

# STAGE OLYMPIQUE DE GRÉSILLON 2011

---



Du 25 août au 1er septembre 2011



## **Avant-propos**

*Le stage de Grésillon a été organisé par l'association Animath.*

*Son objet a été de rassembler les lauréats des diverses compétitions et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade Internationale de Mathématiques à Mar del Plata en Argentine en juillet 2012. Cette année une attention particulière a été apportée au recrutement de collégiens brillants en vue de les préparer aux Olympiades Internationales pendant plusieurs années.*

*Nous tenons à remercier le chateau de Grésillon pour son excellent accueil.*



# Les Animateurs

Pierre Bertin

Igor Kortchemski

Bodo Lass

François Lo Jacomo

Jean-François Martin

Ambroise Marigot

Louis Nebout

Antoine Tavenaux

Ronan, Oscar et Sunjo

# Les élèves

Gioacchino Antonelli	François Bacher	Augustin Bariant	Sébastien Baumert	Michel Beaughon
Arthur Blanc-Renaudie	Elie Bohbot	Sébastien Chevaleyre	Urvan Christen	Raphaël Clisson
Romain Cognet	Nathanaël Courant	Valentin Crepel	Jérémy Denechaud	Nicolas Ding
Antoine Dupuis	Lucas Flammant	Léonard Fleutot	Alphé Fournier	Louise Gassot
Federico Glaudo	Arthur Gublin	Galatée Hemery	Jean Kieffer	Théo Laurent

Cyril Letrouit	Lingli Lin	Raphaël Monat	Seginus Mowlavi	Arthur Nebout
Chloé Papin	Maxime Perdriat	Lucas Perotin	Loïc Petitjeans	Jordan Philidet
Alban Pierre	Matthieu Piquerez	Xavier Poulot-Cazajous	Victor Quach	Timothée Schoen
	Alexander Semenov	Ludovic Stephan	Zengpeng Zhou	





# Table des matières

<b>I</b>	<b>Déroulement du stage</b>	<b>11</b>
<b>II</b>	<b>Présentation des modules</b>	<b>13</b>
1	Première période	13
1	Incontournable : Stratégies de base	13
2	Avancés : Combinatoire	13
3	Avancés : Techniques de calcul et inégalités	14
2	Seconde période	15
1	Incontournable : Arithmétique	15
2	Avancés : Arithmétique : ordre et divisibilité	15
3	Avancés : Équations fonctionnelles	15
3	Troisième période	17
1	Incontournable : Géométrie	17
2	Avancés : Géométrie	18
3	Avancés : nombres complexes et géométrie	18
<b>III</b>	<b>Première période</b>	<b>19</b>
1	Incontournable : Stratégies de base	19
1	Cours	19
2	Premier TD	22
3	Second TD	26
4	Test	30
2	Avancés : combinatoire	31
1	Premier TD	31
2	Second TD	39
3	Test	44
3	Avancés : techniques de calcul et inégalités	46
1	Cours	46
2	Premier TD	49
3	Second TD	55
4	Test	57
<b>IV</b>	<b>Seconde période</b>	<b>63</b>
1	Incontournable : arithmétique	63
1	Cours	63
2	TD	63

3	Test	66
2	Avancés : ordre multiplicatif	68
1	Cours	68
2	TD	73
3	Test	77
3	Avancés : Équations fonctionnelles	79
1	Cours	79
2	TD	79
3	Test	85
<b>V</b>	<b>Troisième période</b>	<b>89</b>
1	Incontournable : Géométrie	89
1	Cours	89
2	Premier TD	89
3	Second TD	93
4	Test	96
2	Avancés : Géométrie Projective	98
1	TD	98
2	Test	101
3	Avancés : nombres complexes et géométrie	104
1	Cours : Introduction aux nombres complexes	104
2	Premier TD	110
3	Second TD	113
4	Test	116
<b>VI</b>	<b>Chasse au Trésor</b>	<b>121</b>
5	Énigmes	122
6	Exercices des débutants	124
7	Exercices des avancés	128
<b>VII</b>	<b>La Muraille</b>	<b>133</b>
<b>VIII</b>	<b>Solutions de la Muraille</b>	<b>151</b>
<b>IX</b>	<b>Test de sélection</b>	<b>171</b>
8	Énoncés	171
9	Solutions	171
<b>X</b>	<b>Citations mémorables</b>	<b>177</b>

# I. Déroulement du stage

Ce stage regroupait des élèves d'âges et de niveaux assez différents : 13 à 18 ans (moyenne 16 ans) : 1 de quatrième, 6 de troisième, 10 de seconde, 24 de première et deux italiens. Certains avaient déjà suivi un ou plusieurs stages (l'un d'eux venait pour la cinquième fois), deux élèves avaient même participé à l'Olympiade Internationale, mais la majorité n'avait aucune expérience des exercices olympiques. C'est pourquoi, sur chaque période de deux jours, nous les avons répartis en trois groupes : un groupe s'initiait aux trois chapitres "incontournables" (stratégies de base, arithmétique, géométrie) pendant que les deux autres abordaient des "modules avancés" : combinatoire et inégalités en première période, arithmétique avancée et équations fonctionnelles en deuxième période, géométrie avancée et nombres complexes en dernière période. D'où trois tests totalement distincts à chaque période. Chaque stagiaire qui s'estimait avancé choisissait ses modules, mais ce choix devait être validé, le jour de l'arrivée, par chaque responsable de module concerné : au moyen d'un bref entretien individuel, l'animateur devait s'assurer que l'élève connaissait déjà le chapitre incontournable et avait un niveau suffisant pour suivre le module avancé.

Dès leur arrivée, jeudi 25 août, les élèves pouvaient s'attaquer aux cent exercices de la muraille, affichés sur le mur du salon – 50 réservés aux débutants et 50 plus difficiles. Chaque solution juste proposée par un ou plusieurs élèves est publiée dans le présent polycopié, mais certains exercices leur ont résisté toute la semaine. Une bibliothèque d'ouvrages soit de mathématiques olympiques, soit de culture mathématique, était à leur disposition.

Chaque période commençait, pendant les trois premières heures, par une présentation des notions qu'il convient de maîtriser pour aborder le chapitre en question, mises en pratique sur des séries d'exercices lors des séances suivantes de travaux dirigés. Plusieurs enseignants se succédaient sur les différentes séances d'un même module. Puis venaient les tests en temps limité de trois ou quatre heures sur chacun des chapitres abordés, rendus le lendemain et corrigés oralement en tenant compte de ce qu'ont fait les élèves. La seconde période était écourtée par une chasse au trésor, lundi après-midi, pour permettre aux élèves de travailler en groupe, de se détendre un peu en extérieur et de profiter du domaine du château de Grésillon. Le jeu consistait à résoudre des énigmes et des exercices (qui menaient vers l'énigme suivante) pour aller de proche en proche jusqu'à l'énigme finale. Les soirées étaient souvent libres, mais une présentation des Olympiades Internationales a été proposée le vendredi, et exposé sur les martingales le lundi.

Les instants de loisirs pouvaient aussi être utilisés pour jouer aux cartes (échecs, go...), au ping-pong, au volley-ball... Le soir, tous les stagiaires devaient se coucher à 23 h 30 ; le petit-déjeuner était à 08 h 00 mais il n'était pas interdit de se réveiller à 05 h 30. Les élèves

## I. DÉROULEMENT DU STAGE

étaient répartis par genre, classe et âge essentiellement, dans des chambres de deux à sept lits. Le jeudi de l'arrivée, la trentaine de stagiaires arrivant en train étaient attendus par un bus spécial à 11 h 45 à la gare d'Angers. La présentation du stage avait lieu après déjeuner, à 14 h 30. Totale liberté était laissée aux élèves la dernière nuit, et un "brunch" leur était proposé le jeudi matin 1<sup>er</sup> septembre avant le bus qui venait chercher à 12 h 15 ceux qui repartaient par le train en gare d'Angers. Une fiche d'évaluation (anonyme) a été distribuée aux élèves afin de faire le bilan du stage.

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

- Le site d'Animath : [www.animath.fr](http://www.animath.fr)
- Le site MathLinks : [www.mathlinks.ro](http://www.mathlinks.ro)
- Le site du château de Grésillon : [www.gresillon.org](http://www.gresillon.org)

		Débutants	Avancés	
Jeudi	journée	Arrivé, accueil des élèves et première Évaluation		
Vendredi	9h-12h	Cours de Stratégie de Base (François)	Combinatoire (Bodo)	Techniques de calcul et inégalités (Antoine)
	14h-17h	TD de Stratégie de Base (Igor)	TD de combi-natoire (Louis)	TD d'inégalités (J.-F.)
	21h -22h	Présentation des OIM		
Samedi	9h-12h	TD de Stratégies de Base (Pierre)	TND de Combi-natoire (Antoine)	TND d'inegalités (François)
		Test (14h-17h)	Test (14h-18h)	
Dimanche	9h-12h	Arithmétique (François)	Arithmétique avancée (Igor)	Équations fonctionnelles (Pierre)
	14h-17h	TD d'arithmétique (Bodo)	TD d'arithmétique (François)	TD d'équations fonctionnelles (J.-F.)
	17h30-18h30	Correction du Test de samedi		
	21h-22h30	Les martingales des casinos du 18 <sup>e</sup> siècle aux probabilités modernes (Pierre)		
Lundi	9h-12h	Test		
	14h-18h	Chasse au Trésor		
Mardi	9h-12h	Géométrie (François)	Géométrie Avancé (Bodo)	Cours d'algèbre (Louis)
	14h-17h	TD de géométrie (Igor)	TD de géométrie (Ambroise)	TD d'algèbre (J.-F.)
	17h30-18h30	Correction du Test de lundi		
Mercredi	9h-12h	TD de géométrie (Ambroise)	TND de Géométrie (Bodo)	TND d'algèbre (Pierre)
		Test (14h-17h)	Test (14h-18h)	
	18h-19h	Correction du Test		

## II. Présentation des modules

### 1 Première période

#### 1 Incontournable : Stratégies de base

Quelques stratégies élémentaires mais permettant des démonstrations étonnamment puissantes, notamment :

- *Principe des tiroirs* : si l'on répartit plus de  $k$  objets dans  $k$  tiroirs, nécessairement un tiroir au moins contiendra plus d'un objet.
- *Principe de récurrence* : Si une propriété  $P$  est vraie à un rang  $a$ , et si  $P(n)$  entraîne  $P(n+1)$ , alors la propriété est vraie pour tout entier  $n \geq a$ .
- *Invariants* : si des actions conservent chacune une caractéristique d'une situation donnée, quel que soit l'enchaînement de ces actions, la caractéristique finale sera la même que la caractéristique initiale.

Exemple d'exercice : on considère la suite de Fibonacci  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$  définie par  $u_1 = u_2 = 1$ , et pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ . Montrer que parmi les dix mille premiers termes de cette suite, il y en a au moins un qui se termine par deux zéros.

#### 2 Avancés : Combinatoire

La combinatoire est en un certain sens la branche la plus ancienne des mathématiques : c'est l'art de compter les objets, où, plus généralement, l'étude de structure discrètes. Par exemple, trouver le nombre de positions d'un Rubik's Cube, ou compter le nombre de façons de relier par la route deux villes données, sont des problèmes combinatoires. Les problèmes de combinatoire de niveau olympiques nécessitent relativement peu de connaissances théoriques : essentiellement une solide maîtrise de la démonstration par récurrence et quelques rudiments de théorie des graphes. Ils demandent par contre une grande habitude du domaine, qui permet de comprendre comment fonctionne un exercice de combinatoire, ce qui ne peut s'acquérir que par la pratique. Le contenu précis du cours n'a pas été déterminé et dépendra des envies des élèves et du professeur.

Voici quelques exemples d'exercice de combinatoire de type olympique :

**Exercice 1** Trouver toutes les suites finies  $x_0, x_1, \dots, x_n$  telles que pour tout  $0 \leq i \leq n$ , le nombre  $x_i$  soit égal au nombre de fois où l'entier  $i$  apparaît dans la suite.

**Exercice 2** Soit  $m$  et  $n$  deux entiers, et  $k$  un entier inférieur au minimum de  $m$  et  $n$ . Montrer

l'identité de Vandermonde :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

**Exercice 3** Prouver que le nombre de manière de répartir les stagiaires en 2 salles telles que chaque stagiaire ait un nombre pair d'ami dans sa salle est une puissance de 2.

Note : l'exercice 3 est incroyablement difficile, n'essayez surtout pas de le résoudre.

### 3 Avancés : Techniques de calcul et inégalités

Beaucoup de problèmes effrayants et de formules gargantuesques peuvent se démontrer avec quelques méthodes simples et un peu de persévérance.

#### 1. Inégalités classiques :

- Inégalité de réordonnement : la somme  $\sum_{i=1}^n a_i b_i$  est maximale quand les  $a_i$  et les  $b_i$  sont rangés dans le même sens, et minimale quand ils sont rangés dans le sens inverse.
- Inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}$$

- #### 2. Convexité :
- Une fonction réelle  $f$  est convexe si pour tous couples de réels  $x, y$  et tout  $t \in [0, 1]$ , alors

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Cette propriété est assez facile à vérifier et permet de résoudre beaucoup de problèmes.

- #### 3. Inégalité triangulaire :
- Si  $A, B$ , et  $C$  sont trois points du plan, alors

$$AB + BC \geq AC.$$

- Exercices -

**Exercice 1** Soient  $a, b, c, d$  tels que  $abcd = 1$ . Montrez que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

**Exercice 2** Soient  $x, y > 0$ . Soit  $s$  la plus petite valeur parmi  $x, y + 1/x$  et  $1/y$ . Quelle est la plus grande valeur de  $s$  ? pour quelles valeurs de  $x$  et  $y$  est-elle obtenue ?

**Exercice 3** Soient  $x_1, \dots, x_n$  des réels de somme  $s$ . Montrer que

$$\frac{s}{s-x_1} + \frac{s}{s-x_2} + \dots + \frac{s}{s-x_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

## 2 Seconde période

### 1 Incontournable : Arithmétique

Programme : nombres entiers, nombres rationnels, nombres réels, partie entière. Divisibilité : nombres premiers, PGCD, nombres premiers entre eux, décomposition en facteurs premiers. Division euclidienne : théorème de Bézout, lemme de Gauss. Congruences, petit théorème de Fermat. Équations diophantiennes.

Exemples d'exercices :

**Exercice 1**  $a$  étant un entier strictement positif donné, combien y a-t-il d'entiers positifs  $n$  tels que, où :

$$\left[ \frac{n}{a} \right] = \left[ \frac{n}{a+1} \right],$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  ?

**Exercice 2** Montrer qu'on ne peut pas trouver deux entiers relatifs  $x$  et  $y$  tels que  $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ .

### 2 Avancés : Arithmétique : ordre et divisibilité

**Prérequis** : Calcul modulo  $n$  (par exemple savoir que pour  $m, n \geq 1$ , il existe  $a$  tel que  $am \equiv 1 \pmod{n}$  si, et seulement si,  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux), petit théorème de Fermat, lemme chinois, fonction  $\phi$  d'Euler (pas obligatoire, mais fortement recommandé).

Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers premiers entre eux, l'ordre (multiplicatif) de  $m$  modulo  $n$  est le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $m^k \equiv 1 \pmod{n}$ . Cette notion permet de résoudre de nombreux exercices d'arithmétique qui ne font pas explicitement intervenir l'ordre, par exemple :

**Exercice 1** Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  tels que  $n$  divise  $2^n - 1$ .

**Exercice 2** Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  tels que  $n$  divise  $2^{n-1} + 1$ .

**Exercice 3** Trouver tous les entiers positifs  $x, y, z$  tels que  $3^x + 4^y = 5^z$ .

**Exercice 4** Trouver tous les entiers  $m, n \geq 1$  tels que  $mn$  divise  $3^m + 1$  et  $mn$  divise  $3^n + 1$ .

### 3 Avancés : Équations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Par exemple, déterminer toutes les fonctions  $f$  continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifient pour tous  $x, y$  :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. **Généralités** : Définition d'une fonction et de son ensemble de définition, de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité, de la monotonie et de la parité.
2. **Premières stratégies** : Conseils pour aborder une telle équation, stratégies lorsque l'équation est définie sur  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Q}$ .
3. **La continuité** : Une fonction  $f$  est dite continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . La continuité est très utile pour étendre des résultats de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{R}$ , et permet de relier la monotonie et la bijectivité.

**4. Méthodes particulières :**

- Changement de variables : jouer sur les réels  $x, y$  ou sur la fonction  $f$  pour faire apparaître des quantités intéressantes.
- Itérées d'une fonction : étudier la suite  $x_n = f^n(x)$ .
- Points fixes : chercher tous les réels  $x$  qui vérifient  $f(x) = x$ .
- Séparation des variables : séparer les termes en  $x$  et les termes en  $y$ .

**- Exercices -**

**Exercice 1** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient les deux propriétés suivantes :

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

**Exercice 2** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient :

$$f(x)^3 + f(x) \leq x \leq f(x^3 + x).$$

**Exercice 3** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui vérifient :

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

**- Correction -**

Solution de l'exercice 1 On fait le changement de variable suivant : soit  $a = x - y$ . La première équation devient

$$f(2x - a) + f(a) = f(x)f(x - a).$$

À présent on fixe  $a$  et on fait tendre  $x$  vers  $\infty$ . Par la deuxième propriété, on obtient que  $f(a) = 0$ .

Réciproquement, la fonction nulle vérifie les deux propriétés, c'est donc la seule solution.

Solution de l'exercice 2 Cet exercice n'est pas très dur mais il a été volontairement amoichi. Supposons que l'équation ait été

$$f(x)^3 \leq x \leq f(x^3),$$

alors la première inégalité nous indique que

$$f(x)^3 \leq x \text{ donc } f(x) \leq \sqrt[3]{x}$$

et si on regarde la seconde en  $y = \sqrt[3]{x}$  on obtient

$$\sqrt[3]{x} \leq f(\sqrt[3]{x^3}) = f(x)$$

. Mais ici il faut s'intéresser d'un peu plus près à la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3 + x$ . Cette fonction est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$  et  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , donc  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$



dans  $\mathbb{R}$ . On note  $g^{-1}$  sa bijection réciproque. On peut maintenant utiliser la même technique que précédemment : la première inégalité montre que  $f(x) \leq g^{-1}(x)$  et la seconde prise en  $g^{-1}(x)$  que  $g^{-1}(x) \leq f(x)$ .

Réciproquement,  $g^{-1}$  est solution de l'équation.

*Solution de l'exercice 3* Tout d'abord, il faut remarquer que  $f$  est injective. En effet, si on suppose  $f(n) = f(m)$ , alors

$$3n = f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = f(f(f(m))) + f(f(m)) + f(m) = 3m,$$

donc  $n = m$ .

Commençons par  $f(0)$  :  $f(f(f(0))) + f(f(0)) + f(0) = 0$  et comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $f(0) = 0$ .

Maintenant, essayons de déterminer  $f(1)$ . Comme  $f$  est injective,  $f(1) \neq 0$ , et donc  $f(f(1)) \neq 0$ , et donc  $f(f(f(1))) \neq 0$ . Comme  $f$  est à valeurs entières, cela signifie que ces trois quantités sont supérieures ou égales à 1. Et comme leur somme fait 3, cela signifie que  $f(1) = 1$ .

On voit poindre la récurrence : soit  $n \geq 1$ , on suppose que pour tout  $k < n$ ,  $f(k) = k$ . Alors par injectivité de  $f$ ,  $f(n) \geq n$ , de même pour  $f(f(n))$  et  $f(f(f(n)))$ . Comme leur somme fait  $3n$ ,  $f(n) = n$ .

Réciproquement, la fonction  $f(n) = n$  est bien solution de l'équation.

## 3 Troisième période

### 1 Incontournable : Géométrie

Programme :

- Calcul vectoriel, barycentres : Théorème de Thalès, Théorème de Pythagore, Formule d'Al Kashi.
- Cercles : Angles inscrits, points cocycliques, puissance d'un point par rapport à un cercle.
- Transformations : translations, homothéties, rotations, similitudes, réflexions.
- Géométrie du triangle : théorème de Céva, théorème de Menelaüs, isobarycentre, orthocentre, cercle circonscrit, cercle inscrit, cercle exinscrits, cercle d'Euler, droite d'Euler, points de contact du cercle inscrit, formule des sinus, aire d'un triangle.

**Exercice 1** Soit  $ABC$  un triangle dont tous les angles sont aigus. On appelle  $H_B$  et  $H_C$  les pieds des hauteurs issues de  $B$  et  $C$  respectivement. On note  $O$  le centre du cercle circonscrit. Prouver que les droites  $(AO)$  et  $(H_B H_C)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 2** Soit  $ABC$  un triangle, d'aire  $S$ , et  $D, E, F$  des points situés aux tiers des côtés  $BC, CA, AB$  ( $BD = BC/3, CE = CA/3, AF = AB/3$ ). Quelle est l'aire du triangle délimité par les droites  $(AD), (BE)$  et  $(CF)$  ?

## 2 Avancés : Géométrie

En plus des techniques traditionnelles, il existe bien d'autres méthodes pour résoudre un problème de géométrie, et Bodo Lass est spécialiste notamment de géométrie projective, qui s'avère efficace pour un grand nombre de problèmes. La géométrie projective n'est pas en tant que telle au programme de l'Olympiade Internationale, il n'y a pas de problème d'Olympiade qui nécessite de connaître la géométrie projective, mais rien n'interdit de l'utiliser pour n'importe quel problème de géométrie... et cela peut s'avérer très puissant !

Ce module s'adresse à ceux qui ont déjà une formation suffisante dans les techniques de base (chasse aux angles...), et leur permettra d'aborder les mêmes problèmes ou des problèmes plus difficiles sous un autre jour. Un problème de géométrie peut souvent être résolu de nombreuses manières différentes...

## 3 Avancés : nombres complexes et géométrie

Le cadre naturel pour faire de l'algèbre n'est pas l'ensemble des nombres réels, mais un ensemble plus gros, celui des nombres complexes, dans lequel on a rajouté des solutions à certaines solutions algébriques. Dans une première partie, essentiellement culturelle, j'expliquerais la construction et l'interprétation de cet ensemble de nombres complexes, et j'essaierai de donner quelques exemples expliquant leur importance et leur omniprésence en mathématiques. La deuxième partie sera consacrée à l'utilisation concrète de ces nombres complexes à la résolution d'exercices de type olympique. Au niveau des olympiades, les complexes servent essentiellement à brutaliser des exercices de géométrie : ils donnent une méthode de calcul bien plus agréable que le simple calcul en coordonnées cartésiennes. Attention : cours déconseillé aux allergiques au calcul...

Exemple d'exercices traités en cours dont la preuve la plus simple fait intervenir des nombres complexes :

**Exercice 1** Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}.$$

**Exercice 2** Soient quatre cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$ . On appelle  $A_1$  et  $B_1$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ,  $A_2$  et  $B_2$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ ,  $A_3$  et  $B_3$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$ , et  $A_4$  et  $B_4$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_1$ . (On suppose bien sûr que tous ces points existent.) Montrer que  $A_1, B_1, C_1$  et  $D_1$  sont cocycliques si et seulement si  $A_2, B_2, C_2$  et  $D_2$  le sont.

Enfin, pour vous donner une idée de la puissance de la méthode complexe en géométrie, voici un exercice très difficile, pouvant être résolu en deux heures par quelqu'un maîtrisant bien le calcul sur les complexes :

**Exercice 3** Soit  $ABC$  un triangle dont les angles sont aigus et soit  $\Gamma$  son cercle circonscrit. Soit  $l$  une droite tangente à  $\Gamma$ . Soit  $l_a, l_b$  et  $l_c$  les droites symétriques de  $l$  par rapport respectivement aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$ , et  $(AB)$ . Montrer que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les droites  $l_a, l_b$  et  $l_c$  est tangent à  $\Gamma$ .

Les plus observateurs auront reconnu l'exercice 6 des olympiades de cette année, résolu par seulement 6 candidats.

# III. Première période

## 1 Incontournable : Stratégies de base

### 1 Cours

#### - Principe des tiroirs-

Si l'on range au moins  $n + 1$  objets dans  $n$  tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins deux objets. En plus généralement, si l'on range au moins  $kn + 1$  objets dans ces mêmes  $n$  tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins  $k + 1$  objets. Par exemple : sachant qu'un humain a moins de 300 000 cheveux et qu'il y a 3 000 000 de parisiens, au moins deux parisiens ont le même nombre de cheveux. On peut même préciser qu'il existe 10 parisiens au moins ayant le même nombre de cheveux. S'il existait 3 000 001 parisiens ayant chacun au plus 300 000 cheveux, on pourrait affirmer qu'au moins 11 d'entre eux ont le même nombre de cheveux.

Un des premiers résultats mathématiques qu'on peut en déduire, c'est que le développement décimal de la fraction  $\frac{p}{q}$  est périodique de période strictement inférieure à  $q$ . En effet, lorsqu'on pose la division, à chaque nouvelle décimale correspond un nouveau reste. Parmi  $q$  restes consécutifs, soit l'un est nul (et la division s'arrête, ce qui correspond à une période 1 puisque à partir d'un certain rang, toutes les décimales sont égales à 0), soit ces  $q$  restes sont tous entre 1 et  $q - 1$ , ce qui prouve que deux d'entre eux au moins,  $r_i$  et  $r_j$  sont égaux. Comme chaque reste détermine toute la suite de la division,  $r_{i+1} = r_{j+1}$ ,  $r_{i+2} = r_{j+2}$ ... donc le développement décimal sera périodique de période au plus  $|i - j| < q$ .

#### Exercice 1

- (i) Montrer que quel que soit  $n$ , parmi  $(n + 1)$  entiers quelconques  $a_0, a_1 \dots a_n$ , on peut en trouver deux  $a_i$  et  $a_j$  tels que  $a_i - a_j$  soit divisible par  $n$ .
- (ii) Montrer que pour tout  $n$ , il existe un multiple de  $n$  d'au plus  $n$  chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

#### Solution de l'exercice 1

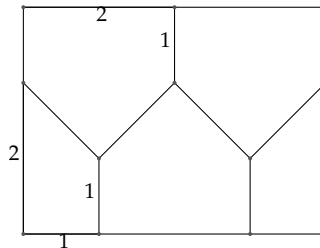
- (i) On classe les nombres dans les  $n$  classes modulo  $n$  :  $\{kn\}, \{kn + 1\} \dots \{kn + (n - 1)\}$ . Au moins une classe contient au moins deux entiers, donc leur différence est divisible par  $n$ .
- (ii) On utilise ce premier résultat avec la suite :  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111$  etc... :  $a_i$  est l'entier formé de  $i$  chiffres tous égaux à 1. Deux d'entre eux ont une différence multiple de  $n$ , et cette différence a au plus  $n$  chiffres tous égaux à 0 ou 1.

