^{0}0_{0}$	${}^{1}0_{1}$	${}^{2}0_{2}$	${}^{0}0_{0}$	${}^{1}0_{1}$	${}^{2}0_{2}$	${}^{0}0_{0}$

2	3	4	0	1	2	3
0	1	2	3	4	0	1
3	4	0	1	2	3	4
1	2	3	4	0	1	2
4	0	1	2	3	4	0
2	3	4	0	1	2	3
0	1	2	3	4	0	1

En revanche, disposer de bandes orientées dans trois directions distinctes et arbitrairement espacées les unes des autres s'avérait, en pratique, nécessaire pour savoir ensuite où était passé le lapin.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été peu réussi : de nombreux élèves ont cherché à montrer que le lapin gagnait, ce qui malheureusement était faux et ne permettait pas de développer des idées intéressantes. Beaucoup d'élèves affirment que, puisque le lapin peut trouver des colonnes (ou des chemins) qui sont identiques sur un nombre aussi grand de cases que voulu, alors le lapin gagne. Cependant, cette assertion admet de nombreux contre-exemples : en effet, comme le moment où le chasseur décide d'affirmer où est le lapin dépend des premières couleurs vues, cela ne constitue en rien une contradiction. Et on peut construire très facilement (comme dans le corrigé) un système de colonnes où le lapin ne peut pas rester au sein de deux colonnes différentes sans se faire attraper.

Parmi les élèves qui n'étaient pas convaincus de qui gagnait, très peu ont essayé de donner des coloriages intelligents au chasseur : il est dangereux, dans un problème comme celui-ci, de ne traiter qu'un cas, car très souvent il est impossible d'obtenir des points en essayant de trouver une stratégie pour un joueur qui n'a pas de stratégie gagnante. Il faut donc prudemment, dans un problème de jeu complexe, essayer de trouver des stratégies pour chacun, afin de voir si la stratégie marche à coup sûr, où si l'adversaire a des moyens de la contrer. Ici, grappiller des points en donnant des informations intéressantes utilisables par le chasseur était tout à fait envisageable, même sans avoir trouvé un coloriage qui lui permettait de gagner.

Exercice 7. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$

Solution de l'exercice 7 Pour tout entier k, puisque $0 < a_k < 1$, on pose $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ et $b_k = a_k s_{k-1}^2/(1-a_k)$, avec la convention selon laquelle $s_0 = 0$. Nous allons démontrer l'inégalité

$$b_k < (s_k^3 - s_{k-1}^3)/3. \tag{1}$$

Celle-ci découle du fait que

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 0 < (1-a_k)\left((s_{k-1}+a_k)^3 - s_{k-1}^3\right) - 3a_k s_{k-1}^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < (1-a_k)a_k\left(3s_{k-1}^2 + 3s_{k-1}a_k + a_k^2\right) - 3a_k s_{k-1}^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < 3a_k s_{k-1}^2 - 3a_k^2 s_{k-1}^2 + 3(1-a_k)s_{k-1}a_k^2 + (1-a_k)a_k^3 - 3a_k s_{k-1}^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < 3(1-a_k-s_{k-1})s_{k-1}a_k^2 + (1-a_k)a_k^3 \\
&\Leftrightarrow 0 < 3(1-s_k)s_{k-1}a_k^2 + (1-a_k)a_k^3,
\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant effectivement correcte. On en conclut que

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n < (s_n^3 - s_0^3)/3 = 1/3.$$

Solution alternative n°1 On remarque tout d'abord que $(1-a_k)s_k = s_{k-1} + a_k(1-s_k) \geqslant s_{k-1}$. On en conclut que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} b_k &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k s_{k-1} s_k = \sum_{k=1}^{n} s_{k-1}a_k(s_{k-1}+a_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(s_{k-1}+a_k)^3 - s_{k-1}^3 - a_k^3}{3} \\
&\leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(s_k^3 - s_{k-1}^3) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = 1 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k^3 < 1.
\end{aligned}$$

