Problèmes du Marathon de Shortlist d'IMO

Daniel Cortild

November 2, 2018

Problème 1 (SL 2000 #C1)
Un magicien à 100 cartes numérotées de 1 à 100 qu'il place dans trois boîtes (bleue, blanche, rouge), de telle sorte que chaque boîte contient une carte au moins. Un membre du public prends deux cartes de deux boîtes différentes (une de chaque) et annonce au magicien la somme des deux cartes. Le magicien, en entendant cette somme, retrouve la boîte où aucune carte n'a été tirée. De combien de façon peut-il répartir les 100 cartes dans les boîtes pour que le tour fonctionne.

Problème 2 (IMO 2006 #4)
Trouver tous les couples (x, y) d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Problème 3
A2 2012 Pour deux ensembles X, Y de réels, on pose $X+Y := \{x+y, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$. 1) Existe-t-il trois ensembles A, B, C disjoints, non vides, dont la réunion est $\mathbb{Z}$ et tels que $A+B, B+C, A+C$ soient deux à deux disjoints ? 2) Même question pour $\mathbb{Q}$

Problème 4 (SL 2013 #G4)
: Soit ABC un triangle avec $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Soient P et Q deux points différents sur la droite (AC) tels que $\widehat{PBA} = \widehat{QBA} = \widehat{ACB}$ et A se trouve entre P et C. Supposons qu'il existe un point D intérieur au segment $[QB]$ pour lequel $PD = PB$. La droite (AD) coupe le cercle circonscrit à ABC une deuxième fois en R. Montrer que $QB = QR$.

Problème 5 (SL 2008 N1/ BxMO 2009.2)
Soient n un entier strictement positif, p un nombre impair positif et a, b, c des entiers. Montrer que si

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

Alors $a = b = c$

Problème 6
N#1 SL 2000: Trouver tous les entiers n avec la propriété suivante: pour tout nombres a, b premiers avec n, on a $a \equiv b \mod n \Leftrightarrow ab \equiv 1 \mod n$.

Problème 7
A2 2002 Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs bornée. On suppose que pour tous couples $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $i \neq j$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i + j}$$

Prouver qu'il n'existe pas de réel $M < 1$ vérifiant $M \geq a_i, \ \forall i = 1, \ldots$

Problème 8
A7 2012 Soit a, b et c des réels positifs tel que $\min(a+b, b+c, c+a) > \sqrt{2}$ et $a^2+b^2+c^2 = 3$. Montrer que

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(c+a-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geq \frac{3}{(abc)^2}.$$

Problème 9 (C2 2002)
Soit n un entier impaire positif et soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ des entiers. Pour chaque permutation $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $(1, 2, \dots, n)$ on pose $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Montrer qu'il existe deux permutations a et b de $(1, 2, \dots, n)$ telles que $n!$ divise $S(a) - S(b)$.

Problème 10 (IMO 2014 Problem 4)
Soit ABC un triangle acutangle. P et Q se situent sur $[BC]$ de sorte que $P\hat{A}B = B\hat{C}A$ et $Q\hat{A}C = C\hat{B}A$ Les points M et N sont tels que P est le milieu de $[AM]$ et Q celui de $[AN]$. Montrer que BM et CN se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.

Problème 11 (G1)2001
SoitA_1lecentreducarréinscritdansletriangleacutangleABCavecdeuxsommetssur$[BC]$.B_1etC_1sontdéfinisdefaçonsimilaire

Problème 12 (ISL 2006 - N3)
On définit la suite (a_n) comme

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right)$$

a) Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $a_n > a_{n-1}$. b) Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $a_n < a_{n-1}$.

Problème 13 (N2 2009)
Un entier strictement positif N est dit équilibré s'il vaut 1 ou s'il peut s'écrire comme un produit d'un nombre pair de nombres premiers (pas nécessairement distincts). Pour des entiers strictement positifs a, b, on définit le polynôme $P : P(x) = (x+a)(x+b)$ a) Prouver qu'il existe des entiers strictement positifs a, b distincts tels que $P(1), P(2), ..., P(50)$ soient équilibrés. b) Prouver que si $P(n)$ est équilibré pour chaque entier strictement positif n, alors $a = b$

Problème 14 (ISL 2011 - A3)
Trouver toutes les paires de fonctions (f, g) définies sur et vers l'ensemble des nombres réels telles que

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Problème 15 (IMO 2011 Problem 5)
Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\not{*}}^{+}$ une fonction telle que pour tout couple d'entiers (m, n), on a $f(m-n) | f(m) - f(n)$ Prouver que si $f(m) \leq f(n)$, alors $f(m) | f(n)$