**Exercice 2** On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon  $\frac{1}{7}$  (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

Solution de l'exercice 2 Pour appliquer le principe des tiroirs, il faut moins de  $\frac{51}{2}$  tiroirs, soit au plus 25. Couvrir un carré avec 25 cercles est moins facile que le couvrir avec 25 carrés, de côté  $\frac{1}{5}$ . Mais la diagonale d'un tel carré mesure  $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$ , de sorte que chacun de ces carrés est inclus dans un cercle de rayon  $\frac{1}{7}$ . Les trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un même carré se trouvent a fortiori à l'intérieur d'un même cercle.

**Exercice 3** On place 6 points à l'intérieur d'un rectangle de dimension  $4 \times 3$ . Montrer qu'on peut en trouver deux dont la distance est inférieure ou égale à  $\sqrt{5}$ .

Solution de l'exercice 3 Si l'on plaçait 7 points, le problème serait facile, il suffirait de diviser le rectangle en six rectangles  $2 \times 1$ . Mais on n'a que 6 points, il faut donc trouver un autre découpage astucieux. La figure nous montre quel découpage choisir. A l'intérieur d'un de ces six polygones, il y a deux points au moins, et leur distance est nécessairement inférieure à la plus grande diagonale du polygone, donc à  $\sqrt{5}$ .



### - Récurrence -

Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel, on peut montrer que si elle est vraie pour un entier, elle est encore vraie pour le suivant : c'est ce qu'on appelle un raisonnement par récurrence. Il est important de rédiger proprement une telle démonstration :

- (1) on écrit explicitement l'hypothèse de récurrence,
- (2) initialisation : on montre que cette propriété est vraie en la première valeur pour laquelle il faut la démontrer. Cette valeur est en principe définie dans l'énoncé, ce n'est pas toujours 0.
- (3) on suppose l'hypothèse de récurrence vraie en  $n$ , et on démontre, généralement par un calcul qui constitue la plus grosse partie de la démonstration, que cette même propriété est encore vraie au rang suivant  $n + 1$ .

**Exercice 4**  $a$  et  $b$  étant des réels strictement positifs,  $a \neq 1$ , on considère la suite définie par récurrence par :  $u_0 = u$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = au_n + b$ . Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = a^n u + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$ .

Solution de l'exercice 4 Hypothèse de récurrence : au rang  $n$ ,  $u_n = a^n u + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$ .

Initialisation : comme  $a^0 = 1$  pour tout  $a$  strictement positif,  $u_0 = u = a^0 u + b \frac{a^0 - 1}{a - 1}$ , donc la relation est vérifiée pour  $n = 0$ .

Calcul : on suppose qu'au rang  $n$ ,  $u_n = a^n u + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$  (hypothèse de récurrence). Or par définition,  $u_{n+1} = au_n + b = a(a^n u + b \frac{a^n - 1}{a - 1}) + b = a^{n+1} u + b(a \frac{a^n - 1}{a - 1} + 1) = a^{n+1} u + b \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ , c'est précisément la propriété à démontrer au rang  $n + 1$ , et cela achève la démonstration.

**Exercice 5** Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ . En déduire que cette somme est toujours strictement inférieure à 2.

*Solution de l'exercice 5* Hypothèse de récurrence : au rang  $n$ ,  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ . Initialisation : pour  $n = 1$ ,  $1 \leq 2 - \frac{1}{1}$ , donc la relation est manifestement vérifiée au rang 1.

Calcul : la relation  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$  étant supposée vraie au rang  $n$  (hypothèse de récurrence), pour transformer cette relation en la même relation au rang  $n + 1$ , il faut ajouter à gauche  $\frac{1}{(n+1)^2}$  et à droite :  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$  qui est manifestement plus grand. Donc l'inégalité reste vraie, et par récurrence elle est vraie pour tout  $n \geq 1$ . On en déduit que pour tout  $n \geq 1$ ,  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$ .

**Exercice 6** Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  on peut trouver un multiple de  $2^n$  de  $n$  chiffres tous égaux à 1 ou 2.

*Solution de l'exercice 6* Hypothèse de récurrence : on peut trouver un multiple de  $2^n$  de  $n$  chiffres tous égaux à 1 ou 2.

Initialisation : pour  $n = 1$ , l'entier 2 convient.

Calcul : commençons par étudier les "petites valeurs" de  $n$  pour trouver la manière de construire, à partir de l'entier au rang  $n$ , le suivant au rang  $n + 1$ . Pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  les entiers 2, 12, 112, 2112, 22112... conviennent, et chacun s'obtient en ajoutant un premier chiffre 1 ou 2 à gauche de l'entier précédent. Nous allons donc démontrer que si  $a_n$  est un entier de  $n$  chiffres divisible par  $2^n$ , parmi les deux entiers de  $n + 1$  chiffres :  $10^n + a_n$  et  $(2 \times 10^n) + a_n$ , l'un d'eux est multiple de  $2^{n+1}$ . L'hypothèse de récurrence peut s'écrire  $a_n = 2^n \times b_n$ . Or comme  $10 = 2 \times 5$ ,  $10^n = 2^n \times 5^n$ , d'où  $10^n + a_n = 2^n [5^n + b_n]$  et  $(2 \times 10^n) + a_n = 2^n [(2 \times 5^n) + b_n]$ . Quel que soit  $b_n$ , l'un des nombres entre crochets est pair (le premier si  $b_n$  est impair, le second si  $b_n$  est pair), donc l'un des deux entiers construits ainsi est divisible par  $2^{n+1}$ , ce qui achève la démonstration.

### - Invariants-

Un invariant est une caractéristique d'une situation qui ne peut pas changer pour un problème donné, quels que soient les choix arbitraires que l'on fait. On regroupera dans ce chapitre différents types de problèmes : des problèmes de coloriage ou une caractéristique est vraie pour toutes les situations autorisées par l'énoncé, et ceux où l'on étudie un processus qui se déroule de manière imprévisible si ce n'est qu'une caractéristique reste invariante tout au long du processus.

**Exercice 7** On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

*Solution de l'exercice 7* Problème très classique : chaque domino couvre une case blanche et une case noire, donc quelle que soit la manière de disposer les dominos, on couvrira autant de cases blanches que de cases noires. Or si l'on découpe les deux cases en haut à gauche et en bas à droite de l'échiquier, il s'agit de deux cases de même couleur, toutes deux noires ou toutes deux blanches. Il restera donc soit 30 cases noires et 32 cases blanches soit 32 noires et 30 blanches. Si l'on parvient à placer 30 dominos (ce qui reste à prouver), les deux dernières

cases seront obligatoirement de même couleur, et on ne pourra pas y placer un domino de plus : il n'est donc pas possible de paver tout l'échiquier ainsi.

**Exercice 8** On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2011. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille dixième étape peut-il être égal à 1 ?

*Solution de l'exercice 8* C'est encore un argument de parité qui permet de conclure. Comme la différence de deux entiers a même parité que leur somme, la somme de tous les entiers sur le tableau conserve, à chaque étape du processus, la même parité. Or au départ elle vaut :  $1 + 2 + \dots + 2011 = \frac{2011 \times 2012}{2}$  qui est pair. Cette somme restera donc toujours paire, et le dernier nombre obtenu sera un nombre pair, ce ne peut pas être 1.

Pour prouver que ce peut être 0 (bien que ce ne soit pas demandé), il faudrait un tout autre raisonnement. On grouperait les nombres ainsi : (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7), ... (2008, 2009, 2010, 2011). Le premier triplet peut être ramené à 0 en remplaçant (2, 3) par 1 puis (1, 1) par 0. Et de même pour chacun des quadruplets suivants, en remplaçant  $(4n, 4n + 2)$  par 2,  $(4n + 1, 4n + 3)$  par 2, puis (2, 2) par 0. Prouver que la réponse est "oui" ou que la réponse est "non" nécessite des raisonnements totalement différents, il est donc impératif de deviner le plus vite possible la bonne réponse car on perd beaucoup de temps lorsqu'on part dans la mauvaise direction. La technique des invariants est utilisable pour prouver une impossibilité. Pour prouver que quelque chose est possible, habituellement on montre qu'on peut le construire explicitement.

**Exercice 9** 6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

*Solution de l'exercice 9* Si la réponse était "oui", il faudrait décrire une suite de déplacements aboutissant à la solution. Pour prouver que la réponse est "non", on peut faire appel à un invariant. Considérons un triangle équilatéral formé de trois arbres non voisins. Ce triangle contient au départ 3 oiseaux. Si tous les oiseaux sont sur le même arbre, le triangle contiendra 0 ou 6 oiseaux. Or il est facile de voir que chaque déplacement laisse invariante la parité du nombre d'oiseaux perchés sur le triangle : comme chaque arbre du triangle a ses voisins hors du triangle et inversement, soit les deux oiseaux qui s'envolent étaient sur le triangle et le nombre d'oiseaux sur le triangle diminue de 2. Soit aucun n'était sur le triangle et le nombre augmente de 2. Soit l'un était sur le triangle et l'autre hors du triangle, auquel cas le nombre d'oiseaux reste inchangé. Dans tous les cas, le nombre d'oiseaux sur le triangle restera impair et ne vaudra jamais 0 ni 6.

## 2 Premier TD

**Exercice 1** 15 stagiaires ont attrapé 100 tiques. Prouver qu'au moins deux de ces stagiaires ont attrapé le même nombre de tiques.

**Exercice 2** On considère des "mots" écrits avec les lettres  $x, y, z$  et  $t$ . On s'autorise les trois transformations suivantes :  $xy \mapsto yyx$ ,  $xt \mapsto ttx$  et  $yt \mapsto ty$ . Les mots suivants sont-ils équivalents ?

- (i)  $xyyy$  et  $xyyyyyx$ ,

- (ii)  $xytx$  et  $txyt$ ,
- (iii)  $xy$  et  $xt$ .

**Exercice 3** Trouver tous les  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $2^n \geq n^2$ .

**Exercice 4** À Mathland, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit un canal navigable (à double sens). Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport, tel que, en partant de n'importe quelle ville, on puisse atteindre n'importe quelle autre ville uniquement à l'aide de ce moyen de transport.

**Exercice 5** Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu.

- (i) Montrer que pour tout réel  $x$  il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de  $x$ .
- (ii) Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout réel  $x$  on puisse trouver deux points de cette couleur distants de  $x$ .

**Exercice 6** Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que  $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

**Exercice 7** Est-il possible de paver avec des triminos  $3 \times 1$  :

- (i) un damier  $8 \times 8$  ?
- (ii) un damier  $8 \times 8$  auquel manque le coin en haut à gauche ?

**Exercice 8** 47 personnes voyagent dans un bus avec deux contrôleurs à son bord. Au départ, aucun des voyageurs n'a de billet et chaque passager n'achète un billet qu'après la troisième fois qu'on le lui demande. Les contrôleurs choisissent à tour de rôle un passager sans billet et lui demandent d'en acheter un. Ils procèdent ainsi jusqu'à ce que toutes les personnes aient un titre de transport. Combien de billets le premier contrôleur est-il sûr de vendre ?

**Exercice 9** Un groupe de pirates s'est emparé de 128 pièces d'or. Si l'un d'eux possède au moins la moitié des pièces d'or, chaque autre pirate lui vole autant de pièces d'or qu'il a déjà en sa possession. Si deux pirates ont chacun 64 pièces d'or, l'un des ces deux individus vole toutes les pièces de l'autre. On suppose que sept tours de vol ont lieu. Montrer qu'à la fin un pirate obtient la totalité du butin.

*Il est conseillé de chercher les deux derniers exercices suivants après un cours d'arithmétique.*

**Exercice 10** Démontrer que parmi 2008 nombres entiers arbitraires, on peut trouver des nombres dont la somme est divisible par 2008.

**Exercice 11** On se donne  $m$  cartes, chacune numérotée par un entier entre 1 et  $m$ . On suppose que la somme des numéros de n'importe quel sous-ensemble de cartes n'est pas divisible par  $m + 1$ . Montrer que les cartes sont numérotées par le même entier.

- Correction -

Solution de l'exercice 1 Supposons le contraire. Alors les stagiaires ont attrapé au moins  $0 + 1 + \dots + 14 = \frac{14(14+1)}{2} = 105 > 100$  tiques. Contradiction.

Solution de l'exercice 2

- (i) Les deux mots sont équivalents :  $xyxy \mapsto xyxyxy \mapsto xyxyxyx$ .
- (ii) Les deux mots ne sont pas équivalents : en effet, le nombre de  $x$  est un invariant.
- (iii) Les deux mots ne sont pas équivalents : la présence de  $y$  (ou celle de  $t$ ) est un invariant.

Solution de l'exercice 3 Si  $n < 0$ ,  $2^n < 1 \leq n^2$ . Pour  $n = 0, 1, 2, 4$  on a bien  $2^n \geq n^2$  (mais pas pour  $n = 3$ ). Montrons maintenant que  $2^n \geq n^2$  pour  $n \geq 4$  par récurrence sur  $n$ . À cet effet, pour  $n \geq 1$  entier, soit  $P_n$  la proposition suivante :

$$P_n : \quad \ll 2^n \geq n^2 \gg$$

- (Initialisation)<sup>1</sup> Pour  $n = 4$ , on a bien  $2^4 \geq 4^2$ .
- (Hérédité) Soit  $n \geq 4$  un entier et supposons que  $P_n$  est vraie. Montrons que  $P_{n+1}$  est satisfaite. D'après l'hypothèse de récurrence,  $2^n \geq n^2$ . On a alors  $2^{n+1} \geq 2n^2$ . Il suffit donc de montrer que  $2n^2 \geq (n+1)^2$ . Ceci provient du fait que :

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 3^2 - 2 \geq 0.$$

Ainsi,  $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$ . Cela montre l'étape d'hérédité et conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 4 Notons  $n$  le nombre de villes. Pour avoir une intuition de ce qui se passe, il est conseillé de tester différentes configurations pour des petites valeurs de  $n$ . Pour  $n = 2$ , il n'y a qu'un seul moyen de transport. Pour  $n = 3$ , soient  $A, B, C$  les trois villes. Sans perte de généralité, supposons que  $A - B$  est une ligne aérienne. Alors soit  $C$  peut être relié à  $A$  ou  $B$  par une ligne aérienne, auquel cas l'avion convient, soit  $C$  est relié à  $A$  et  $B$  par un canal, auquel cas le bateau convient.

Cela suggère de démontrer que la véracité de la proposition suivante par récurrence<sup>2</sup> sur  $n$  :

$P_n$  :  $\ll$  Pour toute configuration de  $n$  villes, il existe un moyen de transport vérifiant les conditions requises.  $\gg$

- (Initialisation) On a déjà vu que  $P_2$  est vérifiée.
- (Hérédité) Soit  $n \geq 2$  un entier et supposons que  $P_n$  est vraie. Montrons que  $P_{n+1}$  est satisfaite. Considérons  $A$  une ville quelconque et appliquons la propriété  $P_n$  à la configuration des  $n$  villes restantes. Sans perte de généralité, supposons que c'est l'avion qui convient. Alors de deux choses l'une : soit il existe une ligne aérienne reliant  $A$  à une autre ville, auquel cas l'avion convient, soit  $A$  est relié à toutes les autres villes par un canal, auquel cas le bateau convient.

1. Ne jamais oublier cette étape qui, même si sa vérification est triviale ; si elle est omise, cela enlève des points aux Olympiades !

2. il faut toujours connaître la propriété *précise* que l'on veut prouver afin d'éviter les mauvaises surprises (par exemple lors de deux récurrences imbriquées ou autre réjouissances de ce type).



Solution de l'exercice 5

- (i) On considère un triangle équilatéral de côté  $x$ . Il existe alors deux sommets de ce triangle qui conviennent.
- (ii) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'on puisse trouver des distances  $x$  et  $y$  telles que deux points rouges ne soient jamais distants de  $x$  et deux points bleus ne soient jamais distants de  $y$ .

Il existe alors un point rouge ; notons le  $A$ . Considérons ensuite un triangle isocèle  $ABC$  tel que  $AB = AC = x$  et  $BC = y$ . Ainsi,  $B$  et  $C$  doivent être bleu. Or ces deux points sont distants de  $y$ , ce qui est contradictoire. Notre supposition de départ était donc fausse ; ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6 Montrons que la propriété suivante est vérifiée par récurrence sur  $n$  :

$$P_n : \quad \ll \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} \gg.$$

- (Initialisation)  $P_1$  est clairement vraie.
- (Hérédité) Soit  $n \geq 1$  un entier et supposons que  $P_n$  est vraie. Remarquons que :

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \left( \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \right) - \left( \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \right),$$

qui est entier grâce à l'hypothèse de l'énoncé et à l'hypothèse de récurrence  $P_n$ . Cela conclut.

Solution de l'exercice 7

- (i) Une figure pavée entièrement par des triminos  $3 \times 1$  possède un nombre multiple de 3 cases. Or le damier à paver possède un nombre de cases qui n'est pas multiple de 3. La réponse est donc *non*.
- (ii) On colorie la deuxième figure avec 3 couleurs différentes en les alternant de sorte que la figure à paver ne possède pas la même nombre de cases de chaque couleur et de sorte qu'un trimino recouvre nécessairement 3 cases dont les couleurs sont deux à deux différentes. La réponse est encore *non*.

Solution de l'exercice 8 Le premier contrôleur peut vendre tous les billets si, à chaque fois que c'est son tour, il procède de la manière suivante :

- Si une personne a déjà été désignée deux fois, il la choisit.
- Sinon, il choisit une personne qui n'a jamais été choisie.

Il peut toujours procéder de la sorte. En effet, une récurrence permet de voir qu'après chaque tour du deuxième contrôleur, le nombre de personnes choisies un nombre pair de fois est impair, donc non nul.

Solution de l'exercice 9 On montre par récurrence qu'après le  $i$ -tour, le butin de chacun des pirates est divisible par  $2^i$ . Comme à l'issue du septième tour il existe un pirate ayant un nombre non nul de pièces d'or, celui-ci en détient la totalité.Solution de l'exercice 10 Notons  $a_1, \dots, a_{2008}$  les entiers en question et considérons les sommes  $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  (pour  $1 \leq i \leq 2008$ ). Si l'une d'elles est divisible par 2008, c'est gagné.

Sinon, d'après le principe des tiroirs, il existe deux sommes, disons  $s_i$  et  $s_j$  (avec  $i < j$ ), qui ont le même reste dans la division euclidienne par 2008. Dans ce cas,  $s_j - s_i$  convient.

*Solution de l'exercice 11* Notons  $a_1, \dots, a_m$  les numéros des cartes en question et considérons les sommes  $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  (pour  $1 \leq i \leq m$ ). En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on voit que  $s_1, \dots, s_m$  sont distincts modulo  $m + 1$ . Mais comme  $a_2$  ne peut être égal à  $s_q$  modulo  $m + 1$  pour  $3 \leq q \leq m$ , cela implique que  $a_2 \equiv s_1 \pmod{m+1}$  ou  $a_2 \equiv s_2 \pmod{m+1}$ . Comme  $0 < a_1 < m + 1$ , on a nécessairement  $a_1 = a_2$ . On conclut en répétant ce raisonnement.

### 3 Second TD

**Exercice 1** (Coefficients binomiaux) Pour tout  $k \leq n \in \mathbb{N}$  définit le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  de façon récurrente :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ pour tous } k < n$$

1. Montrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

3. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$$

**Exercice 2** (La suite de Fibonacci) La célèbre suite de Fibonacci est définie comme suit :

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Soient  $\varphi$  et  $\varphi'$  les deux racines de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ .

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Montrer qu'il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$F_n = \lambda \cdot \varphi^n + \mu \cdot \varphi'^n$$

Pouvez-vous généraliser le résultat à toutes les suites de type  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  ?

---

3. Voir cours d'arithmétique élémentaire.

2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

3. Montrer les formules suivantes :

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

$$m|n \Rightarrow F_m|F_n$$

**Exercice 3** (Tetraminos) Un tetramino est une figure constituée de 4 cases (pensez Tetris). Trouver les  $n$  tetraminos différents (on peut les pivoter mais pas les retourner). Peut-on paver une rectangle  $4 \times n$  avec un exemplaire de chaque ?

**Exercice 4** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  des entiers. Montrer qu'on peut trouver 11 nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_{11}$  à valeur dans  $\{-1, 0, 1\}$  non tous nuls tels que  $\sum \lambda_i a_i$  soit divisible par 2011.

**Exercice 5** On colorie tous les sommets d'un polygone à  $2n + 1$  côtés de sorte que deux sommets voisins ne soient jamais de la même couleur. Montrer qu'il est possible de diviser le polygone en triangles à l'aide de diagonales dont les extrémités sont de couleurs différentes et qui ne se croisent pas.

**Exercice 6** On considère un cube  $ABCDEFGH$  et on assigne à chaque sommet un entier naturel. À chaque tour on choisit une arête et on augmente de 1 les entiers aux deux extrémités. Si on part de la configuration où  $A$  et  $C$  sont à 1 et tous les autres à 0, montrer qu'on ne pourra jamais atteindre une configuration où tous les sommets ont la même valeur.

**Exercice 7** On considère 5 réels. Montrer que parmi eux on peut en trouver 2  $a$  et  $b$  tels que

$$0 \leq \frac{a-b}{1+ab} \leq 1$$

- Correction -

Solution de l'exercice 1 1. Montrons par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier  $k < n$ ,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour  $n = 0$ , c'est vrai car

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}.$$

Supposons la propriété vraie au rang  $n$ , et montrons-la au rang  $n + 1$ . Si  $k = 0$  ou  $k = n + 1$ , c'est vrai, car par exemple pour  $k = 0$  on a

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}.$$

Supposons donc  $k$  non nul. Alors,

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} && \text{par définition} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left[ \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right] \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!},
 \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

2. Montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$  c'est évident. Supposons le résultat vrai au rang  $n$ , et montrons le au rang  $n + 1$ . On a :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
 &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &= a^n + b^n + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1},
 \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

3.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2n} \\
 &= 2 + \sum_{i=1}^{2n-2} \binom{2n-1}{i} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} \\
 &= 2^{2n-1} && \text{d'après la question précédente.}
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 1. Montrons par récurrence forte sur  $n$  que  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^n$ . On vérifie que c'est vrai pour  $n$  valant 0 ou 1. Supposons la propriété vraie pour tout entier inférieur à

$n$ , et montrons-la au rang  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^{n-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n-1}(\varphi + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^{n-1}(\varphi' + 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^{n+1}.
 \end{aligned}$$

La dernière étape de calcul vient du fait que  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont racines de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ .

On peut généraliser ce résultat : supposons que l'équation  $x^2 - ax - b$  a deux racines  $\psi$  et  $\psi'$ . Alors  $u_n$  sera de la forme  $u_n = \alpha\psi^n + \beta\psi'^n$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels choisis tels que  $u_0 = \alpha + \beta$  et  $u_1 = \alpha\psi + \beta\psi'$ .

2. En appliquant le résultat précédent, et en factorisant par  $\varphi^{n+1}/\sqrt{5}$  au numérateur et par  $\varphi^n/\sqrt{5}$  au dénominateur, on trouve que pour tout  $n$  on a

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \frac{1 + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n}.$$

Comme  $\varphi'/\varphi$  est strictement compris entre 0 et 1, on a bien la convergence recherchée.

3. a) On montre le résultat par récurrence sur  $n$ . Il est clairement vrai pour  $n = 1$ . Supposons le vrai au rang  $n$ . Alors  $\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^n F_i^2 + F_{n+1}^2$ . Par hypothèse de récurrence, cette quantité est égale à  $F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2$ , et on conclut facilement.

b) On montre par récurrence forte sur  $n$  le résultat suivant :

- si  $n$  est pair, on écrit  $n = 2k$ , et alors  $F_n = F_k^2 + 2F_{k-1}F_k$ ,
- si  $n$  est impair, on écrit  $n = 2k - 1$ , et alors  $F_n = F_k^2 + F_{k+1}^2$ .

c) Soit  $m$  un entier. On montre par récurrence forte sur  $n$  la formule suivante :

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n.$$

Cette formule nous permet ensuite de montrer par récurrence sur  $k$  que  $F_m$  divise  $F_{km}$  (on applique la formule avec  $n = (k - 1)m$ ).

Solution de l'exercice 3 On colorie notre rectangle en blanc et en noir, comme dans un échiquier. On essaie de placer chacun des 7 tétramino dessus. On remarque que toutes les pièces colorient autant de cases blanches que de cases noires, sauf le tétramino en  $T$  qui colorie trois cases d'une couleur et une seule de l'autre. Ainsi, tout placement des 7 tétramino recouvrera un nombre différent de cases blanches et de cases noires. Comme le rectangle comporte autant de cases blanches que de cases noires, il ne peut pas être recouvert complètement par les tétramino.

Solution de l'exercice 4 Il y a  $3^{10}$  possibilités pour choisir les  $\lambda_i$ , ce qui est supérieur à 2011. Par principe des tiroirs, il y a deux possibilités telles que  $\sum_{i=1}^{10} \lambda_i a_i$  ait le même reste modulo 2011, appelons les  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{10})$  et  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{10})$ . On peut supposer que pour tout  $i$ , soit  $\lambda_i$  est différent de  $\lambda'_i$ , soit  $\lambda_i = \lambda'_i = 0$  (en effet, si on a  $\lambda_i = \lambda'_i$ , on peut les remplacer tous les deux par 0 sans changer l'égalité des sommes modulo 2011). Ainsi, la famille  $(\lambda_1 - \lambda'_1, \dots, \lambda_{10} - \lambda'_{10})$  a tous ses termes dans  $\{-1, 0, 1\}$ , et convient donc.

Solution de l'exercice 5 Le cas  $n = 1$  est trivial. Maintenant essayons de montrer le cas général par récurrence.

Une première idée est de chercher une "petite" diagonale (deux sommets séparés par un seul sommet intermédiaire) dont les sommets sont de couleurs différentes et de considérer le polygone restant. Le problème est que le polygone restant a un nombre pair de côtés et on ne peut pas appliquer l'hypothèse de récurrence. La solution est de chercher *deux* petites diagonales dont les extrémités sont de couleurs différentes et qui ne se croisent pas. Je laisse au lecteur le soin de montrer l'existence de deux telles diagonales et de rédiger la fin de la récurrence.

Solution de l'exercice 6 On sépare les sommets du cube en deux ensembles tels que deux éléments du même ensemble ne soient jamais reliés par une arête : on partage entre  $E_1 = (A, C, F, H)$  et  $E_2 = (B, D, E, G)$ . Appelons  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) la somme des entiers écrits sur les sommets de  $E_1$  (resp.  $E_2$ ). À chaque étape, on augmente de 1 les deux sommes  $S_1$  et  $S_2$ . Ainsi, la quantité  $S_1 - S_2$  est invariante. Elle vaut deux au début, donc elle ne s'annule jamais, donc on ne peut jamais atteindre une configuration où tous les sommets ont la même valeur (cette configuration annule  $S_1 - S_2$ ).

