

# STAGE OLYMPIQUE JUNIOR DE CACHAN 2010

---



Du 25 au 29 octobre 2010



# Stage olympique junior de Cachan, octobre 2010

---

## **Avant-propos**

*Le stage de Cachan a été organisé par Animath.*

*Son objet a été de rassembler des collégiens et lycéens passionnés par les mathématiques  
et de les faire travailler sur des exercices en vue de les préparer  
aux Olympiades internationales de mathématiques.*

*Nous tenons à remercier le foyer de Cachan pour son excellent accueil.*



# Table des matières

<b>A</b>	<b>Le trombinoscope</b>	<b>7</b>
<b>B</b>	<b>Déroulement du stage</b>	<b>11</b>
<b>C</b>	<b>Lundi 25 octobre (géométrie)</b>	<b>13</b>
1	Exercices d'échauffement . . . . .	13
1.1	Énoncés . . . . .	13
1.2	Solutions . . . . .	13
2	Cours et exercices . . . . .	14
2.1	Rappels . . . . .	14
2.2	Bissectrice . . . . .	15
2.3	Angle inscrit et angle au centre . . . . .	17
3	Exercice du jour . . . . .	20
3.1	Énoncé . . . . .	20
3.2	Solution . . . . .	20
<b>D</b>	<b>Mardi 26 octobre (géométrie)</b>	<b>23</b>
1	Cours et exercices du matin . . . . .	23
2	Cours et exercices de l'après-midi . . . . .	26
2.1	Puissance d'un point par rapport à un cercle . . . . .	26
2.2	Isométries directes . . . . .	32
3	Exercices du jour . . . . .	34
3.1	Énoncés . . . . .	34
3.2	Solutions . . . . .	34
4	Exposé : qui a découvert le théorème de Pythagore ? . . . . .	35
<b>E</b>	<b>Mercredi 27 octobre (géométrie)</b>	<b>41</b>
1	Cours et exercices du matin . . . . .	41
1.1	Énoncés . . . . .	41
1.2	Solutions . . . . .	41
2	Test de géométrie . . . . .	44
2.1	Énoncés . . . . .	44
2.2	Solution . . . . .	45
3	Exercice du jour . . . . .	46
3.1	Énoncé . . . . .	46
3.2	Solution . . . . .	46
<b>F</b>	<b>Jeudi 28 octobre (algèbre)</b>	<b>47</b>
1	Cours et exercices du matin . . . . .	47
1.1	Rappel des identités remarquables . . . . .	47
1.2	Factorisation de Sophie Germain . . . . .	47

1.3	Formule de Cardan . . . . .	48
2	Cours et exercices de l'après-midi . . . . .	49
2.1	Exercices . . . . .	49
2.2	Solution . . . . .	50
<b>G</b>	<b>Vendredi 29 octobre (algèbre)</b>	<b>53</b>
1	Test d'algèbre . . . . .	53
1.1	Énoncés . . . . .	53
1.2	Solution . . . . .	53
<b>H</b>	<b>Citations mémorables</b>	<b>55</b>

## A. Le trombinoscope

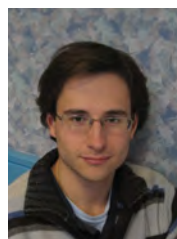
### *Les profs*



Pierre Bornsztein



Sandrine Caruso



Igor Kortchemski



François Lo Jacomo



Ambroise Marigot



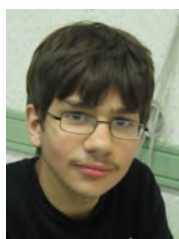
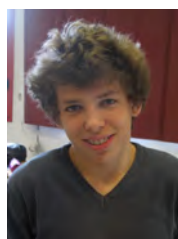
Jean-François Martin



Remi Varloot

*Les élèves*

Augustin Bariant

Arthur  
Blanc-Renaudie

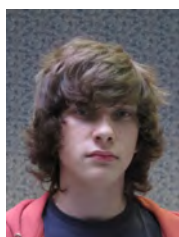
Jean Charloux



Raphaël Chédru



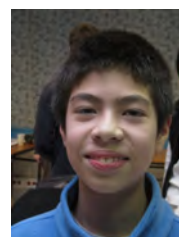
Jérôme Chevallier



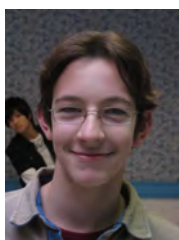
Victor Chiorean



Urvan Christen



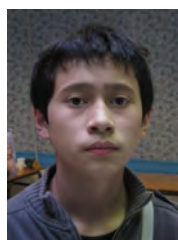
Antoine Dupuis



Léonard Fleutot



Victor Gallois-Wong

Louis  
Garcia-Fernandez

Charles Gassot





Élise Habare



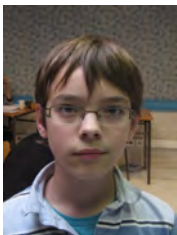
Maxime Lenormand



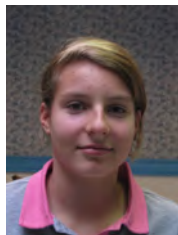
Cyril Letrouit



Lilia Martin



Arthur Nebout



Constance Olivier



Lucas Perotin



Auriane Perrin



Hélène Quach



Liyang Sun



Antoine Taliercio



Yiren Wang



## B. Déroulement du stage

Le programme de la semaine est donné dans le tableau ci-dessous.

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
<i>Petit-déjeuner</i>				
Accueil, exercices d'échauffement	Cours/TD de géométrie	Cours/TD de géométrie	Cours/TD d'algèbre	Test d'algèbre
<i>Déjeuner</i>				
Cours/TD de géométrie	Cours/TD de géométrie	Test de géométrie	Cours/TD d'algèbre	Correction du test
<i>Goûter</i>				
Temps libre	Temps libre	Temps libre	Visite de l'ENS de Cachan	
<i>Dîner</i>				
Présentation d'Animath et des OIM	Exposé : qui a découvert le théorème de Pythagore ?	Correction du test	Temps libre	

En outre, lundi, mardi et mercredi, des exercices du jours étaient soumis à la sagacité des élèves.



# C. Lundi 25 octobre (géométrie)

## 1 Exercices d'échauffement

### 1.1 Énoncés

**Exercice 1.** Un triangle a pour longueurs des côtés : 3, 4, 5. Calculer le rayon du cercle inscrit (cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés du triangle).

**Exercice 2.** Soit  $ABCD$  un trapèze, où  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles. On note  $\Delta$  la droite passant par les milieux de  $[AB]$  et  $[CD]$ . Montrer que les droites  $\Delta$ ,  $(AD)$  et  $(BC)$  sont concourantes ou parallèles.

**Exercice 3.** Soit  $ABCD$  un rectangle,  $E$  et  $F$  les milieux des côtés  $[AD]$  et  $[DC]$ . On appelle  $G$  l'intersection des droites  $(AF)$  et  $(EC)$ . Montrer que les angles  $\widehat{CGF}$  et  $\widehat{FBE}$  sont égaux.

**Exercice 4.** Soient cinq nombres  $a < b < c < d < e$ .

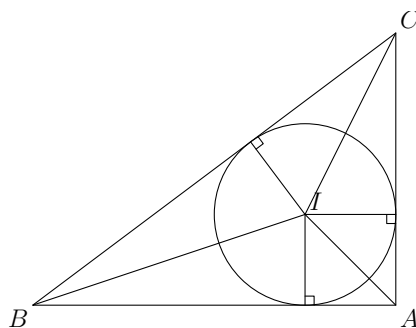
a) Combien de sommes deux à deux peut-on former ?

b) Ces dix sommes sont 21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79. Trouver  $a, b, c, d, e$ .

**Exercice 5.** Soit  $a, b, c, d$  des nombres positifs tels que  $a + b + c + d = 4$ . Montrer que  $ab + bc + cd + da \leq 4$ .

### 1.2 Solutions

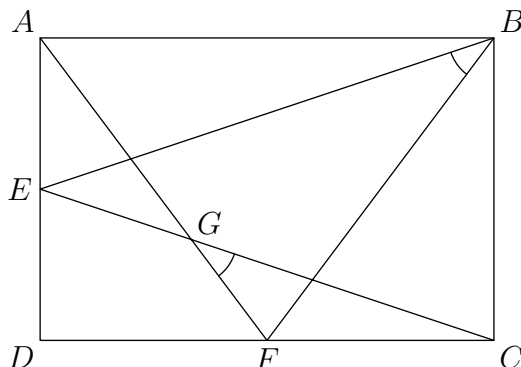
*Solution de l'exercice 1.* Soit  $r$  le rayon du cercle inscrit. On commence par faire une figure.



Le triangle  $ABC$  de côtés de longueurs 3, 4, 5 est un triangle rectangle. On peut calculer sa surface  $S$  de deux manières différentes : d'une part,  $S = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ , d'autre part,  $S$  est la somme des surfaces des triangles  $IAB$ ,  $IAC$  et  $IBC$ . L'aire du triangle  $IAB$  est  $\frac{r \times AB}{2} = 2r$ , celle du triangle  $IAC$  est  $\frac{r \times AC}{2} = \frac{3}{2}r$ , et celle du triangle  $IBC$  est  $\frac{r \times BC}{2} = \frac{5}{2}r$ . On en déduit que  $6 = S = r \times (2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}) = 6r$  et donc que  $r = 1$ .

*Solution de l'exercice 2.* On raisonne dans le cas où les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  ne sont pas parallèles. Le cas où elles sont parallèles se traite de la même façon. Soit  $I$  le point d'intersection de  $(AD)$  et  $(BC)$ . Soit  $\Delta'$  la droite passant par  $I$  et par le milieu de  $[AB]$ . D'après le théorème de Thalès,  $\Delta'$  passe également par le milieu de  $[DC]$ . Ainsi,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ont deux points communs et sont donc confondues. Donc  $\Delta$  passe par  $I$ .

*Solution de l'exercice 3.* Faisons une figure.



L'angle  $\widehat{FGC}$  est égal à  $180^\circ - \widehat{AFC} - \widehat{ECD}$ , et on a  $\widehat{AFC} = \widehat{AFB} + \widehat{BFC}$ . Comme  $(AB)$  et  $(DC)$  sont parallèles,  $\widehat{BFC} = \widehat{ABF}$ . Par symétrie de la figure, on a, d'une part,  $\widehat{ABE} = \widehat{ECD}$ , et d'autre part, le triangle  $ABF$  est isocèle en  $F$ , ce qui entraîne que  $\widehat{AFB} = 180^\circ - 2 \times \widehat{ABF}$ . Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{FGC} &= 180^\circ - \widehat{AFC} - \widehat{ECD} = 180^\circ - \widehat{AFB} - \widehat{BFC} - \widehat{ECD} \\ &= 180^\circ - 180^\circ + 2 \times \widehat{ABF} - \widehat{ABF} - \widehat{ABE} = \widehat{ABF} - \widehat{ABE} = \widehat{EBF}.\end{aligned}$$

*Solution de l'exercice 4.* a) Le nombre de sommes que l'on peut former est égal au nombre de façons de choisir 2 éléments parmi 5, c'est-à-dire à  $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ .

b) On a nécessairement  $a + b = 21$ ,  $a + c = 26$ ,  $c + e = 65$  et  $d + e = 79$ . De plus, la somme de tous les nombres  $21 + 26 + 35 + 40 + 49 + 51 + 54 + 60 + 65 + 79 = 480$  est égale à  $4(a + b + c + d + e)$ , d'où  $a + b + c + d + e = 120$ . On a  $c = 120 - (a + b) - (d + e) = 120 - 21 - 79 = 20$ . On en déduit que  $a = 6$ ,  $b = 15$ ,  $e = 45$  et  $d = 34$ .

*Solution de l'exercice 5.* Remarquons que  $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ . Notons  $x = a + c$ . Il s'agit maintenant de montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x(4 - x) \leq 4$ . Or,  $x(4 - x) - 4 = 4x - x^2 - 4 = -(x - 2)^2 \leq 0$  pour tout  $x$ , d'où le résultat.

## 2 Cours et exercices

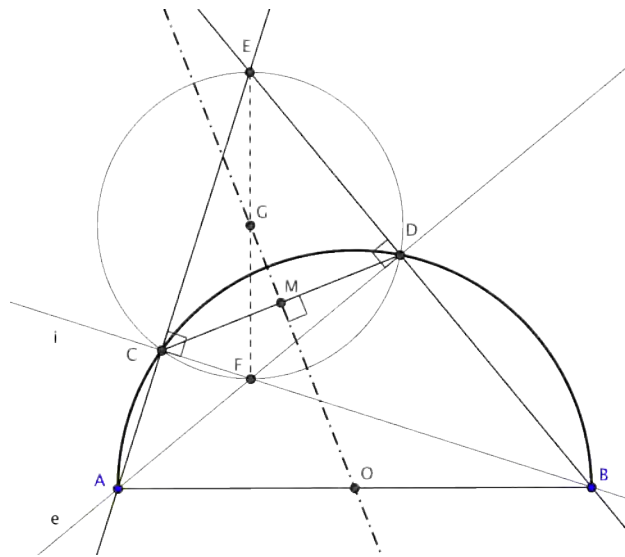
### 2.1 Rappels

La somme des trois angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$ . On peut aussi énoncer ce résultat sous cette forme : si  $D$  est sur la droite  $(AB)$ , avec  $D$  et  $A$  de part et d'autre de  $B$ ,  $\widehat{DBC} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ .

Si un triangle  $ABC$  a deux côtés égaux,  $AB = AC$ , les deux angles opposés aux côtés égaux sont égaux :  $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ . Si un triangle  $ABC$  a deux angles égaux,  $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ , les deux cotés opposés aux angles égaux sont égaux :  $AB = AC$ . Un tel triangle est dit *isocèle*. Dans un triangle isocèle  $ABC$  tel que  $AB = AC$ , la même droite (l'axe de symétrie du triangle) est en même temps bissectrice intérieure, médiane et hauteur du triangle, donc médiatrice de  $[BC]$ .

On a  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  si et seulement si le point  $B$  est sur le cercle de diamètre  $[AC]$ .

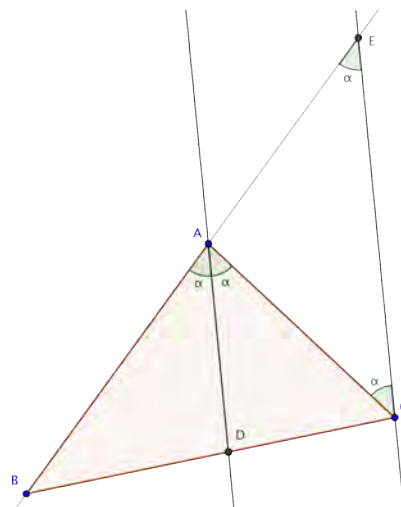
**Exercice 1.** Soient  $C$  et  $D$  deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre  $[AB]$ . Les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  se coupent en  $E$ , les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $F$ . Montrer que les milieux de  $[AB]$ ,  $[CD]$  et  $[EF]$  sont alignés.



*Solution de l'exercice 1.* Une manière simple de montrer que trois points sont alignés consiste à prouver que la droite passant par deux d'entre eux passe par le troisième. Or le milieu du diamètre  $[AB]$  est le centre  $O$  du demi-cercle contenant également  $C$  et  $D$ . Comme  $OC = OD$ ,  $O$  est sur la médiatrice de  $[CD]$ , qui passe par le milieu  $M$  de  $[CD]$ , et les trois points sont alignés si et seulement si le milieu  $N$  de  $[EF]$  est lui aussi sur la médiatrice de  $[CD]$ , donc si et seulement si  $NC = ND$ . Or  $C$  et  $D$  étant sur le demi-cercle de diamètre  $[AB]$ ,  $\widehat{ACB} = 90^\circ = \widehat{ADC}$ , tout comme  $\widehat{ECF} = 90^\circ = \widehat{EDF}$ . Il en résulte que  $C$  et  $D$  sont également sur le demi-cercle de diamètre  $[EF]$ , donc de centre  $M$ , d'où  $NC = ND$  : c'est précisément ce qui restait à démontrer.

## 2.2 Bissectrice

Une bissectrice d'un angle  $\widehat{BAC}$  est une droite qui partage l'angle  $\widehat{BAC}$  en deux angles égaux. C'est également un axe de symétrie transformant l'un des côtés de l'angle ( $AB$ ) en l'autre ( $AC$ ). Les points de la bissectrice sont donc à égale distance des deux droites ( $AB$ ) et ( $AC$ ). On notera que la notion d'*angle* est très difficile à définir de manière rigoureuse, mais nous n'approfondirons pas cette question. Signalons seulement qu'il existe deux droites perpendiculaires dont tous les points sont à égales distance des deux droites ( $AB$ ) et ( $AC$ ), toutes deux sont bissectrices de l'angle  $\widehat{BAC}$ . Mais dans le triangle  $ABC$ , si une bissectrice de  $\widehat{BAC}$  coupe le côté opposé ( $BC$ ) en  $D$ , cette bissectrice sera dite *intérieure* si  $D$  est intérieur au segment  $[BC]$ , *extérieure* si  $D$  est extérieur au segment  $[BC]$ .

