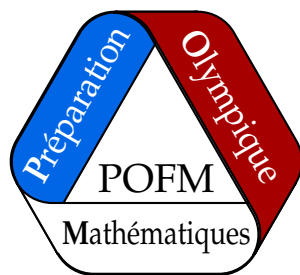


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 12 JANVIER 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Martin a versé à la hâte n litres d'eau dans n bouteilles. Certaines bouteilles sont donc plus remplies que d'autres. C'est alors qu'il se rappelle que sa mission était de mettre exactement un litre d'eau dans chaque bouteille avant de refermer le bouchon de celle-ci. Comme il n'a pas encore refermé les bouchons, il est encore temps de réparer ses bêtises.

Pour ce faire, il choisit une première bouteille, verse une partie de son contenu dans une autre bouteille s'il le souhaite, puis bouche cette première bouteille. Il choisit ensuite une seconde bouteille (qui peut être celle dans laquelle il a partiellement vidé la première bouteille, ou pas), verse une partie de son contenu dans une autre bouteille (mais pas dans la première bouteille, qui est déjà bouchée) s'il le souhaite, puis la bouche. Puis il procède de même avec une troisième bouteille, et ainsi de suite, jusqu'à boucher toutes les bouteilles.

Démontrer que, si Martin choisit astucieusement les bouteilles dont il referme le bouchon et celles dans lesquelles il les vide partiellement, il finira bien par réparer ses bêtises.

Note : les bouteilles sont surdimensionnées, et pourraient chacune contenir jusqu'à n litres d'eau, ce qui les empêchera de déborder.

Solution de l'exercice 1 Nous allons procéder par récurrence sur n . Tout d'abord, si $n = 1$, il y a une seule bouteille dans laquelle se trouve un litre d'eau, donc Martin a déjà gagné.

Puis, si $n \geq 2$, Martin choisit la bouteille n° i la plus remplie, c'est-à-dire celle pour laquelle x_i est maximal. On constate alors que

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq x_i + x_i + \dots + x_i = nx_i,$$

de sorte que $x_i \geq 1$. Si $x_i > 1$, il la vide donc partiellement dans une autre bouteille, jusqu'à ce que la bouteille n° i ne contienne plus qu'un litre d'eau, puis il la bouche. Il lui suffit alors de répartir harmonieusement les $n - 1$ litres d'eau restants, qui se trouvent dans $n - 1$ bouteilles, et l'hypothèse de récurrence lui assure qu'il pourra bien effectuer cette répartition.

Commentaire des correcteurs Ce problème a été très bien réussi dans l'ensemble. Quelques élèves ont malheureusement mal compris ce qui leur était demandé, ce qui les a empêchés de résoudre ce problème. D'autres ont proposé une stratégie gagnante pour Martin, mais démontrer que cette stratégie fonctionnait nécessitait néanmoins quelques lignes d'explication : le but n'est pas simplement d'avoir une solution correcte, mais aussi de convaincre le lecteur qu'elle est correcte et, plus encore, de convaincre le correcteur que l'élève a compris que la solution était correcte.

Exercice 2. Aline et Théo jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Théo choisit des nombres premiers p_1, p_2, \dots . Puis Aline choisit des entiers naturels non nuls n_1, n_2, \dots deux à deux distincts. Théo choisit ensuite deux entiers $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$. Il gagne la partie s'il existe une infinité d'entiers n_i qui ne sont pas divisibles par p_k^ℓ . Sinon, c'est Aline qui gagne.

- Qui, d'Aline ou de Théo, dispose d'une stratégie gagnante ?
- Pour corser encore le jeu, Aline a maintenant une contrainte supplémentaire : chaque entier n_i ne peut diviser qu'un nombre fini d'entiers n_j . Avec ces nouvelles règles, qui, d'Aline ou de Théo, dispose d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 2

- C'est Aline qui dispose d'une stratégie gagnante. Une telle stratégie consiste, par exemple, à choisir

$$n_i = (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_i)^i$$

pour tout i . En effet, tout entier p_k^ℓ divise chacun des entiers $(p_1 \times p_2 \times \dots \times p_i)^i = n_i$ pour lesquels $i \geq \max\{k, \ell\}$.