Solution de l'exercice 7 On reconnaît la formule d'addition des tangentes :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

On écrit nos 5 réels  $(r_1, \dots, r_5)$  sous la forme  $(\tan \alpha_1, \dots, \tan \alpha_5)$ , où les  $\alpha_i$  sont choisis entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ . On découpe cet intervalle en quatre boîtes de taille  $45^\circ$ , et par principe des tiroirs il y a deux  $\alpha_i$  dans un de ces intervalles. Mais alors on a trouvé  $i$  et  $j$  tels que  $\alpha_i - \alpha_j$  soit compris entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$ . Ainsi,  $\frac{r_i - r_j}{1 + r_i r_j} = \tan(\alpha_i - \alpha_j)$  est compris entre 0 et 1.

## 4 Test

**Exercice 1** 41 stagiaires se rencontrent au château de Grésillon, chacun serrant la main à tous les autres. Montrer qu'à n'importe quel moment de la rencontre, il y a toujours deux stagiaires qui ont serré exactement le même nombre de mains.

**Exercice 2** Soit  $n$  un entier strictement positif. Montrer que :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Exercice 3** Dans le plan, on a tracé  $n > 0$  droites. Prouver que l'on peut colorier les régions ainsi délimitées soit en rouge soit en bleu, de sorte que deux régions quelconques séparées par un segment soient toujours de couleurs différentes.

**Exercice 4** On coupe un coin de l'échiquier  $(2n+1) \times (2n+1)$ . Pour quelles valeurs de  $n$  peut-on recouvrir les cases restantes par des dominos  $2 \times 1$  de telle sorte que la moitié des dominos soient horizontaux ?

- Correction -

Solution de l'exercice 1 À n'importe quel moment, chaque stagiaire a serré un nombre de mains variant entre 0 et 40. Comme il ne peut pas y avoir à la fois quelqu'un ayant serré aucune main et quelqu'un ayant serré toutes les mains, d'après le principe des tiroirs, il y a deux stagiaires qui ont serré exactement le même nombre de mains.

Solution de l'exercice 2 Montrons que la propriété suivante est vérifiée par récurrence sur  $n$  :

$$P_n : \quad \ll 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg.$$

- (Initialisation)  $P_1$  est clairement vraie.
- (Hérédité) Soit  $n \geq 1$  un entier et supposons que  $P_n$  est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

$P_{n+1}$  est donc satisfaite, ce qui conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 3 Nous allons démontrer qu'il existe un tel coloriage par récurrence. Soit  $P_n$  la propriété "si on place  $n$  droites dans le plan, alors on peut colorier les régions délimitées par les droites de deux couleurs de telle façon que deux régions voisines sont de couleur différentes".

Le cas  $n = 1$  n'est pas très compliqué : la droite sépare le plan en deux, on colorie un côté en rouge et l'autre en bleu.

On suppose la propriété  $P_n$  et on va placer  $n + 1$  droites dans le plan. On commence par en place  $n$ . D'après l'hypothèse de récurrence, on peut colorier toutes les régions délimitées par ces droites en rouge et bleu de façon adéquate. Maintenant plaçons la  $(n + 1)$ ème droite, et on va inverser toutes les couleurs d'un côté et laisser l'autre côté tranquille. Il est facile de se persuader que le coloriage ainsi obtenu est adéquat.

Solution de l'exercice 4 Si  $n$  est pair, on trouve aisément un recouvrement qui convient. Lorsque  $n$  est impair, montrons qu'il est impossible de satisfaire les conditions. On colorie l'échiquier en deux couleurs : on colorie les cases des première, troisième, etc. lignes en bleu et les cases des seconde, quatrième, etc. lignes en rouge. Il y a alors  $2n^2 + n$  cases rouges et  $2n^2 + 3n$  cases bleues, soit un total de  $4n^2 + 4n$  cases. On aura donc besoin de  $2n^2 + 2n$  dominos. Il y aura donc  $n^2 + n$  dominos horizontaux et autant de verticaux.

Chaque domino vertical recouvre une case de chaque couleur. Une fois les dominos verticaux placés, il reste  $n^2$  cases rouges et  $n^2 + n$  cases bleues à recouvrir par des dominos horizontaux. D'après le coloriage, un domino horizontal recouvre des cases de la même couleur. Il faut donc que  $n$  soit pair. Autrement dit, lorsque  $n$  est impair, il sera impossible de recouvrir l'échiquier suivant les conditions de l'énoncé.

## 2 Avancés : combinatoire

### 1 Premier TD

**Exercice 1** Combien d'entiers positifs, inférieurs à 2011, sont multiples de 3 ou de 4, mais pas de 5 ?

**Exercice 2** Une araignée possède 8 chaussettes identiques et 8 chaussures identiques. Dans combien d'ordre différents peut-elle se chauffer, sachant qu'évidemment, sur chaque patte, elle doit mettre la chaussure après la chaussette ?

**Exercice 3** De combien de façons différentes peut-on choisir 5 nombres parmi  $\{1, 2, \dots, 18\}$ , de telle sorte que deux de ces nombres ne soient jamais consécutifs ?

**Exercice 4** Dans un jeu de 27 cartes, chaque carte possède trois caractéristiques : forme (carré, cercle ou triangle), couleur (bleu, jaune ou rouge), et type de coloriage (plein, à pois ou hachuré). Toutes les cartes sont différentes. Une combinaison de trois cartes est appelée complémentaire si, pour chacune des trois caractéristiques, les trois cartes sont identiques, ou bien toutes différentes. Combien y-a-t-il de combinaisons complémentaires.

**Exercice 5** Dans un tournoi, chaque participant joue un match contre chaque autre participant. Le gagnant d'un match gagne 1 point, le perdant 0, et si le match est nul les deux joueurs gagnent un demi-point. À la fin du tournoi, les participants sont classés selon leur score (si plusieurs participants ont le même score, leur ordre est choisi aléatoirement). Chaque participant a remporté la moitié de ses points lors de ses matches contre les dix derniers participants (au classement). Combien de personnes participaient à ce tournoi ?

**Exercice 6** On numérote les côtés d'un dodécagone  $C_1, C_2, \dots, C_{12}$ . De combien de façons peut-on colorier les côtés d'un dodécagone, avec quatre couleurs, de telle sorte que deux côtés adjacents soient toujours de couleurs différentes ? (On considère que deux coloriages sont différents dès que l'un des côtés  $C_i$  est coloré de deux couleurs différentes).

**Exercice 7** Montrer que pour tout entier positif  $n$ , on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

**Exercice 8** Il y a  $2n$  personnes dans une fête. Chacune de ces personnes a un nombre pair d'amis parmi les fêtards. Montrer que deux personnes ont un nombre pair d'amis communs.

**Exercice 9** Soit  $n$  un entier positif. Combien-y-a-t-il de polynômes  $P$  à coefficients dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$ , tels que  $P(2) = n$  ?

**Exercice 10** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des nombres valant 0 ou 1. On définit  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  de la façon suivante : si  $a_k = a_{k+1}$ , alors  $b_k = 0$ , sinon  $b_k = 1$ . On répète le processus jusqu'à avoir rempli un tableau triangulaire. Quel est le nombre maximum de 1 que peut comporter ce tableau ?

**Exercice 11** Soit  $m$  un entier supérieur à 3. Dans une fête, ayant plus de  $m$  participants, chaque groupe de  $m$  personnes possède exactement un ami commun. Combien d'amis possède la personne possédant le plus d'amis ?

**Exercice 12** Dans chaque case d'un échiquier de taille  $1998 \times 2002$ , on écrit le chiffre 0 ou 1, de telle sorte que dans chaque ligne et dans chaque colonne, le nombre de cases comportant le chiffre 1 soit impair. Montrer que le nombre de cases blanches comportant le chiffre 1 est pair.



**Exercice 13** Soit  $n$  un entier impair différent de 1. Combien y-a-t-il de permutations  $p$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  telles que

$$\sum_{i=1}^n |p(i) - i| = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

**Exercice 14** Soient  $n$  et  $k$  deux entiers positifs, tels que  $\frac{n}{2} < k \leq \frac{2n}{3}$ . On place  $m$  pions sur un échiquier de taille  $n \times n$ , de telle sorte qu'aucune ligne ou colonne ne comporte de bloc de  $k$  cases vides. Quel est le plus petit entier  $m$  pour lequel cela est possible ?

**Exercice 15** Soient  $r_1, r_2, \dots, r_n$  des nombres réels. Montrer qu'il existe un sous-ensemble  $S$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , tel que pour tout  $1 \leq i \leq n - 2$ ,  $|S \cap \{i, i + 1, i + 2\}|$  soit égal à 1 ou 2, et tel que

$$\left| \sum_{i \in S} r_i \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |r_i|.$$

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 Pour tout entier  $k$ , il y a  $\lfloor 2011/k \rfloor$  multiples de  $k$  inférieurs à 2011. Il y a donc 670 multiples de 3, et 502 multiples de 4. Pour compter les nombres qui sont multiples de 3 ou de 4, il faut compter les multiples de 3, ceux de 4, et enlever les nombres à la fois multiples de 3 et de 4, qui sont comptés deux fois. Ces nombres sont les multiples de 12, il y en a 167. Il y a donc  $670 + 502 - 167 = 1005$  nombres inférieurs à 2011 qui sont multiples de 3 ou de 4.

Il faut maintenant enlever de ce compte les multiples de 5. Un nombre est multiple de 3 et de 5 si et seulement s'il est multiple de 15 : il y en a 134, et un nombre est multiple de 4 et de 5 si et seulement s'il est multiple de 20 : il y en a 100. Il faut enlever de ce compte les nombres à la fois multiples de 3, 4 et 5, comptés deux fois. Ce sont les multiples de 60, il y en a 33. Finalement, le nombre recherché est  $1005 - (134 + 100 - 33) = 804$ .

Solution de l'exercice 2 Numérotons les pattes de l'araignée de 1 à 8. Appelons  $a_i$  l'action consistant à mettre une chaussette sur la  $i$ -ème patte, et  $b_i$  l'action consistant à mettre une chaussure sur la  $i$ -ème patte. Il y a  $16!$  façons d'ordonner les 16 actions  $(a_i)$  et  $(b_i)$ . Considérons l'un de ces ordres. A partir de cet ordre, on s'autorise à échanger, pour tout  $i$ , les positions des actions  $a_i$  et  $b_i$ , ce qui permet d'atteindre  $2^8$  ordres différents. Parmi ces ordres, seul un correspond à une façon correcte de se chauffer : l'ordre pour lequel pour tout  $i$ ,  $a_i$  apparaît avant  $b_i$ . L'araignée peut donc se chauffer de  $16!/2^8 = 81729648000$  façons différentes.

Solution de l'exercice 3 Considérons l'application suivante :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mapsto (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, a_4 + 3, a_5 + 4),$$

qui associe à un quintuplet de nombres différents de  $\{1, 2, \dots, 14\}$ , ordonnés par ordre croissant, un quintuplet de nombres différents de  $\{1, 2, \dots, 18\}$ , ordonnés par ordre croissant, tel que deux de ces nombres ne soient jamais consécutifs. Cette application est clairement une bijection. Le nombre recherché est donc égal au nombre de parties à 5 éléments de  $\{1, 2, \dots, 14\}$ ,

la solution est  $\binom{14}{5} = 2002$ .

*Solution de l'exercice 4* Considérons une paire de cartes, choisie au hasard. Alors il y a une unique carte permettant de compléter cette paire en une combinaison complémentaire. En effet, considérons une des caractéristiques de nos deux cartes, par exemple la forme. Si les deux cartes ont la même forme (disons un carré), alors une carte formant une combinaison complémentaire avec nos deux cartes est nécessairement de la même forme (donc carrée). Maintenant, si les deux cartes ont deux formes différentes (disons un cercle et un triangle), alors une carte formant une combinaison complémentaire avec nos deux cartes est nécessairement de la troisième forme (donc carrée). Dans tous les cas, la forme de la troisième carte est parfaitement déterminée. Chaque paire nous donne donc une combinaison complémentaire. Ainsi, on compte chaque combinaison trois fois (car, si  $(A, B, C)$  est une combinaison complémentaire, les trois choix initiaux de paire  $(A, B)$ ,  $(B, C)$  et  $(C, A)$  conduisent à la combinaison  $(A, B, C)$ ). Le nombre de combinaisons complémentaires est donc de  $\frac{1}{3} \binom{27}{2} = 117$ .

*Solution de l'exercice 5* Nous allons utiliser une méthode de double comptage. En comptant de deux façons différentes le nombre de points distribué dans le tournoi, nous obtiendrons une relation algébrique portant sur le nombre  $n$  de participants, qui nous permettra de conclure. Un match correspond à une distribution de 1 point, et donc le score total obtenu par  $k$  joueurs dans les matches qu'ils jouent entre eux est donc de  $k(k-1)/2$ . Ainsi, le score total de tous les participants est de  $n(n-1)/2$ .

Les 10 derniers participants ont obtenus 45 points en jouant entre eux, leur score total est donc de 90 points. Les autres  $n-10$  participants ont obtenus  $(n-10)(n-11)/2$  points en jouant entre eux, et donc un total de  $(n-10)(n-11)$  points. Le score total de tous les participants est donc de  $90 + (n-10)(n-11)$  points. En comparant ces deux valeurs, on obtient l'équation  $n^2 - 41n + 400 = 0$ , qui a deux solutions : 16 et 25.

Le tournoi ne pouvait pas contenir 16 participants. En effet, dans ce cas, le score total des 10 derniers participants est 90, et celui des 6 premiers est 30. Les dix derniers ont donc obtenus en moyenne plus de points que les premiers, c'est absurde. Le tournoi ne pouvait donc avoir que 25 participants.

*Solution de l'exercice 6* Nous allons montrer par récurrence un résultat plus général : de combien de façon on peut colorier les côtés d'un polynôme à  $n$  côtés avec  $k$  couleurs, de telle sorte que les côtés adjacents soient de couleur différente. Nous notons cette quantité  $p_{n,k}$ . Commençons donc à colorier notre polygone : il y a  $k$  choix pour le côté  $C_1$ , puis  $k-1$  choix possibles pour le côté  $C_2$  différents de la couleur de  $C_1$ , et ainsi de suite. On trouve donc  $k(k-1)^{n-1}$  coloriages possibles tels que les côtés adjacents soient de couleurs différentes, sauf peut-être  $C_1$  et  $C_n$ . Mais l'ensemble des coloriages incorrects où  $C_1$  est de même couleur que  $C_n$  est clairement en bijection avec celui des coloriages légaux d'un polygone à  $n-1$  côtés (on a fusionné  $C_1$  et  $C_n$ ). On obtient donc la formule de récurrence suivante :  $p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - p_{n-1,k}$ .

Comme  $p_{3,k} = k(k-1)(k-2)$ , on a donc

$$p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-4}k(k-1)^3 + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2),$$

donc

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= k \frac{(k-1)^n + (-1)^{n-4}(k-1)^3}{1 + (k-1)} + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2) \\ &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1). \end{aligned}$$

Ainsi,  $p_{12,4}$  est égal à  $3^{12} + 3$ , c'est-à-dire 531444.

Solution de l'exercice 7 Il y a essentiellement deux manières d'aborder un exercice de ce type. La première est une preuve par récurrence brutale, utilisant en général la formule de Pascal pour l'étape de propagation. La deuxième méthode est la preuve combinatoire. Cette méthode consiste à dénombrer de deux façons différentes le cardinal d'un même ensemble bien choisi, ce qui fait apparaître directement une égalité. Cette méthode est souvent plus courte et plus agréable, et nous allons l'utiliser ici.

L'idée est de calculer de deux façons différentes le nombre de parties à  $n$  éléments d'un ensemble à  $2n + 1$  élément. Ce nombre est égal à  $\binom{2n+1}{n}$ , le membre de droite de notre égalité. Essayons maintenant de faire apparaître le membre de gauche. En observant ce membre, on observe un terme  $2^k$ , qui correspond à  $k$  choix binaires, et un terme  $\binom{n}{k}$ , correspondant à un choix de  $k$  éléments. En mettant ces deux éléments bout à bout, on arrive à la méthode de calcul suivante.

Groupons nos  $2n + 1$  éléments en  $n$  paires, et mettons le dernier élément à part. Choisissons  $k$  de ces paires ( $\binom{n}{k}$  choix). Le nombre  $k$  correspond au nombre de paires contenant exactement un élément de notre ensemble à  $n$  éléments : dans chacune de ces  $k$  paires, choisissons un des deux éléments ( $2^k$  choix). Nous avons sélectionnés  $k$  éléments, il nous reste à en choisir  $n - k$  pour aboutir à un ensemble à  $n$  éléments. Ces  $n - k$  éléments doivent être regroupés dans  $\lfloor (n - k)/2 \rfloor$  paires, et si  $n - k$  est impair, pour compléter, on rajoute à notre ensemble l'élément n'appartenant à aucune paire. On voit immédiatement que l'on construit ainsi une fois chaque ensemble à  $n$  éléments, et qu'il y a  $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$  façons d'effectuer cette construction.

Solution de l'exercice 8 Supposons par l'absurde que toute paire de personne a un nombre impair d'amis communs. Soit  $P$  une personne particulière, soit  $A$  l'ensemble des amis de  $P$ , et  $B$  l'ensemble des personnes qui ne sont pas amies avec  $P$  (on exclue  $P$  lui-même de cet ensemble). Par hypothèse,  $|A|$  est pair, et, comme il y a un nombre pair de fêtards,  $|B|$  est impair. Soit  $Q$  une personne dans  $B$ . Comme  $P$  et  $Q$  ont un nombre impair d'amis communs,  $Q$  a un nombre impair d'amis dans  $A$ . Comme  $Q$  n'est pas ami avec  $P$ , et a un nombre pair d'amis,  $Q$  a un nombre impair d'amis dans  $B$ .

Maintenant, en sommant le nombre d'amis de chaque personne de  $B$ , on obtient un nombre impair, mais ce nombre doit être égal au double du nombre de relations d'amitiés entre personnes de  $B$ , une contradiction.

Solution de l'exercice 9 L'idée naturelle est de relier  $P(2)$  à des développements en binaires. Soit donc  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\{0, 1, 2, 3\}$  de degré  $m$ , que l'on écrit  $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ . Maintenant, pour tout  $i$ , écrivons  $a_i = 2b_i + c_i$ , avec  $b_i$  et  $c_i$  dans  $\{0, 1\}$ , la décomposition de  $a_i$  en binaire. Ainsi, on a

$$P(2) = 2 \sum_{i=0}^m b_i 2^i + \sum_{i=0}^m c_i 2^i.$$

Ainsi, pour que  $P(2)$  soit égal à  $n$ , il faut que  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$  soit l'écriture binaire de  $n - 2 \sum_{i=0}^m b_i 2^i$ , et pour que cela soit possible il faut donc que  $\overline{b_n b_{n-1} \dots b_0}$  appartienne à  $\{0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ . L'ensemble

des polynômes recherchés est donc en bijection avec  $\{0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ , et la quantité recherchée est  $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ .

*Solution de l'exercice 10* Il y a une méthode naturelle pour construire un tableau contenant beaucoup de 1 : en commençant par le bas. On prend 1 comme dernière ligne du tableau, 01 comme avant-dernière ligne. Ensuite, pour chaque ligne suivante il n'y a que deux possibilités (une commençant par 0 et une par 1), par exemple pour la ligne 3 on a le choix entre 001 et 110. On choisit alors la possibilité contenant le plus de 1. On arrive ainsi au tableau suivant :

1  
01  
110  
1011  
01101  
110110  
1011011  
01101101  
110110110  
...

Le calcul permet de se convaincre que dans un tel tableau de  $n$  lignes le nombre 1 apparaît  $\lfloor \frac{n^2+n+1}{3} \rfloor$  fois. Ce tableau fait aussi apparaître une sorte de périodicité de période 3, ce qui incite, dans la récurrence, à utiliser la propriété au rang  $n$  pour montrer celle au rang  $n+3$ .

Montrons donc par récurrence sur  $n$  que le tableau comporte au plus  $\frac{n^2+n+1}{3}$  fois le nombre 1. L'initialisation (pour  $n$  valant 0, 1 ou 2) est évidente. Supposons la propriété vraie au rang  $n$ , et montrons-la au rang  $n+3$ . Considérons les 3 premières lignes d'un tel tableau, que l'on note  $a_1 a_2 \dots a_{n+3}$ ,  $b_1 b_2 \dots b_{n+2}$  et  $c_1 c_2 \dots c_{n+1}$ . Soit la première colonne  $a_1 b_1 c_1$  comporte un 0, soit elle comporte 3 fois 1, mais alors  $a_2$  et  $b_2$  sont nuls, et les deux premières colonnes comportent au moins deux zéros. On procède ainsi de gauche à droite, ce qui montre que soit les  $n+1$  premières colonnes comportent au moins  $n+1$  zéros (cas 1), soit les  $n$  premières colonnes comportent au moins  $n$  zéros (cas 2).

Dans le cas 1, comme  $a_{n+2}$ ,  $a_{n+3}$  et  $b_{n+2}$  ne peuvent être tous égaux à 1, les 3 premières lignes comportent au moins  $n+2$  zéros. Dans le second cas, on peut supposer que la colonne  $a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1}$  est composée de trois fois le nombre 1 (sinon, on peut se ramener au premier cas), et donc  $a_{n+2}$  et  $b_{n+2}$  sont égaux à 0, et dans ce cas aussi les 3 premières lignes comportent au moins  $n+2$  zéros, et donc ces 3 premières lignes comportent au plus  $2n+4$  fois le nombre 1. Or on a

$$\frac{n^2 + n + 1}{3} + 2n + 4 = \frac{(n+3)^2 + (n+3) + 1}{3},$$

ce qui clôt la récurrence.

*Solution de l'exercice 11* Le nombre recherché est clairement supérieur à  $m$  : prenons un groupe de  $m$  personnes, alors l'ami commun aux personnes de ce groupe a au moins  $m$  amis. Nous allons montrer que ce maximum est en fait égal à  $m$ . Soit  $P$  la personne ayant le plus d'amis, et  $S$  l'ensemble de ses amis. Considérons un sous-ensemble  $S'$  de  $S$  à  $m-1$  éléments. Appelons  $Q_{S'}$  l'ami commun aux éléments de  $S'$  et à  $P$ , c'est un ami de  $P$  et c'est donc un élément de  $S$ .

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux sous-ensembles de  $S$  à  $m - 1$  éléments, distincts. Alors  $S_1 \cup S_2$  possède au moins  $m$  éléments, et donc  $Q_{S_1}$  est différent de  $Q_{S_2}$  (car sinon, en prenant un sous-ensemble à  $m$  éléments de  $S_1 \cup S_2$ , les éléments de cet ensemble auraient au moins deux amis communs,  $Q_{S_1}$  et  $P$ , ce qui est contraire aux hypothèses).

Nous avons donc montré que l'ensemble des sous-ensembles à  $m - 1$  éléments de  $S$  s'envoie injectivement dans  $S$ . Cela impose

$$\binom{|S|}{m-1} \leq |S|,$$

et donc  $|S| \leq m$ , ce qui est le résultat souhaité.

*Solution de l'exercice 12* Numérotions les cases par des couples  $(i, j)$ , où  $1 \leq i \leq 1998$  et  $1 \leq j \leq 2002$ . Une case est blanche si et seulement si ses deux coordonnées sont de même parité. Appelons  $L_{\text{impair}}$  la somme des contenus des cases des lignes impaires, et  $C_{\text{pair}}$  la somme des contenus des cases des colonnes paires. Ces deux sommes sont impaires, comme somme de nombres impairs de nombres impairs. Le contenu d'une case blanche apparaît dans précisément une de ces deux sommes (dans  $L_{\text{impair}}$  si ses coordonnées sont impaires, dans  $C_{\text{pair}}$  sinon). Examinons l'ensemble  $N$  des cases noires intervenant dans la somme  $L_{\text{impair}}$ . Ce sont les cases ayant des coordonnées  $(i, j)$  avec  $i$  impair et  $j$  pair, et donc  $N$  est aussi égal à l'ensemble des cases noires intervenant dans  $C_{\text{pair}}$ . Ainsi, en notant  $s(N)$  la somme des contenus des cases des éléments de  $N$ , on a que la somme des contenus des cases blanches est égale à  $L_{\text{impair}} + C_{\text{pair}} - 2s(N)$ . Comme cette somme est paire, le nombre de cases blanches comportant le chiffre 1 est pair.

*Solution de l'exercice 13* L'observation clé permettant d'espérer résoudre l'exercice est que, en essayant des cas à la main, on observe que  $\frac{n^2-1}{2}$  semble être la valeur maximale de la somme considérée. Les termes  $|p(i) - i|$  intervenant dans la somme sont tous des différences de deux entiers, plus précisément des somme de deux entiers de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , l'un compté négativement, et l'autre positivement. La somme totale comporte donc  $n$  signes plus et  $n$  signes moins. De plus chaque entier de  $\{1, 2, \dots, n\}$  apparaît précisément deux fois dans cette somme : une fois parmi les  $(i)$ , une fois parmi les  $(p(i))$ . On en déduit que la somme  $\sum_{i=1}^n |p(i) - i|$  est nécessairement inférieure à la valeur suivante, en notant  $n = 2k + 1$  :

$$n + n + \dots + (k + 2) + (k + 2) + (k + 1) - (k + 1) - k - k - \dots - 1 - 1 = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Les permutations  $p$  que nous cherchons à compter correspondent donc au cas d'égalité, ce qui nous donne une grande quantité d'informations sur  $p$ . Par exemple, soit  $m$  un entier strictement supérieur à  $k + 1$ . Cet entier est compté deux fois avec un signe positif dans la somme, et donc :  $p(m) < m$  et  $p(i) = m \Rightarrow i < m$ . L'entier  $k + 1$  a un rôle particulier, devant être compté une fois positivement et une fois négativement, ce qui nous force à distinguer deux cas : Cas 1 :  $p(k + 1) \leq k$ . Alors  $k + 1$  est compté positivement dans  $|p(k + 1) - (k + 1)|$ . Comme il doit être compté une fois négativement, cela implique que le nombre  $i$  tel que  $p(i) = k + 1$  vérifie  $i > k + 1$ . La condition sur  $p$  est ainsi équivalente aux deux conditions

$$\{p(1), p(2), \dots, p(k)\} = \{k + 2, k + 3, \dots, n\},$$

et

$$\{p(k + 2), p(k + 3), \dots, p(n)\} = \{1, 2, \dots, k + 1\} - \{p(k + 1)\}.$$

Il y a donc  $k(k!)^2$  telles permutations.