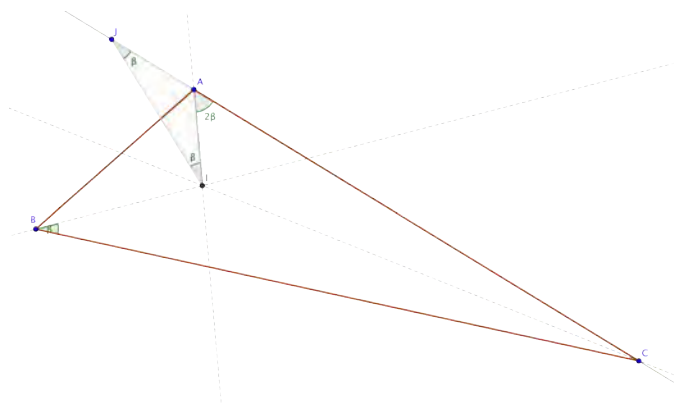


Dans les deux cas, le point  $D$  vérifie la même propriété :  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ . Une des démonstrations de ce théorème classique utilise le théorème de Thalès : si la parallèle à  $(AD)$  passant par  $C$  coupe  $(AB)$  en  $E$ , le parallélisme entraîne deux égalités d'angles :  $\widehat{DAC} = \widehat{ACE}$  d'une part, et  $\widehat{BAD} = \widehat{AEC}$ . Comme  $(AD)$  est bissectrice, tous ces angles sont égaux et le triangle  $ACE$  est isocèle :  $AC = AE$ . Or le théorème de Thalès permet d'affirmer :  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$ .

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois cotés du triangle, donc centre d'un cercle tangent aux trois côtés, appelé *cercle inscrit* dans le triangle. Les cercles exinscrits sont eux aussi tangents aux trois côtés du triangle, mais leurs centres sont extérieurs au triangle, intersection d'une bissectrice intérieure et deux bissectrices extérieures.

**Exercice 2.** Soit  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ . On suppose que  $CA + AI = BC$  (relation entre les longueurs). Déterminer la valeur du rapport d'angles :  $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$ .

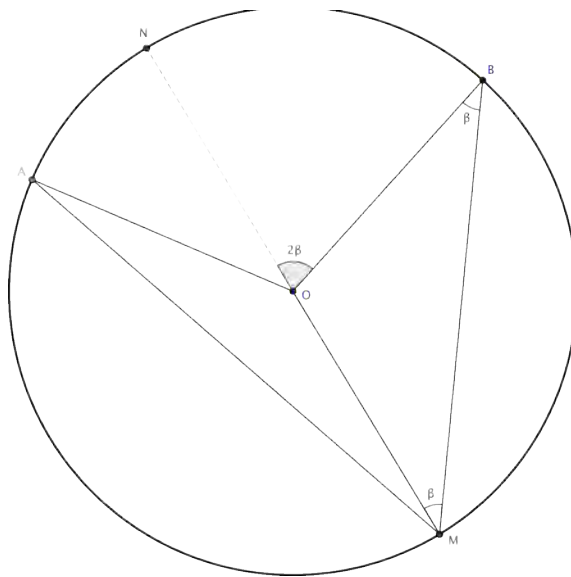
*Solution de l'exercice 2.* On rappelle que  $I$  est le point d'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle  $ABC$ .



La relation de longueurs  $CA + AI = BC$  est difficile à exploiter dans la mesure où  $CA$ ,  $AI$  et  $BC$  sont sur trois droites non parallèles ; il faudrait calculer la longueur de ces trois segments, ce qui n'est pas immédiat. En revanche, si l'on prolonge la droite  $(CA)$  au delà de  $A$  pour y placer un point  $J$  tel que  $AI = AJ$ , on voit apparaître beaucoup de choses : d'abord un triangle isocèle  $AIJ$ , qui prouve que  $\widehat{AIJ} = \widehat{AJI}$ , donc  $\widehat{CAI} = 2 \times \widehat{AJI}$ , en outre l'égalité de longueurs :  $CJ = CA + AJ = CA + AI = CB$ . Donc la symétrie par rapport à la bissectrice  $(CI)$ , qui envoie la droite  $(CB)$  sur  $(CA)$ , envoie plus précisément le point  $B$  en  $J$ . Il transforme donc l'angle  $\widehat{CBI}$ , que nous appellerons  $\beta$ , en  $\widehat{CJI}$ . Il en résulte que  $\widehat{CAI} = 2\beta$ . Or  $(AI)$  et  $(BI)$  sont bissectrices de  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{CBA}$  respectivement, d'où  $\widehat{BAC} = 4\beta$  et  $\widehat{CBA} = 2\beta$ , soit  $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}} = 2$ .

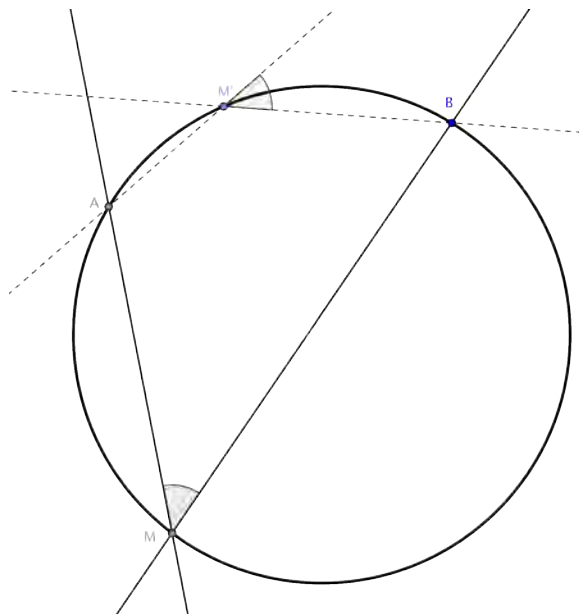


### 2.3 Angle inscrit et angle au centre

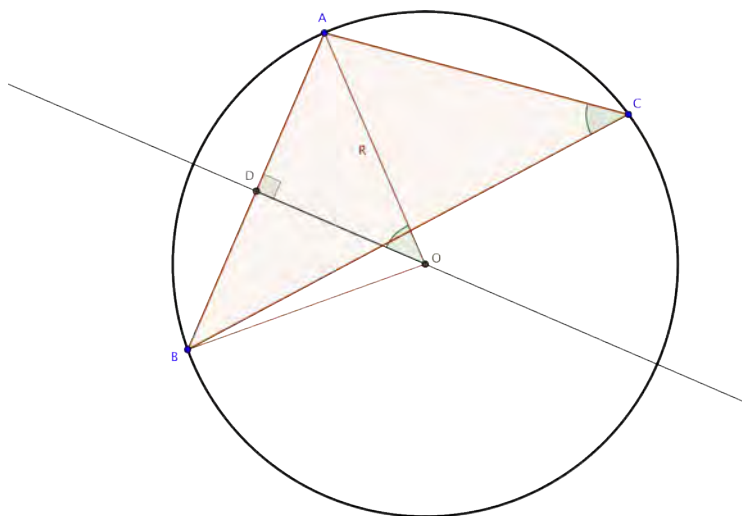


Considérons un cercle de centre  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $M$  trois points du cercle. La droite  $(MO)$  recoupe le cercle en  $N$ . Il y aurait en principe trois ou quatre cas de figure à envisager, mais comme il s'agit de démonstrations quasiment identiques d'un résultat classique, nous nous limiterons à un cas. Sur cette figure, les triangles  $AMO$  étant isocèle,  $\widehat{AON} = 2\widehat{AMO}$  et  $\widehat{NOB} = 2\widehat{OMB}$ . Il en résulte que  $\widehat{AOB} = \widehat{AON} + \widehat{NOB} = 2(\widehat{AMO} + \widehat{OMB}) = 2\widehat{AMB}$ . Ce qui peut s'énoncer : l'angle inscrit (en l'occurrence  $\widehat{AMB}$ ) est égal à la moitié de l'angle au centre (en l'occurrence  $\widehat{AOB}$ ). Et comme l'angle au centre est indépendant de  $M$ , l'angle inscrit est lui aussi indépendant de  $M$ .

Mais manipuler des angles et, plus encore, des « demi-angles », n'est pas si simple que cela. Si  $M$  est sur le « petit arc »  $\widehat{AB}$ , l'angle au centre à considérer est l'angle rentrant  $\widehat{AOB}$ . Ce qui explique que si  $M$  et  $M'$  sont de part et d'autre de la droite  $(AB)$ , les angles inscrits  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{AM'B}$  soient non pas égaux mais supplémentaires. Il y a deux manières de contourner cette difficulté : soit en comparant l'angle inscrit non pas à l'angle au centre, mais à l'arc intercepté (si  $M$  est sur le petit arc  $\widehat{AB}$ , il intercepte le grand arc, et inversement). L'angle inscrit est alors toujours égal à la moitié de l'arc intercepté. Soit en considérant non pas des angles au sens habituel du terme, mais des *angles de droites* : l'angle de droite  $(AM, BM)$  est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite  $(AM)$  pour la faire coïncider avec  $(BM)$ . Cet angle est totalement indépendant du point  $M$ , dès lors que  $M$  est sur le cercle. Si  $M$  n'est pas sur le cercle, la droite  $(AM)$  recoupe le cercle en  $P$ , et on ne peut pas avoir  $(AM, BM) = (AP, BP)$ . On en déduit le résultat fondamental : *quatre points  $A, B, M, M'$  sont cocycliques, c'est-à-dire appartiennent à un même cercle, si et seulement si les angles de droites  $(AM, BM)$  et  $(AM', BM')$  sont égaux.*



Dernière remarque : soit  $\Delta$  la tangente au cercle en  $A$ . L'angle formé par  $\Delta$  et la corde  $[AB]$  est un cas limite d'angle inscrit interceptant le même arc  $\widehat{AB}$ , il est égal aux autres angles inscrits interceptant  $\widehat{AB}$ , mais la démonstration peut se faire différemment, en utilisant seulement le fait que le triangle  $AOB$  est isocèle et que  $\Delta$  est perpendiculaire à  $(AB)$ .



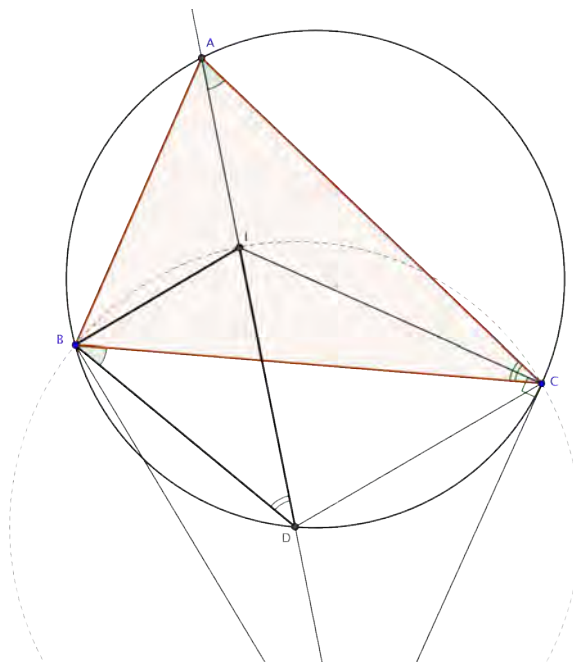
Loi des sinus : Soit  $A$  et  $B$  deux points d'un cercle de centre  $O$ ,  $D$  le milieu de  $[AB]$ . Le triangle  $AOB$  étant isocèle,  $(OD)$  est en même temps médiane, hauteur, médiatrice et bissectrice du triangle. Or si l'on appelle  $R$  le rayon du cercle,  $OA = R$  donc  $AB = 2AD = 2R \sin \widehat{AOD}$ . Comme  $\widehat{AOD}$  et l'angle inscrit  $\widehat{AMB}$ , pour tout point  $M$  du cercle, valent tous deux la moitié de  $\widehat{AOB}$ ,  $AB = 2R \sin \widehat{AMB}$ . En d'autres termes, si  $ABC$  est un triangle et  $R$  le rayon de son cercle circonscrit,  $BC = 2R \sin \widehat{A}$ ,  $CA = 2R \sin \widehat{B}$ ,  $AB = 2R \sin \widehat{C}$ . Ou encore, en posant (notation habituelle)  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}.$$

C'est habituellement sous cette forme que cette relation s'appelle *loi des sinus*.

**Exercice 3.** Soit  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ . La bissectrice  $(AI)$  recoupe le cercle circonscrit en  $D$ . Montrer que le cercle de centre  $D$  passant par  $I$  passe par  $B$  et  $C$ . Ce cercle recoupe  $(AI)$  en  $J$ . Montrer que  $J$  est centre d'un cercle exinscrit.

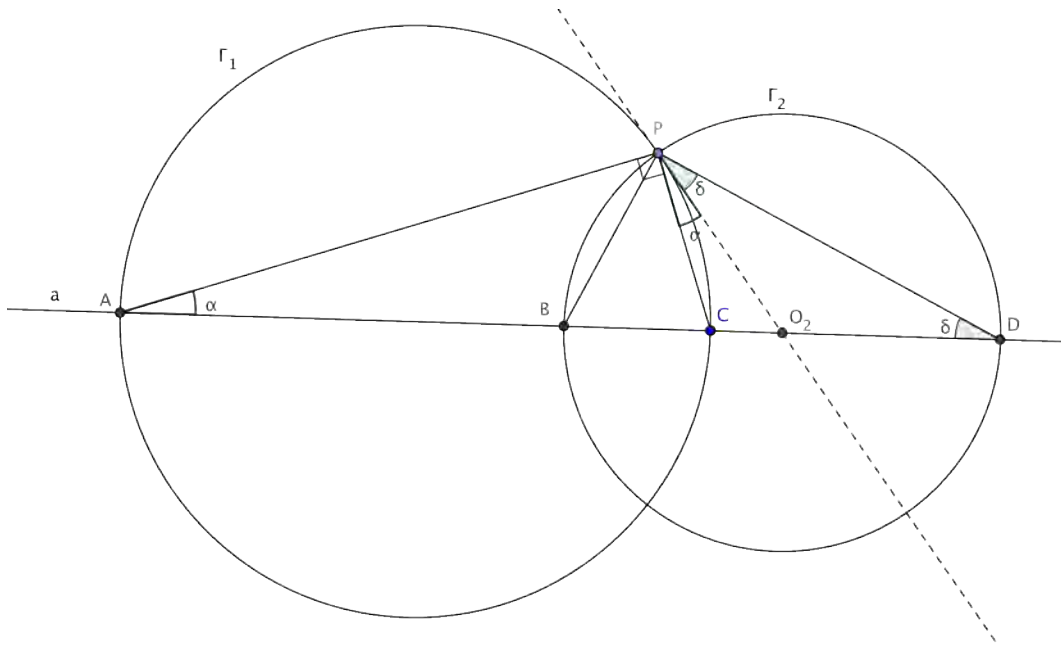
*Solution de l'exercice 3.* Rappelons que  $I$  est l'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle. Il suffit de démontrer que les triangles  $DBI$  et  $DCI$  sont isocèles, en prouvant qu'ils ont chacun deux angles égaux.



On a  $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$ , or  $\widehat{IBC}$  est la moitié de l'angle  $\widehat{B}$ , en appelant  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  les trois angles du triangle  $ABC$ . L'angle inscrit  $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2}$ , d'où  $\widehat{IBD} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$ , alors que  $\widehat{BDI} = \widehat{BDA} = \widehat{BCA} = \widehat{C}$ . Dès lors, comme  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ , le troisième angle  $\widehat{BID}$  vaut lui aussi  $\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$ , ce qui prouve bien que  $DBI$  est isocèle. On démontrerait pareillement que  $DCI$  est lui aussi isocèle, donc le cercle de centre  $D$  passant par  $I$  passe aussi par  $B$  et  $C$ .

Pour la seconde question, comme les angles  $\widehat{IBJ}$  et  $\widehat{ICJ}$  interceptent chacun un demi-cercle (en d'autres termes :  $[IJ]$  est diamètre d'un cercle passant par  $B$  et  $C$ ), ce sont deux angles droits.  $(BJ)$ , perpendiculaire à  $(BI)$ , est bissectrice extérieure de  $\widehat{B}$ , tout comme  $(CJ)$  est bissectrice extérieure de  $\widehat{C}$ . Donc  $J$ , intersection d'une bissectrice intérieure et de deux bissectrices extérieures, est centre d'un cercle exinscrit.

**Exercice 4.** Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts, alignés dans cet ordre, sur une droite  $\Delta$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les cercles de diamètres  $[AC]$  et  $[BD]$  et  $P$  un de leurs points d'intersection. On suppose que la tangente en  $P$  à  $\Gamma_1$  passe par le centre  $O_2$  de  $\Gamma_2$ . Montrer que  $(PB)$  et  $(PD)$  sont les bissectrices de l'angle  $\widehat{APC}$ .