- Cette fois, c'est Théo qui dispose d'une stratégie gagnante. Pour ce faire, il commence par définir p_i comme le $i^{\text{ème}}$ nombre premier. Puis, une fois qu'Aline a choisi les entiers n_i , Théo considère la factorisation de n_1 en produits de facteurs premiers :

$$n_1 = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_t^{\alpha_t},$$

où chaque exposant α_i est un entier naturel.

Supposons que, pour chaque entier $j \leq t$, l'ensemble \mathcal{E}_j des entiers i pour lesquels $p_j^{\alpha_j}$ ne divise pas n_i soit un ensemble fini. Tout entier i pour lequel n_1 ne divise pas n_i appartient alors à l'ensemble

$$\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_t,$$

que l'on note \mathcal{E} et qui est lui-même fini. Mais alors il existe une infinité d'entiers i qui n'appartiennent pas à \mathcal{E} , et donc tels que n_1 divise n_i . Ceci est absurde, ce qui invalide notre supposition.

Il suffit donc pour Théo de choisir un entier $j \leq t$ pour lequel l'ensemble \mathcal{E}_j est infini, puis de choisir $k = j$ et $\ell = \alpha_j + 1$.

Commentaire des correcteurs Ce problème a été très peu réussi dans son intégralité par les élèves, mais plusieurs élèves ont su résoudre correctement la première question, qui était difficile.

L'erreur commise par la quasi-intégralité des élèves est de penser que les suites (p_i) et (n_i) respectivement choisies par Aline et Théo étaient finies. Plusieurs élèves ont alors donné une stratégie pour Aline à la première question qui aurait pu fonctionner dans le cas de suites finies, et se sont vus récompensés de quelques points pour cela. Mais la plupart du temps, cette stratégie ne permettait pas de résoudre le cas où les suites sont infinies.

Il en va de même pour la deuxième question, où la plupart des raisonnements proposés par les élèves sont centrés sur l'idée de prendre un élément maximal dans la suite d'Aline, mais un tel élément n'existe pas dans le cas où Aline peut produire une suite infinie d'entiers.

Il est à noter qu'une autre erreur assez fréquente, aussi due à une mauvaise lecture de l'énoncé, était d'attribuer à Aline une suite pour laquelle tout entier choisi par Théo diviserait une infinité de terme d'Aline. Si les suites données (et valorisées par les correcteurs) vérifiaient bien cette propriété, cela ne signifie pas pour autant que, pour chaque entier de Théo, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers d'Aline divisibles par l'entier de Théo.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A . La bissectrice issue du sommet A coupe le segment $[BC]$ au point P et recoupe le cercle Ω au point S . Soit A' le point diamétralement opposé au sommet A dans le cercle Ω . Démontrer que les droites (SD) et $(A'P)$ se coupent sur le cercle Ω .

Solution de l'exercice 3 Soit X le point où la droite $(A'P)$ recoupe le cercle Ω . Nous allons démontrer que les points D, S et X sont alignés.

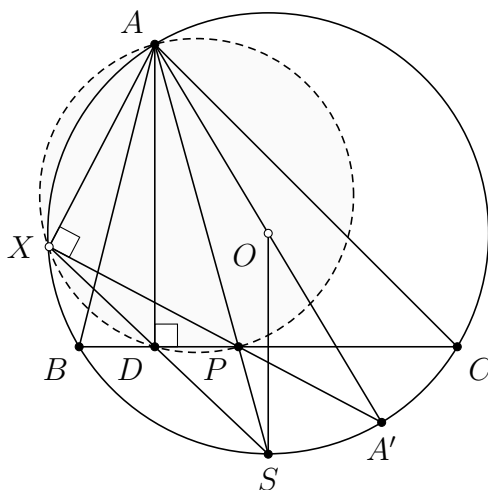
Soit O le centre de Ω . Le point S n'est autre que le *pôle Sud* de ABC issu de A , donc il appartient à la médiatrice de $[BC]$, qui n'est autre que la droite (OS) . Par conséquent, les droites (OS) et (AD) sont parallèles, et les angles \widehat{DAP} et \widehat{OSA} sont alternes-internes. En outre, le triangle AOS est isocèle en O . Ainsi, en angles de droites, on sait déjà que

$$(XA', XS) = (AA', AX) = (AO, AS) = (SA, SO) = (AP, AD).$$

Il reste donc à vérifier que

$$(XP, XD) = (XA', XD) = (AP, AD),$$

c'est-à-dire que les points X, A, D et P sont cocycliques. Or, puisque $[AA']$ est un diamètre de Ω , on sait que $\widehat{AXP} = \widehat{AXA'} = 90^\circ = \widehat{ADP}$. Ainsi, les deux points D et X appartiennent au cercle de diamètre $[AP]$, et le résultat désiré en découle immédiatement.