Problème 16
SL 2015 #G6 (IMO 3) Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, avec $AB > AC$. Soit Γ son cercle circonscrit, H son orthocentre et F le pied de sa hauteur issue de A. On désigne par M le milieu du segment $[BC]$. Soit Q le point de Γ tel que $\widehat{HQA} = 90°$ et soit K le point de Γ tel que $\widehat{HKQ} = 90°$. On suppose que les points A, B, C, K, Q sont tous distincts dans cet ordre sur Γ. Prouver que le cercle circonscrit au triangle KQH est tangent au cercle circonscrit au triangle FKM.

Problème 17 (IMO 2012 Problem 2)
Soient $n \geq 3$ un entier et $a_2, a_3, ..., a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Prouver que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n > n^n$$

Problème 18 (P2 IMO 2001)
Soient a, b, c trois nombres réels positifs, montrez que:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Problème 19 (IMO 2009 - P5)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ telles que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$a, f(b) \text{ et } f(b+f(a)-1).$$

Soient les côtés d'un triangle non-dégénére.

Problème 20
$N1\#2002$: Trouver laplus petite valeur de t telle que il existe des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_t$ tels que

$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_t^3=2002^{2002}$$

.

Problème 21 (IMO 1997 - P3)
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes :

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n|=1$$

et

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,n$$

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que

$$|y_1+2y_2+\ldots+ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

Problème 22
SL 2002 #G1: Soit B un point d'un cercle S_1, et soit A un point distinct de B situé sur la tangente à S_1 en B. Soit C un point qui ne se trouve pas sur S_1 tel que le segment $[AC]$ rencontre S_1 en 2 points distincts. Soit S_2 le cercle touchant (AC) au point C et touchant (S_1) en un point D de l'autre côté de (AC) que B. Prouver que le centre du cercle circonscrit du triangle BCD se trouve sur le cercle circonscrit de ABC.

Problème 23 (ISL 2004 - N2)
Soit $f : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0} : n \longmapsto f(n) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{pgcd}(k, n)$. a) Montrer que $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tout naturels m, n premiers-entre-eux. b) Montrer que, pour tout naturel a, l'équation $f(x) = ax$ a une solution. c) Trouver tout les naturels a tels que l'équation $f(x) = ax$ a une unique solution.

Problème 24 (2001-C4)
Un ensemble d'entiers positifs ou nuls $\{x, y, z\}$ est dit historique si $\{y-x, z-y\} = \{1776, 2001\}$. Montrer qu'il existe des ensembles $A_0, \ldots,$ deux à deux disjoints tels que A_i est historique pour tout $i \geq 0$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n\ \in\ \mathbb{N}} A_i$

Problème 25
SL 2003 #4: Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ des cercles distincts tels que Γ_1 et Γ_3 sont tangents en P extérieurement et Γ_2 et Γ_4 sont tangents extérieurement en P. Supposons que les cercles Γ_1 et Γ_2, Γ_2 et Γ_3, Γ_3 et Γ_4, Γ_4 et Γ_1 se rencontrent respectivement en A, B, C, D. Montrer que

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$

Problème 27
SL 2000#C3: Soit $n \geq 4$ un entier positif. Soit $S = \{P_1, P_2, \ldots P_n\}$ un ensemble de points du plan tel que trois points quelconques ne sont jamais alignés et quatre points quelconques ne sont jamais cocycliques. Soit a_t avec $1 \leq t \leq n$ le nombre de triplets de points P_i, P_j, P_k tels que le disque du cercle circonscrit à ces trois points contient P_t. Soit Enfin

$$m(S) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Prouver qu'il existe un entier positif $f(n)$, s'écrivant en fonction de n uniquement, tel que les points de S sont les sommets d'un polygone convexe si et seulement si $m(S) = f(n)$.

Problème 28 (ISL 2007 - N2)
Soient $b, n > 1$ des entiers. Supposons que, pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que $b - a_k^n$ est divisible par k. Prouver que $b = A^n$ pour un entier A.