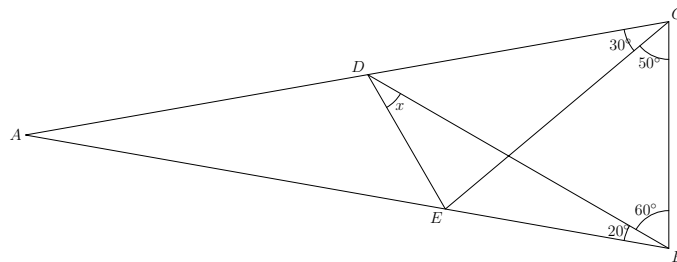


*Solution de l'exercice 4.* Appelons  $\alpha$  et  $\delta$  les angles  $\widehat{CAP}$  et  $\widehat{PDB}$ . Comme  $[AC]$  est un diamètre de  $\Gamma_1$ , et  $[BD]$  un diamètre de  $\Gamma_2$ ,  $\widehat{APC}$  et  $\widehat{BPD}$  sont droits. Il en résulte que  $\widehat{PCA} = 90^\circ - \alpha$  et  $\widehat{DBP} = 90^\circ - \delta$ , donc que  $\widehat{BPC} = \alpha + \delta$ . Par ailleurs,  $O_2$  étant le centre du cercle  $\Gamma_2$ , le triangle  $O_2PD$  est isocèle, donc  $\widehat{O_2PD} = \delta$ . Mais comme  $(PO_2)$  est tangente à  $\Gamma_1$ ,  $\widehat{CPO_2}$  est un angle inscrit de  $\Gamma_1$  interceptant le même arc  $\widehat{PC}$  que  $\widehat{CAP}$ , donc  $\widehat{CPO_2} = \alpha$ . On en déduit que  $\widehat{CPD} = \alpha + \delta = \widehat{BPC}$ .  $(PC)$  est donc bissectrice de  $\widehat{BPD}$ . N'oublions pas que  $\widehat{BPD}$  est droit, d'où  $\widehat{BPD} = 45^\circ$ ;  $\widehat{APC}$  est lui aussi droit, donc  $\widehat{APB}$  est lui aussi égal à  $45^\circ$ , ce qui implique que  $(PB)$  bissectrice de  $\widehat{APC}$ . Quant à  $(PD)$ , elle est perpendiculaire à  $(PB)$ , ce qui prouve qu'elle est elle aussi bissectrice de  $\widehat{APC}$ , car les deux bissectrices d'un angle sont perpendiculaires.

### 3 Exercice du jour

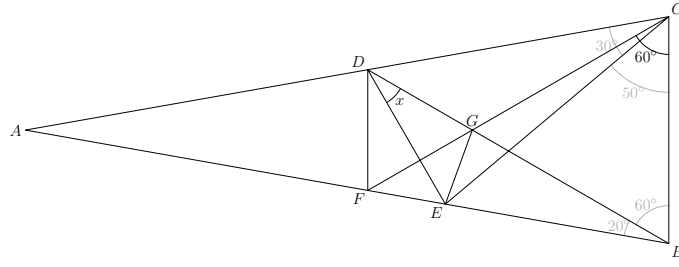
#### 3.1 Énoncé

On donne la figure suivante. Calculer l'angle  $x$ .



#### 3.2 Solution

On introduit les points  $F$  et  $G$  comme sur la figure suivante :



L'angle  $\widehat{BEC}$  est égal à  $\widehat{BEC} = 180^\circ - 50^\circ - (60^\circ + 20^\circ) = 50^\circ = \widehat{BCE}$ , de sorte que  $BEC$  est isocèle en  $B$ . Ainsi  $BE = BC$ . De plus,  $BGC$  a deux angles de  $60^\circ$  et est donc équilatéral. D'où  $BG = BC = BE$  et donc  $BEG$  est isocèle en  $B$ . On en déduit que  $\widehat{EGB} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$ , puis que  $\widehat{EGF} = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ . D'autre part,  $\widehat{GFE} = \widehat{CFB} = 180^\circ - 60^\circ - (60^\circ + 20^\circ) = 40^\circ$ . Par conséquent, le triangle  $EFG$  est isocèle en  $E$ . Par ailleurs, le triangle  $GFD$  est isocèle en  $G$  par symétrie de la figure, et l'angle  $\widehat{DGF}$  est égal à l'angle  $\widehat{CGB}$  qui vaut  $60^\circ$ , donc  $GFD$  est équilatéral. Donc  $(ED)$  est la médiatrice de  $[FG]$ , qui est aussi la bissectrice de  $\widehat{GDF}$ . Finalement,

$$x = \frac{\widehat{GDF}}{2} = 30^\circ.$$



## D. Mardi 26 octobre (géométrie)

### 1 Cours et exercices du matin

**Exercice 1.** Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux cercles sécants en  $A$  et  $B$ . Soit  $C$  un point de  $\Gamma_1$ . On note  $D$  (respectivement  $E$ ) l'intersection entre  $(BC)$  (respectivement  $(AC)$ ) et  $\Gamma_2$ . Enfin, on note  $F$  l'intersection entre la tangente à  $\Gamma_1$  en  $B$  et la droite  $(DE)$ .

Montrer que le triangle  $BDF$  est isocèle.

**Exercice 2.** Soit  $ABC$  un triangle inscrit dans un cercle  $\Gamma$ . Soit  $M$  un point du plan et  $P_A, P_B$  et  $P_C$  les projetés respectifs de  $M$  sur  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ . On a alors l'équivalence suivante :  $P_A, P_B$  et  $P_C$  sont alignés si et seulement si  $M$  appartient à  $\Gamma$ .

On appelle alors *droite de Simson* la droite passant par ces trois points.

**Exercice 3.** Soit  $ABC$  un triangle inscrit dans un cercle  $\Gamma$ . Soit  $D$  la bissectrice intérieure issue de  $A$  et  $\Delta$  la médiatrice de  $[BC]$ . Alors  $D$  et  $\Delta$  se coupent sur  $\Gamma$  en un point  $K$ .

De plus,  $I, B$  et  $C$  sont équidistants de  $K$  ( $I$  étant le centre du cercle inscrit dans  $ABC$ ).

**Exercice 4.** Soit  $ABC$  un triangle et  $\Delta$  une droite passant par  $A$ . On note  $I$  le point d'intersection (s'il existe) entre  $\Delta$  et  $(BC)$ . On a alors que  $\Delta$  est la bissectrice intérieure issue de  $A$  si et seulement si :

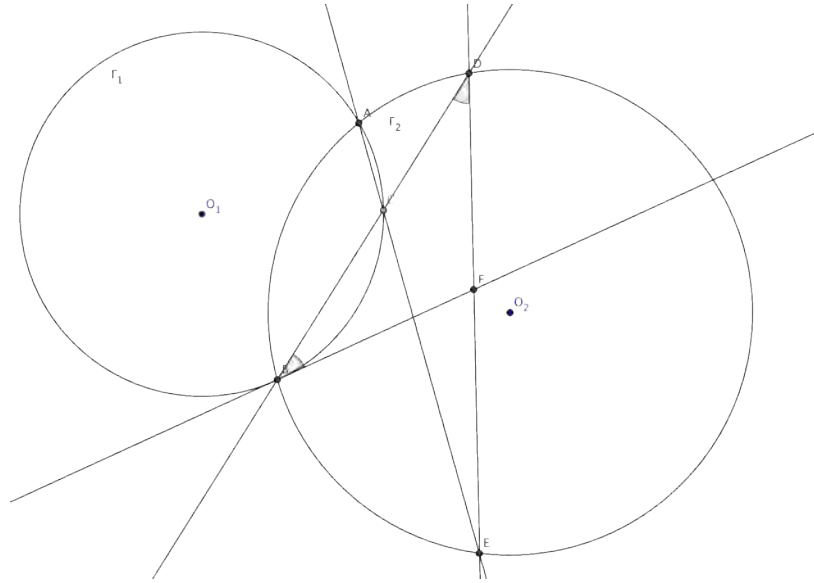
$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}.$$

**Exercice 5.** Soit  $ABC$  un triangle,  $D$  l'intersection entre la bissectrice intérieure issue de  $A$  et la droite  $(BC)$ , et  $M$  le milieu de  $[AB]$ . On suppose que  $(MD) \perp (AD)$ . Montrer que :

$$DB = 3 \cdot DC$$

**Exercice 6.** Soit  $ABC$  un triangle et  $H_A$  et  $H_B$  les pieds des hauteurs issues de  $A$  et  $B$ . Montrer que  $CH_AH_B$  et  $CAB$  sont semblables.

*Solution de l'exercice 1.* Il s'agit d'une simple chasse aux angles.



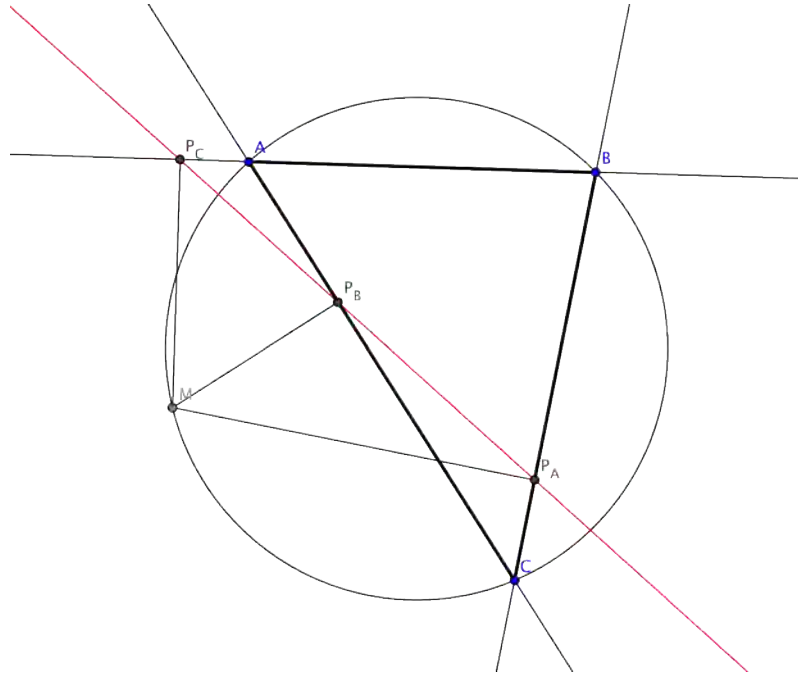
Tout d'abord, en se plaçant dans le cercle  $\Gamma_1$ , on remarque que les angles  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{FBC}$  interceptent le même arc de cercle ( $(FB)$  étant tangente à  $\Gamma_1$  en  $B$ ) et sont donc égaux. Ensuite, en se plaçant dans le cercle  $\Gamma_2$ , on obtient de même que les angles  $\widehat{BAE}$  et  $\widehat{BDE}$  sont égaux. Il en résulte :

$$\widehat{FBD} = \widehat{FBC} = \widehat{BAC} = \widehat{BAE} = \widehat{BDE} = \widehat{BDF}$$

d'où la conclusion.

*Solution de l'exercice 2.* On veut montrer que :

$$\widehat{MP_C P_B} = \widehat{MP_C P_A}$$



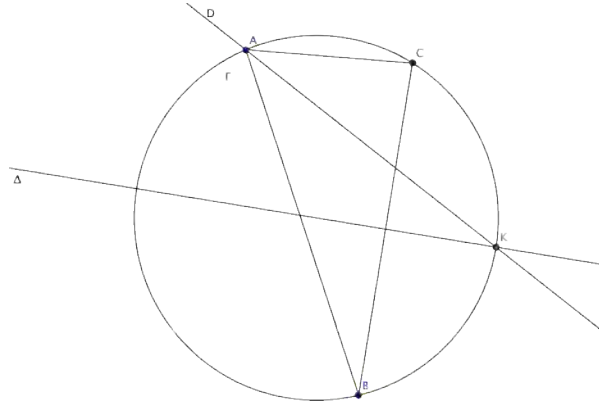
On commence par remarquer que les points  $M, P_C, A, P_B$  sont cocycliques sur le cercle de diamètre  $[AM]$  (à cause des angles droits). Il en est de même pour les points  $M, P_A, B, P_C$ . On a alors les égalités d'angle :

$$\widehat{MP_C P_B} = \widehat{MAP_B} = \widehat{MAC} \quad \widehat{MP_C P_A} = \widehat{MBP_A} = \widehat{MBC}.$$



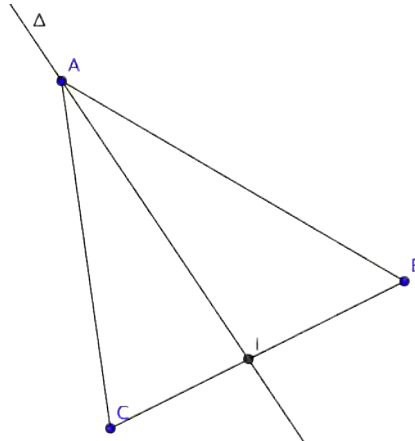
En se plaçant dans  $\Gamma$ , on trouve que les angles  $\widehat{MAC}$  et  $\widehat{MBC}$  interceptent le même arc de cercle, et sont donc de même valeur, ce qui achève la démonstration.

*Solution de l'exercice 3.* Soit  $J$  le point d'intersection entre  $D$  et  $\Gamma$ . Les angles  $\widehat{BAJ}$  et  $\widehat{JAC}$  sont égaux (car  $D$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$ ), donc les arcs de cercle  $[BK]$  et  $[KC]$  (et *a fortiori* les segments  $[BK]$  et  $[KC]$ ) sont de même longueur.



Soit  $L$  le point d'intersection entre  $\Delta$  et  $\Gamma$ . On veut montrer que  $J$  et  $L$  sont confondus. Or,  $\Delta$  étant un axe de symétrie pour le segment  $[BC]$  et  $L$  appartenant à  $\Delta$ , on a que  $L$  est équidistant de  $B$  et de  $C$ , ce qui achève la démonstration.

*Solution de l'exercice 4.* On considère la droite  $D$  passant par  $B$  et coupant  $\Delta$  en  $J$  de telle sorte à ce que le triangle  $IJB$  soit isocèle en  $B$ .



On veut tout d'abord montrer que les triangles  $AIC$  et  $AJB$  sont semblables. Pour cela, il suffit qu'ils aient deux angles sur trois qui soient de même mesure. Or :

$$\widehat{CAI} = \widehat{BAJ} \quad (\Delta \text{ bissectrice})$$

et d'autre part

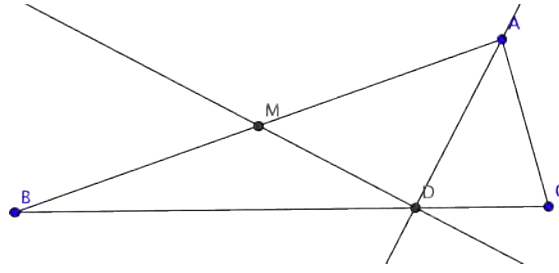
$$\widehat{AIC} = \widehat{BIJ} = \widehat{AJB} \quad (IBJ \text{ isocèle}).$$

Les triangles  $AIC$  et  $AJB$  étant donc semblables, on a alors l'égalité :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{JB}{IC}$$

Comme  $IBJ$  est isocèle en  $B$ , on a  $IB = JB$ , ce qui donne le résultat attendu.

*Solution de l'exercice 5.* La situation est représentée sur la figure ci-dessous.



On considère  $K$  le milieu de  $[MA]$ . Le triangle  $MDA$  étant rectangle en  $A$ , on a :

$$AK = DK = MK.$$

Il en résulte tout d'abord que le triangle  $DKA$  est isocèle en  $K$ , ce qui donne l'égalité d'angles :

$$\widehat{ADK} = \widehat{DAK}.$$

Comme on a par ailleurs que  $\widehat{DAK} = \widehat{DAC}$  (car  $(AD)$  est la bissectrice de  $\widehat{BAC}$ ), on en déduit que les droites  $(AC)$  et  $(KD)$  sont parallèles (angles alternes internes égaux).

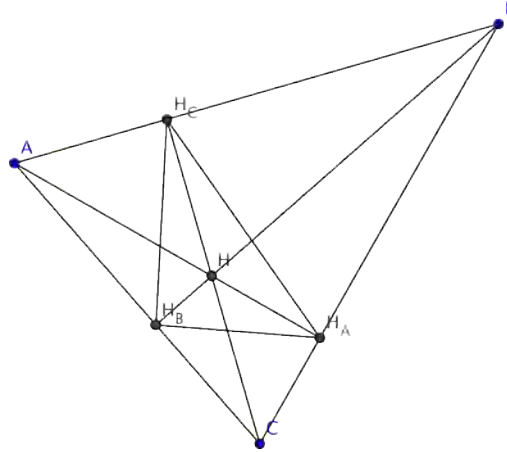
Le théorème de Thalès appliqué au triangle  $BAC$  donne alors :

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

Comme  $\frac{BK}{BA} = \frac{3}{4}$ , on en déduit facilement que :

$$DB = 3 \cdot DC.$$

*Solution de l'exercice 6.* On construit de même le point  $H_C$  et le point  $H$ , orthocentre du triangle.



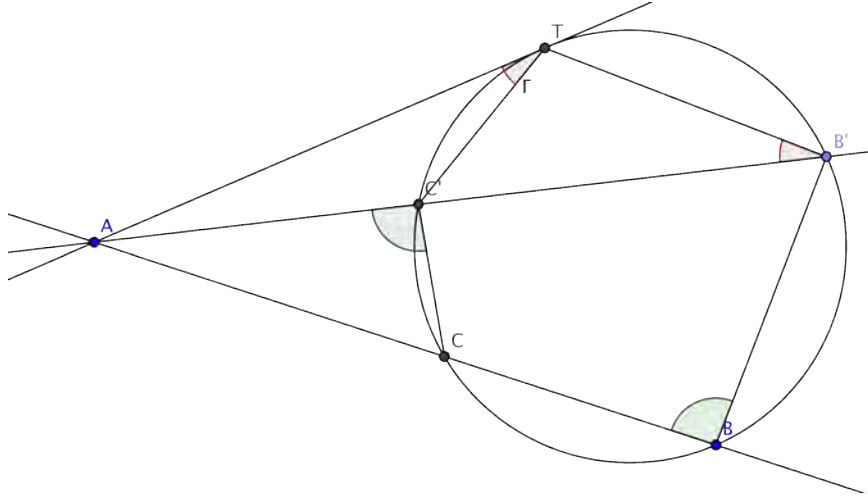
En remarquant que les points  $A, H_C, H$  et  $H_B$  sont cocycliques car sur un même cercle de diamètre  $[AH]$  (de même pour les points  $B, H_A, H, H_C$  et  $C, H_B, H, H_A$ ), on est rapidement capable d'exprimer tous les angles de la figure à l'aide des trois angles du triangle. On trouve alors que  $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{ACB}$  et  $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{ABC}$ , d'où la conclusion.