Cas 2 :  $p(k+1) \geq k+1$ . Alors  $k+1$  est compté négativement dans  $|p(k+1) - (k+1)|$ . Comme il doit être compté une fois positivement, cela implique que le nombre  $i$  tel que  $p(i) = k+1$  vérifie  $i \leq k+1$ . La condition sur  $p$  est ainsi équivalente aux deux conditions

$$\{p(1), p(2), \dots, p(k)\} = \{k+1, k+2, \dots, n\} - \{p(k+1)\},$$

et

$$\{p(k+2), p(k+3), \dots, p(n)\} = \{1, 2, \dots, k\}.$$

Il y a donc  $(k+1)(k!)^2$  telles permutations. Le résultat final est donc  $(2k+1)(k!)^2 = n \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2$ .

*Solution de l'exercice 14* Numérotions les cases par des couples  $(i, j)$ , où  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ . Il existe une configuration naturelle répondant aux conditions de l'énoncé, comportant peu de pions : on place un pion sur la case  $(i, j)$  si et seulement si  $i + j - 1$  est divisible par  $k$ . Pour tout couple  $(i, j)$ ,  $i + j - 1$  est inférieur strictement à  $4k$ , donc les cases sur lesquelles il y a un pion correspondent aux valeurs  $k, 2k$  et  $3k$  de  $i + j - 1$ , et représentent des lignes diagonales sur l'échiquier. Comme  $3k \leq 2n$ , il est facile de compter le nombre de pions : c'est  $k + (2n - 2k) + (2n - 3k) = 4(n - k)$ .

Pour prouver que cette construction est bien optimale, faisons le découpage suivant : on partitionne l'échiquier en 9 régions rectangulaires  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ , de telle sorte que les quatre coins  $A, C, G$  et  $I$  soient des carrés de côtés  $n - k$ . (Ainsi,  $B, D, F$  et  $H$  sont des rectangles de côtés  $n - k$  et  $2k - n$ .)

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

La région  $A \cup B$  est composée de  $n - k$  lignes de  $k$  cases. Chacune de ces lignes doit contenir un pion, et donc  $A \cup B$  contient au moins  $n - k$  pions. On raisonne de même avec les régions  $C \cup F, I \cup H$  et  $G \cup D$ , qui contiennent elles aussi au moins  $n - k$  pions. Cela montre que l'échiquier contient au moins  $4(n - k)$  pions.

*Solution de l'exercice 15* La difficulté de cet exercice vient de la condition sur  $S$ , qui a l'air un peu artificielle, et on ne voit pas trop comment la satisfaire. L'idée est que, pour une certaine classe d'ensembles, cette condition est naturellement vérifiée, et que commencer par essayer de trouver une solution parmi ces ensembles est un bon départ. Comment s'assurer que la condition sur  $S$  est vérifiée ? La façon la plus naturelle de le faire est de prendre dans  $S$  tous les entiers ayant un certain reste modulo 3 (par exemple, les entiers divisibles par 3). Ensuite, on rajoute à  $S$  certains entiers ayant un autre reste modulo 3 (par exemple, certains entiers congrus à 1 modulo 3). Comment choisir quels entiers rajouter ? Comme le but est de maximiser une valeur absolue, il est naturel de rajouter tous les nombres  $i$  pour lequel  $r_i$  a un certain signe. Toutes ces considérations amènent à poser les définitions suivantes.

Posons  $s = \sum_{i=1}^n |r_i|$ , et pour  $i$  dans  $\{0, 1, 2\}$ , posons

$$s_i = \sum_{r_j \geq 0, j \equiv i[3]} r_j, \text{ et } t_i = \sum_{r_j < 0, j \equiv i[3]} r_j.$$

Alors  $s = s_1 + s_2 + s_3 - t_1 - t_2 - t_3$ , ce que l'on réécrit  $2s = (s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + (s_3 + s_1) - (t_1 + t_2) - (t_2 + t_3) - (t_3 + t_1)$ . Il existe donc  $i_1$  différent de  $i_2$ , tel que  $s_{i_1} + s_{i_2} \geq \frac{s}{3}$  ou  $t_{i_1} + t_{i_2} \leq -\frac{s}{3}$ . Quitte à remplacer  $(r_i)$  par  $(-r_i)$ , nous pouvons supposer que  $s_{i_1} + s_{i_2} \geq \frac{s}{3}$  et que  $|s_{i_1} + s_{i_2}| \geq |t_{i_1} + t_{i_2}|$ . Ainsi  $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1} + t_{i_2} \geq 0$ , et donc

$$(s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1}) + (s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_2}) \geq s_{i_1} + s_{i_2} \geq \frac{s}{3}.$$

Ainsi, un des deux termes  $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1}$  et  $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_2}$  est supérieur à  $\frac{s}{6}$ , ce qui conclut.

## 2 Second TD

**Exercice 1** Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal  $n$  ?

**Exercice 2** Montrer que le nombre de diviseurs de  $n$  (y compris 1 et  $n$ ) est impair si et seulement si  $n$  est le carré d'un nombre entier.

**Exercice 3** Soient  $n$  et  $k$  deux nombres entiers naturels. De combien de façons est-il possible de choisir  $k$  nombres entiers naturels  $i_1, i_2, \dots, i_k$  tels que  $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$  ?

**Exercice 4** Combien de tirages différents peut-on faire si l'on tire des boules différentes et qu'on les remet après chaque tirage sans se soucier de l'ordre ?

**Exercice 5** (Concours général 90) On dispose de  $n \geq 4$  couleurs. Combien de tétraèdres différents peut-on peindre en peignant chaque face avec une et une seule couleur ?

**Exercice 6** Trouver une expression comparable à celle du binôme de Newton pour  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ .

**Exercice 7** Calculer

$$u_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$$

Avec  $\min$  la fonction qui donne le plus petit des deux nombres.

**Exercice 8** Calculer

$$\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p p + q$$

**Exercice 9** (L'identité de Vandermonde) Montrer que si  $k \leq \min(m, n)$  alors :

$$\binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} = \binom{m+n}{k}$$

**Exercice 10** Combien y a-t-il de permutations n'ayant qu'un seul cycle ?

**Exercice 11** Soit  $p$  une fonction associée à une permutation. On appelle ordre de cette permutation le plus petit entier  $k$  tel que  $p^{(k)} = Id$ . Quelle est le plus grand ordre pour une permutation de taille 11 ?

**Exercice 12** Quelle est le plus petit  $k$  tel que l'on ait  $p^{(k)} = Id$  pour toutes les permutations de longueur  $n$  fixée (on note  $p$  pour la fonction correspondant à la permutation).

**Exercice 13** On appelle dérangement une permutation de taille  $n$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq n$  on ait  $p(i) \neq i$ . Combien y a-t-il de dérangements de taille  $n$  ?

**Exercice 14** On dit qu'une permutation  $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  possède la propriété  $\mathfrak{P}$  s'il existe un  $i$  tel que  $|x_i - x_{i+1}| = n$ . Démontrer qu'il y a plus de permutations qui ont la propriété  $\mathfrak{P}$  que de permutations qui ne l'ont pas.

**Exercice 15**  $M$  est un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, 15\}$  tel que le produit de 3 éléments distincts de  $M$  ne soit jamais un carré. Trouver le nombre maximal d'éléments que peut avoir  $M$ .

**Exercice 16** Quarante quatre stagiaires ont été enlevés par le diabolique François qui, dans sa grande bonté, leur laisse une chance de se sortir de son piège. Il les fait entrer un par un dans une grande pièce qui contient 44 tiroirs, chacun de ces tiroirs contenant le nom d'un stagiaire (les noms sont supposés deux à deux distincts). Si en ouvrant moins de 22 tiroirs le mathématicien trouve son nom il passe dans une autre pièce où il doit attendre ses amis. Sinon, François tue tout le monde. Trouver une stratégie qui confèrent aux mathématiciens au moins 30% de chance de survivre.

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 Le problème peut être résolu de plusieurs manières. On peut simplement se contenter de faire le lien avec les suites de 0 et de 1 de longueur  $n$  (il y en a  $2^n$ ) qui sont une forme de représentation d'un sous ensemble puisqu'on peut, par exemple, dire que le sous ensemble associé à une suite est construit tel que le  $i^{\text{ème}}$  élément soit dans le sous ensemble si et seulement si le  $i^{\text{ème}}$  terme de la suite est 1. Pour chaque suite il existe donc un ensemble et pour chaque ensemble il existe une unique suite. Il y a donc exactement  $2^n$  sous ensembles d'un ensemble de cardinal  $n$ . Une autre méthode de démonstration consiste à raisonner par récurrence sur  $n$ . Nous laissons au lecteur le soin de rédiger la démonstration qui ne devrait pas présenter de difficulté.

Solution de l'exercice 2 Pour chaque diviseur  $d$  de  $n$ , on fait correspondre  $n/d$ . Pour  $d$ , il existe bien un seul nombre  $n/d$  et inversement si on a  $a = n/d$  on a  $d = n/a$ . Si  $n$  n'est pas le carré d'un entier, pour tout diviseur  $d$  de  $n$  alors  $d$  et  $n/d$  sont différents et  $n/d$  est aussi un diviseur de  $n$ . On a donc formé des paires de diviseurs, et il existe donc un nombre pair de diviseurs de  $n$ . Si  $n$  est un carré d'un entier, pour tous les diviseurs  $d$  tels que  $\sqrt{n} \neq d$  on peut faire des paires, entre  $d$  et  $n/d$ . Enfin, il ne reste qu'un diviseur qui est  $\sqrt{n}$  et  $n$  a un nombre impair de diviseurs.

Solution de l'exercice 3 Le plus simple est sans doute de considérer les objets tous différents dans un premier temps. Il y a donc  $n!$  manières de les ranger. Mais les mêmes solutions sont comptées plusieurs fois car certains objets sont indistincts. Si on considère que seuls les  $n_i$  objets du  $i^{\text{ème}}$  type sont indiscernables (et tous les autres sont distincts) alors on compte  $n_i!$  fois chaque solution car chaque permutation d'objets du  $i^{\text{ème}}$  type est possible. Ainsi on compte  $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$  fois la même solution quand les objets tous différents. Il y a donc

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

rangements différents de ces objets.



Solution de l'exercice 4 L'idée consiste à transformer légèrement le problème. On considère une série de  $n + (k - 1) = n + k - 1$  cases dans lesquelles on va placer  $k - 1$  cubes délimiteurs. A chacune de ces configurations correspond une somme :  $i_1$  est le nombre de cases avant le premier cube délimiteur et le nombre  $i_k$  est le nombre de case entre le  $k - 1^{\text{ème}}$  délimiteur et la fin du casier. Réciproquement, pour chaque somme, il existe un seul arrangement des cases et des blocs délimiteurs. Ainsi il y a autant de sommes de  $k$  nombres dont la somme est  $n$  que de choix de  $k - 1$  cases parmi  $n + k - 1$ . Il y a donc  $\binom{n+k-1}{k-1}$  sommes possibles.

Solution de l'exercice 5 On note  $1, 2, \dots, n$  les couleurs (on a donc un ordre sur les couleurs). Nous allons distinguer les différents cas, en fonction du nombre de couleurs utilisées.

- Si on utilise 4 couleurs différentes, toutes les faces sont de couleurs différentes. On place la plus petite couleur (celle qui a le plus petit numéro) vers le bas et l'on place la seconde couleur face à nous. Il reste alors 2 possibilités pour choisir la place des 2 dernières couleurs. Il existe donc 2 (et seulement 2) tétraèdres qui ont les 4 mêmes couleurs. Il y a donc  $2 \cdot \binom{n}{4}$  tétraèdres avec 4 couleurs.
- Si on utilise 3 couleurs, il y a nécessairement une couleur qui se répète, notons la  $i$ . On place alors les deux faces de couleur  $i$  vers le bas et l'autre vers nous, ensuite les deux façon de peindre les deux autres faces sont équivalentes à rotation près. Donc il y a  $\binom{n}{3}$  tétraèdres de 3 couleurs différentes.
- Si on utilise 2 couleurs, soit une couleur apparaît 3 fois, soit les deux couleurs apparaissent 2 fois. Si une des 2 couleurs est représentée 3 fois, alors en plaçant la couleur représentée une seule fois vers le bas on remarque qu'il n'y a qu'une seule manière de peindre le tétraèdre. Si chaque couleur est représentée 2 fois et si l'on place la plus petite couleur vers le bas et face à nous on remarque que la position de l'autre couleur est ainsi fixée. Il n'existe donc qu'une manière de peindre un tétraèdre avec deux couleurs qui se répètent deux fois chacune. Il y a donc  $2 \cdot \binom{n}{2}$  tétraèdres peints avec 2 couleurs.
- Si on utilise une seule couleur, il n'y a bien sûr qu'un tétraèdre par couleur. Il y a donc  $\binom{n}{1} = n$  tétraèdres d'une seule couleur.

Le nombre de tétraèdres possibles est donc :

$$\begin{aligned} 2\left(\binom{n}{4} + \binom{n}{3} + \binom{n}{2}\right) + n &= 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{n(n-1)}{2}\right) + n \\ &= n\left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + \frac{(n-1)(n-2)}{3} + (n-1) + 1\right) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 Nous allons montrer par récurrence sur  $m$  que

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

avec

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

. Pour  $m = 2$  on retrouve la formule du binôme de Newton. Supposons alors que la formule soit vraie pour  $m$ , on a donc :

$$(x_1 + \dots + (x_m + x_{m+1}))^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{m-1}^{k_{m-1}} (x_m + x_{m+1})^K$$

avec la formule du binôme sur  $(x_m + x_{m+1})^K$  on a :

$$= \sum_{k_1+k_2+\dots+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{k_m+k_{m+1}=K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

Et par définition des coefficients, on a

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots K!} \frac{n!}{k_m! k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{m+1}!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_m, k_{m+1}}$$

Enfin :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1})^n = \sum_{k_1+\dots+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

Solution de l'exercice 7 On sépare en deux la deuxième somme car

$$\sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{j=1}^i \min(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \min(i, j) = \sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i = \frac{i(i+1)}{2} + i \cdot (n - (i+1) + 1)$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \sum_{i=1}^n (n + \frac{1}{2})i - \frac{i^2}{2} \\ &= (n + \frac{1}{2}) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8 Nous changeons l'ordre de la somme. Rassemblons les termes pour lesquels  $p+q$  est constant. Posons donc  $i = p+q$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p p+q &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i+1} i = \sum_{i=0}^n i(i+1) = \sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9 Regardons le polynôme  $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n \cdot (1+x)^m$ . Dans ce polynôme le coefficient de  $x^k$  peut être calculé de deux manières différentes. Avec la partie gauche de l'égalité on aboutit à  $\binom{m+n}{k}$  et avec l'autre membre on aboutit à :

$$\sum_{p,r \mid p+r=k} \binom{n}{p} \cdot \binom{m}{r} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{n-k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$$

car on a choisi  $\binom{n}{k} = 0$  quand  $k > n$ .

Solution de l'exercice 10 Pour chaque permutation ayant un seul cycle on peut lui associer son cycle exprimé comme un  $n$ -uplet dont le premier nombre est 1. A l'inverse pour chaque  $n$ -uplet qui commence par un 1 on peut lui associer la seule permutation ayant ce seul cycle. Il y a donc  $(n-1)!$  permutations n'ayant qu'un cycle.

Solution de l'exercice 11 Pour avoir  $p^{(i)}(1)$  il faut (et il suffit) que  $i$  soit un multiple de la longueur du cycle qui contient 1. Comme la somme de la longueur des cycles d'une permutation de longueur 11 est 11, alors l'ordre maximum est le PPCM maximum que l'on peut atteindre avec des nombres dont la somme vaut 11. Ce PPCM maximum est atteint pour 6 et 5. Donc l'ordre maximum d'une permutation de longueur 11 est  $6 \times 5 = 30$ .

Solution de l'exercice 12 Si pour toute permutation de longueur  $n$  on a  $p^{(k)} = Id$  alors pour toute longueur  $1 \leq i \leq n$  de cycle d'une permutation de longueur  $n$  le nombre  $k$  doit être un multiple de  $i$ . Or tous les nombres de  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  peuvent être la longueur d'un cycle d'une permutation de longueur  $n$ . En effet, il suffit de prendre la permutation  $(2, 3, \dots, i-1, i, 1, i+1, i+2, \dots, n)$  qui a comme cycle  $(1, 2, 3, \dots, i)$  qui est de longueur  $i$ . Ce nombre est donc  $\text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$ . Si on note  $p_i$  le  $i^{\text{ème}}$  nombre premier et  $\alpha_i$  le plus grand entier tel que  $p_i^{\alpha_i} \geq n$ , on a donc que  $\text{PPCM}(1, 2, \dots, n) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \dots$ .

Solution de l'exercice 13 On va plutôt compter les permutations de taille  $n$  qui possèdent au moins un  $i$  tel que  $p(i) = i$ . Pour cela on va utiliser le principe d'inclusion et d'exclusion. Notons  $A_i$  l'ensemble des permutations tels que  $p(i) = i$ . On a alors :  $\text{Card}(A_i) = (n-1)!$  et pour une intersection de  $k$  ensembles  $A_i$  distincts on a  $\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$ . Donc avec la formule du principe d'inclusion et d'exclusion on a :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^{n-1}$$

Comme il y a  $n!$  permutations, le nombre de dérangements est :

$$n! - (n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n!}{n!}) = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

Solution de l'exercice 14 Soient  $\mathfrak{A}$  l'ensemble des permutations qui possèdent la propriété  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{B}$  l'ensemble de celles qui ne possèdent pas la propriété  $\mathfrak{P}$ . Il nous suffit de trouver une injection  $\varphi$  de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{B}$ . Soit  $p$  l'unique élément de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  tel que  $x_p \equiv x_1 + n \pmod{2n}$ . On a alors :

$$\varphi : (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_2, \dots, x_{p-1}, x_1, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{2n})$$

On remarque donc que tout élément  $(y_1, \dots, y_{2n})$  de l'image de  $\varphi$  vérifie  $\mathfrak{P}$  car si on choisit  $i = p-1$ , on a  $|y_i - y_{i+1}| = |x_1 - x_p| = n$ . Donc  $\varphi$  est injective. Donc  $\text{Card}(\mathfrak{A}) \geq \text{Card}(\mathfrak{B})$ .

Solution de l'exercice 15 Le produit de 3 éléments de  $\{1, 4, 9\}$ ,  $\{2, 6, 12\}$ ,  $\{3, 5, 15\}$  et  $\{7, 8, 14\}$  est un carré donc aucun d'eux ne peut être un sous-ensemble de  $M$ . Comme ils sont disjoint, on a  $\text{Card}(M) \leq 11$ . Si  $10 \notin M$  alors  $|M| \leq 10$ . Sinon  $10 \in M$ . Dans ce cas, aucun des ensembles  $\{2, 5\}$ ,  $\{6, 15\}$ ,  $\{1, 4, 9\}$ ,  $\{7, 8, 14\}$  n'est un sous-ensemble de  $M$ . Si  $\{3, 12\} \not\subseteq M$ , on a  $|M| \leq 10$ . Sinon  $\{3, 12\} \subseteq M$  et donc  $1 \notin M$ . Enfin,  $M \leq 10$ . Ainsi, dans tous les cas  $M \leq 10$ . Et finalement on vérifie que  $\{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$  a la propriété désirée. Donc la valeur maximal de  $|M|$  est 10.

Solution de l'exercice 16 On numérote les stagiaires et les tiroirs. Le système des tiroirs correspond donc à une permutation. On note donc  $p(i)$  le contenu du tiroir  $i$ . Le mathématicien  $i$  ouvre le tiroir  $i$ . S'il n'y est pas, il ouvre le tiroir  $p(i)$  et il continue ainsi et donc le  $k^{\text{ème}}$  tiroir

qu'il ouvre est le tiroir  $p^{(k)}(i-1)$ . Si la permutation n'a que des cycles de longueur plus petite que 22, les stagiaires survivent. Cherchons quelle est la probabilité qu'une permutation ait un cycle de longueur supérieure à 18. Il y a exactement

$$\binom{44}{k} (46-k)! (k-1)!$$

permutation qui ont un cycle de longueur  $k$  car il y a  $(k-1)!$  permutation de  $k$  nombres. Et on a :

$$\frac{1}{46!} \sum_{k=22}^{44} \binom{44}{k} (44-k)! (k-1)! = \sum_{k=22}^{44} \frac{1}{k} < 0,68$$

Et donc la probabilité de s'en sortir pour les stagiaires est supérieure à  $1 - 0,68 = 0,32$ .

### 3 Test

**Exercice 1** De combien de façons peut-on placer des pions dans un échiquier  $4 \times 4$  de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne exactement deux pions ?

**Exercice 2** Parmi les stagiaires, chaque garçon connaît exactement  $k$  filles, et chaque fille connaît exactement  $k$  garçons. Montrer que l'on peut marier tous les stagiaires.

**Exercice 3** Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets et  $a$  arêtes. Une  $k$ -clique est un sous-graphe à  $k$  sommets tel que chaque paire de sommets est reliée par une arête. Montrer que si  $G$  ne possède pas de  $k$ -clique alors :

$$a \leq \frac{k-2}{k-1} \frac{n^2}{2}.$$

**Exercice 4** Un tableau rectangulaire est rempli de nombres réels. La somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est un nombre entier. Montrer qu'il est possible de remplacer tous les nombres non-entiers  $x$  du tableau par  $\lfloor x \rfloor$  ou par  $\lceil x \rceil$ , sans modifier les sommes des lignes et des colonnes. ( $\lfloor x \rfloor$  est par définition le plus grand entier inférieur à  $x$ , et  $\lceil x \rceil$  est le plus petit entier supérieur à  $x$ )

#### - Correction -

Solution de l'exercice 1 Il y a  $\binom{4}{2} = 6$  façons de placer deux pions dans la première ligne. Une fois la première ligne placée, il y a à nouveau 6 choix pour la seconde et parmi ces 6 choix, il y en a 1 où les deux premières lignes sont égales, 1 où elles sont opposées, et enfin 4 choix telles que les deux premières lignes aient exactement un placement de pion en commun.

- Premier cas : les deux premières lignes sont égales. Alors les deux dernières lignes doivent être égales à l'opposé des deux premières, on n'a pas le choix. Ce cas représente donc 6 configurations.
- Deuxième cas : les deux premières lignes sont opposées. Alors on a placé exactement 1 pion par colonne, et donc on peut choisir la troisième ligne n'importe comment (donc de 6 façons) sans risquer de mettre plus de deux pions dans une colonne. Une fois la troisième ligne placée, la dernière est imposée. Ce cas représente donc  $6 \times 6 = 36$  configurations.

- Troisième cas : les deux premières lignes ont exactement un placement de pion en commun. Alors il y a une colonne comportant 2 pions dans laquelle on ne peut plus placer de pions, et une colonne contenant 0 pions dans laquelle on doit forcément mettre un pion. La place du deuxième pion peut être choisie librement dans parmi les deux colonnes restantes. Il y a donc 2 façons de choisir la troisième ligne. Une fois la troisième ligne placée, la dernière est imposée. Ce cas représente donc  $6 \times 4 \times 2 = 48$  configurations.

Le nombre de placements possibles est donc de  $6 + 36 + 48 = 90$ .

*Solution de l'exercice 2* Tout d'abord, notons  $g$  le nombre de garçons et  $f$  le nombre de filles. Alors le nombre total de relations de connaissance est égal à  $gk$  (on somme le nombre de connaissances de chaque garçon), et aussi à  $fk$  (on somme le nombre de connaissances de chaque fille). Il y a donc autant de garçons que de filles, appelons  $n$  ce nombre. Un ensemble de  $n - 1$  personnes couvre au maximum  $(n - 1)k$  arêtes et ne peut donc couvrir toutes les  $nk$  arêtes du graphe des relations de connaissance. Il faut donc au minimum  $n$  personnes pour couvrir toutes les arêtes, et d'après le théorème de König on peut donc former  $n$  couples.

*Solution de l'exercice 3* Montrons le résultat par récurrence forte sur  $n$ . Le résultat est facile si  $n < k$ , (on vérifie à la main que le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à  $n$  sommets,  $n(n - 1)/2$ , est inférieur à  $(k - 2)n^2/2(k - 1)$ ) ce qui initialise la récurrence. Soit  $G$  un graphe à  $n \geq k$  sommets ne comportant pas de  $k$ -clique, et possédant un nombre d'arêtes maximal. Alors par maximalité  $G$  possède nécessairement une  $(k - 1)$ -clique. En effet, rajouter une arête à  $G$  reliant deux sommets quelconques  $s_1$  et  $s_2$  forme une  $k$ -clique  $s_1, s_2, \dots, s_k$  par maximalité, et donc  $s_2, s_3, \dots, s_k$  est une  $(k - 1)$ -clique de  $G$ . Soit  $C$  l'ensemble des sommets d'une telle  $(k - 1)$ -clique, et  $E$  l'ensemble des autres sommets de  $G$ . Le nombre d'arêtes entre éléments de  $C$  est  $(k - 1)(k - 2)/2$ , et le nombre d'arêtes entre éléments de  $E$  est inférieur à  $\frac{k-2}{k-1} \frac{(n-k+1)^2}{2}$  par hypothèse de récurrence. Enfin, chacun des  $n - k + 1$  sommets de  $E$  ne peut être relié à plus de  $k - 2$  sommets de  $C$  (car  $G$  ne contient pas de  $k$ -clique). Finalement, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} a &\leq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + \frac{k-2}{k-1} \frac{(n-k+1)^2}{2} + (n-k+1)(k-2) \\ &\leq \frac{k-2}{2(k-1)} ((k-1)^2 + (n-k+1)^2 + 2(k-1)(n-k+1)) = \frac{k-2}{k-1} \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

*Solution de l'exercice 4* Soit  $m$  le nombre de lignes du tableau, et  $n$  son nombre de colonnes. On définit un graphe biparti de sommets  $L_1, \dots, L_n$  et  $C_1, \dots, C_m$ , tel que les sommets  $C_i$  et  $L_j$  soient reliés par une arête d'étiquette le nombre réel écrit à l'intersection de la colonne  $i$  et de la ligne  $j$ . Sur chaque sommet, on écrit la somme des étiquettes des arêtes entrantes dans ce sommet, c'est-à-dire la somme des éléments de la ligne ou colonne correspondante. C'est donc un entier. Introduire ce graphe n'est pas indispensable pour résoudre le problème, mais c'est une bonne façon d'y voir plus clair.