Commentaire des correcteurs Ce problème a été très peu réussi. La difficulté principale était de penser à montrer un énoncé différent mais équivalent à l'énoncé du problème : montrer que le second point d'intersection de la droite $(A'P)$ et du cercle Ω appartient à (SD) . Ceci est bien équivalent à l'énoncé puisqu'il s'agit finalement de montrer que les trois objets (deux droites et un cercle) sont concourants. Une telle astuce est parfois appelée astuce du « point fantôme » et est extrêmement utile. Ici, travailler avec le point d'intersection d'une droite et d'un cercle plutôt que le point d'intersection de deux droites fournissait plus d'égalités d'angles.

Un tel raisonnement ne doit surtout pas être confondu avec le « raisonnement », qui ne marche bien sûr pas, consistant à supposer de prime abord que le point d'intersection des deux droites est sur le cercle, c'est-à-dire précisément le résultat que l'on souhaite démontrer. Beaucoup d'élèves ont ainsi supposé que le point X d'intersection de (SD) et $(A'P)$ était sur Ω , ont obtenu une égalité d'angles concernant le point X avec le théorème de l'angle inscrit,

et ont conclu peu de temps après que le point I était sur le cercle par la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

Comprendre la différence entre les deux raisonnements pour ne plus refaire une telle erreur est sûrement la meilleure leçon que l'on peut tirer de cet exercice.

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul. Anna a écrit $4n+2$ entiers deux à deux distincts et compris entre 0 et 5^n inclus. Démontrer que, parmi les entiers qu'elle a écrits, il en existe trois, disons a, b et c , tels que $a < b < c$ et $c + 2a > 3b$.

Solution de l'exercice 4 Soit $x_1 < x_2 < \dots < x_{4n+2}$ les $4n+2$ entiers qu'Anna a écrits. Nous allons démontrer qu'il existe un entier $k \leq 4n$ tel que $x_{4n+2} + 2x_k > 3x_{k+1}$.

En effet, dans le cas contraire, posons $y_k = x_{4n+2} - x_k$ pour tout entier k , de sorte que

$$3y_{k+1} = 3x_{4n+2} - 3x_{k+1} \leq 2x_{4n+2} - 2x_k = 2y_k.$$

Cela signifie que $y_k \geq (3/2)y_{k+1}$ pour tout $k \leq 4n$, et donc que

$$5^n \geq y_1 \geq (3/2)^{4n} y_{4n+1} \geq (3/2)^{4n} = (5 + 1/16)^n,$$

ce qui est impossible.

Commentaire des correcteurs Ce problème, dont la solution tient certes en quelques lignes, était loin d'être facile et comportait de nombreux pièges. Typiquement il était peu intéressant de regarder le plus petit écart, et souvent toute intuition sur un « pire cas » se révélait inexacte.

Même si le problème a été plutôt bien réussi, les solutions étaient souvent assez longues, en introduisant parfois des variables pas forcément utiles : nous invitons donc même les élèves ayant eu la note maximale à lire attentivement le corrigé.

De plus, il y a de nombreuses confusions entre inégalités larges et strictes : il faut faire attention à cela, qui peut mener parfois à des solutions incorrectes. De même, certains transforment des inégalités en égalités à leur bon vouloir : c'est rarement rigoureux et cela entraîne souvent des pertes bêtes de points. Attention, enfin, aux erreurs de calcul récurrentes.

Ici, une bonne piste pour commencer était de se questionner sur a, b, c : une fois a fixé, quels sont les b et les c qui auront le plus tendance à donner $2a + c > 3b$? Se poser cette question et y répondre était déjà un pas en avant vers la solution et était évidemment valorisé.