## 2 Cours et exercices de l'après-midi

### 2.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

#### Définition et expression

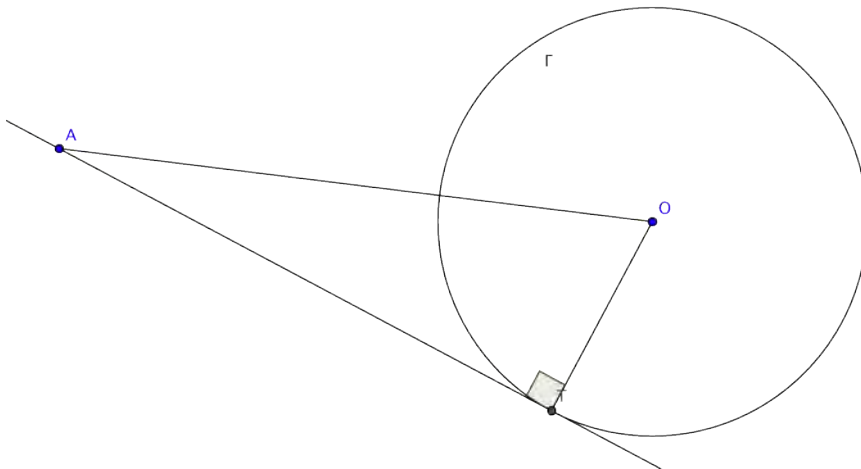
Soit  $\Gamma$  un cercle,  $A$  un point et  $\Delta, \Delta'$  deux droites passant par  $A$  et coupant  $\Gamma$  en  $B$  et  $C$  pour  $\Delta$ , et en  $B'$  et  $C'$  pour  $\Delta'$ .



Une chasse aux angles rapide montre que les triangles  $ABB'$  et  $AC'C$  sont semblables. On a donc  $\frac{AB}{AC'} = \frac{AB'}{AC}$ , ce qui nous donne  $AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$ . On observe que si  $B$  et  $C$  sont confondus, *i.e.* si  $\Delta$  est une tangente à  $\Gamma$ , le résultat est toujours vrai en utilisant le cas tangentiel du théorème de l'angle inscrit. On peut aussi remarquer que  $B$  et  $C$  sont de part et d'autre de  $A$  si et seulement si  $A$  est intérieur à  $\Gamma$ , ce qui justifie la définition suivante :

**Définition.** On appelle puissance du point  $A$  par rapport au cercle  $\Gamma$ , et on note  $P(A, \Gamma)$  la quantité  $AB \cdot AC$ , le produit étant algébrique, c'est-à-dire qu'il est négatif si  $AB$  et  $AC$  ne sont pas dans le même sens.

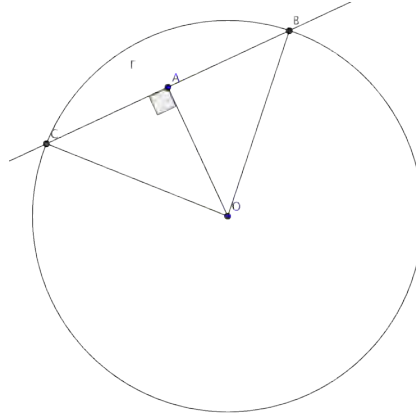
On note maintenant  $O$  et  $r$  respectivement le centre et le rayon de  $\Gamma$ . Si  $A$  est extérieur à  $\Gamma$ , on peut considérer le cas où  $B = C$  et on a alors  $P(A, \Gamma) = AB \cdot AC = AB^2$ .



Or, comme  $(AB)$  et  $(OB)$  sont orthogonales, on a d'après Pythagore  $OA^2 = AB^2 + OB^2 = AB^2 + r^2$ , soit  $AB^2 = OA^2 - r^2$ . On a donc

$$P(A, \Gamma) = OA^2 - r^2. \quad (D.1)$$

Notons que si  $A$  est intérieur au cercle, la formule (D.1) reste valable, pour la montrer on considère cette fois non pas la tangente menée par  $A$  en  $\Gamma$  mais la droite orthogonale à  $(AO)$  passant par  $A$ , et on a  $AB = AC$ , ainsi que  $r^2 = AB^2 + OA^2$ , donc  $P(A, \Gamma) = -AB \cdot AC = -AB^2 = OA^2 - r^2$ .



Remarquons aussi que si  $A, B, C$  ainsi que  $A, B', C'$  sont alignés,  $AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$  est une condition nécessaire, mais aussi suffisante pour que  $BCB'C'$  soit inscriptible. En effet, l'intersection du cercle circonscrit à  $BCB'$  et de la droite  $(AB')$  est un point  $C^*$  vérifiant  $AB' \cdot AC^* = AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$ , donc  $C^* = C'$ . Retenons deux remarques importantes pour la suite :

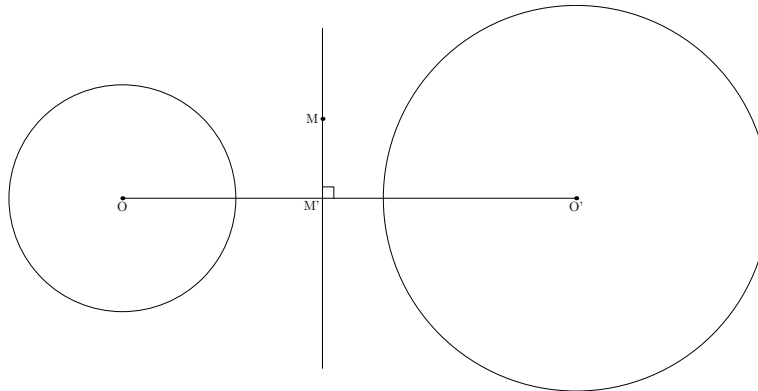
1.  $P(A, \Gamma) = 0$  ssi  $A \in \Gamma$ .
2. Si une tangente à  $\Gamma$  menée depuis  $A$  rencontre  $\Gamma$  en  $T$ , alors  $P(A, \Gamma) = AT^2$ .

### Axe radical

Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux cercles non concentriques, de centres respectifs  $O$  et  $O'$ , et de rayons respectifs  $r$  et  $r'$ . On s'intéresse au lieu géométrique  $D$  des points  $M$  vérifiant

$$P(M, \Gamma) = P(M, \Gamma') \quad (\text{D.2})$$

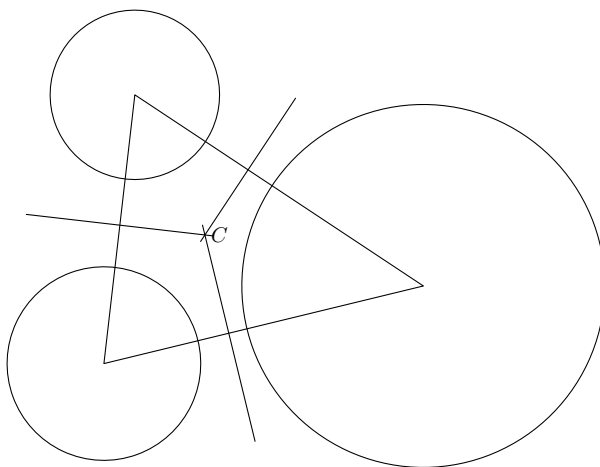
Nous allons prouver que  $D$  est une droite. La relation (D.2) se réécrit  $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$ , soit  $MO^2 - MO'^2 = K$ , où on a défini  $K = r^2 - r'^2$ . On définit  $M'$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OO')$ . On a d'après Pythagore  $M'O^2 = MO^2 - MM'^2$ , et  $M'O'^2 = MO'^2 - MM'^2$ , donc  $M'O^2 - M'O'^2 = MO^2 - MO'^2 = K$ , donc  $M \in D$  si et seulement si  $M' \in D$ . D'autre part, comme  $K$  est fixé, on peut remarquer qu'il existe un unique point  $A$  de  $(OO')$  vérifiant  $AO^2 - AO'^2 = K$  (exercice), et donc on a finalement :  $M \in D$  si et seulement si  $(MA)$  est orthogonale à  $(OO')$ , *i.e.*  $D$  est la droite orthogonale à  $(OO')$  passant par  $A$ . On l'appelle l'axe radical de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .



Il découle de la définition de l'axe radical que si  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont trois cercles non deux à deux concentriques, alors on a :  $D_3$  de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,  $D_1$  de  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , et  $D_2$  de  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_1$  sont concourants, parallèles ou confondus.

En effet, si  $D_1$  et  $D_2$  sont sécants en  $A$ , alors  $P(A, \Gamma_2) = P(A, \Gamma_3)$  et  $P(A, \Gamma_3) = P(A, \Gamma_1)$ , donc  $A$  a la même puissance par rapport aux trois cercles, donc  $A \in D_3$ , ce qui prouve l'assertion. De plus, il est facile de voir que comme  $D_3$  est orthogonal à  $(O_1O_2)$  et ainsi de suite, les axes

radicaux sont concourants si et seulement si les centres des trois cercles ne sont pas alignés. Dans ce cas, on appelle  $A$  le centre radical des trois cercles.

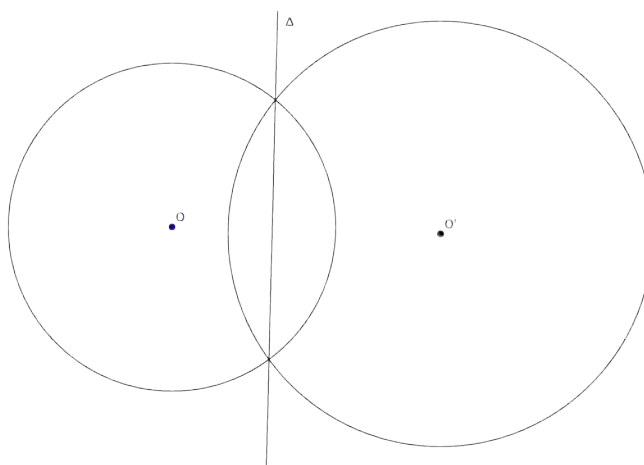


Il est intéressant de voir des constructions géométriques possibles de l'axe radical de deux cercles :

Cas 1 :  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont sécants en  $A$  et  $B$  distincts. C'est le cas le plus facile : on a

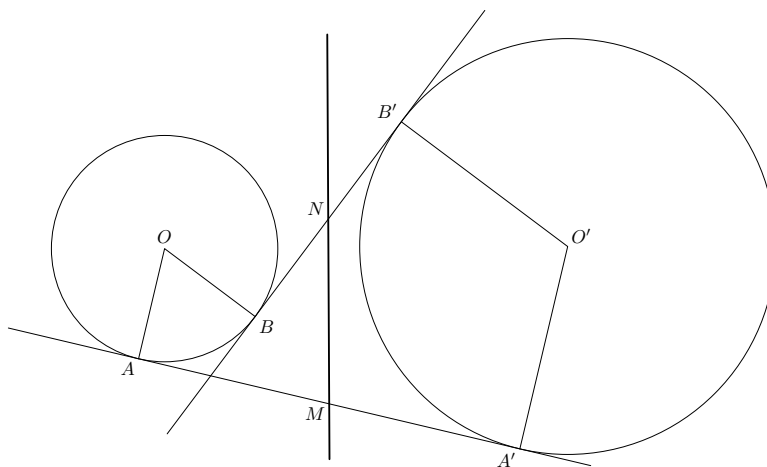
$$P(A, \Gamma) = P(B, \Gamma) = P(A, \Gamma') = P(B, \Gamma') = 0,$$

donc  $D = (AB)$ .



Cas 2 :  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont tangents en  $A$ . Alors  $O$ ,  $O'$  et  $A$  sont alignés, et  $P(A, \Gamma) = P(A, \Gamma') = 0$ , donc  $D$  est la droite orthogonale à  $(OO')$  passant par  $A$ , *i.e.*  $D$  est la tangente commune à  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  passant par  $A$ .

Cas 3 :  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont disjoints et extérieurs l'un à l'autre. On considère alors deux tangentes communes  $\Delta$  et  $\Delta'$  aux deux cercles. Si  $\Delta$  rencontre  $\Gamma$  en  $A$  et  $\Gamma'$  en  $A'$ , alors le milieu  $M$  de  $[AA']$  vérifie  $P(M, \Gamma) = MA^2 = MA'^2 = P(M, \Gamma')$ , donc  $M \in D$ . De même, si  $\Delta'$  rencontre  $\Gamma$  en  $B$  et  $\Gamma'$  en  $B'$ , le milieu  $N$  de  $[BB']$  appartient à  $D$ . Donc  $D = (MN)$ .

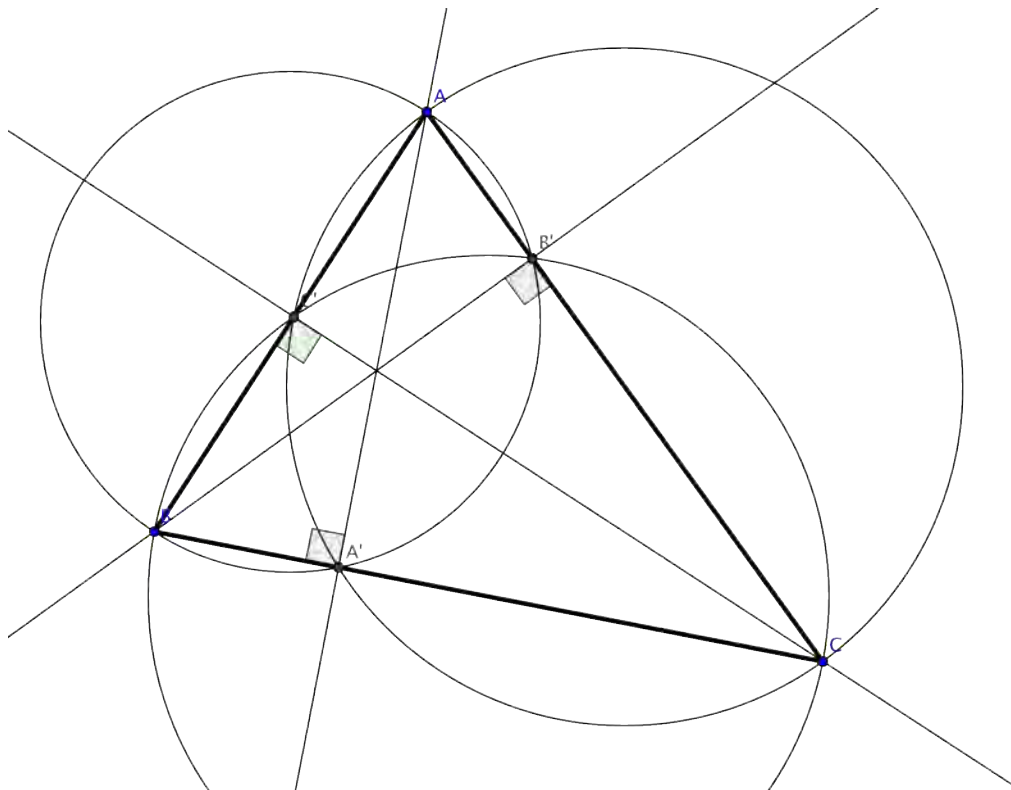


Cas 4 :  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont disjoints, et l'un est intérieur à l'autre. Dans ce cas, il n'existe pas de construction géométrique élémentaire de l'axe radical des deux cercles.

### Applications

**Exercice 1.** Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

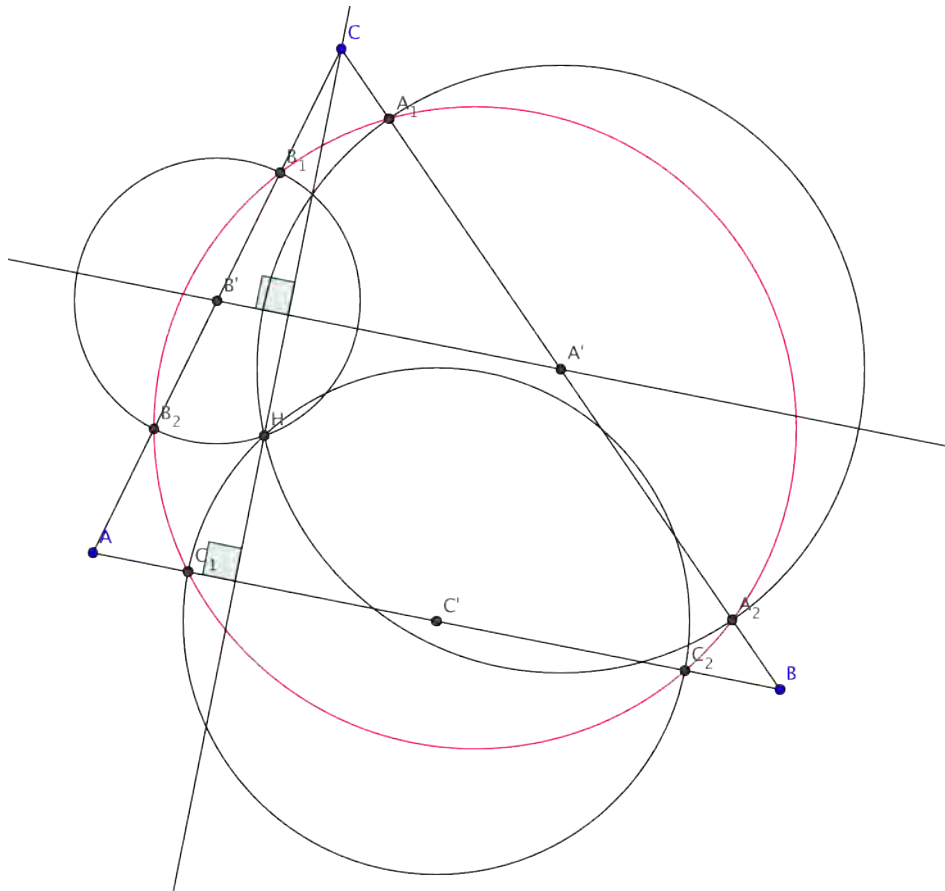
*Solution de l'exercice 1.* Soit  $ABC$  un triangle. On prend  $A' \in (BC)$ ,  $B' \in (CA)$  et  $C' \in (AB)$  tels que  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  soient les hauteurs du triangle  $ABC$ .



