# *Olympiades Françaises de Mathématiques*
# *2012-2013*

## *Test d'entraînement du weekend du 24-25 novembre*

*Durée : 4h30*

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le sujet « junior » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- le sujet « olympique » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

# Exercices Juniors

*Exercice 1.* Soit $x$ un réel strictement positif vérifiant $x + \frac{1}{x} = 3$. Déterminer la valeur de

$$x^7 + \frac{1}{x^7}.$$

*Exercice 2.* Combien d'entiers relatifs peuvent être écrits sous la forme

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 2012$$

pour des choix de signes $+$ et $-$?

*Exercice 3.* Déterminer le plus grand entier $n$ tel que l'on puisse trouver des entiers distincts tels que $a_1, \ldots, a_n \in [1, 100]$ et qui vérifient les deux conditions

a) aucun des nombres $a_1, \ldots, a_n$ n'est un nombre premier ;

b) les nombres $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux premiers entre eux.

*Exercice 4.* Soit $ABC$ un triangle d'aire $1$. Déterminer l'aire maximale d'un parallélogramme dont les quatre sommets sont à l'intérieur ou sur le bord de $ABC$.

## Sujet Olympique

*Exercice 5.* Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z),$$

pour tous rationnels $x, y, z$.

*Exercice 6.* Un octogone régulier convexe est pavé par des parallélogrammes. Prouver que parmi ces parallélogrammes, il y a au moins deux rectangles.

*Exercice 7.* Soit $p$ un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ qui possèdent la propriété suivante :

"Pour tout entier $k \geqslant 1$, si $k^n - 1$ est divisible par $p$, alors $k^n - 1$ est aussi divisible par $p^2$."

*Exercice 8.* Soit $\Gamma$ et $\Gamma'$ deux cercles du plan qui se coupent en $A$ et $B$, et soit $\Delta$ une droite qui passe par $B$ et qui recoupe $\Gamma$ en $M$ et $\Gamma'$ en $N$. On suppose que $B$ est entre $M$ et $N$. Soit $I$ le milieu de l'arc $AM$ du cercle $\Gamma$ qui ne contient pas $B$, et soit $J$ le milieu de l'arc $AN$ du cercle $\Gamma'$ qui ne contient pas $B$. Enfin, on note $K$ le milieu de $[MN]$.

Prouver que le triangle $IKJ$ est rectangle en $K$.

*Fin*

# *Corrigé du test d'entraînement no. 1*

## *Test junior*

**Exercice 1.** Pour tout entier $n$, notons $x_n = x^n + \dfrac{1}{x^n}$. On calcule immédiatement que $3x_n = x_1 x_n = x_{n+1} + x_{n-1}$, ce qui donne $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$. Compte tenu de $x_0 = 2$ et $x_1 = 3$, on calcule successivement

$$\begin{aligned}
x_2 &= 3x_1 - x_0 = 7\\
x_3 &= 3x_2 - x_1 = 18\\
x_4 &= 3x_3 - x_2 = 47\\
x_5 &= 3x_4 - x_3 = 123\\
x_6 &= 3x_5 - x_4 = 322\\
x_7 &= 3x_6 - x_5 = 843
\end{aligned}$$

**Exercice 2.** Notons $S = 1+2+3+\cdots+2012 = 2012 \times 2013/2 = 1006 \times 2013$. C'est un nombre pair. Comme le fait de changer un signe ne change pas la parité, les entiers de la forme $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2012$ sont des entiers pairs compris entre $-S$ et $S$.

Réciproquement, montrons que si $a$ est un entier pair compris entre $-S$ et $S$ alors il peut s'écrire sous la forme $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2012$. Si $a = -S$ c'est évident, supposons donc $a > -S$. Il existe un entier $b$ tel que $0 \leq b < S$ et $a = -S + 2b$. Soit $k$ le plus petit entier tel que $b \leq \displaystyle\sum_{j=k}^{2012} j$. On a

$$\sum_{j=k-1}^{2012} j < b \leq \sum_{j=k}^{2012} j$$

donc il existe un entier $\ell \in [1, k-1]$ tel que $b = \ell + \displaystyle\sum_{j=k}^{2012} j$.

En multipliant cette égalité par 2 puis en retranchant $S$, on obtient

$a = -1-2\cdots-(\ell-1)+\ell-(\ell+1)-(\ell+2)-\cdots-(k-1)+k+(k+1)+(k+2)+\cdots+2012.$

<u>Conclusion</u> : il y a exactement $\dfrac{2012 \times 2013}{2} + 1$ nombres pouvant s'écrire sous la forme $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2012$.