Problèmes Senior

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul. Anna a écrit $4n+2$ entiers deux à deux distincts et compris entre 0 et 5^n inclus. Démontrer que, parmi les entiers qu'elle a écrits, il en existe trois, disons a, b et c , tels que $a < b < c$ et $c + 2a > 3b$.

Solution de l'exercice 5 Soit $x_1 < x_2 < \dots < x_{4n+2}$ les $4n+2$ entiers qu'Anna a écrits. Nous allons démontrer qu'il existe un entier $k \leq 4n$ tel que $x_{4n+2} + 2x_k > 3x_{k+1}$.

En effet, dans le cas contraire, posons $y_k = x_{4n+2} - x_k$ pour tout entier k , de sorte que

$$3y_{k+1} = 3x_{4n+2} - 3x_{k+1} \leq 2x_{4n+2} - 2x_k = 2y_k.$$

Cela signifie que $y_k \geq (3/2)y_{k+1}$ pour tout $k \leq 4n$, et donc que

$$5^n \geq y_1 \geq (3/2)^{4n} y_{4n+1} \geq (3/2)^{4n} = (5 + 1/16)^n,$$

ce qui est impossible.

Commentaire des correcteurs Ce problème, dont la solution tient certes en quelques lignes, était loin d'être facile et comportait de nombreux pièges. Typiquement il était peu intéressant de regarder le plus petit écart, et souvent toute intuition sur un « pire cas » se révélait inexacte.

Même si le problème a été plutôt bien réussi, les solutions étaient souvent assez longues, en introduisant parfois des variables pas forcément utiles : nous invitons donc même les élèves ayant eu la note maximale à lire attentivement le corrigé.

De plus, il y a de nombreuses confusions entre inégalités larges et strictes : il faut faire attention à cela, qui peut mener parfois à des solutions incorrectes. De même, certains transforment des inégalités en égalités à leur bon vouloir : c'est rarement rigoureux et cela entraîne souvent des pertes bêtes de points. Attention, enfin, aux erreurs de calcul récurrentes.

Ici, une bonne piste pour commencer était de se questionner sur a, b, c : une fois a fixé, quels sont les b et les c qui auront le plus tendance à donner $2a + c > 3b$? Se poser cette question et y répondre était déjà un pas en avant vers la solution et était évidemment valorisé.

Exercice 6. Trouver tous les entiers $n \geq 1$ ayant la propriété suivante : il existe une permutation d_1, d_2, \dots, d_k des diviseurs positifs de n telle que, pour tout $i \leq k$, la somme $d_1 + d_2 + \dots + d_i$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 6 Soit n un des entiers recherchés, et d_1, d_2, \dots, d_k une permutation adéquate des diviseurs positifs de n . Pour tout entier $i \leq k$, on pose $s_i = \sqrt{d_1 + d_2 + \dots + d_i}$. On dit qu'un entier ℓ est *bon* si $s_i = i$ et $d_i = 2i - 1$ pour tout $i \leq \ell$. Ci-dessous, nous allons démontrer que tout entier $\ell \leq k$ est bon.

Tout d'abord, pour tout entier $i \geq 2$, on remarque déjà que

$$d_i = s_i^2 - s_{i-1}^2 = (s_i - s_{i-1})(s_i + s_{i-1}) \geq s_i + s_{i-1} \geq 2.$$

Par conséquent, $d_1 = s_1 = 1$.

Considérons maintenant un bon entier $\ell \leq k - 1$. Nous allons démontrer que $\ell + 1$ est bon lui aussi. En effet, si $s_{\ell+1} + s_\ell$ divise $(s_{\ell+1} - s_\ell)(s_{\ell+1} + s_\ell) = d_{\ell+1}$, donc divise n . Il existe donc un entier m tel que

$$d_m = s_{\ell+1} + s_\ell \geq 2s_\ell + 1 \geq 2\ell + 1.$$

Comme $d_m > d_i$ pour tout $i \leq \ell$, on en déduit que $m \geq \ell + 1$. Mais alors

$$s_{\ell+1} + s_\ell = d_m = (s_m - s_{m-1})(s_m + s_{m-1}) \geq (s_m - s_{m-1})(s_{\ell+1} + s_\ell) \geq s_{\ell+1} + s_\ell.$$

Les inégalités sont donc des égalités, ce qui signifie que $s_m + s_{m-1} = s_{\ell+1} + s_\ell$, donc que $m = \ell + 1$, et que $s_m - s_{m-1} = 1$, c'est-à-dire que $s_{\ell+1} = s_\ell + 1 = \ell + 1$. On en conclut que

$$d_{\ell+1} = (s_{\ell+1} - s_\ell)(s_{\ell+1} + s_\ell) = 2\ell + 1,$$

ce qui signifie comme prévu que $\ell + 1$ est bon.

