Problèmes du Marathon de combinatoire

Daniel Cortild

November 2, 2018

Problème 1
Existe-t-il un ensemble infini E d'ensembles d'entiers positifs A_1, A_2, A_3,... tel que $\forall\, i \neq j \neq k \neq l$, on a: $\cdot$ $A_i \cap A_j \cap A_k$ est un singleton. $\cdot$ $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l$ est vide?

Problème 2 (Tournament of the towns 1982)
Dans un pays il y a au moins 101 villes et des liaisons aériennes directes (aller-retour) existent entre certaines d'elles. La capitale du pays est reliée à 100 villes et chaque autre ville possède exactement 10 liaisons aériennes différentes. De plus il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre par des liaisons aériennes, en transitant éventuellement par d'autres villes. Prouver qu'il est possible de fermer la moitié des liaisons aériennes de la capitale tout en préservant la capacité de voyager d'une ville à l'autre.

Problème 3
Alice et Bob jouent à un jeu. Ils commencent avec une pile de 2016 pierres. Chacun à son tour, un joueur retire de la pile un nombre de pierres égal à un diviseur du nombre de pierres restantes. Celui qui retire la dernière pierre perd. Alice commençant, qui possède une stratégie gagnante ?

Problème 4 (Argentinian team selection test 2011, Problem 5)
$n \geq 3$ joueurs participent à un tournoi de tennis. Chaque joueur joue exactement une fois contre chaque autre joueur. De plus chacun a gagné au moins un match (il n'y a pas de match nul). Prouver qu'il existe 3 joueurs A, B, C tels que A a battu B, B a battu C et C a battu A.

Problème 5
Une compétition mathématique consiste en 3 problèmes. Pour chaque problème, chaque étudiant reçois un score (entier) de 0 à 7 compris. On sait que, pour toutes paires d'étudiants, il existe au plus un problème pour lequel ils ont obtenu la même note. Quel est le nombre maximum de participants ?

Problème 6 (IMO 2002, Problem 1)
Soit S l'ensemble des couples (h, k) avec h, k entiers positifs tels que $h + k < n$. Chaque élément de S est colorié en rouge ou bleu de sorte que si (h, k) est rouge et $h' \leq h, k' \leq k$, alors (h', k') est aussi rouge. Soit A l'ensemble des sous-ensembles de S qui ont n éléments bleus avec un premier membre différent et B celui des sous-ensembles de S qui ont n éléments bleus avec un deuxième membre différent. Prouver que $|A| = |B|$.

Problème 7
À partir d'un tableau de taille 18×18 dont les cases sont noires et blanches, on effectue une suite d'opérations. Une opération consiste à choisir une ligne/colonne et de changer la couleur de toutes les cases de celle-ci. Sachant que le tableau est initialement blanc, est-il possible d'atteindre une situation dans laquelle exactement 16 cases sont noires ?

Problème 8 (Argentinian TST)
On considère une grille $n \times n$ composée de carrés unitaires. On colorie les centres de certaines cases de telle sorte qu'il n'existe pas de triangle rectangle dont les sommets sont des centres coloriés. Quel est le plus grand nombre de centres que l'on puisse colorier?

Problème 9 (All-Russian 2008)
Un nombre naturel est écrit sur un tableau. Quand un nombre x est écrit, on peut le remplacer $2x+1$ ou $\frac{x}{x+2}$. À un moment donné, 2016 apparaît sur le tableau. Montrer qu'il y était dès le début.

Problème 10 (Tournament of towns 2008, Problem 1)
100 reines sont placées sur un échiquier 100×100 de telle sorte qu'aucune ne peut en attaquer une autre. On subdivise l'échiquier en 4 sous-échiquiers 50×50 qui ne se superposent pas. Prouver qu'il y a au moins une reine dans chacun de ces échiquiers.

Problème 11
Trouver toutes les paires de cases d'un échiquier 8×8 telles que, en retirant cette paire, l'échiquier reste pavable avec des dominos 2×1 et 1×2. (Pavable donc ni recouvrements, ni dépassements)

Problème 12
Soit a_n une suite croissante d'entiers strictement positifs. S'il existe s et k des entiers strictement positifs tq $\dfrac{s}{a_s} = k+1$, prouver qu'il existe r tq $\dfrac{r}{a_r} = k$ EDIT: je n'avais pas vu qu'on employait déjà l'échiquier dans l'énoncé

Problème 13 (MEMO 2012)
Soit p, un nombre premier impair. Pour toute permutation $\sigma : [\![1,p]\!] \to [\![1,p]\!]$, on définit

$$f(\sigma) = |\{n \in [\![1,p]\!] \text{ tel que } p \mid \sigma(1) + \ldots + \sigma(n)\}|$$

Trouver $\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} f(\sigma)$ (où $\mathfrak{S}_p$ est l'ensemble des permutations de $[\![1,p]\!]$).