*Autre méthode.*

On part d'une suite $(-, -, \ldots, -)$ de 2012 signes "moins". On introduit un $+$, et on le décale vers la droite :
$(+, -, -, \ldots, -, -)$
$(-, +, -, \ldots, -, -)$
$(-, -, +, \ldots, -, -)$
$\cdots$
$(-, -, -, \ldots, -, +)$.
Puis on introduit un deuxième signe $+$, et on recommence le même procédé :
$(+, -, -, \ldots, -, -, +)$
$\cdots$

$(-,-,-,\dots,-,+,+)$
et ainsi de suite jusqu'à atteindre $(+,+,\dots,+)$.

A chaque étape, la somme correspondante augmente de 2 puisque dans la somme il existe $k$ tel que l'opération consiste à remplacer $+k-(k+1)$ par $-k+(k+1)$. La première somme est $-S$, la dernière est $S$, donc on a ainsi atteint tous les nombres pairs compris entre $-S$ et $S$.

**Exercice 3.** Soit $n$ le plus grand entier tel qu'il existe $a_1,\dots,a_n$ comme dans l'énoncé. Par maximalité de $n$, l'un des $a_i$ est égal à 1. Quitte à réindexer la suite on peut supposer que $a_1 = 1$.

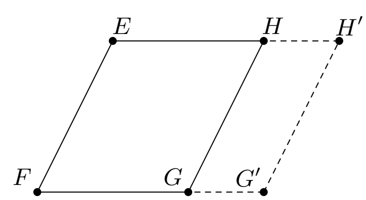
Pour tout $k > 1$, $a_k$ est plus petit que 100 et n'est pas premier donc il possède un facteur premier $p_k$ plus petit que 10. Les $p_k$ sont deux à deux distincts puisque les $a_k$ sont premiers entre eux. Comme il n'y a que quatre nombres premiers plus petits que 10 (à savoir $2,3,5,7$), on a $n-1 \leq 4$ donc $n \leq 5$.

Réciproquement, pour $n = 5$ on a une solution avec la suite $1,4,9,25,49$.

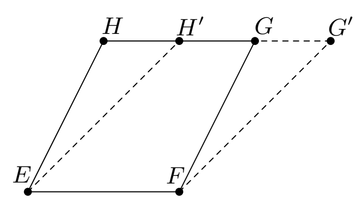
<u>Conclusion</u> : le plus grand entier $n$ vérifiant les conditions de l'énoncé est 5.

**Exercice 4.** Notons $ABC$ le triangle. Pour tout parallélogramme $EFGH$, considérons les opérations suivantes :

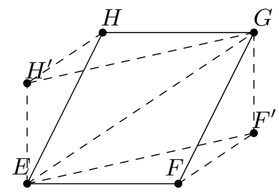
(OP1) Remplacer $G$ et $H$ par $G'$ et $H'$ tels que $GG'H'H$ est un parallélogramme adjacent à $EFGH$ ;




(OP2) Translater $G$ et $H$ d'un même vecteur de direction $(GH)$ ;



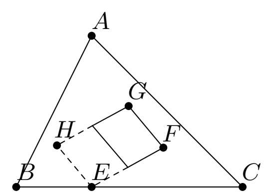

(OP3) Translater $H$ d'un vecteur de direction $\overrightarrow{EG}$ et translater $F$ d'un vecteur opposé.



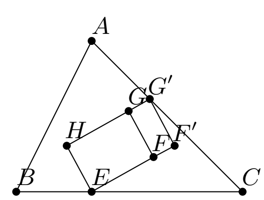

Il est facile de voir que (OP1) augmente l'aire tandis que (OP2) et (OP3) conservent l'aire.

Partons d'un parallélogramme situé à l'intérieur de $ABC$. On va lui appliquer une série de transformations qui laissent l'aire constante ou bien l'augmentent.

S'il ne touche pas le bord, on peut le translater de sorte qu'un des sommets (disons $E$) touche le bord.

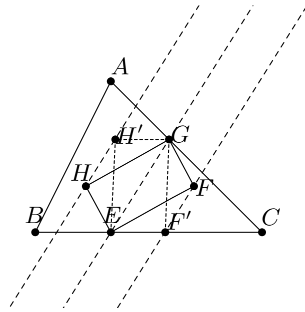



Puis, en appliquant (OP1) on se ramène à ce qu'un autre sommet touche le bord. Si cet autre sommet n'est pas diamétralement opposé à $E$ on applique encore une transformation de type (OP1) de sorte que deux sommets diamétralement opposés du parallélogramme touchent le bord.