En conclusion, les diviseurs de n sont les entiers $1, 3, \dots, 2k - 1$. Réciproquement, si les diviseurs de n sont les entiers $1, 3, \dots, 2k - 1$, l'entier n convient assurément.

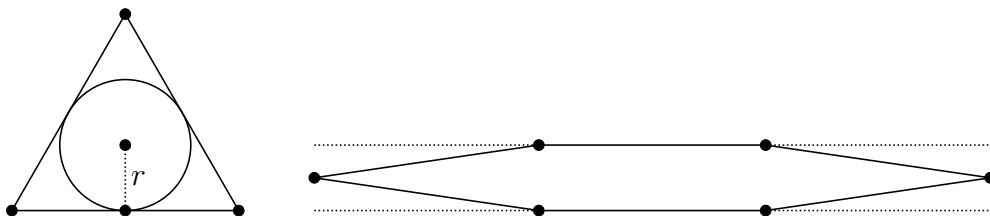
En particulier, si $k \geq 2$, l'entier d_{k-1} est un diviseur impair de $n - d_{k-1} = 2$, donc $d_{k-1} = 1$ et $k = 2$. Ainsi, soit $k = 1$, auquel cas $n = 1$, soit $k = 2$, auquel cas $n = 3$. Dans les deux cas, ces valeurs de n conviennent. Les entiers recherchés sont donc $n = 1$ et $n = 3$.

Commentaire des correcteurs Ce problème était plutôt difficile et a été assez peu résolu dans son intégralité : seule une dizaine d'élèves ont obtenu la totalité des points.

Beaucoup d'élèves ont cependant pu obtenir des points en montrant en essayant de trouver quels devaient être les premiers diviseurs de la permutation. Beaucoup d'élèves obtiennent par exemple $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5$, mais « n'osent » pas poursuivre en tentant une récurrence pour montrer que $d_i = 2i - 1$. Certains veulent conclure directement, ce qui n'est pas possible ici, et beaucoup de copies se terminent alors abruptement et sans aucune justifications par : « on en déduit que 1 et 3 sont les seules solutions ». Il faut être conscient que ce genre de bluff est rarement payant.

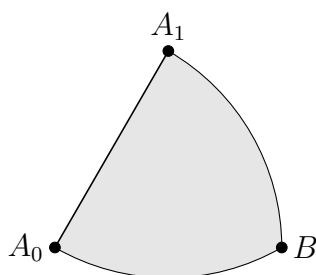
Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels tout n -gone convexe dont les côtés sont de longueur 1 contient un triangle équilatéral de côté 1.

Solution de l'exercice 7 Tout d'abord, nul entier n pair ne figure parmi les entiers recherchés. En effet, le cercle inscrit d'un triangle équilatéral de côté 1 a pour aire $\mathcal{A} = \sqrt{3}/4$ et pour rayon $r = 2\mathcal{A}/3 = \sqrt{3}/6$. Par conséquent, l'amande ci-dessous, dessinée dans le cas où $n = 6$, et elle-même contenue dans une bande de largeur r , ne saurait contenir de tel triangle équilatéral.

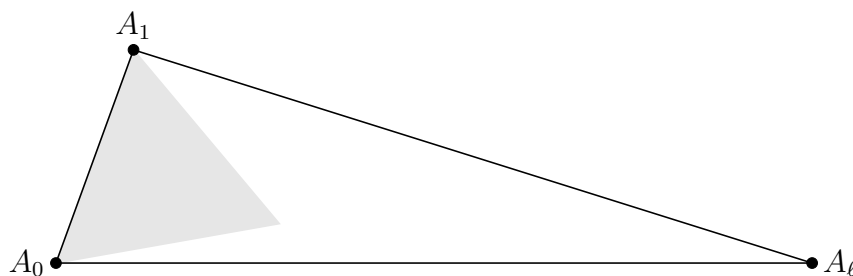


Réciproquement, soit $n \geq 3$ un entier pour lequel il existe un polygone $\mathcal{P} = A_0A_1 \dots A_{n-1}$, convexe de côté 1, tel que décrit dans l'énoncé, et qui ne contient aucun triangle équilatéral de côté 1. On suppose que ses sommets ont été listés dans le sens des aiguilles d'une montre. En s'inspirant de la construction ci-dessus, on note d la distance maximale entre deux points de \mathcal{P} et, sans perte de généralité, on suppose qu'il existe un point A_ℓ , avec $1 \leq \ell \leq k$, situé à distance d de A_0 .