Problème 14
Soit (a_n) une suite de 2011 entiers positifs, tel qu'il n'existe aucun nombre premier $p > 28$qui divise l'un des termes de la suite. Montrer que cette suite contient 4 termes dont le produit est une puissance 4ème d'un entier.

Problème 16
Le roi est placé sur la case $A1$ d'un échiquier (8×8). Pour se rendre sur H (la 8ième rangée), la longueur minimale de son parcours est donc de 7 cases et on remarque que le nombre de parcours de longueur 7 le menant aux cases $Z1$, $Z2$ et $Z3$ de la huitième rangée à partir de $A1$ sont resp. un carré parfait, un cube parfait, àla fois un cube parfait et un carré parfait. Quel est le nombre de parcours de longueur 7 qui le mènent de $Z1$ à $Z3$ sans passer par $Z2$? (pour cela il faut identifier qu'elles sont les cases $Z1$, $Z2$ et $Z3$)

Problème 17 (Mathematics Journal for Youth - Vietnam) EDIT J'ai légèrement clarifié l'énoncé.
Étant donné un échiquier de taille $n \times n$ dont on a collé/identifié les côtés opposés pour former un tore. (En d'autre mots, pour tout i, j, les cases $(i, 1)$ et $(1, j)$ deviennent adjacentes aux cases (i, n) et (n, j) respectivement.) Montrer qu'on peut disposer n dames de sorte qu'aucunes d'entre-elles ne s'attaquent si et seulement si $\text{pgcd}(n, 6) = 1$.

Problème 18
Soit n un entier positif. $2n+1$ personnes se réunissent. Pour tout groupe de n personnes il y en a une $n+1$-e qui les connait toutes. Montrer qu'il y en a une connaissant tout le monde. Le résultat est-il encore vrai avec $2n+2$ personnes?

Problème 19
Une fourmi se balade sur une grille $(2m+1) \times (2n+1)$. Est-il possible pour la fourmi de passer exactement une fois à chaque intersection et se retrouver à son point de départ ?

Problème 21 (IMO2016 #6)
n segments se trouvent dans le plan de sorte que deux segments quelconques se coupent en un point différents de leurs extrémités , mais sans que trois d entre eux possédent un point commun. Pour chaque segment , Geoff doit choisir une extrémité et y placer une grenouille tournée vers l autre extrémité . Ensuite il doit claquer des mains , au total $n-1$ fois . Chaque fois qu il claque des mains chaque grenouille saute immédiatement en avant sur son segment jusqu'au point d'intersection suivant. Les grenouilles ne changent jamais de direction . Geoff souhaite placer les grenouilles de sorte qu'il n'y en fait jamais deux à un point d'intersection. Prouver que ceci est possible pour n impair mais impossible pour n pair

Problème 22 (1979 Putnam Exam)
Soit A, un ensemble de $2n$ points du plan tel qu'aucun triple de points parmi ceux-ci ne soient alignés. Ces points sont coloriés en 2 couleurs, n en rouge et n en bleu. Montrer qu'il existe n segments disjoints deux-à-deux, dont les extrémités sont des points de A de couleurs différentes.

Problème 23 (Netherlands TST 2015)
Soit un échiquier $n \times n$ avec $n \geq 2$ un entier. On colorie chaque case de cet échiquier en bleu ou en rouge. Un domino consiste en deux cases adjacentes de l'échiquier. Un domino est qualifié de coloré si les deux cases qu'il contient sont de couleurs différentes. Autrement il est qualifié de terne. Trouver le plus grand entier k tel que, quel que soit le coloriage des cases de l'échiquer, il y a au moins k dominos colorés disjoints ou k dominos ternes disjoints.

Problème 24
BXMO 2011, (inspiré du SL 2004#C5): Abby et Brian jouent au jeu suivant: ils choisissent d'abord un entier positif N. ensuite ils écrivent l'un après l'autre des nombres au tableau. Abby entame le jeu en écrivant le nombre 1. Par après, si l'un vient d'écrire le nombre n, l'autre écrit soit $n+1$ soit $2n$ du moment que ce nombre ne soit pas plus grand N. Le joueur qui écrit N au tableau gagne. a) Déterminer quel joueur a une stratégie gagnante pour $N = 2011$. b) Trouver le nombre d'entiers positifs $N \leq 2011$ pour lesquels Brian a une stratégie gagnante.