Commençons par enlever toutes les arêtes étiquetées par un entier, et par diminuer les nombres écrits sur les sommets reliés par ces arêtes en conséquence. S'il ne reste plus d'arêtes, on a terminé. Sinon, il existe une arête, disons  $C_1 L_1$ , étiquetée par un nombre non entier. Il y a forcément une autre arête, disons  $L_1 C_2$ , partant de  $L_1$  et étiquetée par un nombre non entier (sinon le nombre écrit en  $L_1$  ne serait pas entier, une contradiction). On répète le processus

pour trouver une suite d'arêtes  $C_1L_1C_2L_2\dots$ , jusqu'à ce que l'on tombe sur un sommet déjà visité. On a ainsi trouvé un cycle (contenant un nombre pair d'arêtes). On modifie progressivement les étiquettes des arêtes du cycle, en augmentant de  $\epsilon$  l'étiquette de  $L_1C_1$ , diminuant de  $\epsilon$  celle de  $C_1L_2$ , augmentant de  $\epsilon$  celle de  $L_2C_2$ , diminuant de  $\epsilon$  celle de  $C_2L_3$ , et ainsi de suite, ce qui ne modifie pas les quantités écrites sur les sommets. On augmente progressivement  $\epsilon$ , jusqu'à obtenir un nombre entier sur une (ou plusieurs) des arêtes de notre cycle. On supprime cette arête du graphe, puis diminue les nombres écrits sur les sommets reliés par ces arêtes en conséquence, puis on répète le processus entier. Comme le nombre d'arête du graphe diminue à chaque itération, l'algorithme termine.

À la fin de l'exécution de l'algorithme, les sommes des lignes et des colonnes n'ont pas bougé, et chaque réel a bien été remplacé par sa partie entière inférieure ou supérieure : les modifications sur les étiquettes sont continues, et dès que l'on atteint un nombre entier sur une étiquette, on n'y touche plus dans la suite de l'algorithme.

### 3 Avancés : techniques de calcul et inégalités

#### 1 Cours

Dans ce cours nous allons présenter sommairement (souvent à partir d'exemples simples, des exemples plus élaborés seront vus en TD et TND) quelques techniques pour établir des inégalités par des techniques de calculs. Cette approche n'est pas traditionnelle pour les inégalités d'olympiades mais peut aider à résoudre bon nombres d'inégalités avec un ensemble limité de techniques. Ces quelques notes ne sont pas réellement un cours mais plutôt un aide-mémoire pour les participants au stage. Pour un cours plus classique et complet sur les inégalité nous conseillons au lecteur de se référer au polycopié sur la question écrit par Pierre Bornsztein, disponible en téléchargement sur le site d'Animath.

#### - Une seule variable -

Comme on le fait souvent au lycée pour trouver les extremums d'une fonction, il est souvent utile de la dériver afin de trouver ses extremums. Donnons un exemple simple de l'utilisation de cette technique.

**Exercice 1** Quelle est le volume maximum pour un cylindre d'aire 1 ?

Solution de l'exercice 1 L'aire d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est :

$$\mathcal{A} = 2\pi r^2 + 2\pi hr$$

et son volume :

$$\mathcal{V} = \pi hr^2.$$

Ainsi si l'aire est 1, on a  $h = \frac{1-2\pi r^2}{\pi r}$ . Ainsi on peut substituer  $h$  :

$$\mathcal{V}(r) = \pi r^2 \frac{1-2\pi r^2}{\pi r} = \frac{r}{2}(1-2\pi r^2).$$

Si on dérive cette fonction on obtient la fonction :

$$V'(r) = \frac{1}{2}(1-6\pi r^2)$$

dont le seul zéro positif est

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}$$

et de plus on remarque que  $V'$  est positive sur  $[0, r_0]$  et négative ensuite et donc  $r_0$  est un maximum de la fonction  $V$ .

Donc le cylindre maximisant le volume a un rayon  $\frac{1}{\sqrt{6\pi}}$  et une hauteur  $\frac{4}{\sqrt{6\pi}}$ .

Nous allons montrer quelques éléments de recherche d'extremums pour des fonction de plusieurs variables.

### - Plusieurs variables -

Pour les fonctions de plusieurs variables (à valeurs réelles) nous allons utiliser les dérivées "variable par variable" que l'on appelle plus souvent les dérivées partielles. Ainsi dans la suite, si  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction "suffisamment dérivable" (dans la suite on supposera que les fonctions considérées le sont toujours) :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

désigne la dérivée par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable (ce qui signifie qu'on fait comme si les autres variables sont des constantes).

Un **point stationnaire** d'une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est un point  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  où pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Une propriété importante est que **si une fonction atteint un extremum local en un point  $a$**  (c'est à dire que la fonction est bien définie pour tout point assez proche, et la fonction atteint son maximum (ou minimum) sur un ensemble de points suffisamment proches) sur un ouvert (c'est à dire une partie de l'espace où autour de chaque point l'ensemble des point voisins sont aussi dans l'ensemble, par exemple  $]0, 1[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ ) **alors  $a$  est un point stationnaire** de la fonction.

**Exemple 1.** Le minimum global de la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$  se trouve en  $(0, 0)$  car la fonction tend vers l'infini quand  $(x, y)$  tend vers l'infini (pour la distance euclidienne) et comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x = 0 \end{cases}$$

a comme seule solution  $(0, 0)$  alors le minimum est atteint en ce point.

### - Multiplicateurs de Lagrange -

Cette technique permet de rechercher des maximums de fonctions à plusieurs variables sous contraintes.

**Théorème 2.** (Multiplicateurs de Lagrange) Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et  $f, c_1, c_2, \dots, c_k : D \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions différentiables (l'équivalent de dérivable pour les fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ). Si un point de  $D$  est un extremum de la fonction parmi les points de  $D$  tels que  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Alors il existe des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tel que  $a$  est un point stationnaire de la fonction

$$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 c_1(x) + \dots + \lambda_k c_k(x).$$

Ainsi avec cette technique on transforme un problème de recherche d'extremums avec des contraintes en un problème de recherche de maximum sans contraintes (mais avec plus de variables). Nous allons reprendre l'exemple de l'exercice 1 que nous allons traiter avec cette méthode.

**Exemple 3.** La fonction de volume est

$$V(r, h) = \pi h r^2$$

et la contrainte est alors

$$c(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - 1 = 0.$$

Comme le maximum ne se situe clairement pas aux limites du domaine de définition, on cherche alors à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r, h, \lambda) = 2\pi h r + \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial h}(r, h, \lambda) = \pi r^2 + \lambda 2\pi r = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - 1 = 0 \end{cases}$$

Après résolution on obtiens les mêmes valeurs que dans l'exercice 1.

L'apport de cette méthode sur le précédent exemple ne semble nette mais nous allons donner un autre exemple d'application.

**Exemple 4.** La méthode du multiplicateur de Lagrange permet de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique. On définit les applications  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathbb{R}_+^n$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \psi(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) - s, \quad s \in \mathbb{R}_+^*.$$

On remarque que tous les  $n$ -uplets vérifiant la contrainte sont de coordonnées positives et de somme égale à  $s$ . Nous allons majorer  $\varphi$  sous cette contrainte. Les limites de définition sont les points de la forme  $(0, \dots, 0, s, 0, \dots, 0)$  et donc clairement ce n'est pas sur ces bord que le maximum de  $\varphi$  est atteint. On va donc chercher les points critiques de  $L$  définis comme suit :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \lambda \psi(x_1, \dots, x_n).$$

Une solution vérifie les équations :

$$\forall i \in [1, n] \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \prod_{k \neq i} x_k = -\lambda \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n x_i = s.$$



On en déduit l'existence d'une unique solution, obtenue pour tous les  $x_i$  égaux à  $\frac{s}{n} = \bar{x}$  et  $\lambda$  égal à  $-(s/n)^{n-1}$ . Ce qui s'exprime, en remplaçant  $s$  par sa valeur :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

La moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique, l'égalité n'ayant lieu que si les  $x_i$  sont tous égaux.

Le multiplicateur de Lagrange offre une démonstration alternative de l'inégalité arithmético-géométrique.

## 2 Premier TD

**Exercice 1** Montrer que :

$$\forall x, y, z \in [0; 1], \quad \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} \leq 1 - (1-x)(1-y)(1-z).$$

**Exercice 2** Soit  $a, b, c$  des réels strictement positifs vérifiant l'identité  $a + b + c = 1$ . Montrer que :

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Exercice 3** Montrer l'inégalité de Hölder : pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$\forall p, q \in ]1; +\infty[ : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \forall (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^{2n}, \quad \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

En déduire "l'inégalité des mauvais élèves" :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{r+1}}{y_i^r} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^{r+1}}{(\sum_{i=1}^n y_i)^r}.$$

**Exercice 4** Montrer de deux manières différentes l'inégalité suivante :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

**Exercice 5** Soit  $ABC$  un triangle,  $H$  son orthocentre et  $I$  son centre du cercle inscrit. Montrer que :

$$AH + BH + CH \geq AI + BI + CI.$$

Remarque : On peut même montrer (beaucoup beaucoup plus difficilement) que :

$$AH + BH + CH \geq \sqrt{AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB} \geq AI + BI + CI.$$

**- Correction -**

De manière générale, si  $h$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $\nabla h$  son gradient, c'est-à-dire le vecteur de ses dérivées partielles :

$$\nabla h = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right).$$

Solution de l'exercice 1 La fonction qui à  $x, y, z$  associe  $\frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(1-z)$  est clairement convexe (toute fonction affine ainsi que la fonction inverse sur les positifs étant convexes). En particulier, elle atteint son maximum sur ces bords, i.e. sur  $\{0; 1\}^3$ . Quitte à permuter les variables, les seuls cas à vérifier sont donc  $x = y = z = 1$ ,  $x = y = 1, z = 0$ ,  $x = 1, y = z = 0$ ,  $x = y = z = 0$ . Or, on voit facilement qu'on a égalité dans chacun de ces cas, ce qui conclut cette preuve.

Solution de l'exercice 2 La fonction racine est concave. En effet, sa dérivée seconde est l'application  $x \rightarrow -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ , à valeurs strictement négatives. Ainsi, l'inégalité de Jensen (pondérée avec les poids  $a, b, c$ ) montre que :

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b} \leq \sqrt{\sum_{cyc} ab}.$$

De plus, on sait que  $\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$ , ce qui se réécrit comme  $\sum_{cyc} ab \leq \sum_{cyc} a^2$  puis comme  $3\sum_{cyc} ab \leq \sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab$  puis comme  $3\sum_{cyc} ab \leq (a+b+c)^2 = 1$ , d'où  $\sum_{cyc} ab \leq \frac{1}{3}$ . Ainsi, on obtient que :

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b} \leq \sqrt{\sum_{cyc} ab} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Solution de l'exercice 3 Fixons  $p$  et  $q$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Procédons par récurrence sur  $n$ . L'initialisation pour  $n = 0$  est triviale, toutes les sommes étant vides.

Supposons que l'inégalité de Hölder avec ces  $p$  et  $q$  est démontrée pour un certain entier positif  $n - 1$  et montrons la pour  $n$ .

Fixons pour l'instant les  $a_i$  et considérons les  $b_i$  comme variables. L'inégalité étant homogène en ces  $y_i$ , et le cas où tous ces derniers sont nuls étant trivial, nous pouvons sans restriction de la généralité supposer que  $\sum_{i=1}^n b_i^q = 1$ . Il nous reste alors à montrer que :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Posons  $F$  l'application qui à  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  associe  $\sum_{i=1}^n a_i b_i$  et  $C$  celle qui y associe  $\sum_{i=1}^n a_i^p$ .

Nous voulons montrer que  $F$  sous la condition  $C = 1$  est majorée par  $(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}$ . Nous allons pour ce faire utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Étudions dans un premier temps les cas au bord. La condition  $C = 1$  nous assure qu'un  $n$ -uplet  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  est au bord si et seulement si au moins une des variables est soit nulle, soit égale à 1. De plus, puisque si l'une des variables est égale à 1 toutes les autres sont nulles,

il suffit de se restreindre au cas où une des variables est nulle. Supposons donc sans restriction de la généralité que  $b_n = 0$ . Il faut maintenant montrer que :

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i.$$

Or, on peut clairement minorer le premier terme par  $\left( \sum_{i=1}^{n-1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$  qui est d'après l'hypothèse de récurrence plus grand que le membre de droite, ce qui conclut le cas du bord.

Passons maintenant au cœur même de l'exercice : soit  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in ]0; 1[^n$  un éventuel extremum intérieur. D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, un tel extremum vérifierait la condition suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda \nabla C(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Or,  $\forall (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\nabla F(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ainsi que  $\nabla C(b_1, b_2, \dots, b_n) = (qb_1^{q-1}, qb_2^{q-1}, \dots, qb_n^{q-1})$ . Ainsi, l'égalité due aux multiplicateurs de Lagrange se réécrit comme :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \dots, a_n) = q\lambda(y_1^{q-1}, y_2^{q-1}, \dots, y_n^{q-1}).$$

De plus, comme l'inégalité à démontrer est clairement homogène en les  $a_i$  (et le cas où  $\lambda = 0$  i.e. où tous les  $a_i$  sont nuls étant trivial), on peut supposer quitte à diviser par  $q\lambda$  que l'on a simplement :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (y_1^{q-1}, y_2^{q-1}, \dots, y_n^{q-1}).$$

Il nous suffit donc maintenant de montrer que :

$$\forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in ]0; 1[^n : \sum_{i=1}^n y_i^q = 1, \left( \sum_{i=1}^{n-1} (y_i^{q-1})^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \sum_{i=1}^n y_i^{q-1} y_i.$$

En utilisant la relation sur la somme des  $y_i^q$  puis en élevant à la puissance  $p > 1$ , cette dernière inégalité est encore équivalente à :

$$\forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in ]0; 1[^n : \sum_{i=1}^n y_i^q = 1, \sum_{i=1}^n y_i^{p(q-1)} \geq 1.$$

Or, on peut remarquer (en utilisant la relation  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  que :

$$p(q-1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}(q-1) = \frac{q}{q-1}(q-1) = q.$$

En particulier, on voit en utilisant la relation sur la somme des  $y_i^q$  que, dans ce cas, l'inégalité à démontrer est en fait une égalité, ce qui conclut également ce cas et donc cette preuve de l'inégalité de Hölder.

Déduisons-en maintenant "l'inégalité des mauvais élèves".

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$ . Utilisons l'inégalité de Hölder pour  $2n$  variables avec les paramètres suivants :

$$p = r + 1, q = \frac{r+1}{r}, \forall i \in 1; \dots; n, a_i = \frac{x}{y^{\frac{r}{r+1}}}, \forall i \in 1; \dots; n, b_i = y^{\frac{r}{r+1}}.$$

Comme  $\frac{1}{r+1} + \frac{r}{r+1} = 1$ , la condition  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  est vérifiée et l'inégalité de Hölder montre donc que :

$$\left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{x}{y^{r+1}} \right)^{r+1} \right)^{\frac{1}{r+1}} \left( \sum_{i=1}^n \left( y^{\frac{r}{r+1}} \right)^{\frac{r+1}{r}} \right)^{\frac{r}{r+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{x}{y^{r+1}} y^{\frac{r}{r+1}}.$$

Après élévation à la puissance  $r+1$ -ième et division par  $(y_1 + \dots + y_n)^r$ , cela se réécrit bien ainsi :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{r+1}}{y_i^r} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^{r+1}}{(\sum_{i=1}^n y_i)^r}.$$

Solution de l'exercice 4 Nous allons utiliser les "mauvais élèves" et Jensen.

Première méthode : "l'inégalité des mauvais élèves".

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ .

L'inégalité proposée est clairement équivalente à l'inégalité suivante :

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3 + 8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3 + 8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3 + 8abc)^{\frac{1}{2}}} \geq 1.$$

Or, "l'inégalité des mauvais élèves" appliquée avec  $n = 3$ ,  $r = \frac{1}{2}$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_3 = c$ ,  $y_1 = a^3 + 8abc$ ,  $y_2 = b^3 + 8abc$  et  $y_3 = c^3 + 8abc$  montre que :

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3 + 8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3 + 8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3 + 8abc)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{(a + b + c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il suffit donc clairement de montrer que  $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ . Or, cette inégalité est après développement de  $(a + b + c)^3$  équivalente à  $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3b^2a + 3c^2a + 3c^2b + 6abc \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ , qui est après simplification et division par 6 également équivalente à  $a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \geq 6abc$ . Mais cette dernière inégalité est triviale d'après l'inégalité arithmético-géométrique :  $a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \geq 6\sqrt{a^2ba^2cb^2cb^2ac^2ac^2b} = 6abc$ .

Deuxième méthode : l'inégalité de Jensen.

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ .

L'inégalité proposée étant clairement homogène, on peut clairement supposer que  $a + b + c = 1$ . De plus, l'application  $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$  est convexe. En effet, sa dérivée seconde est l'application  $x \rightarrow \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$  à valeurs strictement positives. L'inégalité de Jensen (pondérée avec les poids  $a, b, c$ ) montre donc que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab)}}.$$

Il suffit donc de montrer que  $a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab) \leq 1$ , ce qui peut se réécrire sous la forme  $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ , inégalité déjà prouvée lors de la première méthode.

Solution de l'exercice 5 Dans toute la suite, nous considérerons des longueurs et des angles algébriques (en particulier, si  $ABC$  est obtus en  $A$ , la longueur  $AH$  sera considérée négative). Il est suffisant de montrer l'inégalité avec ces longueurs algébriques : en effet,  $I$  étant toujours

intérieur au triangle, seules les longueurs du membre de gauche sont susceptibles de changer de signes, rendant donc le cas échéant l'inégalité plus serrée.

Soit  $\alpha$  (resp.  $\beta$  resp.  $\gamma$ ) les angles  $\widehat{CAB}$  (resp.  $\widehat{ABC}$  resp.  $\widehat{BCA}$ ).  $R$  dénote le rayon du cercle circonscrit à  $ABC$ .

Faisons quelques calculs d'angle préliminaires :

$$\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

$$\widehat{AHB} = 180^\circ - \widehat{HAB} - \widehat{HBA} = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

Pour calculer  $AI$ , on peut utiliser la loi des sinus dans  $AIB$  :

$$AI = \frac{AB \cdot \sin(\widehat{BAI})}{\sin(\widehat{AIB})}.$$

Ainsi, on peut calculer  $AI$ , en utilisant la loi des sinus dans  $ABC$  puis la loi de duplication du sinus :

$$AI = \frac{AB \cdot \sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(90^\circ + \frac{\gamma}{2})} = \frac{AB \cdot \sin(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\gamma}{2})} = \frac{2R \sin(\gamma) \sin(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\gamma}{2})} = \frac{4R \sin(\frac{\gamma}{2}) \cos(\frac{\gamma}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\gamma}{2})} = 4R \sin(\frac{\beta}{2}) \sin(\frac{\gamma}{2}).$$

On montre bien sûr de même que  $BI = 4R \sin(\frac{\gamma}{2}) \sin(\frac{\alpha}{2})$  et que  $CI = 4R \sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})$ .

Pour calculer  $AH$ , on peut utiliser la loi des sinus dans  $AHB$  :

$$AH = \frac{AB \cdot \sin(\widehat{ABH})}{\sin(\widehat{AHB})}.$$

Il suffit alors d'utiliser la loi des sinus dans  $ABC$  pour obtenir une expression plus agréable :

$$AH = \frac{AB \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \gamma)} = \frac{AB \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{2R \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\gamma)} = 2R \cos(\alpha).$$

On montre bien sûr de même que  $BH = 2R \cos(\beta)$  et que  $CH = 2R \cos(\gamma)$ .

Ainsi, après simplification par  $2R$ , l'inégalité à prouver se réécrit comme suit :

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \geq 2(\sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2}) + \sin(\frac{\beta}{2}) \sin(\frac{\gamma}{2}) + \sin(\frac{\gamma}{2}) \sin(\frac{\alpha}{2})).$$

Soit  $F$  l'application qui associe  $\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) - 2(\sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{y}{2}) + \sin(\frac{y}{2}) \sin(\frac{z}{2}) + \sin(\frac{z}{2}) \sin(\frac{x}{2}))$  à  $(x, y, z)$  et  $C$  celle qui y associe  $x+y+z$ . On veut montrer que  $F$  sous la condition  $C = 180^\circ$  est positive (on ne suppose plus que  $x, y, z < 90^\circ$ . Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Étudions dans un premier temps les cas sur les bords. Comme  $x + y + z = 180^\circ$ , les cas sur les bords correspondent à lorsqu'au moins une des variables est nulle ou égale à  $180^\circ$ . De plus si l'une des variables est égale à  $180^\circ$ , les autres sont nulles. Il suffit donc de se restreindre au cas où une des variables (disons  $z$ ) est nulle.

Il faut alors montrer l'inégalité suivante, avec  $x + y = 180^\circ$  :

$$\cos(x) + \cos(y) + 1 - 2 \sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{y}{2}).$$

En notant  $y = 1 - x$ , elle se réécrit comme :

$$1 - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0.$$

Cette inégalité est triviale, étant équivalente à  $1 - \sin(x) \geq 0$ , vérifiée puisque le sinus est à image dans  $[0; 1]$ .

Étudions maintenant le cas où la fonction  $F$  admet sous la condition  $C$  un extremum intérieur  $(x, y, z)$ . Le théorème des multiplicateurs de Lagrange montre que  $(x, y, z)$  vérifie la condition suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(x, y, z) = \nabla C(x, y, z).$$

Après calcul (et puisque être proportionnel à  $(1, 1, 1)$  signifie avoir ses trois composantes égales), cela se réécrit comme :

$$\begin{aligned} -\sin(x) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(\frac{z}{2}\right)\right) &= -\sin(y) - \cos\left(\frac{y}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{z}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= -\sin(z) - \cos\left(\frac{z}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

En définissant  $S \geq 0$  la somme  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(\frac{z}{2}\right)$  et  $g$  la fonction qui à  $t$  associe  $\sin(t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right) \left(S - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ , la condition liée aux multiplicateurs de Lagrange s'écrit  $g(x) = g(y) = g(z)$ . Or, la loi de duplication du sinus nous assure que pour tout  $t$  réel,  $g(t)$  se réécrit  $\frac{1}{2} \sin(t) + S \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ . Calculons la dérivée de  $g$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{S}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Or, cette fonction est clairement strictement croissante sur l'intervalle considéré (comme  $\cos$  y est strictement croissante et  $t \rightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right)$  strictement décroissante), donc, dans le pire des cas,  $g'$  est d'abord strictement négative puis positive, i.e.  $g$  est d'abord strictement décroissante puis strictement croissante, i.e. tout réel admet au plus deux antécédents par  $g$ . Or,  $x, y$  et  $z$  sont trois antécédents d'un même réel et ne peuvent donc être distincts. On peut donc sans restriction de la généralité supposer que  $x = z$  (on peut remarquer que cela implique d'ailleurs  $x \leq 90^\circ$ ). En utilisant cette propriété et en écrivant  $y$  comme  $180^\circ - 2x$ , l'inégalité à démontrer se réécrit :

$$2 \cos(x) - \cos(2x) - 2 \left( \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(x) \right) \geq 0.$$

En utilisant de nombreuses fois les formules de duplications, l'inégalité se réécrit comme :

$$\begin{aligned} 2 \cos(x) - \cos(2x) - 2 \left( \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(x) \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \left( 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) - (2 \cos^2(x) - 1) - 2 \left( \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) (1 - 2 \sin^2(x)) \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \left( 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) - \left( 2 \left( 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 - 1 \right) - 2 \left( \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) (1 - 2 \sin^2(x)) \right) &\geq 0. \end{aligned}$$

Il est donc naturel d'introduire le polynôme  $P = 2(1 - 2X^2) - (2(1 - 2X^2)^2 - 1) - 2(X^2 + 2X(1 - 2X^2))$ . Il suffit en effet alors de montrer que  $P\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geq 0$ . Or :

$$\begin{aligned} P &= (1 - 2X^2) - (2(1 - 2X^2)^2 - 1) - 2(X^2 + 2X(1 - 2X^2)) \\ \Leftrightarrow P &= 2 - 4X^2 - (2 - 8X^2 + 8X^4 - 1) - 2(X^2 + 2X - 4X^3) \\ \Leftrightarrow P &= -8X^4 + 8X^3 + 2X^2 - 4X + 1 \\ \Leftrightarrow P &= (2X - 1)^2(-2X^2 + 1). \end{aligned}$$

L'inégalité à montrer devient alors évidente, puisque  $x \leq 90^\circ$  implique  $\sin(\frac{x}{2}) \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ . Ceci clôt la solution.

### 3 Second TD

**Exercice 1** Soient  $a, b, c$  trois nombres réels strictement positifs.

(a) Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(b) On suppose en outre que  $abc = 1$ . Montrer que

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

c) Toujours dans l'hypothèse où  $abc = 1$ , montrer que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Exercice 2** Soient  $a, b, c$  trois réels strictement positifs vérifiant  $abc = 1$ . Montrer que :

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

**Exercice 3** Soient  $a, b, c$  les trois longueurs des cotés d'un triangle. Démontrer que :

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

**Exercice 4** Soient  $x, y, z$  trois nombres réels strictement positifs. En remarquant que si  $x > 1$ ,  $x^2 + \frac{y^2+z^2}{x^3} < x^2 + y^2 + z^2$ , montrer que si  $xyz \geq 1$ ,

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

- Correction -

Solution de l'exercice 1

a)  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a+b+c}{b+c} - 1\right) + \left(\frac{a+b+c}{c+a} - 1\right) + \left(\frac{a+b+c}{a+b} - 1\right)$ . Il suffit donc de démontrer que :  $(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \leq \frac{9}{2}$ , ce qui résulte immédiatement de :  $(u+v+w) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) \geq 9$  (la moyenne harmonique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique), en posant  $u = b+c$ ,  $v = c+a$ ,  $w = a+b$ .

- b) C'est un cas particulier de l' "inégalité des mauvais élèves", étudiée ce matin. On peut utiliser l'inégalité de Tchebychev : si  $a \geq b \geq c, b+c \leq c+a \leq a+b$ , donc :  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$  or  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$  et  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$
- c) Il suffit de poser  $a = \frac{1}{u}, b = \frac{1}{v}, c = \frac{1}{w}$ , pour se ramener à la question précédente. Cette question est un problème 2 d'Olympiade Internationale (1995).