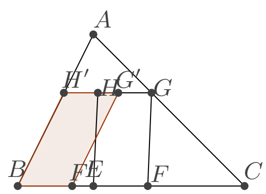



Supposons par exemple que $E \in [B, C]$ et $G \in [C, A]$. Les points $A$ et $B$ sont dans un même demi-plan délimité par la droite $(EG)$. On note $H$ le sommet du parallélogramme qui est dans ce demi-plan et $F$ le dernier sommet.

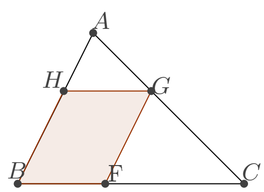
Au moins l'une des demi-droites passant par $H$ et parallèles à $(EG)$ ne traverse pas la droite $[A, B]$. On déplace $H$ le long de cette demi-droite et on déplace $F$ suivant la même direction mais en sens opposé, à la même vitesse, jusqu'à ce que l'un des deux points $F$ ou $H$ atteigne $[B, C]$ ou $[C, A]$. Supposons par exemple qu'il s'agisse de $[B, C]$.




En appliquant des opérations de type (OP3), on se ramène au cas où $E = B$, $F \in [B, C]$ et $H \in [A, B]$.




Puis, en appliquant (OP1) on amène $G$ sur le segment $[A, C]$.




Le théorème de Thalès donne
$$\frac{BF}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{AH}{BH} = 1 - \frac{BH}{AB}.$$
Complétons $ABC$ en un parallélogramme $ABCD$. On a
$$S(EFGH) = \frac{BF}{BC} \times \frac{BH}{BA} \times S(ABCD) = 2x(1-x)$$
où $x = \dfrac{BF}{BC}$. Comme $x(1-x) = x - x^2 = \dfrac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$, l'aire de $EFGH$ est plus petite que $\dfrac{1}{2}$ avec égalité lorsque $E = B$, $F$ est le milieu de $[B, C]$ et $H$ est le milieu de $[A, B]$.

Conclusion : l'aire maximale d'un parallélogramme à l'intérieur de $ABC$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

*Test olympique*

**Exercice 5.** Montrons d'abord le résultat préliminaire suivant.

*Soit $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ on a $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Alors il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.*

En effet, en prenant $x = y = 0$ on a d'abord $g(0) = 0$. Ensuite, en prenant $y = nx$ ($n \in \mathbb{N}$) on obtient $g(nx + x) = g(nx) + g(x)$, ce qui permet par une récurrence immédiate de voir que $g(nx) = ng(x)$. On en déduit que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n \neq 0$,

$$g\Big(\frac{m}{n}\Big) = \frac{1}{n}\Big(ng\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big) = \frac{1}{n}g\Big(n\frac{m}{n}\Big) = \frac{1}{n}g(m) = \frac{1}{n}mg(1) = a\frac{m}{n}$$

où $a = g(1)$.

On en déduit que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$.

Si maintenant $x \in \mathbb{Q}_-$, d'après ce qui précède on a $g(-x) = a(-x) = -ax$, donc $0 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x) = g(x) - ax$, et donc on a bien $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Revenons à l'exercice. En prenant $y = -f(z)$ dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$f(x + f(0)) = f(x+z) - f(z). \tag{1}$$

Ceci montre que, pour $x$ fixé, la fonction $z \mapsto f(x+z) - f(z)$ est constante. Elle est égale à sa valeur en $z = 0$ qui est $f(x) - f(0)$ :

$$f(x+z) - f(z) = f(x) - f(0).$$

Posons $g(x) = f(x) - f(0)$. On a pour tous $x, z \in \mathbb{Q}$

$$g(x+z) - g(z) = (f(x+z) - f(0)) - (f(z) - f(0)) = f(x+z) - f(z) = f(x) - f(0) = g(x).$$

D'après le préliminaire, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$, donc $f(x) = ax + b$ où $b = f(0)$.

On reporte l'expression de $f$ dans l'équation (1) pour $x = z = 0$, ce qui donne $ab + b = 0$, donc $b = 0$ ou $a = -1$.

<u>Premier cas</u> : $b = 0$. L'équation fonctionnelle devient

$$a(x + (a + (y + az)) = y + a(x+z),$$

ce qui se simplifie en $a^2y + a^3z = y + az$. En prenant $y = 1$ et $z = 0$ on obtient la condition nécessaire $a \in \{-1, 1\}$. Réciproquement, si $a \in \{-1, 1\}$ alors $a^2 = 1$ et $a^3 = 3$ donc l'équation fonctionnelle est vérifiée.