Problème 25
C5 2002) Soit $r > 1$ un entier Soit F une famille infinie d'ensembles différents de taille r tel que deux ensembles de cette famille ne soient jamais disjoints montrer qu'il existe un ensemble de cardinal $r-1$ qui intersecte tous les ensembles de la famille F

Problème 26
EGMO 2017 #4: Soit $n \geq 1$ un entier et soient $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ des entiers strictement positifs. Dans un groupe de $t_n + 1$ personnes, des parties d'échec sont jouées. Deux personnes ne peuvent s'affronter qu'au plus une fois. Prouver qu'il est possible que les parties se soient déroulées suivant ces deux conditions: 1) Le nombre de parties jouées par chaque joueur est l'un des nombres $t_1, \ldots t_n$. 2) Pour tout $1 \leq i \leq n$ il existe un joueur qui a joué t_i parties exactement.

Problème 27
Nous avons initialement un tas de n bonbons et un nombre $T = 0$. Une opération consiste à séparer un tas en deux et d'additionner à T le produit des tailles des deux tas ainsi créés. Le processus se termine lorsque chaque tas est formé d'un seul bonbon. Montrer que la valeur finale de T ne dépend pas de la suite des opérations effectuées.

Problème 28 (Croatia TST 2016)
Chaque case d'un damier de taille $N \times N$, où $N \geq 2$ est entier, peut contenir un et un seul jeton. Une opération consiste à choisir une rangée ou une colonne du damier, et à placer un jeton dans toutes les cases vides de cette rangée ou colonne et à retirer les jetons de toutes les cases non vides de cette rangée ou colonne. Au début, des jetons sont placés dans les cases de deux coins opposés du damier. Combien de jetons faut-il au minimum ajouter au damier pour qu'il existe une suite finie de telles opérations au bout de laquelle chaque case du damier contient un jeton.

Problème 29
RMM 2012#1 Etant donné un nombre fini de garçons et de filles, un ensemble social de garçons est un ensemble de garçons tel que chaque fille connaît au moins un garçon. On définit de façon similaire un ensemble social de filles. Prouver que le nombre d'ensembles sociaux de garçons et le nombre d'ensembles sociaux de filles sont de même parité. EDIT: petite précision (merci Rodrigue): si A connaît B, alors B connaît A.

Problème 30
Est-il possible de colorier chacun des 27 petits cubes d'un cube $3 \times 3 \times 3$ en blanc ou en noir de telle sorte qu'il n'y ait aucune rangée avec 3 cubes de la même couleur ? Une rangée est un triplet de cubes dont les centres sont alignés. En déduire si un des joueurs à une stratégie gagnante au morpion/tic-tac-toe $3 \times 3 \times 3$.

Problème 31 (Iranian TST 2008)
Soit $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{F}$, une classe de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ telle que $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$ et, pour tout triplet A, B, $C \in \mathcal{F}$, $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$.

Problème 32
A l'issue d'un certain référendum, le " non " l' a emporté avec 15 420 295 voix tandis que le " oui " a recueilli 12 686 057 voix. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement le " non " ait toujours devancé le " oui ".

Problème 33 (MOSP 1997)
Soient $\{A, B\}$, une partition de $\mathbb{N}$ (càd $A, B \subset \mathbb{N}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$) et n, un entier positif. Montrer qu'il existe $a, b > n$ distincts tels que

$$\{a, b, a+b\} \subset A \quad \text{ou} \quad \{a, b, a+b\} \subset B.$$

Problème 34
Déterminer de manière combinatoire une formule donnant la suite de Fibonacci F_n en fonction des coefficients binomiaux.

Problème 35'
Trouver le meilleur C possible

Problème 36
Soient k, n des entiers avec $0 < n \leq k$. Calculer l'expression

$$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n.$$

En fonction de k et n. (Bonus : Trouver une solution algébrique en une ligne.)

Problème 38 (1st Belgian TST 2018)
Sur le tableau de Gaspard (pourquoi Gaspard?) sont écrits n nombres réels. Chaque minute, il en choisit deux et les remplace par deux copies de leur moyenne arithmétique. Trouver tous les naturels $n \geq 2$ pour lesquels on sait atteindre une situation où tous les nombres écrits au tableau sont égaux, et ce quels que soient les n nombres de départ.