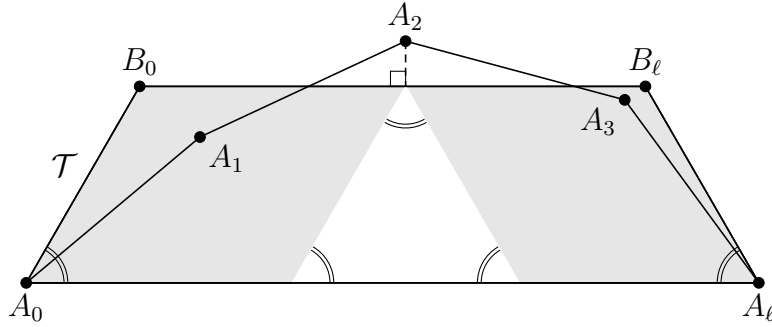
Si $d = 1$, le polygone \mathcal{P} est contenu dans la zone grise représentée ci-dessous, qui consiste en l'intersection de deux demi-cercles de rayon 1. Comme A_2 est à distance 1 de A_1 , il se trouve sur l'arc de cercle $\widehat{BA_0}$ et, de même, A_{n-1} se trouve sur l'arc de cercle $\widehat{A_1B}$. Comme \mathcal{P} est convexe, on en déduit que $A_2 = B = A_{n-1}$, donc que \mathcal{P} est un triangle équilatéral, qui se contient bien sûr lui-même.



On sait donc que $d > 1$, de sorte que A_0A_ℓ est une diagonale de \mathcal{P} . Si $\widehat{A_\ell A_0 A_1} \geq 60^\circ$, et puisque $A_1A_\ell \leq d = A_0A_\ell$, on sait que $\widehat{A_0 A_1 A_\ell} \geq \widehat{A_\ell A_0 A_1} \geq 60^\circ$, de sorte que le triangle $A_0A_1A_\ell$ lui-même contient un triangle équilatéral de côté 1, comme illustré ci-dessous.



Ainsi, $\widehat{A_\ell A_0 A_1} < 60^\circ$ et, de même, $\widehat{A_{\ell-1} A_\ell A_0} < 60^\circ$. On dessine alors le trapèze isocèle $\mathcal{T} = A_0 B_0 B_\ell A_\ell$ représenté ci-dessous dans le cas où $\ell = 4$, d'angles 60° en A_0 et A_ℓ et de côtés $A_0 B_0 = A_\ell B_\ell = 1$. S'il existe un point A_i (avec $1 \leq i \leq \ell - 1$) situé en-dehors de \mathcal{T} , le polygone \mathcal{P} contient de nouveau un triangle équilatéral de côté 1, comme illustré ci-dessous, en blanc sur fond gris.



Ce cas de figure ne survient donc pas non plus, de sorte que le polygone $A_0 A_1 \dots A_\ell$ est strictement inclus dans le polygone \mathcal{T} . Son périmètre $\ell + d$ est donc strictement inférieur à celui de \mathcal{T} , c'est-à-dire à $2d + 1$, donc $\ell - 1 < d$, et l'inégalité triangulaire indique également que $d \leq \ell$, ce qui signifie que $\ell = \lceil d \rceil$. En considérant le polygone $A_0 A_n A_{n-1} \dots A_\ell$, on constate de même que $n - \ell = \lceil d \rceil$, de sorte que $n = 2\lceil d \rceil$ est nécessairement pair.