Dans le premier cas on trouve donc les solutions $f(x) = x$ et $f(x) = -x$.

<u>Deuxième cas</u> : $a = -1$. On a alors $f(x) = b - x$ et on vérifie immédiatement que $f(x + f(y + f(z))) = b - (x + b - (y + b - z)) = b - x + y - z = y + f(x+z)$.

<u>Conclusion</u> : les solutions de l'équation fonctionnelle sont $x \mapsto x$ et $x \mapsto b - x$ pour un certain $b \in \mathbb{Q}$.

**Exercice 6.** Notons $A_1, \ldots, A_8$ les sommets de l'octogone parcourus dans le sens direct.

Il existe un parallélogramme du pavage $P_1$ dont l'un des côtés est inclus dans $[A_1, A_2]$. De même, si $P_1$ n'est pas adjacent à $[A_5, A_6]$ alors le côté opposé de $P_1$ est adjacent à un autre parallélogramme du pavage $P_2$, etc. On construit ainsi une suite $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de parallélogrammes du pavage tels que pour tout $i$, $P_i$

et $P_{i+1}$ ont des côtés adjacents qui sont parallèles à $(A_1A_2)$, et $P_k$ est adjacent à $[A_5, A_6]$.

De même, il existe une suite $Q_1, \ldots, Q_\ell$ de parallélogrammes du pavage tels que pour tout $j$, $Q_j$ et $Q_{j+1}$ ont des côtés adjacents qui sont parallèles à $(A_3A_4)$, $Q_1$ est adjacent à $[A_3, A_4]$ et $Q_\ell$ est adjacent à $[A_7, A_8]$.

La suite de parallélogrammes $(P_1, \ldots, P_k)$ divise l'octogone en deux zones telles que $Q_1$ et $Q_\ell$ appartiennent à deux zones différentes. Par conséquent, il existe $i$ et $j$ tels que $P_i = Q_j$. Alors $P_i$ est un rectangle du pavage dont les côtés sont parallèles à $(A_1A_2)$ et à $(A_3A_4)$. De même il y a un rectangle du pavage dont les côtés sont parallèles à $(A_2A_3)$ et à $(A_4A_5)$, et ces deux rectangles sont distincts puisqu'ils n'ont pas la même direction.

**Exercice 7.** Soit $k$ un entier possédant cette propriété.

Pour $k = p+1$, on a $k^n - 1 = (p+1)^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0\,[p]$, donc $(p+1)^n - 1 \equiv 0\,[p^2]$. Or,

$$(1+p)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}p + \binom{n}{2}p^2 + \cdots \binom{n}{n}p^n \equiv 1 + np\,[p^2],$$

donc $1 + np \equiv 1\,[p^2]$. Il vient : $p^2 \mid (1+np) - 1 = np$, donc $p \mid n$.

Réciproquement, supposons $p \mid n$. Il existe un entier $m$ tel que $n = pm$. Soit $k$ un entier tel que $k^n - 1$ est divisible par $p$. Comme $k^n = (k^m)^p$, d'après le petit théorème de Fermat on a $k^n \equiv k^m\,[p]$ donc $k^m - 1$ est divisible par $p$. Soit $\ell$ un entier tel que $k^m = 1 + p\ell$. On a

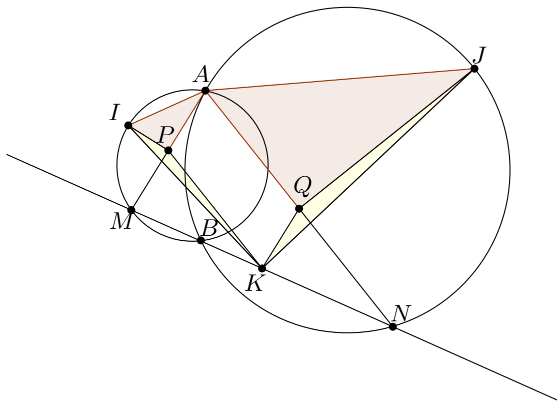
$$\begin{aligned} k^n &= (1+\ell p)^p \\ &= \binom{p}{0} + \binom{p}{1}\ell p + \binom{p}{2}(\ell p)^2 + \cdots \binom{p}{p}(\ell p)^n \\ &= 1 + \ell p^2 + \binom{p}{2}(\ell p)^2 + \cdots \equiv 1\,[p^2], \end{aligned}$$

donc $k^n - 1$ est divisible par $p^2$.