Problème 39
Déterminer le plus grand $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe n nombres réels différents $a_1, ..., a_n$ vérifiant :

$$\forall (i, j), 1 \leq i < j \leq n$$

$$(1 + a_i a_j)^2 \leq \frac{99}{100}(1 + a_i^2)(1 + a_j^2)$$

Problème 40 (C3, 2015)
On appelle une partition d'un ensemble fini $A_1 \sqcup A_2 = A \subset \mathbb{N}^*$ bonne si le plus grand diviseur commun des éléments de A_1 est égal au plus petit multiple commun des éléments de A_2. Trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe un ensemble $A \subset \mathbb{N}^*$ avec $|A| = n$ possédant exactement 2015 partitions bonnes.

Problème 41
Ce week-end, Nicolas donne cours à une classe de n élèves. Étant assez occupé, il a juste sélectionné n problèmes ayant une bonne tête sur AoPS mais sans en connaître de solutions. Un peu plus tard, pendant que les élèves font le tour du lac, il regarde les copies et observe les résultats : certains élèves n'ont pas tout résolu, il devra donc organiser une correction ... Cela dit, il y a tout de même $n^2 - n + 1$ solutions correctes (chaque élève ayant résolu au plus une fois chaque problème). Montrer qu'il peut s'en sortir et demander à chaque élève de présenter un problème (qu'il aurait résolu bien sûr) de sorte que tous les problèmes aient été corrigés publiquement.

Problème 42 (-O)
(je crois que c'est considéré comme de la combinatoire) (Finale OMB 2006, question 1, légèrement modifiée) On désire paver un rectangle en utilisant uniquement des pièces identiques à celles dessinées ci-dessous formées de petits carrés de dimension 1 X 1. Ce pavage doit s'effectuer sans laisser de trou dans le rectangle et sans superposer deux pièces. Pour quelles valeurs de m et n le pavage d'un rectangle de dimension m X n est-il possible?

Problème 43 (Finale ÖMO (Olympiades Mathématiques Autrichiennes)
2018, problème 5) Sur un cercle, il y 2018 points. À chaque point, un nombre entier est attributé. Chaque nombre doit être supérieur à la somme de ces deux nombres qui sont directement derrière lui en sens horaire. Trouver le plus grand possible nombre des nombres positifs parmi ces 2018 nombres. J'espère que ma traduction est comprehensible...

Problème 44 (XLII Russian Mathematical Olympiad, Final Round, Problem 9.6, puis Belgian TST 2-2017, Problem 2)
Un carré est découpé en n^2 rectangles par $n-1$ droites verticales et $n-1$ droites horizontales (avec $n \geq 2$). Prouver que l'on peut choisir $2n$ de ces rectangles de sorte que, pour chaque paire de rectangles choisis, l'un des rectangles puisse recouvrir entièrement l'autre (éventuellement après une rotation).

Problème 44 (Belgian TST 2-2018)
(recopié tel que je m'en souviens donc si vous voyez une incohérence dites-le) Trois droites concourantes délimitent 6 sections du plan. Dans chaque section, on met 5 points, de sorte trois quelconque des 30 points qui seront "mis" au total dans les sections ne sont jamais alignés. Montrer qu'il y a au moins 1000 triangles dont les sommets font partie des points précités et qui contiennent le point d'intersection des trois droites.

Problème 45
Une compagnie aérienne est implantée dans n aéroports. À partir de chaque aéroport partent k lignes (les liaisons étant aller-retour). De plus, on suppose que pour toute paire d'aéroports, il est possible de se déplacer de l'un à l'autre en utilisant uniquement des vols de la compagnie. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute paire d'aéroports, il est possible de les relier en moins de $\frac{Cn}{k}$ vols. (Remarque : C ne peut pas dépendre de n, k ou du réseau de la compagnie.) (Autrement dit, montrer que le diamètre d'un graphe k-régulier à n sommets est un $\mathcal{O}(\frac{n}{k})$.)

Problème 46 (Coupe Animath d'Automne 2018)
Sur un quadrillage 2018×2018 se baladent une mouche et k araignées. A chaque étape, la mouche se déplace sur une case adjacente (c'est-à-dire qui touche par un côté sa case de départ) ou décide de rester sur place, puis de même, chaque araignée se déplace sur une case adjacente ou décide de rester sur place. (a) Pour quelles valeurs de k les araignées sont-elles sures d'attraper la mouche, quels que soient les points de departs des $k+1$ bêtes ? (b) Meme question si on remplace la grille 2018×2018 par un pavé $2018 \times 2018 \times 2018$, et les cases par des cubes, deux cubes étant adjacents lorsqu'ils ont une face en commun.