Solution de l'exercice 2 C'est aussi un problème 2 d'Olympiade Internationale (2000). Deux questions se posent : quel est le signe de chacun des facteurs ? Si le produit est négatif, il est a fortiori inférieur à 1, mais peut-on avoir deux facteurs négatifs ? Et si chaque terme est positif, il faut majorer le produit. Pour cela, posons  $A = b - 1 + \frac{1}{c}, B = c - 1 + \frac{1}{a}$  et  $C = a - 1 + \frac{1}{b}$ . Comme, par hypothèse  $abc = 1$ ,  $\frac{A}{b} = 1 - \frac{1}{b} + a$  et  $aB = \frac{1}{b} - a + 1$ , donc :  $\frac{A}{b} + aB = 2$ , et de même :  $\frac{B}{c} + bC = 2$  et  $\frac{C}{a} + cA = 2$  : si deux des termes  $A, B$  et  $C$  étaient négatifs, l'une de ces trois sommes serait négative, ce qui n'est pas le cas. Dès lors, soit un (et au plus un) des termes  $A, B$  et  $C$  est négatif auquel cas le produit, négatif, vérifie trivialement l'inégalité. Soit tous trois sont positifs, et l'on a :  $\frac{A}{b} \times aB = 1 - \left(\frac{1}{b} - a\right)^2 \leq 1$ , et de même  $\frac{B}{c} \times bC \leq 1, \frac{C}{a} \times cA \leq 1$  d'où, en multipliant ces trois inégalités,  $(ABC)^2 \leq 1$  et comme  $ABC$  est supposé positif,  $ABC \leq 1$ . Une autre possibilité est de poser :  $a = \frac{v}{w}, b = \frac{w}{u}, c = \frac{u}{v}$ , avec  $u, v$  et  $w$  strictement positifs, ce qui nous ramène à une inégalité classique :  $(-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w) \leq uvw$ . Mais la démonstration n'est pas très différente : la somme de deux des termes  $-u+v+w, u-v+w, u+v-w$  étant positive, au plus un seul peut être négatif, et s'ils sont tous trois positifs, on majore chacun des produits :  $(-u+v+w)(u-v+w) = w^2 - (u-v)^2 \leq w^2, (u-v+w)(u+v-w) \leq u^2$  et  $(u+v-w)(-u+v+w) \leq v^2$ . On peut aussi se ramener à l'inégalité de Schur, vraie pour tout  $n$  entier naturel :  $u^n(u-v)(u-w) + v^n(v-w)(v-u) + w^n(w-u)(w-v) \geq 0$ , et équivalente à celle ci-dessus dans le cas  $n = 1$ .

Solution de l'exercice 3 C'était le problème 6 de l'Olympiade Internationale de Paris (1983). La technique la plus sûre est la transformation :  $a = v + w, b = w + u, c = u + v$  :  $a, b$  et  $c$  sont les trois cotés d'un triangle si et seulement si  $u, v$  et  $w$  sont tous trois strictement positifs. En développant proprement (on regroupe les termes sur différentes lignes, classés par exposants) :

$$\begin{aligned} a^2b(a-b) &= (v+w)^2(w+u)(v-u) = (v^2 + 2vw + w^2)(vw + uv - wu - u^2) \\ &= v^3w + uv^3 + vw^3 - w^3u \\ &\quad - wuv^2 + 2uv^2w - 2uvw^2 - 2u^2w + uvw^2 \\ &\quad - u^2v^2 + 2v^2w^2 - w^2u^2 \\ &= (v^3w - w^3u + uv^3 + vw^3) + uvw(v-w-2u) + (-u^2v^2 + 2v^2w^2 - w^2u^2) \end{aligned}$$

Les autres termes  $b^2c(b-c)$  et  $c^2a(c-a)$  s'obtiennent sans refaire le calcul, par permutation circulaire sur  $u, v, w$ . La somme vaut donc :  $2(uv^3 + vw^3 + wu^3) - 2uvw(u+v+w)$  et prouver que cette somme est positive ou nulle revient à démontrer, après simplification par  $uvw$  :

$$\frac{v^2}{w} + \frac{w^2}{u} + \frac{u^2}{v} \geq u + v + w$$

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité du réordonnement : si  $u^2 \geq v^2 \geq w^2, \frac{1}{u} \leq \frac{1}{v} \leq \frac{1}{w}$  donc  $\frac{u^2}{u} + \frac{v^2}{v} + \frac{w^2}{w} \leq \frac{u^2}{v} + \frac{v^2}{w} + \frac{w^2}{u}$ , et si  $u^2 \geq w^2 \geq v^2$  (ce cas n'est pas identique au précédent),  $\frac{1}{u} \leq \frac{1}{w} \leq \frac{1}{v}$  donc  $\frac{u^2}{u} + \frac{w^2}{w} + \frac{v^2}{v} \leq \frac{u^2}{v} + \frac{w^2}{u} + \frac{v^2}{w}$ .



D'après l'inégalité du réordonnement, le seul cas d'égalité (qui n'était pas demandé aux Olympiades Internationales) est  $u = v = w$ , donc  $a = b = c$  (triangle équilatéral).

On remarquera enfin que, si  $a, b, c$  ne sont pas les longueurs des côtés d'un triangle, il se peut que l'inégalité soit quand même vérifiée, par exemple pour le triplet  $(1, 6, 4)$ , mais il y a des valeurs pour lesquelles elle n'est pas vérifiée, par exemple le triplet  $(1, 4, 6)$ .

*Solution de l'exercice 4* La relation signalée, évidente, suggère la solution particulièrement élégante proposée par Iurie Boreico et primée par un prix spécial du jury au cours de l'Olympiade Internationale 2005. Dans tous les cas,  $\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{y^2 + z^2}{x^3}} \geq \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x^2 + y^2 + z^2}$  car si  $x \geq 1$ , le dénominateur  $x^2 + \frac{y^2 + z^2}{x^3} \leq x^2 + y^2 + z^2$  et le numérateur  $x^2 - \frac{1}{x} \geq 0$ , alors que si  $x \leq 1$ ,  $x^2 + \frac{y^2 + z^2}{x^3} \geq x^2 + y^2 + z^2$  mais  $x^2 - \frac{1}{x} \leq 0$ . La somme cherchée est donc majorée par :  $\frac{(x^2 + y^2 + z^2) - (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})}{x^2 + y^2 + z^2}$ , or comme  $xyz \geq 1$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq yz + zx + xy \leq x^2 + y^2 + z^2$  (car  $(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 \geq 0$ ). Mais il existe d'autres manières de casser l'asymétrie des dénominateurs. Notamment l'inégalité de Cauchy-Schwartz :  $(x^5 + y^2 + z^2)(\frac{1}{x} + y^2 + z^2) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2$  suffit à démontrer que  $A \leq B$  en posant :  $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2}$  et  $B = \frac{(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + 2(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$ . Or on cherche à prouver que  $3 - A \geq 0$  et, dans  $B$ , on majore le  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \leq x^2 + y^2 + z^2$  comme précédemment.

## 4 Test

**Exercice 1** Soit  $a, b, c$  les côtés d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

**Exercice 2** Soit  $a, b, c$  les côtés d'un triangle. Montrer que :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4abc \leq \frac{9}{32}(a+b+c)^3.$$

**Exercice 3** Soit  $a, b, c$  des réels positifs non tous nuls. Montrer que :

$$\sqrt{\frac{b+c}{2a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{2b+c+a}} + \sqrt{\frac{a+b}{2c+a+b}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

- Correction -

*Solution de l'exercice 1* On peut supposer que  $a \geq b \geq c$ . L'inégalité triangulaire nous assure de plus que  $a < b + c$ . D'où :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 1 + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{b}{c+b} + \frac{c}{c+b} = 2.$$

Autre méthode : si l'on utilise la ravissante transformation  $a = y + z$ ,  $b = z + x$  et  $c = x + y$ , avec  $x > 0$ ,  $y > 0$  et  $z > 0$ , qui caractérise les longueurs des côtés d'un triangle, le calcul n'est guère plus compliqué à condition de remarquer que  $\frac{y+z}{2x+y+z} < \frac{y+z}{x+y+z}$  ; mais même si l'on ne voit pas cela et qu'on développe tout, sous réserve de ne pas faire d'erreur de calcul, on arrive nécessairement à une solution juste, même si elle n'est pas élégante, et en l'absence d'idée meilleure, l'important est d'arriver à une solution quelle qu'elle soit.

Solution de l'exercice 2 De manière générale, si  $h$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $\nabla h$  son gradient, c'est-à-dire le vecteur de ses dérivées partielles :

$$\nabla h = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right).$$

L'inégalité étant homogène en  $a, b, c$ , on peut supposer que  $a + b + c = 1$ . Les trois inégalités triangulaires se réécrivent alors simplement comme  $a, b, c \in [0; \frac{1}{2}]$ . Nous voulons montrer  $a^3 + b^3 + c^3 + 4abc \leq \frac{9}{32}$ .

Soit  $F$  l'application qui à  $(x, y, z)$  associe  $x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz$  et  $C$  celle qui y associe  $x + y + z$ . Nous voulons montrer que  $F$  sous la condition  $C = 1$  est majorée par  $\frac{9}{32}$ . Nous allons pour ce faire utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Étudions dans un premier temps les cas au bord. Clairement, cela signifie qu'une des variables est soit nulle soit égale à  $\frac{1}{2}$ . La condition  $C = 1$  ainsi que la condition  $a, b, c \in [0; \frac{1}{2}]$  montre qu'il suffit de considérer le deuxième cas. Supposons donc sans restriction de la généralité que  $c = \frac{1}{2}$ . Il faut donc vérifier que :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 4abc &\leq \frac{9}{32} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 2ab \leq \frac{5}{32} \\ &\Leftrightarrow a^3 + \left(\frac{1}{2} - a\right)^3 + 2a\left(\frac{1}{2} - a\right) \leq \frac{5}{32} \\ &\Leftrightarrow a^3 + \frac{1}{8} - \frac{3}{4}a + \frac{3}{2}a^2 - a^3 + a - 2a^2 \leq \frac{5}{32} \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - \frac{a}{4} + \frac{1}{32} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité est clairement vraie, ce qui conclut ce cas.

Supposons maintenant qu'il y ait un extremum  $x, y, z$  à l'intérieur de l'ensemble de définition de  $F$ . Le théorème des multiplicateurs de Lagrange nous assure alors que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(x, y, z) = \lambda \nabla C(x, y, z).$$

Or, on peut voir que  $\nabla C = (1, 1, 1)$  et que  $\forall u, v, w \in [0; 1]$ ,  $\nabla F(u, v, w) = (3u^2 + 4vw, 3v^2 + 4uw, 3w^2 + 4uv)$ .

L'égalité due aux multiplicateurs de Lagrange se réécrit donc  $3x^2 + 4yz = 3y^2 + 4zx = 3z^2 + 4xy$ .

Supposons dans un premier temps qu'au plus 1 élément parmi  $x, y$  et  $z$  vaut  $\frac{3}{7}$ . Quitte à permuter les variables, supposons que ce soit  $x$  et  $y$ . L'égalité  $3x^2 + 4yz = 3z^2 + 4xy$  se réécrit

$(x - z)(3x + 3z - 4y) = 0$ , i.e. (comme  $x + y + z = 1$ )  $(x - z)(3 - 7y)$ , d'où (comme  $y \neq \frac{3}{7}$ ),  $x = z$ . On montre de la même manière que  $y = z$ , d'où on conclut que  $x = y = z = \frac{1}{3}$ . On vérifie que, effectivement,  $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27} < \frac{9}{32}$ .

Si, par contre, au moins deux éléments parmi  $x, y$  et  $z$  valent  $\frac{3}{7}$ , on peut supposer sans restriction de la généralité que ce sont  $x$  et  $y$ , d'où on conclut en utilisant  $x + y + z = 1$  que  $x = y = \frac{3}{7}$  et  $z = \frac{1}{7}$ . On vérifie que, effectivement,  $F(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}) = 2 \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \frac{1}{7^3} + 4 \left(\frac{3^2}{7^3}\right) = \frac{91}{7^3} < \frac{9}{32}$ , la dernière inégalité résultant du fait que  $32 \times 91 = 2912 < 3087 = 7^3 \times 9$ , ce qui conclut ce cas également.

*Solution de l'exercice 3* De manière générale, si  $h$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $\nabla h$  son gradient, c'est-à-dire le vecteur de ses dérivées partielles :

$$\nabla h = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right).$$

L'inégalité de l'énoncé étant homogène en  $a, b, c$ , on peut supposer que  $a + b + c = 1$ .

En notant  $f$  l'application qui à  $x$  associe  $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , l'inégalité à démontrer se réécrit alors :

$$f(a) + f(b) + f(c) = 1.$$

Calculons avant tout quelques dérivées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}.$$

Il est donc naturel de définir  $g$  comme étant l'application qui à  $x$  associe  $(1-x)(1+x)^3$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -(1+x)^3 + 3(1-x)(1+x)^2 = 2(1+x)^2(1-2x).$$

Ainsi, on voit que  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; \frac{1}{2}]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}; 1]$ . Cela implique en particulier que tout réel admet au plus deux antécédents par  $g$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

Soit  $F$  l'application qui à  $(x, y, z)$  associe  $f(x) + f(y) + f(z)$  et  $C$  l'application qui à  $(x, y, z)$  associe  $x + y + z$ . Le but est de montrer que  $F$  sous la condition  $C = 1$  est bornée par  $1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Nous allons pour ce faire utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Étudions dans un premier temps les cas sur le bord. La condition  $x + y + z = 1$  ainsi que la positivité de  $x, y, z$  nous assure que le bord de l'ensemble considéré est dans  $\{0; 1\}^3$ . Clairement, puisque si l'une des variables est égale à 1 les autres sont nulles, il suffit de considérer le cas où une des variables est nulle. Supposons sans restriction de la généralité que  $z$  est nulle. Comme  $f(0) = 1$ , l'inégalité qu'il faut alors montrer est :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad x + y = 1 \Rightarrow f(x) + f(y) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Notons  $\bar{F}$  l'application qui à  $(x, y)$  associe  $f(x) + f(y)$  et  $\bar{C}$  la fonction qui à  $(x, y)$  associe  $x + y$ .

Nous voulons montrer que  $\overline{F}$  sous la condition  $\overline{C} = 1$  est bornée par  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Nous allons une nouvelle fois utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Par le même argument que précédemment, les cas sur le bord correspondent sans restriction de la généralité au cas  $y = 0$ , ce qui implique bien évidemment (comme  $\overline{C}(x, y) = 1$ ) que  $x = 1$ .

On obtient alors effectivement que  $\overline{F}(x, y) = f(1) + f(0) = 0 + 1 = 1 < \frac{2}{\sqrt{3}}$  (la dernière inégalité résultant de  $2^2 > 3$ ), ce qui conclut ce cas.

Intéressons-nous maintenant à l'intérieur de notre ensemble de définition de  $\overline{F}$  et de  $\overline{C}$ . Un éventuel extremum intérieur  $(x, y)$  vérifierait d'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange la condition suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla \overline{F}(x, y) = \lambda \overline{C}(x, y).$$

Or, on sait que  $\nabla \overline{F} = (f', f')$  et que  $\nabla \overline{C} = (1, 1)$ . La condition se réécrit donc :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : (f'(x), f'(y)) = \lambda(1, 1).$$

Finalement, cela se réécrit simplement comme  $f'(x) = f'(y)$ , ce qui s'exprime plus facilement sous la forme  $g(x) = g(y)$ , i.e. comme  $(1-x)(1+x)^3 = (1-y)(1+y)^3$ . Remarquons de plus que, comme  $(x, y)$  vérifie la condition  $\overline{C}(x, y) = 1$ , on peut poser  $y = 1-x$  dans cette équation. Ainsi,  $x$  vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x)^3 &= (1-y)(1+y)^3 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)^3 = x(2-x)^3 \\ &\Leftrightarrow (1-x^2)(1+x)^2 = x(8-12x+6x^2-x^3) \\ &\Leftrightarrow 1+2x+x^2-x^2-2x^3-x^4 = 8x-12x^2+6x^3-x^4 \\ &\Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^3=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $x = \frac{1}{2}$ , et comme  $(x, y)$  vérifie la condition  $\overline{C}(x, y) = 1$ ,  $y = \frac{1}{2}$ . Il suffit donc de calculer  $\overline{F}$  pour  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , ce qui donne  $\overline{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2f(\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , ce qui conclut également ce cas.

Passons maintenant à la partie difficile de l'exercice : étudions les extremums de  $F$  à l'intérieur de  $[0; 1]^3$ . Soit  $(x, y, z)$  un tel extremum.

Le théorème des multiplicateurs de Lagrange nous assure alors que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(x, y, z) = \lambda C(x, y, z).$$

Or, on sait que  $\nabla F = (f', f', f')$  et que  $\nabla C = (1, 1, 1)$ . La condition se réécrit donc :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : (f'(x), f'(y), f'(z)) = \lambda(1, 1, 1).$$

Finalement, cela se réécrit simplement comme  $f'(x) = f'(y) = f'(z)$ , ce qui s'exprime plus facilement sous la forme  $g(x) = g(y) = g(z)$ . Or, nous avons déjà montré qu'un réel donné admet au plus deux antécédents par  $g$ . Ainsi,  $x, y$  et  $z$  ne peuvent être deux à deux distincts.

Nous pouvons donc supposer sans restriction de la généralité que  $x = z$ . Remarquons de plus que, comme  $(x, y)$  vérifie la condition  $\overline{C}(x, y) = 1$ , on sait d'une part que  $x \in [0; \frac{1}{2}]$  et d'autre part que l'on peut poser  $y = 1 - 2x$  dans l'équation  $g(x) = g(y)$ . Ainsi,  $x$  vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 g(x) = g(y) &\Leftrightarrow (1-x)(1+x)^3 = (1-y)(1+y)^3 \\
 &\Leftrightarrow (1-x)(1+x)^3 = 2x(2-2x)^3 \\
 &\Leftrightarrow (1+x)^3 = 4x(2-2x)^2 \\
 &\Leftrightarrow 1+3x+3x^2+x^3 = 16x-32x^2+16x^3 \\
 &\Leftrightarrow 15x^3-35x^2+13x-1=0 \\
 &\Leftrightarrow (3x-1)(5x^2-10x+1)=0 \\
 &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}; 1 \pm \sqrt{0,8}\right\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $x \in [0; \frac{1}{2}]$ ,  $x \in \{\frac{1}{3}; 1 - \sqrt{0,8}\}$ .

Étudions d'abord le cas  $x = \frac{1}{3}$ . On en déduit immédiatement que  $y = z = \frac{1}{3}$ . Il suffit donc de calculer  $F$  pour  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , ce qui donne  $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 3f(\frac{1}{3}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

On vérifie le cas  $x = 1 - \sqrt{0,8}$  de la même façon (et avec un peu plus de calcul).

CQFD



## IV. Seconde période

### 1 Incontournable : arithmétique

#### 1 Cours

Nous renvoyons au cours d'arithmétique téléchargeable sur le site d'Animath.

#### 2 TD

**Exercice 1** Trouvez le *PGCD* de tous les nombres de la forme  $n^{13} - n$ .

**Exercice 2** Trouvez tous les entiers  $x, y, z$  tels que

$$3x^2 + 7y^2 = z^4$$

**Exercice 3** Montrez que la fraction  $\frac{39n+4}{26n+3}$  est toujours irréductible.

**Exercice 4** (théorème de Wilson) Soit  $p$  un premier.

1. Montrez que dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  tous les éléments non nuls ont un inverse, c-à-d pour tout entier  $k$  non divisible par  $p$ , il existe un entier  $l$  tel que

$$k \cdot l \equiv 1[p].$$

2. Montrez que

$$n \text{ premier} \Leftrightarrow (n-1)! \equiv -1[n]$$

**Exercice 5** On note  $[x]$  la partie entière de  $x$ , et on choisit  $n$  un entier, montrez que

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$$

**Exercice 6** Montrez que pour tout premier  $p$  et tout entier  $0 < k < p$ ,  $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$  est divisible par  $p$ .

**Exercice 7** Calculez la somme infinie suivante :

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+8}{16} \right\rfloor + \dots$$

*Question intermédiaire* : montrez que  $[2x] = [x] + [x + 1/2]$ .

**Exercice 8** Montrez que pour tout entier  $n$ ,

$$n! \text{ divise } \prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$$

- Correction -

Solution de l'exercice 1 Nous allons chercher tous les premiers qui divisent  $n^{13} - n$  pour tout  $n$ , c-à-d  $p|(n^{12} - 1)$  pour tout  $n$  premier avec  $p$ . Le petit théorème de Fermat dit que  $p|(n^{p-1} - 1)$ , donc si  $(p-1)|12$ , alors  $p|(n^{12} - 1)$  pour tout  $n$  premier avec  $p$ . On a au moins  $p = 2, 3, 5, 7$  et  $13$ . Maintenant montrons que  $p^2$  ne divise pas  $n^{13} - n$  pour tout  $n$  avec un cas particulier :  $p^2$  divise  $p^{13}$  mais pas  $p$  donc  $p^2$  ne divise pas  $p^{13} - p$ . La dernière étape est de montrer qu'il n'y a pas d'autre facteur premier. La solution idéale serait de montrer la réciproque du théorème de Fermat, mais ici il suffit d'observer que  $2^{13} - 2 = 8190 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ . Le plus grand diviseur commun est donc  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$ .

Solution de l'exercice 2 Nous allons nous intéresser à une équation un peu plus générale :

$$3x^2 + 7y^2 = n^2$$

Si  $(x, y, z)$  est une solution de la première équation alors  $(x, y, n = z^2)$  est solution de la seconde. Rappelons-nous que le carré d'un entier est congru à 0 ou 1 modulo 4. En essayant les 8 cas possibles, on aboutit à la conclusion que  $x, y$  et  $n$  sont tous les trois pairs.

À présent nous allons utiliser la méthode de la descente infinie : supposons qu'il existe des solutions non nulles. Alors on peut choisir une solution  $(x, y, n)$  où  $n$  est minimal (et strictement positif). D'après le paragraphe précédent,  $x, y$  et  $n$  sont tous pairs. De plus, le triplet  $(x', y', n') = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{n}{2})$  est également solution de l'équation, ce qui contredit la minimalité de  $(x, y, n)$ . Il n'y a donc pas de solutions non nulles à cette équation.

Solution de l'exercice 3 Si un entier  $k$  divise  $39n + 4$  et  $26n + 3$ , alors il divise aussi  $3(26n + 3) - 2(39n + 4) = 1$ , donc  $k = 1$ .

Solution de l'exercice 4 Soit  $p$  un premier.

1. Soit  $1 \leq k \leq p-1$ , la famille  $\{0, k, 2k, \dots, (p-1)k\}$  est une famille complète de résidus modulo  $p$ , donc il existe un (unique) entier  $1 \leq l \leq p-1$  tel que  $kl \equiv 1 \pmod{p}$ .
2. Tout d'abord, si  $p$  n'est pas premier alors il a un diviseur  $d \in \{2, \dots, p-1\}$ , donc  $d$  divise  $(p-1)!$ . Cette factorielle ne peut donc pas être congrue à  $(-1) \pmod{p}$ .

À présent prenons  $p$  premier. On va ranger les  $p-1$  entiers en couples  $(k, l)$  tels que  $kl \equiv 1[p]$ . Il faut vérifier que l'on a pas des couples  $(k, k)$  : si  $k^2 \equiv 1[p]$  cela signifie que  $p|k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$  donc soit  $p|k-1$ , soit  $p|k+1$ , les seuls entiers problématiques sont donc 1 et  $p-1$ , tous les autres peuvent se placer en couples, on en conclut que  $2 \cdot 3 \dots (p-2) \equiv 1[p]$ . Et on a bien  $(p-1)! \equiv -1[p]$ .

Solution de l'exercice 5 Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k \leq \sqrt{4n+2}.$$



En mettant ces inégalités au carré, on obtient

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < k^2 \leq 4n + 2$$

Ensuite on utilise  $n = \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n(n+1)}$

$$2n + 1 + 2n < k^2 \leq 4n + 2$$

Comme  $k^2$  est un entier, la seule solution est que  $k^2 = 4n + 2$ . Mais il n'existe pas de carré congru à 2 mod 4, contradiction !

Solution de l'exercice 6

$$p! = \binom{p}{k} \cdot k! \cdot (p-k)!$$

L'entier premier  $p$  divise  $p!$ , mais ni  $k!$  ni  $(p-k)!$  puisque  $1 \leq k \leq p-1$ . Donc  $p$  divise  $\binom{p}{k}$

Solution de l'exercice 7 Commençons l'observation que cette somme est finie. En effet, si  $2^k > x$  alors  $x + 2^k < 2^{k+1}$  et finalement  $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = 0$ . Passons maintenant à la question intermédiaire. On fait simplement une disjonction de cas : si  $n \leq x < n+1/2$  alors  $[2x] = 2n$  et  $[x] + [x+1/2] = n + n$ , et si  $n+1/2 \leq x < n+1$  alors  $[2x] = 2n+1$  et  $[x] + [x+1] = n + (n+1)$ . Sur le terme de la suite, ça permet d'avoir

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 2 \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \dots = \left( [x] - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right) + \left( \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right) + \dots$$

et les termes sont télescopiques, à la fin il ne reste que  $[x]$ .

Solution de l'exercice 8 Pour gagner de la place on note

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$$

Pour tout premier  $p$  on note  $v_p(A_n)$  la valuation  $p$ -adique de  $A_n$  (c-à-d l'exposant de  $p$  dans sa décomposition en facteurs premiers). On veut montrer qu'elle est supérieure à celle de  $n!$ . Utilisons la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor + \dots$$

On remarque d'abord que  $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{p^k}$ , donc

$$v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \dots = \frac{n}{p-1}$$

Comparons avec  $v_p(A_n)$ . Débarassons nous du cas  $p=2$

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) = \prod_{k=0}^{n-1} 2^k (2^{n-k} - 1)$$

donc  $v_2(A_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ . Maintenant, pour  $p$  impair :  $(2^{n-k} - 1)$  est un multiple de  $p$  à chaque fois que  $(n - k)$  est un multiple de  $p$ , ce qui arrive  $\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor$  fois. On a donc

$$v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1} \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor \leq v_p(A_n)$$

On a presque l'inégalité souhaitée, à une partie entière près, mais comme les valuations sont des entiers, on est bons !

### 3 Test

**Exercice 1** Pour quelles valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  la fraction  $\frac{2n^2+11n-18}{n+7}$  est-elle irréductible ?

**Exercice 2** Trouvez tous les couples  $a, b \in \mathbb{N}$  tels que

$$a(a+5) = b(b+1)$$

**Exercice 3** Soit  $A = 43^{2011} - 2011^{43}$ . Montrez que  $A$  est divisible par 3. Calculez  $A$  modulo 11 et modulo 35.

**Exercice 4** Trouvez tous les triplets d'entiers naturels  $x, y, z$  tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

#### - Correction -

Solution de l'exercice 1 On veut calculer le PGCD de  $2n^2 + 11n - 18$  et de  $n + 7$ , essayons donc l'algorithme d'Euclide :

$$2n^2 + 11n - 18 = (n + 7) \times (2n - 3) + 3$$

Donc le PGCD recherché est un diviseur de 3. Mais 3 divise  $2n + 7$  ssi  $n \equiv 2[3]$ , donc si  $n \equiv 0$  ou  $1[3]$ , alors la fraction est irréductible. Inversement, on vérifie que si  $n \equiv 2[3]$  alors la fraction peut être simplifiée par 3.