<u>Conclusion</u> : les entiers qui vérifient la propriété sont les multiples de $p$.

**Exercice 8.** On appelle $P$ et $Q$ les milieux respectifs de $[AM]$ et $[AN]$. Le point $K$ étant le milieu de $[MN]$, on a immédiatement le parallélisme des droites $(KP)$ et $(AN)$ d'une part, $(KQ)$ et $(AM)$ d'autre part, ainsi que les égalités

$$KP = AQ \text{ et } KQ = AP. \tag{2}$$




Les points $I$ et $J$ étant les milieux des arcs $AM$ et $AN$, les droites $(IP)$ et $(JQ)$ sont les médiatrices respectives de $[AM]$ et $[AN]$. Ainsi, $(IP)$ et $(KQ)$ d'une part, $(JQ)$ et $(KP)$ d'autre part, sont perpendiculaires, et donc

$$\widehat{IPK} = \widehat{KQJ}. \tag{3}$$

D'autre part, $(BI)$ et $(BJ)$ sont les bissectrices intérieures et extérieures de $\widehat{MBA}$ donc elles sont perpendiculaires et

$$\widehat{IBA} + \widehat{JBA} = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Par ailleurs, les points $A, B, M, I$ d'une part, $A, B, N, J$ d'autre part, étant cocycliques avec $I$ et $J$ milieux des arcs adéquats, on a $\widehat{IAP} = \widehat{IAM} = \widehat{IBM} = \widehat{IBA}$ et donc

$$\begin{aligned} \widehat{JAQ} &= \widehat{JAN} = \widehat{JBN} = \widehat{JBA} \\ &= \frac{\pi}{2} - \widehat{IBA} \quad \text{d'après (4)} \\ &= \frac{\pi}{2} - \widehat{IAP} = \widehat{AIP}. \end{aligned}$$

Les triangles rectangles $IPA$ et $AQJ$ sont donc semblables, et on a $\dfrac{IP}{AP} = \dfrac{AQ}{JQ}$.

D'après (2), il vient alors

$$\frac{IP}{KQ} = \frac{KP}{JQ}. \tag{5}$$

D'après (3) et (5), il apparaît que les deux triangles $IPK$ et $KQJ$ ont un angle égal et les deux côtés adjacents proportionnels, ce qui assure qu'ils sont semblables. Or, deux de leurs côtés étant perpendiculaires entre eux, les troisièmes le sont aussi, ce qui prouve que $\widehat{IKJ}$ est droit et achève la démonstration.

*Esquisse d'une autre solution, utilisant une méthode analytique.*

Quitte à effectuer une similitude, on peut supposer que

$$\begin{aligned} B &= (0,0) \\ A &= (1,0) \\ I &= (u\cos\alpha, u\sin\alpha) \\ J &= (v\cos\beta, v\sin\beta) = (v\sin\alpha, -v\cos\alpha) \end{aligned}$$

avec $u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} M &= (m\cos 2\alpha, m\sin 2\alpha) \\ N &= (n\cos 2\beta, n\sin 2\beta) = (-n\cos 2\alpha, -n\sin 2\alpha) \end{aligned}$$

pour certains $m, n \in \mathbb{R}$.

On vérifie facilement que les cercles passant par $A$ et $B$ ont des équations de la forme $x^2+y^2-x+\lambda y = 0$. En écrivant que $B, A, I$ et $M$ sont cocycliques, on obtient $u - \cos\alpha + \lambda\sin\alpha = m - \cos 2\alpha + \lambda\sin 2\alpha = 0$. On élimine $\lambda$ entre ces deux équations. En utilisant que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ et $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, on obtient $m = 2u\cos\alpha - 1$. De même, $n = 2v\cos\beta - 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} K &= ((u\cos\alpha - v\cos\beta)\cos 2\alpha, (u\cos\alpha - v\cos\beta)\sin 2\alpha) \\ &= ((u\cos\alpha - v\sin\alpha)\cos 2\alpha, (u\cos\alpha - v\sin\alpha)\sin 2\alpha) \end{aligned}$$

On calcule en utilisant les formules de duplication des angles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KI} &= (\sin\alpha(-u\sin 2\alpha, -v\cos 2\alpha), \sin\alpha(u\cos 2\alpha - v\sin 2\alpha)) \\ \overrightarrow{KJ} &= (\cos\alpha(u\cos 2\alpha, -v\sin 2\alpha), \cos\alpha(u\sin 2\alpha + v\cos 2\alpha)) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{KI}\cdot\overrightarrow{KJ}$ est nul. Nous laissons le calcul au lecteur.