Problème 29
IMO 2000 P1 G2 Soit (C_1) et (C_2) deux cercles se coupant en M et N . Soit AB la ligne tangente aux deux cercles en A et en B tel que M est plus proche de AB que N . Soit CD la parallèle à AB et passant par M avec C dans (C_1) et D dans (C_2) . Les lignes AC et BD se coupent en E et les droites AN et CD se coupent en P tandis que les lignes BN et CD se coupent en Q 1-Montrer que $EP = EQ$ 2-Prouver que EN est la bissectrice de l angle CND

Problème 30
SL 2002#A1: Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et à image dans $\mathbb{R}$ telles que:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

Problème 31
SL2008 #N2 Soient $a_1, ..., a_n$ des entiers strictement positifs distincts, $n \geq 3$. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tel que $a_i + a_j$ ne divise aucun des nombres $3a_1, ...3a_n$

Problème 33 (2015 #5)
Déterminer tous les triplets : $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{>0}$ tel que : $ab - c$, $bc - a$ et $ca - b$ sont des puissances de 2.

Problème 34
pb 2 2009 Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Les points P et Q sont des points intérieurs aux côtés CA et AB respectivement. Soit K, L et M les milieux respectifs des segments BP, CQ et PQ, et soit w le cercle passant par K, L et M. On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle w. Montrer que $OP = OQ$.

Problème 35 (ISL 1998 - N2)
Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \cdot \lfloor bn \rfloor = b \cdot \lfloor an \rfloor$ pour tout naturel n.

Problème 36 (SL A3 2008)
Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ un ensemble de nombres réels. On dit qu'un couple de fonctions (f, g) de fonctions de S dans S est un couple belge sur S si les deux fonctions satisfont les conditions suivantes : - chaque fonction est strictement croissante - Pour tout $x \in \mathcal{S}$, $f(g(g(x)) < g(f(x))$ - les deux fonctions mangent des frites pour tout $x \in \mathcal{S}$. a) Existe-t-il un couple belge sur $\mathbb{N}^*$? b) Existe-t-il un couple belge sur $\mathcal{S} := \left\{a - \frac{1}{b} \mid (a, b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$? Remarque : Il est permis de faire abstraction de la 3$^{\text{è}}$ condition.

Problème 37 (IMO 2012 Problem 5)
Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit D le pied de la hauteur issue de C. Soient X un point sur $[CD]$, K un point sur $[AX]$ tel que $BK = BC$ et L un point sur $[BX]$ tel que $AL = AC$. Soit M l'intersection de AL et BK. Prouver que $ML = MK$.

Problème 39,
SL2009#C2: Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $N(n)$ comme le nombre maximum de triplets (a_i, b_i, c_i) (avec $i = 1, 2, \ldots, N(n)$) d'entiers positifs a_i, b_i, c_i respectant les conditions suivantes: -$a_i + b_i + c_i = n$ -$a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$. Déterminer $N(n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

Problème 40 (ISL 2014 - G2)
Soit ABC un triangle. Les points K, L et M se situe sur les segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement, de sorte que les droites AK, BL et CM soient concourantes. Prouver qu'il est possible de choisir deux des triangles ALM, BMK et CKL tels que la somme des rayons de leurs cercles inscrits soit supérieure au rayon du cercle inscrit à ABC.

Problème 41 (SL 2015 N1)
Soit M un entier strictement positif. On définit la suite (a_n) comme suit:

$$\begin{cases} a_0 = M + \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n \lfloor a_n \rfloor \end{cases}$$

Pour quels entiers strictement positifs M la suite prend-elle au moins une valeur entière?

Problème 42
.. (SL 2010 A5) Notons $\mathbb{Q}^+$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}^+$;

$$f(f(x)^2 \cdot y) = x^3 \cdot f(xy)$$

Problème 43 (A2, 2013)
Montrer que dans chaque ensemble de 2000 réels distincts, il existe deux paires $a > b$ et $c > d$ avec $a \neq c$ ou $b \neq d$, telles que

$$\left|\frac{a-b}{c-d} - 1\right| < 10^{-5}$$

Problème 44 (IMO SL 2017 A1)
Soient $a_1, a_2, ..., a_n, k$ et M des entiers strictement positifs tels que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M$$

Si $M > 1$, montrez que le polynôme

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

n'a pas de racines strictement positives

Problème 45 (IMO 2017 Problem 4)
Soient R et S deux points distincts d'un cercle Ω et t la tangente à Ω en R. Notons R' le symétrique de R par rapport à S. Un point I est choisi sur le petit arc RS de Ω de sorte que le cercle ISR', Γ, intersecte t en deux points disctincts. Parmi ces deux points, notons A celui qui est le plus proche de R. La droite AI intersecte Ω en J. Prouver que $R'J$ est tangente à Γ.

Problème 46 (IMO 2014, P1)
Soit $a_0, a_1, a_2, ...$ une suite d'entiers naturels infinie et strictement croissante. Montrer qu'il existe un unique indice n tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$