Le théorème de l'angle inscrit (dans ce cas, de l'équerre) montre que  $ABA'B'$ ,  $ACA'C'$  et  $BCB'C'$  sont cocycliques, et les axes radicaux de leurs cercles circonscrits deux à deux sont les hauteurs  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$ , donc ces dernières sont concourantes.

**Exercice 2** (IMO 2008, 1). Soit  $ABC$  un triangle,  $H$  son orthocentre, et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les milieux respectifs de  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ . On note  $A_1$  et  $A_2$  les points de  $(BC)$  tels que  $A'A_1 = A'A_2 = A'H$ . On définit de même  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$ . Montrer que  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  est inscriptible.

*Solution de l'exercice 2.* Montrons que  $A_1A_2B_1B_2$  est inscriptible. On nomme  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$  les cercles de centres respectifs  $A'$  et  $B'$ , et de rayons respectifs  $A'H$  et  $B'H$ . L'axe radical de  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$  est orthogonal à  $(A'B')$ , donc à  $(AB)$ , et passe par  $H$  (car  $H$  appartient aux deux cercles) : c'est donc la hauteur issue de  $C$ . Donc  $P(C, \Gamma_A) = P(C, \Gamma_B)$ .

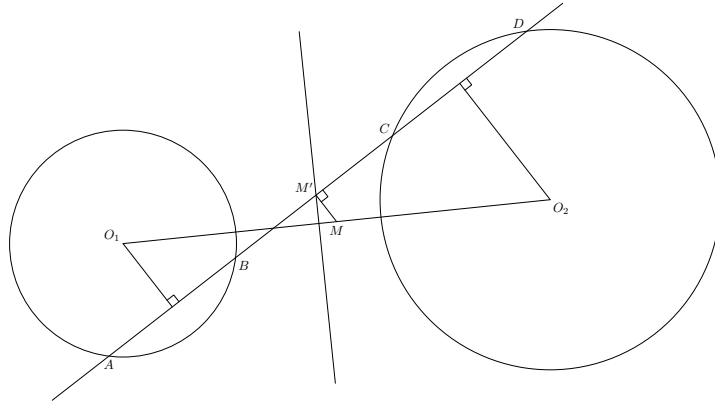


Entre autres, cela implique  $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$ , i.e.  $A_1A_2B_1B_2$  inscriptible sur un cercle  $\Gamma_1$ . De même, on montre que  $A_1A_2C_1C_2$  est inscriptible sur un cercle  $\Gamma_2$ , ainsi que  $C_1C_2B_1B_2$  sur un cercle  $\Gamma_3$ . Cependant, si ces cercles n'étaient pas les mêmes, leurs axes radicaux seraient les côtés du triangle, donc ne seraient ni concourants ni parallèles, ce qui est absurde. Donc  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ , et on a le résultat demandé.

**Exercice 3** (Tournoi des villes). Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux cercles extérieurs l'un à l'autre. On dit qu'une droite  $d$  coupant les deux cercles est équitale si les cordes définies par  $d$  sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont même longueur. On note  $O_1$  et  $O_2$  les centres respectifs de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , et  $M$  le milieu de  $[O_1O_2]$ . Montrer que quelles que soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois droites équitales quelconques, le cercle circonscrit du triangle défini par  $a$ ,  $b$  et  $c$  passe par  $M$ .

Rappel : *Théorème de la droite de Simson.* Soit  $ABC$  un triangle,  $\Gamma$  son cercle circonscrit, et  $P$  un point du plan. On appelle  $P_A$ ,  $P_B$  et  $P_C$  les projetés orthogonaux de  $P$  respectivement sur  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$ . Alors  $P_A$ ,  $P_B$  et  $P_C$  sont alignés si et seulement si  $P \in \Gamma$ .

*Solution de l'exercice 3.* D'après le théorème, il suffit de montrer que les projetés orthogonaux de  $M$  sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont alignés sur une droite  $\Delta$ . Comme on peut fixer  $a$  et  $b$  (ce qui définit  $\Delta$ ) et faire varier  $c$ , on intuite que  $\Delta$  est indépendante du choix de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Il suffit donc de montrer qu'il existe une droite  $\Delta$  telle que pour toute droite équitale  $d$ , le projeté orthogonal de  $M$  sur  $d$  appartienne à  $\Delta$ . Nous allons montrer que l'axe radical de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  convient comme choix pour  $\Delta$ . En effet, soit  $d$  une droite équitale, et  $M'$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $d$ . On note  $O'_1$  et  $O'_2$  les projetés orthogonaux respectifs de  $O_1$  et  $O_2$  sur  $d$ .



Si  $[AB]$  et  $[CD]$  sont les cordes définies par  $d$  respectivement sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , on a :

$$\begin{aligned} M'O'_1 &= M'O'_2 \\ O'_1A &= O'_1B \text{ (resp. } O'_2C = O'_2D) \\ AB &= CD \end{aligned}$$

De ces égalités, on conclut facilement que  $M'A \cdot M'B = M'C \cdot M'D$ , donc  $M' \in \Delta$ .

## 2.2 Isométries directes

On ne travaillera dans cette partie qu'avec des angles orientés. Si on n'a pas orienté deux droites  $a$  et  $b$  au préalable, l'angle  $(a, b)$  sera pris modulo  $180^\circ$ , c'est-à-dire qu'on considèrera comme identiques un angle  $\alpha$  et  $\alpha + 180^\circ$ .

### Composition de deux réflexions

**Droites sécantes** Soient  $a$  et  $b$  des droites sécantes en  $O$ . On note  $s_a$  et  $s_b$  les réflexions de droites respectives  $a$  et  $b$ . On aimerait exprimer simplement la transformation  $r$  composée de  $s_a$  par  $s_b$  (on applique  $s_a$ , puis  $s_b$ ). Pour cela, orientons les droites  $a$  et  $b$ , prenons un point  $M$  du plan, et notons  $M' = s_a(M)$ ,  $M'' = s_b(M')$ , de telle sorte que  $M'' = r(M)$ . Puisque  $O \in a$  et  $O \in b$ , on a  $OM = OM' = OM''$ . Notons que si  $\alpha = (a, b)$  (l'angle orienté entre les droites  $a$  et  $b$ ), on a pour tout point  $A$  du plan la relation de Chasles pour les angles :  $(OA, b) = (OA, a) + (a, b) = (OA, a) + \alpha$ . On a alors  $(OM', a) = -(OM, a)$ , et  $(OM'', b) = -(OM', b)$ . Or,  $(OM', b) = (OM', a) + \alpha$ , donc

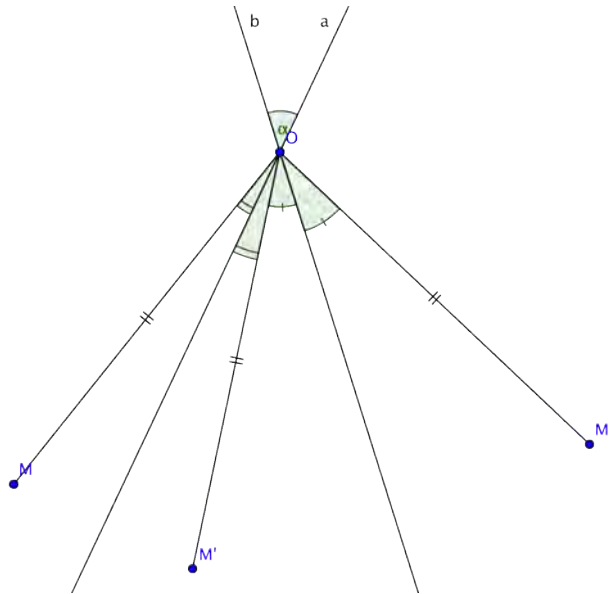
$$(b, OM'') = -(OM'', b) = (OM', b) = (OM', a) + \alpha = -(OM, a) + \alpha.$$

Donc, en utilisant deux fois la relation de Chasles, on a :

$$(OM, OM'') = (OM, a) + (a, b) + (b, OM'') = (OM, a) + \alpha + (-(OM, a) + \alpha) = 2\alpha.$$

Donc  $M''$  est l'unique point du plan qui vérifie  $OM = OM''$  et  $(OM, OM'') = 2\alpha$ . Cela montre que  $r$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $2\alpha$ .





Remarque 1 : Si l'orientation de  $a$  et  $b$  avait été choisie différemment, on aurait pu se retrouver avec un angle  $(a, b) = \beta$  différent de  $\alpha$ . Heureusement, on aurait alors eu  $\beta = \alpha + 180^\circ$ , et donc  $2\beta = 2\alpha$  (on raisonne en matière d'angles). Donc la définition de  $r$  n'est pas modifiée par le choix d'orientation de  $a$  et de  $b$ , ce dont on pouvait se douter...

Remarque 2 : En appliquant le raisonnement inverse, on peut toujours décomposer une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  en la composée de deux réflexions de droites  $a$  et  $b$  passant par  $O$  et formant un angle  $\frac{\theta}{2}$  entre elles. Comme ceci est suffisant, si  $d$  est une droite fixée passant par  $O$ , on peut de plus faire en sorte que  $a = d$ , ou bien que  $b = d$  dans la décomposition. Cela nous donne un corollaire qui sera important par la suite, pour exprimer la composée de deux réflexions : Soit  $r$  une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ , et  $d$  une droite passant par  $O$ . Alors il existe deux uniques droites  $a$  et  $b$  passant par  $O$  telles que  $r$  soit la composition de  $r_a$  par  $r_d$ , et aussi la composition de  $r_d$  par  $r_b$ . Ces droites vérifient  $(a, d) = (d, b) = \frac{\theta}{2}$ .

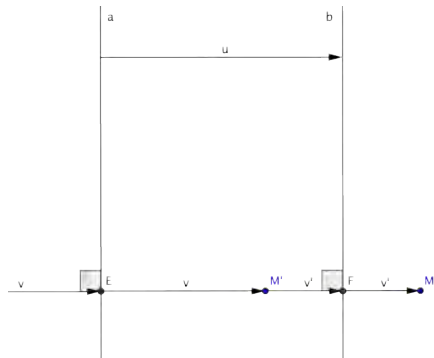
**Droites parallèles** Si  $a$  et  $b$  sont parallèles, on peut aussi exprimer la composée  $t$  de  $s_a$  par  $s_b$ . Soit  $\vec{u}$  l'unique vecteur orthogonal à  $a$  et  $b$  tel que la translation de vecteur  $\vec{u}$  envoie  $a$  sur  $b$ . Soit  $M$  un point du plan,  $M' = s_a(M)$ , et  $M'' = s_b(M')$ , de telle sorte que  $M'' = t(M)$ . On note de plus  $A$  et  $B$  les projetés orthogonaux de  $M$  respectivement sur  $a$  et  $b$ . On a alors  $\overrightarrow{M'A} = -\overrightarrow{MA}$ , et  $\overrightarrow{M''B} = -\overrightarrow{M'B}$ . Or,  $\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M'A} + \vec{u}$ , donc

$$\overrightarrow{BM''} = -\overrightarrow{M''B} = \overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M'A} + \vec{u} = -\overrightarrow{MA} + \vec{u}.$$

Donc

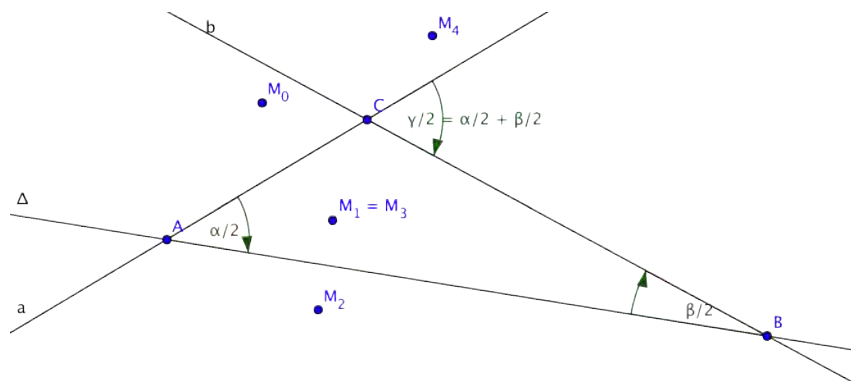
$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM''} = \overrightarrow{MA} + \vec{u} - \overrightarrow{MA} + \vec{u} = 2\vec{u}.$$

Cela montre que  $t$  est la translation de vecteur  $2\vec{u}$ .



### Composition de deux rotations

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer « simplement » la composée  $r$  de deux rotations  $r_A$  et  $r_B$ , de centres respectifs  $A$  et  $B$ , et d'angles respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ . Notons  $\Delta$  la droite  $(AB)$ . Le corollaire ci-dessus montre que si  $a$  est la droite passant par  $A$  et vérifiant  $(a, \Delta) = \frac{\alpha}{2}$ , et  $b$  la droite passant par  $B$  et vérifiant  $(\Delta, b) = \frac{\beta}{2}$ , alors  $r_A$  est la composée de  $s_a$  par  $s_\Delta$ , et  $r_B$  est la composée de  $s_\Delta$  par  $s_b$ . La composition de  $r_A$  par  $r_B$  est donc la composée (dans cet ordre) de  $s_a$ ,  $s_\Delta$ ,  $s_\Delta$  et  $s_b$ . Or, la composée de  $s_\Delta$  par  $s_\Delta$  est l'identité, et donc  $r$  est la composée de  $s_a$  par  $s_b$ . C'est donc la rotation de centre  $C$  point d'intersection de  $a$  et  $b$ , et d'angle  $\gamma = \alpha + \beta$ .



## 3 Exercices du jour

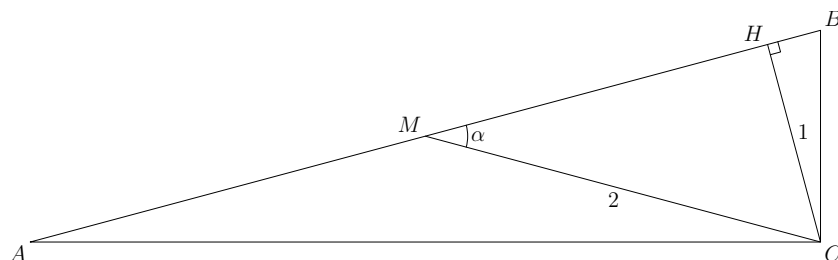
### 3.1 Énoncés

**Exercice 1.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $C$ . On désigne par  $M$  le milieu de  $[AB]$  et par  $H$  le pied de la hauteur issue de  $C$ . Sachant que  $CH = 1$  et  $CM = 2$ , déterminer l'angle  $\widehat{CAB}$ .

**Exercice 2.** Les diagonales d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  se coupent en  $O$ . On suppose que les triangles  $ABO, BCO, CDO, DAO$  ont même périmètre. Montrer que  $ABCD$  est un losange.

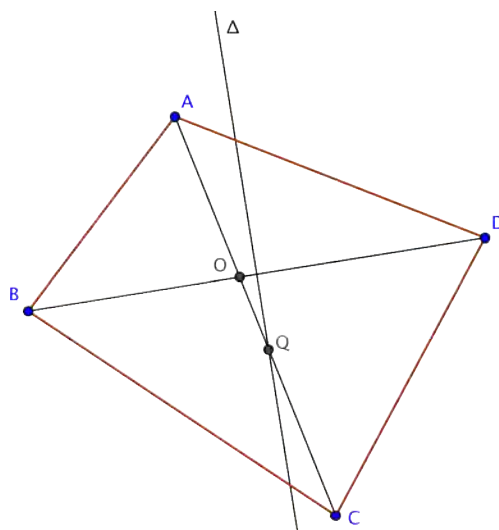
### 3.2 Solutions

*Solution de l'exercice 1.* Soit  $\alpha = \widehat{BMC}$ . On a  $\sin \alpha = \frac{HC}{MC} = \frac{1}{2}$  donc  $\alpha = 30^\circ$  ou bien  $\alpha = 150^\circ$ . Le triangle  $MBC$  est isocèle en  $M$  donc  $\widehat{MBC} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ , et  $\widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{MBC} = \frac{\alpha}{2}$ . On a donc deux possibilités : soit  $\widehat{MBC} = 15^\circ$ , soit  $\widehat{MBC} = 75^\circ$ . (Remarquons que l'on passe d'une possibilité à l'autre en intervertissant  $A$  et  $B$ ).