Solution de l'exercice 2 On remarque tout de suite la solution évidente  $a = b = 0$ . Maintenant on suppose  $a, b > 0$ . Si  $b \leq a$ , alors  $(b + 1) < (a + 5)$  et  $a(a + 5) < b(b + 1)$ . On fait le même raisonnement avec  $b + 1 \geq a + 5$ , donc  $a + 1 \leq b \leq a + 3$ , et il y a 3 cas à vérifier :

$$b = a + 1 : a(a + 5) = (a + 1)(a + 2) \Leftrightarrow a^2 + 5a = a^2 + 3a + 2 \Leftrightarrow a = 1$$

$$b = a + 2 : a(a + 5) = (a + 2)(a + 3) \Leftrightarrow a^2 + 5a = a^2 + 5a + 6 \Leftrightarrow 0 = 6$$

$$b = a + 3 : a(a + 5) = (a + 3)(a + 4) \Leftrightarrow a^2 + 5a = a^2 + 7a + 12 \Leftrightarrow a = -6$$

Les seules solutions entières sont donc  $(0, 0)$  et  $(1, 2)$ .

Solution de l'exercice 3 Soit  $A = 43^{2011} - 2011^{43}$ .

$$43 \equiv 1[3] \Leftrightarrow 43^{2011} \equiv 1[3]$$

$$2011 \equiv 1[3] \Leftrightarrow 2011^{43} \equiv 1[3]$$

Donc  $A = 43^{2011} - 2011^{43} \equiv 1 - 1 \equiv 0[3]$ ,  $A$  est divisible par 3.

Maintenant regardons modulo 11

$$43 \equiv -1[11] \Leftrightarrow 43^{2011} \equiv (-1)^{2011} \equiv -1[11]$$

$$2011 \equiv -2[11] \Leftrightarrow 2011^{43} \equiv (-2)^{43} \equiv ((-2)^{10})^4 \cdot (-2)^3 \equiv -8[11]$$

où on a utilisé le petit théorème de Fermat pour savoir que  $(-2)^{10} \equiv 1[11]$ . Donc  $A \equiv 7[11]$ .

Pour étudier modulo 35, on est un peu ennuyé : le théorème de Fermat qui est si pratique ne marche que sur les premiers. Qu'à cela ne tienne, on va regarder modulo 5 puis modulo 7. En faisant les mêmes manipulations qu'au dessus, on trouve :

$$\begin{aligned} 43^{2011} &\equiv 1[7] \quad , \quad 43^{2011} \equiv 2[5] \\ 2011^{43} &\equiv 2[7] \quad , \quad 2011^{43} \equiv 1[5] \end{aligned}$$

Donc  $A \equiv 6[7]$  et  $A \equiv 1[5]$ . Le théorème chinois nous dit alors que  $A \equiv 6[35]$ .

Solution de l'exercice 4 La première priorité est de limiter le nombre de cas à vérifier : on place l'équation sous la forme

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 + \frac{3}{z} > 1$$

donc si  $x \geq 3$  et  $y \geq 3$ , le terme de gauche est inférieur ou égal à 1, et on ne peut pas réaliser l'équation. Il reste donc 4 cas à étudier :

$x = 1$  : l'équation devient

$$1 + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

et on trouve tous les triplets  $(1, 2n, 3n)$ .

$x = 2$  : l'équation devient

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{2} + \frac{3}{z} > \frac{1}{2}$$

donc en particulier  $y < 4$ . Les cas  $y = 1, 2$  et  $3$  donnent les solutions  $(2, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 6)$  et  $(2, 3, 18)$ .

$y = 1$  : l'équation devient

$$\frac{1}{x} + 2 - \frac{3}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{z} = \frac{1}{x} + 1 > 1$$

donc en particulier  $z < 3$ . Le cas  $z = 1$  donne  $x = \frac{1}{2}$ , ce qui ne marche pas, et le cas  $z = 2$  donne la solution  $(2, 1, 2)$ .

$y = 2$  : l'équation devient

$$\frac{1}{x} + 1 - \frac{3}{z} = 1 \Leftrightarrow z = 3x$$

et on trouve tous les triplets  $(k, 2, 3k)$ .

Les solutions de l'équation sont donc :  $(2, 1, 2)$ ,  $(2, 3, 18)$ ,  $(1, 2n, 3n)_{n \geq 1}$  et  $(k, 2, 3k)_{k \geq 1}$ .

## 2 Avancés : ordre multiplicatif

### 1 Cours

Nous rappelons ici quelques éléments vus dans le cours d'arithmétique avancé. On suppose connus les résultats classiques d'arithmétique (congruences, inversibilité modulo  $n$ , petit théorème de Fermat, fonction  $\phi$  d'Euler ; pour ces notions voir le cours d'arithmétique sur le site d'Animath). Les solutions aux exercices se trouvent à la fin du cours.

#### - Ordre dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -

Le théorème suivant nous permettra de définir la notion d'ordre.

**Théorème 1.** Soient  $a, n$  des entiers naturels. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux.
2. Il existe un entier  $k$  tel que :

$$a^k \equiv 1 \pmod{n}.$$

*Démonstration.* Prouvons d'abord le sens direct. D'après le théorème relatif à la fonction  $\phi$  d'Euler, il suffit de prendre  $k = \phi(n)$ .

Donnons une autre preuve plus simple qui n'utilise pas ce théorème. Comme l'ensemble des résidus modulo  $n$  est fini, il existe deux entiers distincts  $r < s$  tels que :

$$a^s \equiv a^r \pmod{n}.$$

Alors  $n$  divise  $a^r(a^{s-r} - 1)$ , donc aussi  $a^{s-r} - 1$  car  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux. Il suffit donc de prendre  $k = s - r$ .

Pour le sens réciproque, raisonnons par l'absurde en supposant que  $d = \text{pgcd}(a, n) > 1$ . Par hypothèse, il existe un entier  $r$  tel que  $a^r + rn = 1$ . Cela implique que  $d$  divise 1, ce qui est contradictoire.  $\square$

**Définition 2.** Soient  $a, n$  des entiers naturels premiers entre eux. On appelle *ordre de  $a$  modulo  $n$*  le plus petit entier non nul noté  $\omega_n(a)$ , vérifiant :

$$a^{\omega_n(a)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on notera  $\omega(a)$  à la place de  $\omega_n(a)$ . D'après le théorème 1, cette définition a bien un sens. Le théorème suivant illustre un des intérêts de cette définition.

**Théorème 3.** Soient  $a, n$  des entiers naturels premiers entre eux et  $k$  un entier vérifiant :

$$a^k \equiv 1 \pmod{n}.$$

Alors  $\omega(a)$  divise  $k$ .

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $\omega(a)$  ne divise pas  $k$ . Soit  $\omega(a) = qk + r$  la division euclidienne de  $\omega(a)$  par  $k$ , avec  $0 < r < k - 1$ . Alors :

$$\begin{aligned} 1 &\equiv a^{\omega(a)} \pmod{n} \\ &\equiv (a^k)^q a^r \pmod{n} \\ &\equiv a^r \pmod{n}. \end{aligned}$$

Ceci contredit le caractère minimal de  $\omega(a)$  et permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 4.** Soient  $a, n$  des entiers naturels premiers entre eux. Alors l'ordre de  $a$  divise  $\phi(n)$ . En particulier, lorsque  $n = p$  et premier, l'ordre de  $a$  divise  $p - 1$ .

*Démonstration.* Ceci provient du théorème précédent et du fait que  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .  $\square$

Ce corollaire est en particulier utile lorsqu'on veut chercher l'ordre d'un entier modulo  $n$  à la main : il suffit de tester les diviseurs de  $\phi(n)$ .

**Remarque 5.** Attention ; il faut bien garder de croire que si  $p$  est premier et  $0 < a \leq p - 1$ , alors l'ordre de  $a$  est  $p - 1$ . Comme nous venons de le voir, s'il est vrai que l'ordre de  $a$  divise  $p - 1$ , il n'y a pas en général égalité : il suffit par exemple de prendre  $p = 7$  et  $a = 2$  pour s'en convaincre. Cependant, le théorème suivant donne un résultat allant en ce sens.

**Exercice 1** Existe-t-il des entiers  $n \geq 1$  tels que 9 divise  $7^n + n^3$  ?

**Exercice 2**

- (i) Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  tels que  $n$  divise  $2^n - 1$ .
- (ii) Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  impairs tels que  $n$  divise  $3^n + 1$ .

**Exercice 3** Trouver tous les entiers  $m, n \geq 1$  tels que  $mn$  divise  $3^m + 1$  et  $mn$  divise  $3^n + 1$ .

Finissons par quelques résultats algébriques concernant l'ordre. Pour des entiers  $a, n$  on note  $a \wedge n$  le PGCD de  $a$  et de  $n$ .

**Proposition 6.** Soient  $a, b, n$  des entiers avec  $a \wedge n = 1$  et  $b \wedge n = 1$ . Supposons que  $\omega(a) \wedge \omega(b) = 1$ . Alors  $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $(ab)^{\omega(a)\omega(b)} = 1$ . On en déduit que  $\omega(ab)$  divise  $\omega(a)\omega(b)$ .

Soit maintenant  $k \geq 1$  tel que  $(ab)^k = 1$  et montrons que  $k \geq \omega(a)\omega(b)$ . En élevant à la puissance  $\omega(a)$ , il vient  $b^{k\omega(a)} = 1$ . On en tire que  $\omega(b)$  divise  $k\omega(a)$ , et d'après l'hypothèse cela implique que  $\omega(b)$  divise  $k$ . On montre de même que  $\omega(a)$  divise  $k$ . D'après l'hypothèse, on en déduit encore que  $\omega(a)\omega(b)$  divise  $k$ , d'où le résultat.  $\square$

Si  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux, nous conseillons au lecteur d'essayer de déterminer l'ordre de  $a^k$  modulo  $n$  en fonction de l'ordre de  $a$  modulo  $n$ .

### - Inversibilité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Nous venons de voir que le fait que  $a^k$  soit congru à 1 modulo  $n$  donnait une relation de divisibilité entre  $k$  et l'ordre de  $a$  modulo  $n$ . Nous allons maintenant voir que des informations similaires peuvent être déduites d'une relation de type  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ . À cet effet, rappelons le résultat suivant :

**Théorème 7.** Si  $a \wedge n = 1$ , il existe un entier  $b$  tel que  $ab \equiv 1 \pmod n$ . Cet entier est appelé inverse de  $b$  modulo  $n$  et sera noté  $b^{-1}$  ou  $1/b$ .

*Démonstration.* Donnons deux preuves de ce résultat.

Première démonstration : il suffit de prendre  $n = a^{\omega_n(a)-1}$ .

Seconde démonstration : d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers  $b, d$  tels que  $ab + nd = 1$ . En réduisant modulo  $n$ , on obtient  $ab \equiv 1 \pmod n$ .  $\square$

**Exercice 4** Soient  $p, q$  deux nombres premiers tels que  $q$  divise  $3^p - 2^p$ . Montrer que  $p$  divise  $q - 1$ .

**Exercice 5** Trouver les  $a, n \geq 1$  tels que  $((a+1)^n - a^n)/n$  est un entier.

**Exercice 6** Soient  $a, b > 1$  impairs tels que  $a + b = 2^\alpha$  avec  $\alpha \geq 1$ . Montrer qu'il n'y a pas d'entiers  $k > 1$  tels que  $k^2$  divise  $a^k + b^k$ .

### - Racines primitives -

Considérons deux entiers  $a$  et  $n$  premiers entre eux. Nous avons vu  $\omega_n(a)$ , l'ordre de  $a$  modulo  $n$ , divise  $\phi(n)$ . Il est donc naturel de se demander s'il existe des entiers  $a$  tels que  $\omega_n(a) = \phi(n)$ .

**Définition 8.** Soient  $a, n$  deux entiers premiers entre eux. On dit que  $a$  est une racine primitive modulo  $n$  si  $\omega_a(n) = \phi(n)$ .

Si  $a$  est racine primitive modulo  $n$ , on voit que les restes modulo  $n$  des entiers de l'ensemble  $\{1, a, a^2, \dots, a^{\phi(n)-1}\}$  sont tous distincts.

Remarquons tout de suite qu'il n'existe pas forcément de racines primitives : il est facile de voir qu'il n'y a pas de racine primitive modulo 6. À titre culturel, mentionnons le résultat suivant :

**Théorème 9.** Il existe une racine primitive modulo  $n$  si, et seulement si,  $n = 2, 4, p^k$  ou  $2p^k$  avec  $p$  un nombre premier impair et  $k \geq 1$ .

Nous verrons en TD que si  $n$  est divisible par au moins deux nombres premiers impairs distincts, alors il n'existe pas de racine primitive modulo  $n$ . Nous allons maintenant démontrer un cas particulier du théorème précédent. Sa démonstration peut être sautée en première lecture, mais le résultat est à retenir.

**Proposition 10.** Si  $p$  est premier, il existe une racine primitive modulo  $p$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que si  $q$  est un nombre premier tel que  $q^\alpha$  divise  $p - 1$  avec  $\alpha \geq 1$ , alors il existe un élément d'ordre  $q^\alpha$  modulo  $p$ . À cet effet, pour  $x = 1, \dots, p - 1$  on introduit :

$$y_x = x^{\frac{p-1}{q^\alpha}}.$$

En particulier, d'après le petit théorème de Fermat,  $y_x^{q^\alpha} \equiv 1 \pmod p$ . On en déduit que l'ordre de  $y_x$  modulo  $p$  divise  $q^\alpha$ . Écrivons donc :

$$\omega_p(y_x) = q^{n_x}.$$

Notons ensuite  $n_{\max} = \max\{n_x; x = 1, \dots, p-1\}$ . Il suffit de montrer que  $n_{\max} = \alpha$  (ceci impliquera qu'il existe un élément d'ordre  $q^\alpha$  modulo  $p$ ). Pour cela, on introduit le polynôme :

$$P(X) = X^{\frac{p-1}{q^\alpha} q^{n_{\max}}} - 1$$

et remarque que pour  $x = 0, 1, \dots, p-1$  :

$$P(x) = y_x^{q^{n_{\max}}} \equiv 1 \pmod{p}$$

car  $\omega_p(y_x)$  divise  $q^{n_{\max}}$ .

Il en découle que le polynôme  $P(X)$  a  $p-1$  racines distinctes dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , qui est un corps (si vous ne savez pas ce que c'est qu'un corps, vous pouvez sauter cet argument). On en déduit que le degré de  $P$  vaut au moins  $p-1$ , de sorte que  $n_{\max} \geq \alpha$ . Comme il est clair que  $n_{\max} \leq \alpha$ , on en déduit que  $n_{\max} = \alpha$ .

Revenons maintenant à la preuve du théorème. Soit  $p-1 = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$  la décomposition en facteurs premiers de  $p-1$ . D'après ce qui précède, pour  $1 \leq i \leq k$  il existe un élément  $x_i$  d'ordre  $q_i^{\alpha_k}$ . En utilisant la proposition 6, il vient :

$$\omega(x_1 x_2 \cdots x_k) = \omega(x_1) \omega(x_2) \cdots \omega(x_k) = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k} = p-1.$$

L'élément  $x_1 x_2 \cdots x_k$  est donc d'ordre exactement  $p-1$ . □

Remarquons que la preuve précédente ne s'applique pas au cas général  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , car ce dernier anneau n'est un corps que pour  $n$  premier.

**Remarque 11.** La preuve précédente montre que si  $p$  est premier et que si  $d$  divise  $p-1$ , alors il existe un élément d'ordre  $d$ . Il est possible de montrer qu'il y a alors exactement  $\phi(d)$  éléments d'ordre  $d$ .

**Exercice 7** Trouver tous les entiers  $n$  tels que 19 divise  $2^{3n+4} + 3^{2n+1}$ .

**Exercice 8** Soient  $a, b, n$  des nombres entiers strictement positifs avec  $a > b$ . Montrer que  $n$  divise  $\phi(a^n - b^n)$ .

### - LTE : Lifting The Exponent -

Nous concluons ce cours par un théorème extrêmement utile en arithmétique. Pour un entier  $n$  et un nombre premier  $p$ , on note  $v_p(n)$  l'exposant de la plus grande puissance de  $p$  divisant  $n$ .

**Théorème 12.** Soit  $p$  un nombre premier **impair**. Soient  $a, b$  des nombres entiers (non nécessairement positifs) et un entier  $n \geq 1$ . On suppose que  $p$  divise  $a - b$  mais que  $p$  ne divise ni  $a$  ni  $b$ . Alors :

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n).$$

Ce théorème doit être connu. Nous renvoyons au texte suivant :

<http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/LTE.pdf>

pour une preuve, des extensions au cas  $p = 2$  et de nombreux exemples d'application. Nous ne pouvons qu'encourager fortement le lecteur à lire attentivement ce dernier texte.

**Exercice 9** Soient  $a, n$  deux entiers strictement positifs et  $p$  un nombre premier impair tel que  $a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$ . Montrer que  $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$ .

**Exercice 10** Soit  $k$  un entier strictement positif. Trouver tous les entiers strictement positifs  $n$  tels que  $3^k$  divise  $2^n - 1$ .

### - Solutions des exercices du cours -

Solution de l'exercice 1 Soit  $n \geq 1$  tel que 9 divise  $7^n + n^3$ . Comme un cube est congru à 0, -1 ou 1 modulo 9, on en déduit que  $n^6 \equiv 1 \pmod{9}$  et donc que  $7^{2n} \equiv 1 \pmod{9}$ . Or l'ordre de 7 modulo 9 est 3. On en déduit que 3 divise  $2n$ . Ainsi 3 divise  $n$ . Il faudrait donc que 3 divise  $7^n$ , ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de tels entiers.

Solution de l'exercice 2

- (i) Soit  $n > 1$  tel que  $n$  divise  $2^n - 1$ . Il est clair que  $n$  est impair. Soit  $p$  le plus petit facteur premier de  $n$ , qui est donc impair. Alors  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ . Soit  $\omega$  l'ordre de 2 modulo  $p$ . Alors  $\omega$  divise  $n$ . D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat,  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Ainsi  $\omega$  divise  $p - 1$ . D'après la condition sur  $p$ , on a nécessairement  $\omega = 1$ . Alors  $2 \equiv 1 \pmod{p}$ , ce qui est absurde. On a donc forcément  $n = 1$ .
- (ii) Soit  $n > 1$  tel que  $n$  divise  $3^n + 1$ . Soit  $p$  le plus petit facteur premier de  $n$ , qui est donc impair, qui vérifie donc  $p > 3$ . Alors  $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ . Soit  $\omega$  l'ordre de 3 modulo  $p$ . Alors  $\omega$  divise  $2n$ . D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat,  $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Ainsi  $\omega$  divise  $p - 1$ . On en déduit que  $\omega$  divise  $\text{pgcd}(2n, p - 1)$ . D'après la condition sur  $p$ , on a nécessairement  $\omega = 1$  ou 2. Dans le premier cas de figure,  $3 \equiv 1 \pmod{p}$  et donc  $p = 2$ , ce qui est exclu. Dans le deuxième cas,  $3^2 \equiv 1 \pmod{p}$  et donc  $p$  divise 8, ce qui est exclu également. On en déduit que  $n = 1$ .

Solution de l'exercice 3 On suppose  $m, n \geq 2$ . Soit  $p$  le plus petit diviseur de  $n$ . Alors  $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ . Soit  $\omega$  l'ordre de 3 modulo  $p$ . Alors  $\omega$  divise  $2n$ . D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat,  $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Ainsi  $\omega$  divise  $p - 1$ . On en déduit que  $\omega$  divise  $\text{pgcd}(p - 1, 2n)$ . D'après la condition sur  $p$ , on a nécessairement  $\omega = 1$  ou 2. Dans le premier cas de figure,  $3 \equiv 1 \pmod{p}$  et donc  $p = 2$ . Dans le deuxième cas,  $3^2 \equiv 1 \pmod{p}$  et donc  $p = 2$ . On en déduit que  $n$  est pair. On montre de même que  $m$  est pair. Alors 4 divise  $3^{mn} + 1$ , ce qui n'est pas possible car  $mn$  est pair.

Il reste à examiner le cas où  $m$  ou  $n$  vaut 1 et il vient que les solutions sont  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  et  $(2, 1)$ .

Solution de l'exercice 4 Il est clair que  $q \geq 5$ . Notons  $\omega$  l'ordre  $3/2$  modulo  $q$  (rappelons que  $1/2$  désigne l'inverse de 2 modulo  $q$ ). Alors  $\omega$  divise  $p$ , donc  $\omega = 1$  ou  $p$ . Le premier cas n'étant pas possible, on a donc  $\omega = p$ . Or d'après le petit théorème de Fermat,  $(3/2)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ . On en tire que  $\omega$  divise  $q - 1$ , d'où le résultat.

Solution de l'exercice 5 Supposons que  $n > 2$ . Soit  $p$  le plus petit facteur premier de  $n$ . Alors  $p$  divise  $(a+1)^n - a^n$ . En d'autres termes,  $((a+1)/a)^n \equiv 1 \pmod{p}$ . Soit  $\omega$  l'ordre de  $(a+1)/a$  modulo  $p$ . Alors  $\omega$  divise  $n$ . D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat,  $((a+1)/a)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  de sorte que  $\omega$  divise  $p - 1$ . D'après la condition sur  $p$ , nécessairement  $\omega = 1$ . Ceci implique  $a + 1 \equiv a \pmod{p}$ , ce qui est absurde.

Les solutions sont donc  $n = 1$  et  $a$  quelconque.



Solution de l'exercice 6 Raisonnons par l'absurde et considérons un entier  $k > 1$  tel que  $k^2$  divise  $a^k + b^k$ . En raisonnant modulo 4 on voit que  $k$  est impair. Comme  $a + b$  est une puissance de 2, il en découle que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. Soit  $p$  le plus petit facteur premier de  $k$  qui est donc différent de 2 et ne divise ni  $a$ , ni  $b$ .

Soit  $\omega$  l'ordre de  $a/b$  modulo  $p$ . Comme dans les exercices précédents, on voit que  $\omega$  divise  $2k$  ainsi que  $p - 1$ . D'après la condition sur  $p$ , on a nécessairement  $\omega = 1$  ou 2. Dans le premier cas de figure,  $a \equiv b \pmod{p}$  et donc  $2a^k \equiv 0 \pmod{p}$ , ce qui est absurde. Dans le deuxième cas de figure,  $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$ . Ainsi  $p$  divise  $(a - b)(a + b)$ . On a vu que  $a \equiv b \pmod{p}$  n'était pas possible. Mais comme  $a + b = 2^\alpha$ , on ne peut pas non plus avoir  $a + b \equiv 0 \pmod{p}$  car  $p$  est impair. Ceci conclut la solution.

Solution de l'exercice 7 Les conditions de l'énoncé impliquent que  $9^n \equiv 8^n \pmod{19}$ . Mais l'inverse de 8 modulo 19 est 12. On en déduit que  $13^n \equiv 108^n \equiv (9 \times 8)^n \equiv 1 \pmod{19}$ . Or 13 est racine primitive modulo 19. Les entiers recherchés sont donc l'ensemble des multiples de 18.

Solution de l'exercice 8 Traitons d'abord le cas où  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. Alors  $a$  et  $b$  sont premiers avec  $a^n - b^n$  et il est clair que l'ordre de  $a/b$  modulo  $a^n - b^n$  est  $n$ . On en déduit que  $n$  divise  $\phi(a^n - b^n)$ .

Si  $d > 1$  est le PGCD de  $a$  et de  $b$ , notons  $u = a/d$  et  $v = b/d$  de sorte que  $u$  et  $v$  sont premiers entre eux. D'après ce qui précède,  $n$  divise  $\phi(u^n - v^n)$ . En utilisant la formule exprimant  $\phi(n)$  en fonction des facteurs premiers de  $n$ , on voit que  $\phi(u^n - v^n)$  divise  $\phi(d^n(u^n - v^n)) = \phi(a^n - b^n)$ , ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9 Il est clair que  $a$  et  $p$  sont premiers entre eux. D'après le petit théorème de Fermat,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Comme  $a^p \equiv 1 \pmod{p}$ , on en déduit que  $a \equiv 1 \pmod{p}$ . On peut donc utiliser LTE et on obtient :

$$v_p(a - 1) + 1 = v_p(a - 1) + v_p(p) = v_p(a^p - 1).$$

Par hypothèse, le dernier terme est supérieur ou égal à  $n$ . Il en découle que  $v_p(a - 1) \geq n - 1$ , ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 10 Soit  $k$  tel que  $3^k$  divise  $2^n - 1$ . En raisonnant modulo 3, on voit que  $n$  est pair. Écrivons donc  $n = 2m$  avec  $m > 0$ . Alors  $3^k$  divise  $4^m - 1$ . Comme 3 divise  $4 - 1$ , on peut appliquer LTE :

$$v_3(4 - 1) + v_3(m) = v_3(4^m - 1) \geq k.$$

On en déduit que  $v_3(n) \geq k - 1$ . Ainsi  $2 \times 3^{k-1}$  divise  $n$ .

Réciproquement, le même raisonnement nous donne que  $3^k$  divise  $2^n - 1$  si  $2 \times 3^{k-1}$  divise  $n$ .

## 2 TD

**Exercice 1** Soit  $p$  un nombre premier impair. Prouver que si  $q$  est un diviseur premier de  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1$  alors  $p = q$  ou  $p$  divise  $q - 1$ .

**Exercice 2** Soient  $n, k$  des entiers strictement positifs tels que  $n$  divise  $k^n - 1$ . Peut-on avoir  $\text{pgcd}(n, k - 1) = 1$  ?

**Exercice 3** Soient  $x$  et  $y$  deux entiers positifs premiers entre eux. Si  $k$  est un entier impair qui divise  $x^{2^n} + y^{2^n}$  avec  $n \geq 1$ , alors il existe un entier  $m$  tel que  $k = 2^{n+1}m + 1$ .

**Exercice 4** Trouver tous les  $p, q$  premiers tels que  $pq$  divise  $2^p + 2^q$ .

**Exercice 5** (Irlande 1996) Soient  $p$  un nombre premier et  $a, n$  des entiers strictement positifs. Prouver que si  $2^p + 3^p = a^n$ , alors nécessairement  $n = 1$ .

**Exercice 6** Soit  $n$  un entier divisible par au moins deux nombres premiers impairs distincts. Montrer qu'il n'existe pas de racine primitive modulo  $n$ .

