Problèmes du Marathon d'équations fonctionnelles

Daniel Cortild

November 2, 2018

Problème 1 (Problème 1, sélection EGMO 2017, Hongrie)
Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

[/hide]

Problème 2
Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_0^+$,

$$f(xy) = f(x + y) \cdot \Big(f(x) + f(y)\Big)$$

Problème 3
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, telle que pour tout x, y dans $\mathbb{R}^+$,

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

Problème 4 (AwesomeMath 2015/4 S348)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(a^2, f(b, c) + 1) = a^2(bc + 1) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Problème 5
Trouver les fonctions définies de R vers R tel que $f(2^x + 2y) = 2^y f(f(x)).f(y)$

Problème 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que, pour tout $x > 0$,

$$f(f(x)) = 6x - f(x)$$

Problème 7
; Une équation fonctionelles pas comme les autres! On dit que un triangle ABC est bon si pour tout point D du coté BC, si P et Q sont les projections orthogonales de D sur AB et AC, respectivement , alors l'image de D par la symétrie axiale d'axe PQ appartient au cercle circonscrit à ABC. Prouver que ABC est bon si et seulement si $\angle A = 90°$ et $AB = AC$.

Problème 8 (Polish MO Finals 2014)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ telles que, pour tout $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ itérées}})(q) = f(nq)$$

Problème 9 (BxMO 2013 Problem 2)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait

$$f(x+y) + y \leq f(f(f(x)))$$

Problème 10
Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = x^2 - 2$ pour tout réel x ?

Problème 11
Trouver toutes les fonctions surjectives $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que : $f(n) \geq n + (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Problème 12
EGMO 2012 #3: Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y on a :

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

Problème 14
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes. i) $f(x) \geq 0$ pour tout rationnel x avec égalité ssi $x = 0$. ii) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ pour tout rationnels x, y. iii) $f(x+y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ pour tout rationnels x, y.

Problème 15
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y)$$

Problème 16
Montrer que $f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$ est équivalent à $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Problème 17
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

pour tout x et y des réels.

Problème 18 (Ireland MO 1996)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(1) = 1$ et, dès lors que x, y et $x+y$ se situent dans $[0,1]$, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. Montrer que $f(x) \leq 2x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Problème 19
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^3 + f(y)) = x^2 f(x) + y$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

Problème 20 (Bulgarian MO 1998)
Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ telle que

$$f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x)+y) \qquad \forall x, y > 0$$

Problème 21
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ telles que

$$f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y))$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}_0^+$.

Problème 22 (Polish MO 2012)
Trouver toutes les paires de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respectant

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problème 23
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(x) + 2y) = 10x + f(f(y) - 3x)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

Problème 24
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{Z}_{>0} \to \mathbf{Z}_{>0}$ telle que :

$$f(f(n)) + f(n + 1) = n + 2, \forall n \in \mathbf{Z}_{>0}$$

Problème n+1=25 (Remarque $n \mid 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. USAMO et Balkan MO 2012)
Edit Effectivement, je n'avais juste pas en tête que $n = 24$ en postant la réponse
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ telles que $f(n!) = f(n)!$ et $m - n \mid f(m) - f(n)$ pour tout $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Problème 26
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2$$

pour tout x, y des réels.

Problème 27
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$

Problème 28
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x)) = f(x) + f(y) + f(z)$$

pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Problème 27
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$

Problème 29
Soient $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \;\text{ et }\; f(x^{m+n}) = x^m \cdot f(x^n) \;\text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

[/hide]

Problème 30 (SL 2007)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que , $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

EDIT Remarque : 0 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{R}_+$.

Problème 31
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problème 32 (Czech-Polish-Slovak MO 2002)
Trouver le nombre de fonctions $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ avec la propriété

$$x + f(f(f(f(x)))) = n + 1 \quad \text{pour tout } x \in [\![1, n]\!].$$

Problème 33
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans lui même telles que, pour tout x, y, z réels : si

$$x^3 + f(y)x + f(z) = 0$$

alors

$$f(x)^3 + yf(x) + z = 0$$

Problème 34
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k) \cdot f(k+1)} = \frac{f(f(n))}{f(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Problème 34bis
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ telles que

$$\text{ppcm}(f(a), b) = \text{ppcm}(a, f(b)) \quad \forall a, b \in \mathbb{N}_0.$$

Problème 35 (Coupe Animath d'Automne 2018)
Soit a un réel. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x \in \mathbb{R}, y, z \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$af\left(\frac{x}{y}\right) + af\left(\frac{x}{z}\right) - f(x)f\left(\frac{y+z}{2}\right) \geq a^2?$$