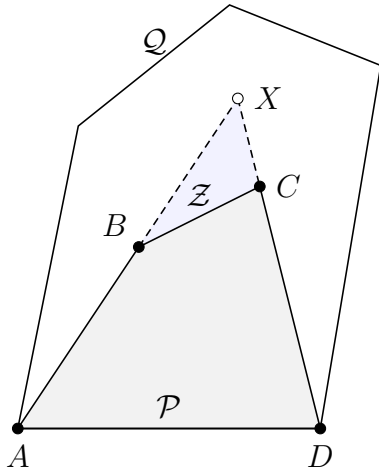
Ainsi, les entiers recherchés sont les entiers impairs.

Remarque : Nous avons affirmé ci-dessus que, lorsqu'un polygone convexe \mathcal{P} est strictement inclus dans un polygone \mathcal{Q} , le périmètre de \mathcal{P} est strictement inférieur à celui de \mathcal{Q} . Cette affirmation « classique » se démontre comme suit.

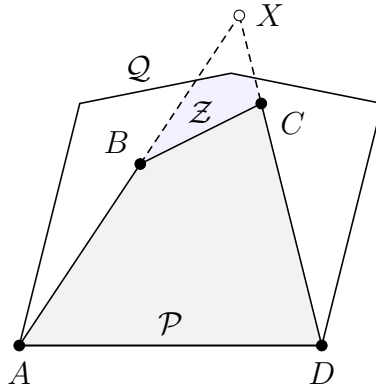
Tout d'abord, soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe de \mathcal{Q} . Par construction, son périmètre est inférieur ou égal à celui de \mathcal{Q} , et on peut donc supposer sans perte de généralité que \mathcal{Q} est convexe.

Dans la suite, on suppose \mathcal{Q} fixé, puis on note $p(\mathcal{P})$ le périmètre d'un polygone \mathcal{P} et $c(\mathcal{P})$ le nombre de côtés de \mathcal{P} qui ne sont pas inclus dans des côtés de \mathcal{Q} . On démontre alors par récurrence sur $c(\mathcal{P})$ que $p(\mathcal{P}) \leq p(\mathcal{Q})$.

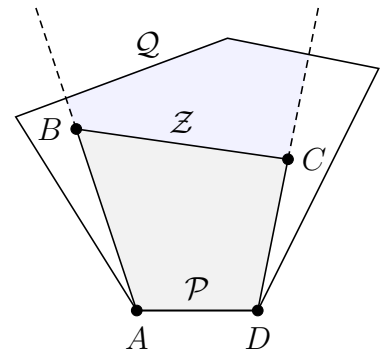
Étant donné un polygone \mathcal{P} strictement inclus dans \mathcal{Q} , on sait que $c(\mathcal{P}) \geq 1$, et on considère un côté $[BC]$ de \mathcal{P} qui n'est pas inclus dans un côté de \mathcal{Q} . Puisque \mathcal{Q} est convexe, ce côté est strictement inclus dans \mathcal{Q} . Puis, comme illustré ci-dessous, on prolonge les demi-droites $[AB)$ et $[DC)$ jusqu'à l'infini, où jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. On définit ainsi une zone finie ou infinie, que l'on note \mathcal{Z} , et qui est susceptible d'être bornée ou non.



Cas 1



Cas 2



Cas 3

On intègre alors au polygone \mathcal{P} la portion du polygone \mathcal{Q} incluse dans la zone \mathcal{Z} , que nous avons représentée en bleu. On forme ainsi un nouveau polygone convexe \mathcal{P}' . Puisque le côté $[BC]$ de \mathcal{P} a disparu, on sait que $c(\mathcal{P}') < c(\mathcal{P})$. L'hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire indiquent alors que $p(\mathcal{P}) < p(\mathcal{P}') \leq p(\mathcal{Q})$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Ce problème était extrêmement difficile, au point qu'un seul élève a eu plus de deux points (et l'a résolu). De nombreux élèves ont eu l'excellente idée d'utiliser une amande allongée pour traiter le cas n pair. L'idée principale, difficile à trouver, était alors de continuer sur une construction analogue en considérant l'allongement d'un polygone, c'est-à-dire la plus grande distance entre deux sommets. Il est cependant dommage que plusieurs élèves aient prétendu avoir « magiquement » résolu le cas n impair : de telles affirmations n'aideront évidemment pas à obtenir des points, et leur seul effet éventuel serait de fâcher le correcteur (ce qui n'a pas été le cas ici).