Solution alternative n°2 Pour tout entier $k \geqslant 2$ et tous réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de somme 1, on note $S(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1})^2.$$

Soit alors $i \leqslant n$ un entier, puis $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1}$, et soit S et S' les sommes $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $S(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i/2, a_i/2, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. On remarque que

$$\begin{aligned}
S' - S &= \frac{a_i/2}{1-a_i/2}\left(s^2 + (s+a_i/2)^2\right) - \frac{a_i}{1-a_i}s^2 \\
&= a_i \frac{(1-a_i)(2s^2 + sa_i + a_i^2/4) - (2-a_i)s^2}{(2-a_i)(1-a_i)} \\
&= a_i \frac{(1-a_i-s)sa_i + (1-a_i)a_i^2/4}{(2-a_i)(1-a_i)}.
\end{aligned}$$

Puisque $a_i + s \leqslant 1$ et $0 < a_i < 1$, on en déduit que $S' > S$.
Soit S_ℓ la $\ell^{\text{ème}}$ somme que l'on atteint via ce processus. En répétant celui-ci de manière à rendre chaque terme a_i arbitrairement petit, par exemple en ciblant à chaque étape le terme a_i le plus grand, on ne fait qu'augmenter la valeur de la somme S_ℓ. En particulier, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un moment où ce processus nous permet d'atteindre des a_i tels que $0 < a_i \leqslant \varepsilon$. Mais alors

$$S_0 < S_1 < S_\ell \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} a_i (a_1 + \ldots + a_{i-1})^2.$$

En outre, si on pose $s_i = a_1 + \ldots + a_i$, on constate que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i s_{i-1}^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (s_{i-1} + a_i)^3 - s_{i-1}^3 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} s_i^3 - s_{i-1}^3 = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent,

$$S_1 \leqslant S_\ell \leqslant \frac{1}{3(1-\varepsilon)}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, de sorte que

$$S_0 < S_1 \leqslant \frac{1}{3}.$$

Remarque : En abusant des notations $\mathrm{d}x$, on constate en fait que la suite S_ℓ converge vers

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 - \mathrm{d}x} x^2 = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, $S_0 = \mathcal{S}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, était strictement inférieure à $1/3$.

Remarque : Au lieu de découper le terme a_i en deux termes égaux à $a_i/2$, on pouvait aussi le découper en deux termes de la forme $x a_i$ et $(1-x)a_i$, avec $0 < x < 1$ quelconque. Munis d'un tel découpage, et quitte à poser $y = a_i/(1-s)$, de sorte que $0 < y \leqslant 1$, on pouvait également démontrer que $S' > S$, en écrivant $S' - S$ sous forme d'une somme de termes positifs. Cependant, l'expression obtenue avait tôt fait d'être ingérable en pratique, puisque

$$S' - S = \frac{xy^2(1-s)^3(1-x)}{(1-a_i)(1-xa_i)(1-(1-x)a_i)} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6), \text{ avec}$$

$$\Delta_1 = xy(1-y)(1-xy) \geqslant 0$$
$$\Delta_2 = 2s(1-y)(y + (1-y)^2) \geqslant 0$$
$$\Delta_3 = 2sy(1-x)(1-y-xy/4)^2 \geqslant 0$$
$$\Delta_4 = sxy^3(1-x)(1-x/8) > 0$$
$$\Delta_5 = s^2 y(1-y)^2 \geqslant 0$$
$$\Delta_6 = s^2 y^2 (1-x)(2-y-xy) > 0.$$

Commentaire des correcteurs Cet exercice, d'une difficulté redoutable, a été résolu par un seul élève. Plusieurs élèves ont eu l'idée de regarder ce qui se passait pour $n = 2$, car cela faisait disparaître l'inopportun dénominateur $1 - a_i$. L'idée, simple à exécuter mais très difficile à trouver, était effectivement de se débarrasser de celui-ci pour tout réécrire à partir des nombres s_k, par exemple en constatant que $(1-a_k)s_k = s_{k-1} + a_k(1-s_k) \geqslant s_{k-1}$.