*Solution de l'exercice 2.* Dire que le polygone est convexe revient en pratique à dire que l'intersection  $O$  des diagonales est intérieure au polygone. On commence par un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire qu'on suppose que le quadrilatère n'est pas un losange, donc que les côtés n'ont pas tous la même longueur, et on va prouver que l'hypothèse (que les quatre triangles  $ABO, BCO, CDO, DAO$  ont même périmètre) ne peut pas être vérifiée. Supposons par exemple que  $AD < AB$  - quitte à changer le nom des quatre sommets, on peut toujours se ramener à ce

cas-là. Cela signifie que  $A$  n'est pas sur la médiatrice  $\Delta$  de  $[BD]$ . Plus précisément,  $\Delta$  partage le plan en deux demi-plans, tout point  $M$  de l'un vérifie  $MB < MD$ , tout point  $N$  de l'autre vérifie  $NB > ND$ .



Dès lors, soit  $\Delta$  est parallèle à  $(AC)$  auquel cas  $A$  et  $O$  sont dans le même demi-plan : puisque  $AD < AB$ ,  $OD < OB$  donc le périmètre de  $AOD$  est strictement inférieur au périmètre de  $AOB$ . Soit  $\Delta$  coupe  $(AC)$  en  $Q$ , et là, de deux choses l'une : si  $Q$  n'est pas situé entre  $O$  et  $A$ , alors  $O$  et  $A$  sont à nouveau dans le même demi-plan, et le raisonnement ci-dessus prouve que  $AOD$  a un périmètre plus petit que  $AOB$ . Si  $Q$  appartient à  $]OA]$ , c'est  $O$  et  $C$  qui sont dans le même demi-plan,  $OB \leq OD$  (car il faut envisager le cas où  $O = Q$ ),  $CB < CD$ , donc c'est  $BCO$  qui a un périmètre inférieur à celui de  $CDO$ . Ce qui achève la démonstration.

## 4 Exposé : qui a découvert le théorème de Pythagore ?

La réponse semble évidente : Pythagore. Mais ce n'est pas si sûr que cela. On ne sait pas grand-chose de Pythagore, dans la mesure où il n'a lui-même rien écrit et les textes qui parlent de lui sont très tardifs. On sait toutefois qu'il a existé, a vécu de l'an -580 à l'an -497 environ, que c'est avant tout un penseur religieux qui a « élevé l'arithmétique au dessus des besoins des marchands » (Aristoxène). Le nombre  $a$ , pour Pythagore, un caractère divin, et les *triplets pythagoriciens* (trois entiers  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tels que  $a^2 + b^2 = c^2$ ) jouent un rôle sans doute plus important en arithmétique qu'en géométrie. Le triangle rectangle de côtés 3, 4, 5, qu'il connaissait certainement, ne sert pas seulement en mathématiques : la « corde à 13 noeuds » (13 noeuds équidistants, donc 12 intervalles égaux) était utilisée, encore au moyen-âge, notamment pour déterminer des angles droits (triangle 3, 4, 5) et des angles de  $60^\circ$  (triangle 4, 4, 4). Mais cela ne prouve pas que Pythagore ait effectivement su démontrer son théorème, car on n'a retrouvé aucune trace d'une telle démonstration, même si cela demeure possible avec les outils mathématiques qu'il possédait.

La première preuve rédigée de manière indiscutable se trouve dans les *Eléments* d'Euclide. Euclide a vécu bien après Pythagore (environ -325 à -265), et cet ouvrage est un des principaux fondements des mathématiques. On y trouve les bases de l'arithmétique, avec notamment la *division euclidienne*, mais également de la géométrie, qu'il construit de manière rigoureuse à partir de cinq axiomes. Ceux-ci doivent être considérés en quelque sorte comme les « règles du jeu », que l'on ne conteste pas et qu'on ne cherche pas à prouver. L'un d'eux, le *cinquième postulat d'Euclide*, a longtemps intrigué les mathématiciens, car il semblait plus compliqué que les autres, surtout dans sa formulation originelle. En langage moderne, il s'énonce ainsi : « par un point extérieur à une droite on peut mener une et une seule parallèle à cette droite » et beaucoup pensaient qu'on

devait pouvoir le déduire des quatre autres, que ce n'était pas un véritable axiome. Vers 1733, Saccheri tenta de le démontrer par l'absurde : supposons qu'il soit faux, donc construisons une géométrie reposant sur les quatre premiers axiomes et la négation du cinquième, par exemple : « *par un point extérieur à une droite on ne peut pas mener de parallèle à cette droite* » ou bien « *on peut mener plusieurs parallèles à cette droite* ». Si ce postulat d'Euclide découle effectivement des quatre autres, une telle supposition doit conduire à une contradiction prouvant qu'elle est absurde. Or il n'en est rien : Saccheri a cru que sa démonstration n'aboutissait pas et est tombé dans l'oubli, mais un siècle plus tard, l'idée a été reprise par Lobatchevski et plusieurs autres mathématiciens. Ainsi naquirent les géométries non-euclidiennes qui non seulement n'ont rien d'absurde, mais peuvent être utiles par exemple en physique. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, on a voulu reconstruire l'ensemble des mathématiques à partir d'un nombre limité d'axiomes, mais on a vite découvert que ce n'est pas si simple que cela.

Mais revenons à notre théorème de Pythagore. La démonstration qui figure dans les *Eléments* d'Euclide (où le théorème n'est pas attribué à Pythagore : parmi un certain nombre de propositions numérotées et démontrées dans l'ordre, celle-ci est la proposition 47) mérite d'être présentée en détails.

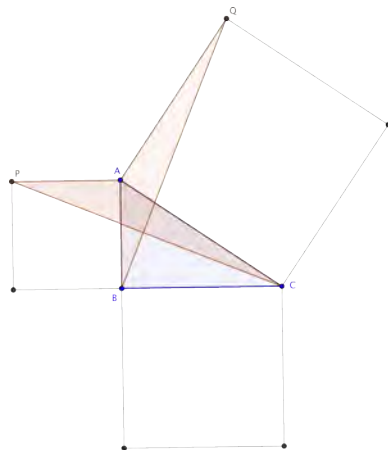


FIGURE 1 – Démonstration d'Euclide

Le carré de l'hypoténuse, c'est en fait l'aire d'un carré construit sur l'hypoténuse. Il s'agit donc de prouver que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Et pour ce faire, on trace la figure 1 où l'on remarque que les triangles  $ABQ$  et  $APC$  sont égaux, ou plutôt : isométriques. Ils ont deux côtés égaux :  $AB = AP$  et  $AQ = AC$  et l'angle construit entre les côtés vaut  $90^\circ + \widehat{BAC}$ . D'ailleurs, ces triangles se déduisent l'un de l'autre par une rotation de  $90^\circ$  autour de  $A$ . Or, sur la seconde figure, on trace la hauteur  $AH$  du triangle rectangle, qui recoupe le carré de l'hypoténuse en  $K$ . On remarque que les triangles  $ABQ$  et  $AHQ$  ont même aire, en utilisant un théorème qu'Euclide avait démontré précédemment dans les mêmes *Eléments*, à savoir : si  $H$  et  $B$  sont sur une même parallèle à la base  $AQ$ , les triangles  $ABQ$  et  $AHQ$  ont même aire. Cela revient à dire qu'ils ont même base  $AQ$  et même hauteur, la distance des deux droites parallèles, donc  $AH = QK$ . Euclide savait aussi que l'aire d'un tel triangle est la moitié de l'aire du rectangle  $AHKQ$ , donc la moitié du produit base  $\times$  hauteur.

Pour la même raison, sur la figure 3, le triangle  $APC$  a même aire que le triangle  $APB$ , égale à la moitié de l'aire du carré  $ABNP$ . On en déduit que le carré  $ABNP$  d'un côté  $AB$  de l'angle droit, a même aire que le rectangle  $AHKQ$ .

De la même manière (mais Euclide refait deux fois la démonstration), on prouverait que le triangle  $BCL$  a même aire que le triangle  $HCS$  (cf figure 4), donc le carré  $BCLM$  de l'autre côté  $BC$  de l'angle droit a même aire que le rectangle  $HCSK$ . Comme manifestement, la somme des

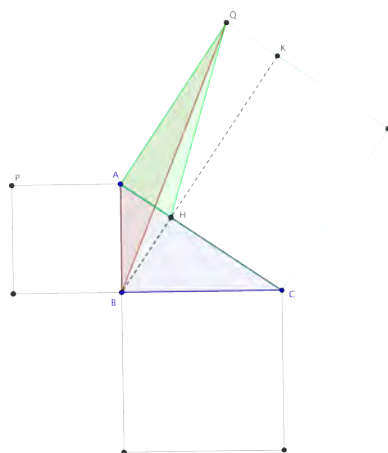


FIGURE 2 – Démonstration d'Euclide

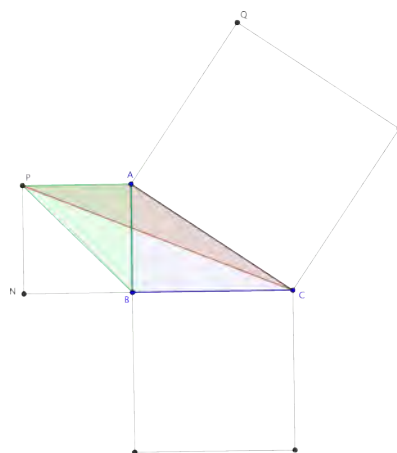


FIGURE 3 – Démonstration d'Euclide

aires des rectangles  $AHKQ$  et  $HCSK$  est égale à l'aire du carré  $ACKI$ , le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés.

Mais il existe d'autres démonstrations de ce même théorème, et en règle générale, rares sont les théorèmes qui ne peuvent se démontrer que d'une seule manière. En géométrie notamment, on trouve souvent un grand nombre de solutions différentes d'un même problème, et il n'en existe pas nécessairement une qui soit « la meilleure ». L'ouvrage fondamental des mathématiques chinoises, les neuf chapitres sur l'art mathématique, qui date environ du premier siècle de notre ère, présente le théorème de Pythagore (ou théorème de Gougu) de manière moins théorique qu'Euclide. La démonstration chinoise s'apparente au Tangram, et on s'attarde davantage sur les applications pratiques. Il s'agissait là encore de dessiner le carré de l'hypoténuse, puis de le découper de sorte qu'en déplaçant les trois morceaux grisés (cf figure 5), on puisse reconstituer les carrés des côtés. Cette technique des découpages soulève des problèmes très intéressants en mathématiques. Il existe, notamment, deux théorèmes importants qui s'y rapportent : d'une part, si deux polygones ont même aire, il est toujours possible de découper l'un d'eux en un nombre fini de morceaux qui, assemblés différemment, donnent l'autre polygone. On peut par exemple découper un triangle en morceaux permettant de reconstruire un pentagone, quels que soient le triangle et le pentagone, pour peu que l'aire soit la même. L'autre théorème, c'est que cela ne se généralise pas en dimension 3 : Hilbert avait inclus ce problème, en 1900, dans sa fameuse liste de 23 problèmes dont certains ne sont toujours pas résolus, mais celui-ci fut résolu très vite par Max Dehn, qui a défini un *invariant* qui ne peut pas changer par découpage et recollement. En 1965, le théorème de Sydler prouve que

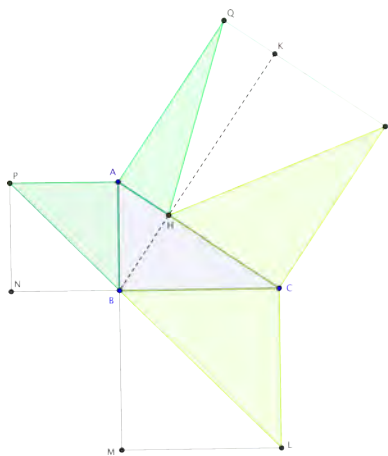


FIGURE 4 – Démonstration d'Euclide

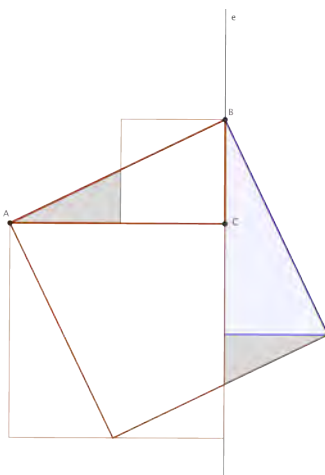


FIGURE 5 – Démonstration de Gougu

si deux polyèdres ont même volume et même invariant de Dehn, on peut les transformer l'un en l'autre par découpage et recollement. Mais un tétraèdre et un cube n'ayant pas même invariant de Dehn, on ne transforme jamais l'un en l'autre par découpage et recollement.

Une démonstration élégante mais plus moderne du théorème de Pythagore ne nécessite aucun découpage. Et guère plus de commentaires. Il suffit de déplacer quatre exemplaires de notre triangle rectangle à l'intérieur d'un carré de côté la somme des côtés de l'angle droit pour que l'aire non recouverte (nécessairement la même dans les deux cas) soit tantôt un carré, le carré de l'hypoténuse (on doit vérifier que c'est bien un carré : les quatre côtés sont manifestement égaux et les quatre angles sont droits, puisque la somme  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ), tantôt la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Citons une dernière démonstration qui aurait pu être trouvée par Pythagore. Traçons la hauteur  $AH$  du triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ . Elle découpe le triangle en deux triangles  $HBA$  et  $HAC$  qui chacun sont semblables à  $ABC$ . En effet, ils ont chacun un angle droit et un angle commun avec  $ABC$ . D'où  $\frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC}$ , et  $\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ . D'où l'on déduit :

$$BC = HB + HC = \frac{AB^2}{BC} + \frac{AC^2}{BC}$$

ou encore :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

Pour conclure, je signalerai que Pythagore n'est pas le seul à qui on attribue un théorème sans être sûr qu'il l'ait démontré. Thalès, qui était d'un demi-siècle plus ancien que Pythagore (né vers

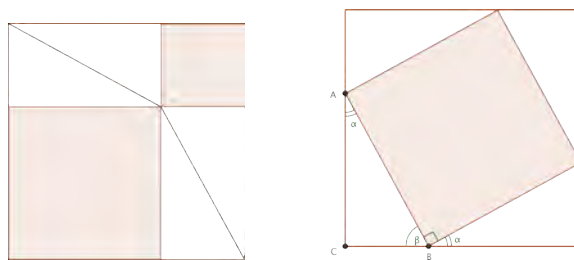


FIGURE 6 – Démonstration plus moderne

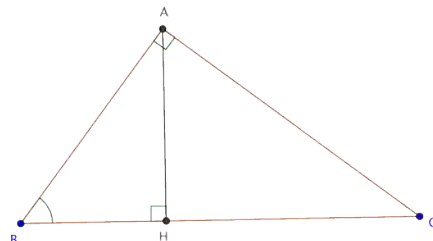


FIGURE 7 – Dernière démonstration

-625, mort vers -547), a démontré plusieurs théorèmes, comme le fait qu'un triangle ayant deux côtés égaux a deux angles égaux. Il est célèbre notamment pour avoir prédit une éclipse de soleil vers -585, avant la naissance de Pythagore. Mais parmi la demi-douzaine de théorèmes qu'il a démontrés ne figure pas celui qui porte son nom. D'ailleurs, les Français l'appellent théorème de Thalès, mais dans beaucoup de pays il porte des noms différents.





# E. Mercredi 27 octobre (géométrie)

## 1 Cours et exercices du matin

### 1.1 Énoncés

**Exercice 1.** Soit  $ABC$  un triangle. Montrer que l'intersection de la bissectrice issue de  $\widehat{B}$  et de la médiatrice de  $[AC]$  appartient au cercle circonscrit de  $ABC$ .

**Exercice 2.** Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles tels que  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ ,  $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$  et  $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ . Montrer que  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ .

**Exercice 3.** Soit  $ABC$  un triangle. Sur la droite  $(AC)$ , on place les deux points  $E$  et  $E'$  tels que les longueurs  $AE'$ ,  $AE$ ,  $AB$  soient égales et telles que  $E'$  soit du côté de  $C$ . Montrer qu'alors :

1. les droites  $(BE)$  et  $(BE')$  sont respectivement parallèles à la bissectrice intérieure et à la bissectrice extérieure de l'angle  $\widehat{A}$ ,
2. le triangle  $EBE'$  est un triangle rectangle.

**Exercice 4.** Soit  $ABC$  un triangle aux angles aigus d'orthocentre  $H$ . Montrer que les symétriques de  $H$  par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.

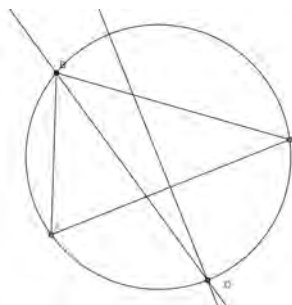
**Exercice 5.** On considère deux cercles tangents intérieurement en un point  $C$  et une corde  $[AB]$  du grand cercle tangente au petit cercle en  $E$ . Montrer que la droite  $(CE)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ACB}$ .

**Exercice 6.** Soient  $A_0, B, C$  trois points non alignés du plan. On note  $A_1$  le centre du cercle inscrit de  $A_0BC$ ,  $A_2$  celui de  $A_1BC$  et ainsi de suite pour construire les points  $A_2, A_3, \dots$ . Pour un entier  $n$ , calculer le rayon du cercle inscrit de  $A_nBC$ .

**Exercice 7.** Une droite passant par le sommet  $A$  d'un triangle équilatéral  $ABC$  coupe le côté  $[BC]$  en  $Q$  et le cercle circonscrit au triangle en  $P$ . Montrer que  $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$ .

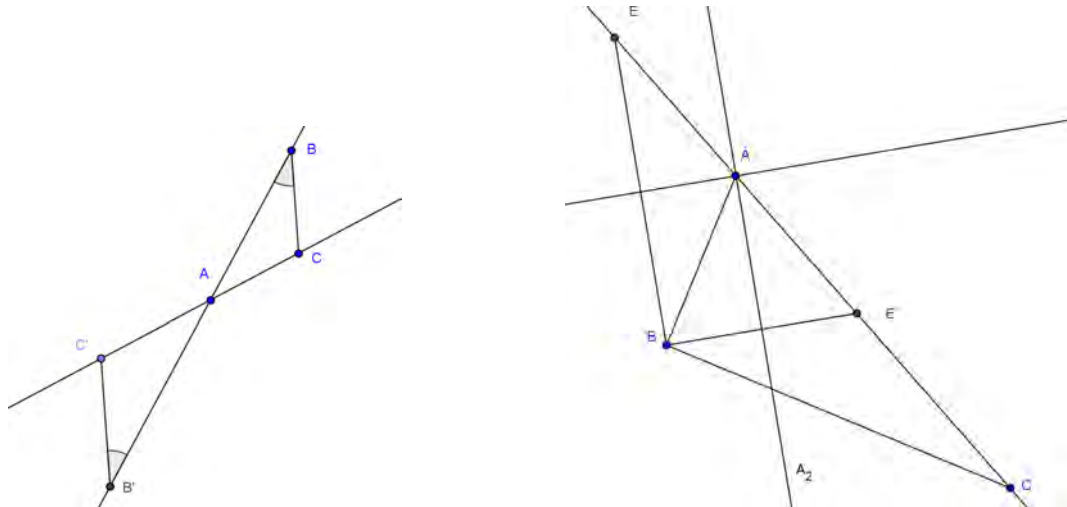
### 1.2 Solutions

*Solution de l'exercice 1.* Notons  $D$  l'intersection de la bissectrice issue de l'angle  $\widehat{B}$  et du cercle circonscrit de  $ABC$ . Il faut et il suffit de montrer que  $D$  appartient à la médiatrice de  $[AC]$ . Comme les angles  $\widehat{ABD}$  et  $\widehat{DBC}$  sont égaux, ceci implique les longueurs des arcs  $\widehat{AD}$  et  $\widehat{DC}$  sont égales, et donc que  $D$  appartient à la médiatrice de  $[AC]$ .



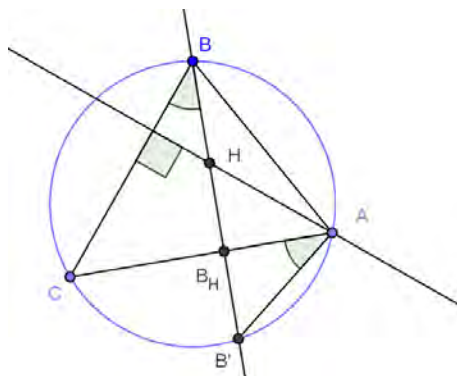
*Solution de l'exercice 2.* Superposons les deux triangles de sorte que  $A = A'$  et que les points  $B, A, B'$  et  $C, A, C'$  soient respectivement alignés, comme sur la figure ci-dessous.

Les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{A'B'C'}$  étant égaux, les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  sont parallèles. On en déduit le résultat par application du théorème de Thalès.



*Solution de l'exercice 3.* Notons  $AA_1$  et  $AA_2$  respectivement les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle  $\widehat{A}$ . Les triangles  $EAB$  et  $E'AB$  sont isocèles, et  $(AA_1)$  (resp.  $(AA_2)$ ) est perpendiculaire à  $(BE')$  (resp. à  $(BE)$ ). Comme  $(AA_1)$  et  $(AA_2)$  sont perpendiculaires, les droites  $(BE)$  et  $(AA_1)$ , respectivement  $(BE')$  et  $(AA_2)$  sont parallèles.

*Solution de l'exercice 4.* Notons  $B_H$  le pied de la hauteur issue de  $B$  et  $B'$  son intersection avec le cercle circonscrit à  $ABC$ .



Il suffit de montrer que les angles  $\widehat{HAB_H}$  et  $\widehat{B_HAB'}$  sont égaux. En effet, dans ce cas, les triangles rectangles  $HAB_H$  et  $B_HAB'$  auraient trois angles identiques et un angle en commun et seraient alors égaux. Ceci implique  $B'B_H = B_HH$  et donc que  $B'$  est le symétrique de  $H$  par rapport au côté  $(AC)$ .

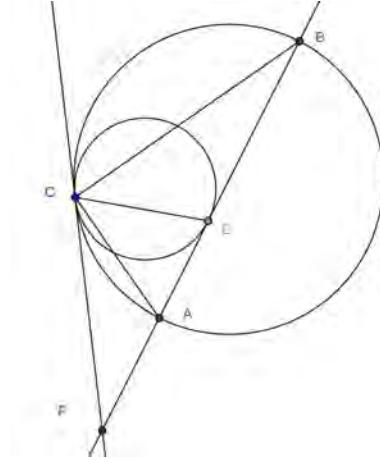
Montrons donc que  $\widehat{HAB_H} = \widehat{B_HAB'}$ . Notons  $\alpha = \widehat{HAB_H}$ . Comme les angles  $\widehat{HAB_H}$  et  $\widehat{CBB'}$  interceptent le même arc, ils sont égaux. On en déduit que  $\widehat{CBB'} = \beta$ , puis  $\widehat{BCA} = 90^\circ - \beta$  car  $CBB_H$  est rectangle en  $B_H$ . Mais alors  $\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{BCA} = \beta$ , ce qu'on voulait montrer.

On démontre de même que les symétriques de  $H$  par rapport aux autres côtés appartiennent au cercle circonscrit.

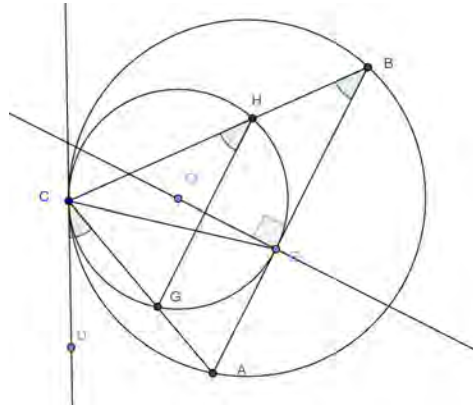
*Solution de l'exercice 5.* (Première solution) Soit  $F$  le point d'intersection de la corde  $(AB)$  avec la tangente commune. Les triangles  $FAC$  et  $FCB$  sont semblables et  $FC = FE$ . Par suite :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{FE}{FB} = \frac{FA}{FE} = \frac{FE - FA}{FB - FE} = \frac{AE}{EB},$$

et la droite  $(CE)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ACB}$ .



(Deuxième solution, d'après des idées d'élèves)



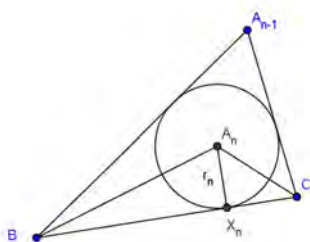
Notons  $O$  le centre du petit cercle et soient  $G, H$  les points d'intersection de respectivement  $(CB)$  et  $(CA)$  avec le petit cercle. On introduit le point  $D$  comme sur la figure ci-dessus. On commence par faire une petite chasse aux angles pour montrer que  $(AB)$  et  $(GH)$  sont parallèles. On a  $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{GHC}$ . Donc  $(AB)$  et  $(GH)$  sont parallèles. Or  $(OE)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires. Donc  $(OE)$  et  $(GH)$  sont perpendiculaires. Donc  $(OE)$  est la médiatrice de  $[GH]$ . Donc, d'après le premier exercice,  $(CE)$  est la bissectrice de  $\widehat{ACB}$ .

*Solution de l'exercice 6.* Notons  $r_n$  le rayon cherché et  $X_n$  le point de tangence entre le cercle inscrit de  $A_nBC$  et  $[BC]$ . Remarquons qu'en notant  $\beta = \widehat{B}$  et  $\gamma = \widehat{C}$ , on a  $\widehat{A_nBC} = \beta/2^n$  et  $\widehat{A_nCB} = \gamma/2^n$ . On en déduit que  $\widehat{BA_nC} = 180^\circ - (\beta + \gamma)/2^n$ . D'après la loi des sinus appliquée dans  $A_nCB$  :

$$BA_n = BC \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right)}{\sin\left(180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2^n}\right)}.$$

Donc  $BA_n = BC \sin(\gamma/2^n) / \sin((\beta + \gamma)/2^n)$ . Comme  $BA_nX_n$  est rectangle, on en déduit que :

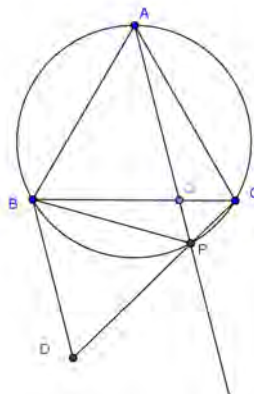
$$r_n = BC \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2^n}\right)}.$$



*Solution de l'exercice 7.* L'angle  $\widehat{BPC}$  valant  $120^\circ$ , on peut prolonger la demi-droite  $(CP)$  jusqu'à un point  $D$  tel que le triangle  $BDP$  soit équilatéral. Alors les droites  $(AP)$  et  $(BD)$  sont parallèles, et les triangles  $BCD$  et  $QCP$  sont semblables. On en déduit que :

$$\frac{BD}{QP} = \frac{CD}{CP} = 1 + \frac{PD}{CP}.$$

En divisant cette égalité par  $BD = PB = PD$ , on obtient l'égalité demandée.



## 2 Test de géométrie

### 2.1 Énoncés

**Exercice 1.** Soit  $ABC$  un triangle dont les trois angles sont aigus. On note  $D$  le pied de la hauteur issue de  $A$ . On construit quatre points  $H, E, F, G$  tels que :

1.  $DCGF$  et  $BDEH$  soient des carrés,
2.  $E$  et  $F$  appartiennent à  $(AD)$ ,
3.  $H$  et  $A$  ne sont pas du même côté de  $(BC)$ ,
4.  $G$  et  $A$  ne sont pas du même côté de  $(BC)$ .

Montrer que les droites  $(AD)$ ,  $(BG)$  et  $(HC)$  se coupent en un même point.

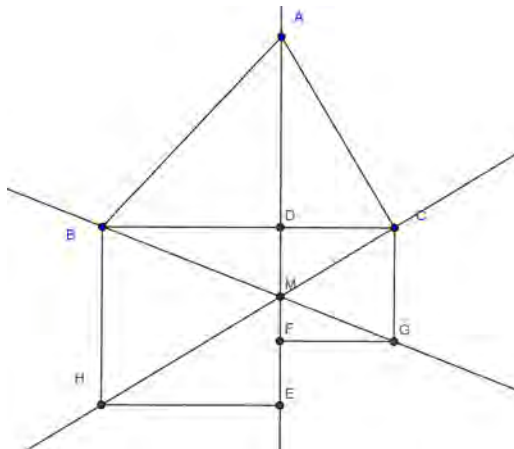
**Exercice 2.** On considère deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui se coupent en  $M$  et  $N$ . Soit  $(AB)$  la droite tangente aux deux cercles avec  $A \in \Gamma_1, B \in \Gamma_2$  et telle que  $M$  est plus proche que  $N$  de  $(AB)$ . Soit  $(CD)$  la droite passant par  $M$  et parallèle à  $(AB)$  avec  $C \in \Gamma_1, D \in \Gamma_2$ . Les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  se coupent en  $E$ , les droites  $(AN)$  et  $(CD)$  en  $P$ , les droites  $(BN)$  et  $(CD)$  en  $Q$ . Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Montrer que les triangles  $AMB$  et  $AEB$  sont semblables.
2. Soit  $K$  l'intersection de  $(MN)$  et  $(AB)$ . Montrer que  $KA = KB$  et en déduire que  $PM = QM$ .

3. En déduire que  $EP = EQ$ .

**Exercice 3.** Soient  $MNP$  un triangle,  $I$  un point de  $[MN]$  tel que  $(PI)$  soit la bissectrice de l'angle  $\widehat{P}$ , et  $E$  et  $F$  les intersections de la médiatrice de  $[MN]$  avec le cercle circonscrit au triangle  $MNP$ . On suppose que  $E$  et  $P$  sont de part et d'autre de  $(MN)$ . Montrer que  $EN^2 = EI \cdot EP$ .

## 2.2 Solution



*Solution de l'exercice 1.*

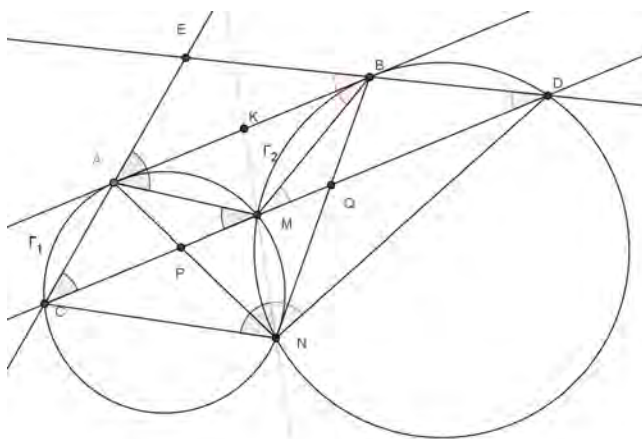
Les trois droites  $(BH)$ ,  $(DF)$  et  $(CG)$ , perpendiculaires à la même droite  $(BC)$ , sont parallèles. Notons  $M$  l'intersection de  $(BG)$  et de  $(DF)$ ,  $M'$  l'intersection de  $(CH)$  avec  $DF$ . On va montrer que  $M = M'$ . D'après le théorème de Thalès,  $DM/CG = BD/BC$ . Donc, comme  $CG = DC$ , on a :

$$DM = \frac{BD \cdot DC}{BD + DC}.$$

De même, d'après le théorème de Thalès,  $DM'/BH = CD/CB$ . Donc, comme  $BH = BD$ , on a :

$$DM' = \frac{BD \cdot DC}{BD + DC}.$$

Donc  $DM = DM'$ . Comme  $M$  et  $M'$  ne sont pas de part et d'autre de  $D$ , il vient  $M = M'$  et le résultat en découle.



*Solution de l'exercice 2.*

1. Soit  $K$  le point d'intersection de  $(MN)$  et de  $(AB)$ . Alors en calculant la puissance de  $K$  par rapport aux deux cercles, il vient :  $KA^2 = KM \cdot KN = KB^2$ . Donc  $KA = KB$ , ce qui implique, grâce au théorème de Thalès que  $PM = QM$ .
2. On fait une chasse aux angles :  $\widehat{EAB} = \widehat{ACD} = \widehat{BAM}$  et de même  $\widehat{EBA} = \widehat{BDM} = \widehat{ABM}$ . Ainsi, les triangles  $AEB$  et  $ABM$  sont semblables.



# F. Jeudi 28 octobre (algèbre)

## 1 Cours et exercices du matin

**Exercice 1.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres positifs tels que  $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = 1$ . Montrer que  $\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} = a - b$ .

*Solution de l'exercice 1.* Simplifions l'hypothèse en faisant tout passer dans le membre de gauche et en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{a(1+b)}{(1+a)(1+b)} + \frac{b(1+a)}{(1+a)(1+b)} - \frac{(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)} = \frac{ab-1}{(1+a)(1+b)} = 0$$

donc  $ab = 1$ . Dans la seconde expression, en multipliant numérateur et dénominateur par le même  $a$ ,  $\frac{a}{1+b^2} = \frac{a^2}{a+ab^2} = \frac{a^2}{a+b}$  car  $ab = 1$ , donc  $ab^2 = b$ . Pour la même raison,  $\frac{b}{1+a^2} = \frac{b^2}{b+a}$ . D'où :  $\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = a - b$

### 1.1 Rappel des identités remarquables

Pour tous  $a, b$  :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

ce qui se généralise...

### 1.2 Factorisation de Sophie Germain

**Exercice 2.** Pour  $n$  entier au moins égal à 2,  $n^4 + 4$  n'est jamais un nombre premier.

*Solution de l'exercice 2.* En effet,  $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 1)(n^2 + 2n + 1)$ . Or chacun des facteurs est un entier strictement supérieur à 1, si  $n > 1$ , car  $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1$ .

**Exercice 3.** Soient  $u$  et  $v$  deux réels. On pose  $s = u + v$ ,  $p = uv$ . Calculer  $u^3 + v^3$  en fonction de  $s$  et  $p$ .

*Solution de l'exercice 3.* On a

$$s^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = u^3 + v^3 + 3sp$$

donc  $u^3 + v^3 = s^3 - 3sp$ .

### 1.3 Formule de Cardan

Cette méthode de résolution de l'équation du troisième degré, découverte au XVI<sup>ème</sup> siècle, a joué un rôle important dans l'histoire des mathématiques. Nous nous limiterons à un exemple numérique.

On cherche pour quelle valeur de  $x$  on a  $x^3 + 3x + 6 = 0$ . Pour cela, on utilise l'exercice précédent en recherchant deux nombres  $u$  et  $v$  tels que  $uv = -1$  et tels que  $x = u + v$  soit solution de cette équation. On a  $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 - 3x$  car par hypothèse  $uv = -1$ . Donc  $x^3 + 3x + 6 = u^3 + v^3 + 6 = u^3 + \left(\frac{-1}{u}\right)^3 + 6$ , soit en multipliant par  $u^3$  :

$$(u^3)^2 + 6u^3 - 1 = 0.$$

Donc  $u^3$  est solution d'une équation du second degré, et on sait résoudre les équations du second degré :

$$(u^3 + 3)^2 - 10 = 0$$

donc  $u^3 = -3 + \sqrt{10}$  ou  $u^3 = -3 - \sqrt{10}$ .

Mais pour tout réel  $y$ , il existe un réel  $z$  tel que  $z^3 = y$ , et on le note :  $z = \sqrt[3]{y}$ . En outre, comme  $(-3 + \sqrt{10})(-3 - \sqrt{10}) = -1$  si  $u^3 = -3 + \sqrt{10}$ , alors  $v^3 = -3 - \sqrt{10}$  et inversement (car par hypothèse  $uv = -1$ ). En définitive, cette méthode donne une solution de l'équation

$$x = u + v = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{10}}$$

et on peut vérifier numériquement que ce nombre est bien la seule solution réelle de l'équation. Le problème que cela posait, c'est que pour certaines équations du troisième degré, notamment celles qui admettent trois racines, l'équation intermédiaire du second degré n'admet pas de racines réelles, et l'idée vint à Cardan de dire qu'elle avait quand même des racines, mais « imaginaires », et qu'en passant par ces racines imaginaires on pouvait trouver les racines réelles de l'équation de départ. C'est donc à partir de là que l'on a créé les nombres complexes, mais il a fallu plus de deux siècles pour les définir de manière satisfaisante.

**Exercice 4.** Montrer que  $(a - b)(b - c)(c - a) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = ab(b - a) + bc(c - b) + ca(a - b)$ .

*Solution de l'exercice 4.* Il suffit de développer :  $(a - b)(b - c)(c - a) = (ab - ac - b^2 + bc)(c - a) = abc - a^2b - ac^2 + a^2c + bc^2 - bca$ . Les termes en  $abc$  s'annulent et en regroupant les autres deux par deux de trois manières différentes, on obtient les trois égalités demandées.

**Exercice 5.** Pour quelle valeur de  $k$  a-t-on l'identité (vraie quels que soient  $a, b, c$ ) :

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) + kabc ?$$

*Solution de l'exercice 5.* Il suffit de développer chacun des deux membres. Tous les termes sont identiques sauf les termes en  $abc$  qui apparaissent deux fois à gauche et  $3 + k$  fois à droite. Donc  $k = -1$ . On remarquera que pour  $a = b = c = 1$ , on obtient :  $8 = 9 + k$ , donc la seule valeur possible de  $k$  est  $-1$ , mais cela ne dispense pas de faire le calcul pour prouver l'identité lorsque  $k = -1$ .

**Exercice 6.** a) Montrer que si  $a^2 + b^2 = a + b = 1$ , alors  $ab = 0$ . b) Montrer que si  $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$ , alors  $abc = 0$ .

*Solution de l'exercice 6.* Le a) résulte immédiatement de  $(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$ . Pour le b), l'identité ci-dessus se généralise :  $(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$ , d'où  $ab + bc + ca = 0$ . Or un calcul analogue donne  $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = (a^3 + b^3 + c^3) + (ab + bc + ca)(a + b + c) - 3abc$ . Si  $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$ , comme  $ab + bc + ca = 0$ , on doit avoir également  $abc = 0$ .



## 2 Cours et exercices de l'après-midi

### 2.1 Exercices

**Exercice 1.** 1) Prouver que, pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ et } (a + b)^2 \geq 4ab.$$

2) Prouver que, pour tous réels positifs  $x$  et  $y$ , on a

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

3) Prouver que, pour tout réel  $x > 0$ , on a

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

4) Prouver que, pour tout réel  $a$ , on a

$$a(1 - a) \leq \frac{1}{4}.$$

**Exercice 2.** Prouver que, pour tout entier  $n \geq 0$  et pour tous réels  $a, b > 0$ , on a

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

**Exercice 3** (Test entrée OFM 2010). Prouver que, pour tout réel  $x \geq 0$ , on a

$$1 + x^{2006} \geq \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}.$$

**Exercice 4.** Prouver que, pour tous réels  $a, b, c, d$  tels que  $a + b + c + d = 1$ , on a

$$ab + bc + cd + da \leq \frac{1}{4}.$$

**Exercice 5.** Prouver que, pour tous réels  $a, b, c$ , on a

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geq 3ab + 4bc + 2ca.$$

**Exercice 6** (d'après OIM 2008). Soient  $x, y, z$  des réels, tous différents de 1, et tels que  $xyz = 1$ . Prouver que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

**Exercice 7** (Test OFM 2008). Soit  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  un polynôme à coefficients réels positifs ou nuls.

Prouver que, pour tout réel  $x$  non nul, on a

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq [P(1)]^2.$$

**Exercice 8.** Soit  $x, y, z$  des réels tels que

$$\begin{cases} x^3 = 2y - 1 \\ y^3 = 2z - 1 \\ z^3 = 2x - 1 \end{cases}$$

Prouver que  $x = y = z$ .

**Exercice 9** (Inégalité de Schur). 1) Prouver que, pour tous réels  $a, b, c > 0$ , on a

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

2) Prouver que, pour tout réel  $t$  et tous réels  $a, b, c > 0$ , on a

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-c)(b-a) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0.$$

## 2.2 Solution

La plupart des exercices « olympiques » possèdent une solution simple, voire très simple, et il est souvent plus utile d'être un peu malin que d'avoir énormément de connaissances. Nous allons voir que du seul argument « Un carré, c'est positif ! », il va être possible, de proche en proche, de résoudre des exercices qui ont en fait sécher plus d'un...

*Solution de l'exercice 1.* 1) Les deux inégalités se réécrivent  $(a - b)^2 \geq 0$ , ce qui est clairement vrai. Notons que l'égalité a lieu si et seulement si  $a = b$ .

2) L'inégalité se réécrit  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$  ce qui conclut. Ou alors, on peut utiliser directement le 1) pour  $a = \sqrt{x}$  et  $b = \sqrt{y}$ . L'égalité a lieu si et seulement si  $x = y$ .

3) On utilise le 2) (par exemple) pour  $y = \frac{1}{x}$  et c'est déjà fini... Il y a égalité si et seulement si  $x = 1$ .

4) On revient au 1), avec  $b = 1 - a$  et on a alors  $4a(1 - a) \leq (a + (1 - a))^2$ , ou encore  $4a(1 - a) \leq 1$  ce qui est bien ce que l'on voulait... On peut aussi remarquer que  $a(1 - a) = -a^2 + a = -(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ . Enfin, on note qu'il y a égalité si et seulement si  $a = \frac{1}{2}$ .

*Solution de l'exercice 2.* On a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n &\geq 2\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n} \text{ d'après exo 1-2), avec égalité ssi } a = b \\ &= 2\sqrt{\left[\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]^n} \\ &= 2\sqrt{\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^n} \\ &\geq 2\sqrt{(2 + 2)^n} \text{ d'après exo 1-3), avec égalité ssi } a = b \\ &= 2\sqrt{4^n} \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $a = b$ .

*Solution de l'exercice 3.* D'après l'exercice 1 question 2), on a  $1 + x^{2006} \geq 2\sqrt{x^{2006}} = 2x^{1003}$  (avec égalité ssi  $x = 1$ ). De plus, on a  $(1 + x)^{2004} \geq (2\sqrt{x})^{2004} = 2^{2004}x^{1002}$  (avec égalité ssi  $x = 1$ ). Et ainsi, puisque tout est positif, il vient  $(1 + x^{2006})(1 + x)^{2004} \geq (2x)^{2005}$ , ce qui conclut. Il y a égalité si et seulement si  $x = 1$ .

*Solution de l'exercice 4.* D'après l'exercice 1 question 4), on a

$$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = (a + c)(1 - (a + c)) \leq \frac{1}{4}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $a + c = b + d = \frac{1}{2}$ .

*Solution de l'exercice 5.* Première solution. D'après l'exercice 1 question 1), on a  $\frac{3}{4}a^2 + 3b^2 \geq 2(\frac{\sqrt{3}a}{2})(\sqrt{3}b) = 3ab$ , avec égalité ssi  $a = 2b$  et  $\frac{1}{4}a^2 + 4c^2 \geq 2(\frac{a}{2})(2c) = 2ac$ , avec égalité ssi  $a = 4c$  et  $b^2 + 4c^2 \geq 2(b)(2c) = 4bc$ , avec égalité ssi  $b = 2c$ . En sommant, il vient  $a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geq 3ab + 4bc + 2ca$ . L'égalité a lieu si et seulement si  $a = 2b = 4c$ .

Seconde solution. La même chose que ci-dessus, mais en revenant aux carrés :

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 - 3ab - 4bc - 2ca = \left(\frac{a}{2} - 2c\right)^2 + (b - 2c)^2 + \frac{3}{4}(a - 2b)^2.$$

*Solution de l'exercice 6.* On pose  $a = \frac{x}{x-1}$ ,  $b = \frac{y}{y-1}$  et  $c = \frac{z}{z-1}$ . Ainsi,  $x = \frac{a}{a-1}$ ,  $y = \frac{b}{b-1}$  et  $z = \frac{c}{c-1}$ . Il est facile de vérifier que lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R} - \{1\}$ , alors  $a$  décrit également  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Il en est de même de  $b$  et  $c$ .

La contrainte  $xyz = 1$  s'écrit  $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$  ou encore

$$ab + bc + ca + 1 = a + b + c. \quad (\text{F.1})$$

L'inégalité à prouver s'écrit  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$  Or :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 2 \text{ d'après (F.1)} \\ &= (a+b+c-1)^2 + 1 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

*Solution de l'exercice 7.* On a

$$\begin{aligned} P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) \left(\sum_{i=0}^n a_i \frac{1}{x^i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j \left(\frac{x^j}{x^i} + \frac{x^i}{x^j}\right) \\ &\geq \sum_{i=0}^n a_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j \text{ d'après exo 1-3)} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^2 \\ &= [P(1)]^2 \end{aligned}$$

Et parfois, il ne faut même rien savoir du tout, juste mettre un peu d'ordre... est-ce plus facile pour autant ?

*Solution de l'exercice 8.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x \geq y, z$ . Alors, d'après le système, on a  $0 \leq x^3 - y^3 = 2(y-z)$ , ce qui assure que  $z \leq y$ . Mais alors,  $0 \leq y^3 - z^3 = 2(z-x)$ , et ainsi  $x \leq z$ . Finalement, on a  $x \leq z \leq y \leq x$ , d'où  $x = y = z$ .

*Solution de l'exercice 9.* On prouve directement le cas général 2), puisque le 1) ne correspond qu'au cas  $t = 1$ . L'inégalité à prouver étant symétrique, on peut imposer une contrainte d'ordre.

- Si  $t \geq 0$ , on suppose que  $a \geq b \geq c > 0$ .
- Si  $t < 0$ , on suppose que  $c \geq b \geq a > 0$ .

Dans tous les cas, on vérifie facilement que  $a^t(a-b)(a-c) \geq b^t(b-c)(a-b)$  et  $c^t(c-a)(c-b) \geq 0$ . En sommant, il vient bien  $a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-c)(b-a) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$ . On peut noter que l'égalité a lieu si et seulement si  $a = b = c$ .



# G. Vendredi 29 octobre (algèbre)

## 1 Test d'algèbre

### 1.1 Énoncés

**Exercice 1.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres vérifiant

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1$$

Montrer que  $a^3 + b^3 = a + b$ .

**Exercice 2.** A trois nombres strictement positifs  $a$ ,  $b$  et  $c$  on associe :

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$
$$v = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

1. Montrer que quels que soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $u + v \geq 6$ .
2. Montrer que quels que soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $uv \geq 9$ .
3. Quelle est la valeur minimale de :  $u^2 + v^2$  ?

**Exercice 3.** Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des nombres tels que  $0 < c \leq b \leq a$ . Prouver que

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

### 1.2 Solution

*Solution de l'exercice 1.* On a  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ , il suffit donc de montrer que  $a^2 - ab + b^2 = 1$ . Or,  $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1$  donc  $a(1+b) + b(1+a) = (1+a)(1+b)$ , c'est-à-dire  $a + a^2 + b + b^2 = 1 + a + b + ab$ , d'où  $a^2 - ab + b^2 = 1$ , ce qui conclut.

*Solution de l'exercice 2.* Cet exercice repose sur l'inégalité  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  pour tout  $x$  strictement positif. Rappelons que cela équivaut à  $(x^2 + 1) - 2x \geq 0$ , or  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ . En l'occurrence,  $\frac{a}{b} > 0$ , donc  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

1. En regroupant deux par deux les termes de  $u + v$ , on a  $u + v = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 6$ .
2. En développant le produit, on trouve

$$uv = 3 + \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{bc}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{ca} + \frac{ca}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{ab} + \frac{ab}{c^2}\right) \geq 9$$

pour une raison analogue.

3. En développant le carré, on remarque que :  $u^2 = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + 2v$ . Donc  $u^2 + v^2 = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) + 2(u + v) \geq 18$ . Or pour  $a = b = c = 1$ ,  $u = v = 3$  donc  $u^2 + v^2 = 18$  : 18 est bien la valeur minimale de  $u^2 + v^2$  (atteinte pour au moins une valeur de  $(a, b, c)$ ).

*Solution de l'exercice 3.* On a  $a+b \geq 2c$  et  $a-b \geq 0$  donc  $\frac{a^2-b^2}{c} = (a-b)\frac{a+b}{c} \geq 2(a-b)$ . De même, on a  $a+c \geq b$  et  $a-c \geq 0$  donc  $\frac{a^2-c^2}{b} = (a-c)\frac{a+c}{b} \geq a-c$ . De plus, on a  $b+c \leq 2a$  et  $c-b \leq 0$  donc  $\frac{c^2-b^2}{a} = (c-b)\frac{b+c}{a} \geq 2(c-b)$ . En sommant, il vient  $\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$ .

## H. Citations mémorables

- ☞ « Il ne faut pas qu’emmagasinier des connaissances, il faut savoir les appliquer » [François]
- ☞ « ... des exercices ou pseudo-exercices » [François]
- ☞ « Il reste  $-23$  minutes » [Arthur N, gros plagiat de Vincent M].
- ☞ « Il ne me reste plus qu’à trouver la solution » [Cyril]
- ☞ « De toute façon, 78 n’est pas multiple de 5 » [Auriane]
- ☞ « 42 est le seul nombre premier qui est un carré parfait » [V.M. ???]
- ☞ « Aux Olympiades... ça nous arrive de faire des maths » [Jean-François]
- ☞ « Elle est un peu genre complètement bilingue » [Cyril]
- ☞ « La géométrie, c’est l’art de faire des raisonnements justes sur des figures fausses » [vieil adage, que l’on complète parfois ainsi : « mais plus les figures sont fausses, plus c’est dur de raisonner juste »]
- ☞ « On a presque fini l’exercice, il ne reste plus qu’à prouver que  $4 + 4 = 8$  » [Rémi V]
- ☞ « On fait un marché : vous nous donnez le corrigé, on vous donne la réponse » [Léonard]
- ☞ « Infini par zéro, ça fait infini  $\times$  infini, soit infini au carré ou deux fois infini, ou encore infini + infini, ce qui est égal à deuxfini. Donc  $1 + 1 = 3$ . » [Victor]
- ☞ « Cette conférence a duré exactement 37 minutes 54 secondes et 20 centièmes... » [Arthur N]
- ☞ « La morphalité infantile s’accroît » [Maxime]
- ☞ « La math est du caca de chien » [Liyang]
- ☞ – N’hésitez pas à m’interrompre, on a toute la nuit » [Jean-François]
  - ... y a deux r à interrompre ? [Léonard, écrivant les citations]
- ☞ « J’ai compris pour une fois » [Constance]
- ☞ « Exercice : calculer  $x$ .
  - Réponse 1) Lire le corrigé.
  - Réponse 2) D’après la théorie du rapporteur,  $x$  vaut  $30^\circ$  » [Léonard et Maxime]
- ☞ « Dans un exercice de géométrie, mon brouillon c’est 15 figures avec ce que j’ai envie de démontrer en dessous, rien de plus » [Jean-François]
- ☞ – Exercice : comprenez la figure [Léonard]
  - Vous avez deux heures [Maxime]
- ☞ «  $x \times \frac{1}{x} = 1$  donc  $2 \times 1 = 2$ . » [Arthur B.A.]
- ☞ « Il y a égalité quand  $x = x$  » [Augustin]
- ☞ « Je viens de me donner une idée » [Léonard]
- ☞ – ... y a quelqu’un qui a résolu l’exercice ? [Antoine]
  - oui, moi [le prof : Pierre B]
- ☞ «  $1 \times 1$ , ça fait à peu près 1 » [Pierre B]
- ☞ « Comme c’est un problème d’Olympiade, il y a probablement une solution simple » [Pierre B]