**Exercice 7** Soit  $n > 1$  un entier impair. Si  $m \geq 1$  est un entier, montrer que  $n$  ne peut pas diviser  $m^{n-1} + 1$ .

**Exercice 8** (IMO 1990/3) Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  tels que  $n^2$  divise  $2^n + 1$ .

**Exercice 9** (Bulgarie 1997) Pour un entier  $n > 0$ ,  $3^n - 2^n$  est la puissance d'un nombre premier. Montrer que  $n$  est premier.

**Exercice 10** Trouver tous les nombres premiers  $p, q, r$  tels que  $p$  divise  $1 + q^r$ ,  $q$  divise  $1 + r^p$  et  $r$  divise  $1 + p^q$ .

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 Un tel diviseur  $q$  divise  $x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1)$  donc l'ordre de  $x$  modulo  $q$  divise  $p$  premier. Si cet ordre est  $p$ , comme d'après le théorème de Fermat il divise également  $q - 1$ ,  $p$  divise  $q - 1$ . Si l'ordre est 1, pour tout  $k$ ,  $x^k \equiv 1 \pmod{q}$  donc la somme des  $p$  termes :  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 \equiv p \pmod{q}$  est divisible par  $q$  si et seulement si  $q$  divise  $p$ , soit  $q = p$ .

Solution de l'exercice 2 Soit  $p$  le plus petit facteur premier de  $n$ . Modulo  $p$ , l'ordre de  $k$  divise  $n$  puisque  $k^n \equiv 1 \pmod{p}$ . Par ailleurs, d'après le théorème de Fermat, l'ordre de  $k$  modulo  $p$  divise  $p - 1$ . Or  $p$  est le plus petit facteur premier de  $n$  : le seul diviseur de  $n$  strictement inférieur à  $p$  est 1. L'ordre de  $p$ , diviseur de  $n$  inférieur ou égal à  $p - 1$ , vaut donc nécessairement 1, ce qui prouve précisément que  $k \equiv 1 \pmod{p}$ , donc que  $p$  divise  $k - 1$ , de sorte que  $\text{PGCD}(n, k - 1)$  vaut au moins  $p$ . La réponse est donc non.

Solution de l'exercice 3  $k$  n'est pas supposé premier, mais si tous ses facteurs premiers vérifient le résultat, alors un produit de nombres congrus à 1  $\pmod{2^{n+1}}$  sera lui-même  $\equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ . Il suffit donc de démontrer que tout facteur premier  $p$  de  $x^{2^n} + y^{2^n}$  vérifie  $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ . Par ailleurs, si  $p$  divisait  $x$ , comme par hypothèse il divise  $x^{2^n} + y^{2^n}$ , il diviserait également  $y$  :  $x$  et  $y$  ne seraient pas premiers entre eux. Donc  $x$  et  $p$  sont premiers entre eux et, d'après Bézout, il existe  $u$  et  $v$  tels que  $xu - pv = 1$ , ce qui entraîne que :  $xuy \equiv y \pmod{p}$ . On peut noter  $\left(\frac{y}{x}\right)$  la classe de  $uy \pmod{p}$ , telle que  $x\left(\frac{y}{x}\right) \equiv y \pmod{p}$ , de sorte que :  $x^{2^n} + y^{2^n} = x^{2^n} \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{2^n}\right) \equiv 0$  équivaut à :  $\left(\frac{y}{x}\right)^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$ . Donc cet élément  $\left(\frac{y}{x}\right)$  a pour ordre  $2^{n+1}$ , car  $2^{n+1}$  est la première puissance de 2 vérifiant  $\left(\frac{y}{x}\right)^{2^k} \equiv 1 \pmod{p}$ , et  $2^{n+1}$  n'a pas d'autre diviseur que des puissances de 2. Comme  $\left(\frac{y}{x}\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $2^{n+1}$  divise  $p - 1$ , ce qui est précisément le résultat cherché. Un cas particulier important : pour  $n = 1$ , tout diviseur d'une somme de deux carrés premiers entre eux est congru à 1 modulo 4.

Par ailleurs, au 17ème siècle, Fermat avait émis l'hypothèse que pour tout entier  $k$ ,  $2^{2^k} + 1$  est premier. C'est la seule conjecture de Fermat qui s'est avérée fautive. Parmi ces "nombres de Fermat", on n'en connaît que cinq qui soient premiers (pourtant, on en a étudié beaucoup) :  $2^1 + 1 = 3$ ,  $2^2 + 1 = 5$ ,  $2^4 + 1 = 17$ ,  $2^8 + 1 = 257$  et  $2^{16} + 1 = 65537$ , et il se peut que ce

soient les seuls. Pour démontrer que  $2^{32} + 1$  n'est pas premier, Euler savait que ses éventuels diviseurs premiers étaient nécessairement de la forme  $64k + 1$  : il suffisait donc d'essayer 193, 257, 449, 577, 641.... Or 641 qui peut s'écrire de deux manières :  $641 = (5 \times 2^7) + 1 = 5^4 + 2^4$ . Comme  $a - b$  divise  $a^4 - b^4$ , 641 divise  $(5^4 \times 2^{28}) - 1$ . Mais il divise aussi :  $(5^4 + 2^4) \times 2^{28} = (5^4 \times 2^{28}) + 2^{32}$ . Donc il divise la différence de ces deux nombres, à savoir précisément :  $2^{32} + 1$ .

*Solution de l'exercice 4* Remarquons tout d'abord que si  $p = 2$ ,  $2q$  divise  $4 + 2^q$  si et seulement si soit  $q = 2$ , soit  $2q$  divise 6, puisque pour tout  $q$  impair  $q$  divise  $2^{q-1} - 1$ , donc  $2q$  divise  $2^q - 2$ . D'où les solutions :  $(p, q) = (2, 2), (2, 3)$  ou  $(3, 2)$ . On supposera désormais  $p$  et  $q$  impairs. Appelons  $\omega_p$  et  $\omega_q$  les ordres de 2 modulo  $p$  et  $q$  respectivement. Si  $p$  divise  $2^p + 2^q$ , donc  $2^{p-1} + 2^{q-1}$ , comme  $p$  divise  $2^{p-1} - 1$ ,  $p$  divise  $2^{q-1} + 1$ , donc  $2^{2(q-1)} - 1$ . Dès lors,  $\omega_p$  divise  $p - 1$  et  $2(q - 1)$  mais ne divise pas  $q - 1$ . Si la plus grande puissance de 2 divisant  $\omega_p$  (resp  $\omega_q$ ) est  $2^{v_p}$  (resp  $2^{v_q}$ ), le fait que  $\omega_p$  divise  $2(q - 1)$  et pas  $q - 1$  entraîne que  $v_p > v_q$ , car  $q - 1$  est divisible par  $\omega_q$  donc par  $2^{v_q}$  et pas par  $2^{v_p}$ . Le même raisonnement, en échangeant  $p$  et  $q$ , aboutit à  $v_q > v_p$ , ce qui est manifestement incompatible. Il n'existe donc pas de couples de nombres premiers impairs vérifiant cette condition.

*Solution de l'exercice 5* Si  $p = 2$ ,  $2^2 + 3^2 = 13$  vérifie bien la relation demandée : ce n'est pas une puissance  $\geq 2$  d'un entier. Si maintenant  $p$  est impair,  $2^p + 3^p$  est divisible par  $2 + 3 = 5$ , et n'est divisible par 25 que si  $p$  est divisible par 5 donc, puisque par hypothèse  $p$  est premier, si  $p = 5$ . En effet,  $3^p = (5 - 2)^p \equiv (-2)^p + p \cdot 5(-2)^{p-1} \pmod{25}$ . C'est aussi une conséquence du théorème LTE qui se démontre pareillement. On en déduit que, hormis éventuellement pour  $p = 5$ , le facteur 5 apparaît avec l'exposant 1, ce qui suffit à démontrer le résultat cherché. Pour  $p = 5$ , il apparaît bien avec l'exposant 2, mais  $3^5 + 2^5 = 275$  n'est pas une puissance  $\geq 2$  d'un entier, ce qui achève la démonstration.

*Solution de l'exercice 6* Posons  $n = p^i q^j m$ ,  $p$  et  $q$  étant les deux nombres premiers impairs distincts et  $m$  n'étant divisible ni par  $p$  ni par  $q$ . L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  contient  $\varphi(n) = \varphi(p^i) \times \varphi(q^j) \times \varphi(m)$  éléments, et pour qu'ils soient tous atteints comme puissances d'un élément  $a$ , il faut que l'ordre de  $a$  soit  $\varphi(n)$ . Or  $a^{\varphi(p^i)} \equiv 1 \pmod{p^i}$ ,  $a^{\varphi(q^j)} \equiv 1 \pmod{q^j}$ ,  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ , donc  $a^\omega \equiv 1 \pmod{n}$  avec  $\omega = \text{PPCM}(\varphi(p^i), \varphi(q^j), \varphi(m))$ . Comme  $p$  et  $q$  sont impairs,  $\varphi(p^i)$  et  $\varphi(q^j)$  sont tous deux pairs : leur PPCM ne peut pas être égal à leur produit. En définitive, l'ordre de  $a$  divise le PPCM des indicateurs d'Euler, soit au plus la moitié du nombre d'éléments inversibles qui, lui, est égal au produit de ces mêmes indicateurs d'Euler.

*Solution de l'exercice 7* C'est une conséquence presque immédiate de l'exercice 3. Soit  $2^k$  la plus grande puissance de 2 divisant  $n - 1$  : posons  $n - 1 = 2^k q$ .  $s = m^{n-1} + 1 = x^{2^k} + y^{2^k}$  avec  $x = m^q$  et  $y = 1$ . D'après l'exercice 3, tout diviseur de  $s$  est donc congru à 1 modulo  $2^{k+1}$ . Or par définition de  $2^k$ ,  $n$  n'est pas congru à 1 modulo  $2^{k+1}$ . Donc  $n$  ne divise pas  $s$ .

*Solution de l'exercice 8* Montrons que si  $n$  divise  $2^n + 1$ , alors  $n$  est une puissance de 3. En considérant  $p$  le plus petit facteur premier de  $n$ , des considérations sur l'ordre de 2 modulo  $p$  donnent  $p = 3$  comme dans les exercices du cours. Écrivons alors  $n = 3^k u$  avec  $u$  non divisible par 3. Le même raisonnement montre que si  $u > 1$  alors le plus petit facteur premier de  $u$  est 3. On en déduit que  $n$  est une puissance de 3.

On applique LTE ( $n$  est impair) :

$$v_3(2^n + 1) = v_3(2 + 1) + v_3(n) = k + 1.$$

Or  $v_3(n^2) = 2k$  et  $n^2$  divise  $2^n + 1$ . On en déduit que  $2k \leq k + 1$ , ce qui donne  $k = 0$  ou  $k = 1$ . Notons que ce dernier résultat peut aussi se démontrer de manière immédiate en regardant les puissances de 2 modulo 9. Réciproquement,  $n = 1$  et  $n = 3$  sont bien solution.

Solution de l'exercice 9 On suppose  $n > 2$  et que  $3^n - 2^n = p^k$  pour  $k \geq 1$ . Montrons d'abord que  $n$  est impair. Si  $n = 2n'$ , alors  $3^n - 2^n = (3^{n'} - 2^{n'})(3^{n'} + 2^{n'})$ . Il existe donc  $\alpha > \beta \geq 0$  tels que :

$$3^{n'} + 2^{n'} = p^\alpha, \quad 3^{n'} - 2^{n'} = p^\beta.$$

Alors  $2^{n'+1} = p^\beta(p^{\alpha-\beta} - 1)$ . Donc  $p = 2$ , ce qui est absurde. Ainsi  $n$  est impair.

Raisonnons par l'absurde et considérons  $q$  est un nombre premier divisant  $n$  avec  $q < n$ . Écrivons  $n = qr$ . Un raisonnement direct montre que  $3^q - 2^q$  est une puissance de  $p$ , disons  $3^q - 2^q = p^{k'}$  avec  $k' < k$ . En appliquant LTE, on voit que  $v_p(r) = k - k'$ . Écrivons donc  $r = p^{k-k'}u$  avec  $p$  ne divisant pas  $u$ . Alors :

$$\begin{aligned} p^k &= 3^n - 2^n = 3^{qp^{k-k'}u} - 2^{qp^{k-k'}u} = (3^q)^{p^{k-k'}u} - (2^q)^{p^{k-k'}u} \\ &= (p^{k'} + 2^q)^{p^{k-k'}u} - (2^q)^{p^{k-k'}u} \geq p^{k-k'}u \cdot p^{k'} \cdot 2^{q(p^{k-k'}u-1)} = p^k u \cdot 2^{q(p^{k-k'}u-1)} > p^k, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.  $n$  est donc forcément premier.

Solution de l'exercice 10 On commence par examiner la condition «  $p$  divise  $1 + q^r$  ». Elle se réécrit  $q^r \equiv -1 \pmod{p}$  et implique donc, en particulier,  $q^{2r} \equiv 1 \pmod{p}$ . Ainsi l'ordre de  $q$  modulo  $p$  est un diviseur de  $2r$ . Comme  $r$  est supposé premier, c'est donc un élément de l'ensemble  $\{1, 2, r, 2r\}$ . Si on suppose en outre que  $p \neq 2$ , on a  $q^r \not\equiv 1 \pmod{p}$ , et donc l'ordre de  $q$  modulo  $p$  est nécessairement 2 ou  $r$ . Dans le premier cas, en utilisant que  $p$  est premier, on obtient  $q \equiv -1 \pmod{p}$ , alors que dans le deuxième cas, on en déduit que  $2r$  divise  $p - 1$ . En permutant les nombres  $p, q$  et  $r$ , on obtient bien sûr des conséquences analogues des deux autres conditions «  $q$  divise  $1 + r^p$  » et «  $r$  divise  $1 + p^q$  ».

On suppose maintenant que  $p, q$  et  $r$  sont tous les trois impairs, et pour commencer que l'on est dans le cas où  $q \equiv -1 \pmod{p}$ . Le nombre premier  $p$  ne peut donc pas diviser  $q - 1$  (puisque il divise déjà  $q + 1$  et qu'il ne vaut pas 2). D'après les résultats du premier alinéa, la condition «  $q$  divise  $1 + r^p$  » implique donc que  $r \equiv -1 \pmod{q}$ . En appliquant à nouveau le même argument, on trouve que  $p \equiv -1 \pmod{r}$ . Or les trois congruences précédentes ne sont pas compatibles. En effet, par exemple, elles impliquent  $q \geq p - 1$ ,  $r \geq q - 1$  et  $p \geq r - 1$ , ce qui ne peut se produire, étant donné que  $p, q$  et  $r$  sont des nombres premiers impairs, que si  $p = q = r$ ; on a alors manifestement  $q \not\equiv -1 \pmod{p}$ . On en déduit que, toujours dans le cas où  $p, q$  et  $r$  sont supposés impairs,  $2r$  divise  $p - 1$ . En permutant circulairement les variables, on démontre de même que  $2p$  divise  $q - 1$  et  $2q$  divise  $r - 1$ . Ainsi  $8pqr$  divise  $(p - 1)(q - 1)(r - 1)$ , ce qui n'est clairement pas possible étant donné que  $8pqr > (p - 1)(q - 1)(r - 1)$ . Finalement, il n'y a pas de solution lorsque  $p, q$  et  $r$  sont tous les trois impairs.

On en vient à présent au cas où l'un de ces trois nombres est égal à 2. Quitte à permuter circulairement à nouveau  $p, q$  et  $r$ , on peut supposer que c'est  $p$ . Les conditions de l'énoncé disent alors que  $q$  est impair, que  $r^2 \equiv -1 \pmod{q}$  et que  $2^q \equiv -1 \pmod{r}$ . Par ce qui a été fait dans le premier alinéa, cette dernière congruence entraîne que  $r = 3$  ou que  $2q$  divise  $r - 1$ . Le premier cas conduit à  $9 \equiv -1 \pmod{q}$ , ce qui ne se produit que si  $q = 5$  puisque l'on a déjà écarté le cas  $q = 2$ . On vérifie par ailleurs que le triplet  $(2, 5, 3)$  est bien solution. Dans le second cas, maintenant, le produit  $2q$  divise  $r - 1$ , mais aussi  $2(r^2 + 1)$  puisqu'on sait que  $r^2 \equiv -1 \pmod{q}$ . Ainsi  $2q$  divise  $2(r^2 + 1) - 2(r + 1)(r - 1) = 4$ , ce qui ne peut arriver.

En conclusion, il y a exactement trois solutions qui sont les triplets  $(2, 5, 3)$ ,  $(5, 3, 2)$  et  $(3, 2, 5)$ .

### 3 Test

**Exercice 1** Soit  $p > 3$  un nombre premier. Montrer que si un entier  $n$  divise  $(2^p + 1)/3$  alors  $n \equiv 1 \pmod{2p}$ .

**Exercice 2** Soit  $a$  un entier strictement positif. On suppose que  $4(a^n + 1)$  est le cube d'un entier pour tout entier positif  $n$ . Trouver  $a$ .

**Exercice 3** Soit  $n = 2^k h + 1$  avec  $0 \leq h < 2^k$  impair. Montrer l'équivalence :

$$n \text{ premier} \iff \text{il existe un entier } a \text{ tel que } a^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{n}.$$

**Exercice 4** Soit  $p_1, \dots, p_k$  des nombres premiers distincts. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\right) \neq 3.$$

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 Comme un produit d'entiers congrus à 1 modulo  $2p$  reste congru à 1 modulo  $2p$ , il suffit de montrer que si  $q$  est un nombre premier qui divise  $(2^p + 1)/3$  alors  $q \equiv 1 \pmod{2p}$ . Il est clair que  $q \neq 2$  et il est facile de voir que  $q \neq 3$ . Introduisons  $\omega$ , l'ordre de 2 modulo  $q$ . Alors  $2^p \equiv -1 \pmod{q}$ , donc  $\omega$  divise  $2p$ . On en déduit que  $\omega = 1, 2, p$  ou  $2p$ . Le cas  $\omega = 1$  n'est clairement pas possible, le cas  $\omega = 2$  implique  $q = 3$  ce qui est exclu, et le cas  $\omega = p$  est exclu car  $2^p \equiv -1 \pmod{p}$ . On en déduit que  $\omega = 2p$ .

D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat,  $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ , donc  $2p = \omega$  divise  $q - 1$ , d'où le résultat.

Solution de l'exercice 2 Il est clair que  $a = 1$  convient. Montrons que c'est le seul. Supposons donc  $a > 1$ . Choisissons  $n = 2m$  et remarquons que  $a^2 + 1$  n'est pas une puissance de 2 car congru à 1 ou 2 modulo 4. Soit donc  $p$  un nombre premier impair tel que  $p$  divise  $a^2 + 1$ . Alors d'après LTE :

$$v_p(4(a^n + 1)) = v_p(a^2 + 1) + v_p(m).$$

On choisit  $m$  de sorte que ce dernier terme soit congru à 1 modulo 3. Alors  $4(a^n + 1)$  ne peut pas être un cube, contradiction.

Solution de l'exercice 3 Pour le sens direct, il suffit de prendre pour  $a$  une racine primitive modulo  $n$ . Pour la réciproque, soit  $p$  un diviseur premier de  $n$  et notons  $\omega$  l'ordre de  $a$  modulo  $p$ . Comme  $a^{h2^{k-1}} \equiv -1 \pmod{p}$ , on en déduit que  $\omega$  divise  $h2^k$  mais que  $\omega$  ne divise pas  $h2^{k-1}$ . On en déduit que  $2^k$  divise  $\omega$ .

D'autre part, comme  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $\omega$  divise  $p - 1$ . On en déduit que  $p \equiv 1 \pmod{2^k}$ . Comme  $n \equiv 1 \pmod{2^k}$ , on en déduit que l'entier  $n/p$  est aussi congru à 1 modulo  $2^k$ .

Écrivons donc  $p = 1 + \alpha 2^k$  et  $n/p = 1 + \beta 2^k$  avec  $\alpha, \beta \geq 0$ . Alors :

$$n = (1 + \alpha 2^k)(1 + \beta 2^k) = 1 + 2^k(\alpha + \beta + \alpha\beta 2^k).$$

Alors  $h = \alpha + \beta + \alpha\beta 2^k$  et la condition  $h < 2^k$  impose que  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$  ou  $(1, 0)$  et donc que  $n$  est premier.

Solution de l'exercice 4 Raisonnons par l'absurde et écrivons :

$$\prod_{i=1}^k (1 + p_i + p_i^2) = 3 \prod_{i=1}^k p_i^2.$$

Soit  $1 \leq i \leq k$  et supposons que  $p_i \neq 3$ . Montrons que les diviseurs premiers de  $1 + p_i + p_i^2$  sont soit 3 soit des nombres premiers congrus à 1 modulo 3.

Soit donc  $q$  un diviseur premier de  $1 + p_i + p_i^2$  différent de 3. Alors  $q$  divise  $p_i^3 - 1 = (1 + p_i + p_i^2)(p_i - 1)$ . Ainsi  $p_i^3 \equiv 1 \pmod{q}$ . Soit  $\omega$  l'ordre de  $p_i$  modulo  $q$  qui divise donc 3. Si  $\omega = 1$ , alors  $q$  divise  $p_i - 1$ . Or  $\text{PGCD}(p_i - 1, 1 + p_i + p_i^2)$  vaut 1 ou 3, auquel cas forcément  $q = 3$ . Si  $\omega = 3$ , on en déduit que 3 divise  $\omega$ . Or d'après le petit théorème de Fermat,  $p_i^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$  et donc  $\omega$  divise  $q - 1$ . En définitive 3 divise  $q - 1$  et donc  $q \equiv 1 \pmod{3}$ , comme désiré.

On en déduit que tous les  $p_i$ , sauf éventuellement l'un d'entre eux, sont congrus à 1 modulo 3. Or si  $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ , alors 3 divise  $1 + p_i + p_i^2$ . Il vient que  $\prod_{i=1}^k (1 + p_i + p_i^2)$  est divisible par  $3^{k-1}$ . Comme la plus grande puissance de 3 divisant  $3 \prod_{i=1}^k p_i^2$  est au plus  $3^3$ , il vient  $k \leq 4$ .

Il est clair que  $k = 1$  n'est pas possible. Si  $k \geq 2$ , rangeons les  $p_i$  par ordre croissant :  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ . D'après le raisonnement précédent,  $p_1 = 3$ . Alors  $1 + p_1 + p_1^2 = 13$ , donc  $p_2 = 13$ . Mais  $1 + p_2 + p_2^2 = 3 \times 61$ , donc  $p_3 = 61$ . Mais  $1 + p_3 + p_3^2 = 37 \times 109$ . Donc on doit avoir  $k \geq 5$ , ce qui est exclu.

Concluons ces solutions par une remarque concernant les polynômes cyclotomiques. Notons  $\mathbb{U}_n^\times$  l'ensemble des racines primitives  $n$ -ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n^\times = \left\{ e^{2i\pi \frac{k}{n}}; k \wedge n = 1 \right\},$$

qui est donc de cardinal  $\phi(n)$ .

On introduit alors le polynôme cyclotomique d'ordre  $n$ , noté  $\Phi_n(X)$  :

$$\Phi_n(X) = \prod_{z \in \mathbb{U}_n^\times} (X - z),$$

qui est donc de degré  $\phi(n)$ .

Par exemple,  $\Phi_1(X) = X - 1$ ,  $\Phi_2(X) = X + 1$ ,  $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$ ,  $\Phi_4(X) = X^2 + 1$ ,  $\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ,  $\Phi_6(X) = X^2 - X + 1$ ,  $\Phi_7(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  et :

$$\Phi_{2^k}(X) = X^{2^{k-1}} + 1.$$

On peut démontrer les faits non-triviaux suivants :

**Théorème 13.** Pour tout  $n \geq 1$  :

- (i) On a  $X^n - 1 = \prod_{d \text{ divise } n} \Phi_d(X)$ .
- (ii)  $\Phi_n(X)$  est à coefficients entiers
- (iii)  $\Phi_n(X)$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$

Pour notre propos, le théorème suivant sera utile :

**Théorème 14.** Soit  $p$  un nombre premier, et soient  $a, n$  des entiers tels que  $p$  divise  $\Phi_n(a)$ . Alors l'un des deux cas suivants est vérifié :

- (i)  $p \equiv 1$  modulo  $n$
- (ii)  $p$  divise  $n$

Voyons comment ce théorème pouvait être appliqué dans deux exercices du test.

Dans l'exercice 4, nous avons que  $q$  divisait  $1 + p_i + p_i^2 = \Phi_3(p_i)$ . Le théorème précédent implique  $p \equiv 1$  modulo 3 ou  $p$  divise 3, c-à-d  $p = 3$ , ce que nous avons obtenu par des considérations sur les ordres.

Dans l'exercice 3, nous avons que  $p$  divisait  $1 + a^{2^{k-1}h} = \Phi_{2^k}(a^h)$ . Le théorème précédent implique que  $p \equiv 1$  modulo  $2^k$  ou  $p$  divise  $2^k$ . Ce deuxième cas étant exclu, on a  $p \equiv 1$  modulo  $2^k$ , ce que nous avons obtenu par des considérations sur des ordres.

Pour des détails concernant les polynômes cyclotomiques, nous renvoyons le lecteur intéressé au texte suivant :

[http://www.yimin-ge.com/doc/cyclotomic\\_polynomials.pdf](http://www.yimin-ge.com/doc/cyclotomic_polynomials.pdf)

## 3 Avancés : Équations fonctionnelles

### 1 Cours

Nous renvoyons le lecteur au cours sur les équations fonctionnelles téléchargeable sur le site d'Animath.

### 2 TD

**Exercice 1** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

**Exercice 2** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

**Exercice 3** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(x) + x^2.$$

**Exercice 4** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant l'équation de Cauchy dont le graphe n'est pas dense dans le plan. Montrer que  $f$  est linéaire.

**Exercice 5** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que les deux équations fonctionnelles suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy+x+y) &= f(xy) + f(x) + f(y).\end{aligned}$$

**Exercice 6** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition suivante :

$$\exists n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y^n) = f(x) + f(y)^n.$$

**Exercice 7** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$  définie par (pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ) :

$$\begin{aligned}f(1) &= 1, \\ f(3) &= 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n).\end{aligned}$$

**Exercice 8** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{N}^*$  vérifiant la solution suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right).$$

Montrer que  $f$  n'est pas surjective.

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 Pour  $x$  fixé, le membre de droite parcourt  $\mathbb{R}$ , ce qui assure que  $f$  est surjective. De plus, en substituant à  $y$  deux éventuels antécédents d'un même nombre, on montre que  $f$  est injective. Ainsi,  $f$  est bijective.

Soit  $\alpha$  l'antécédent de 0. En substituant dans l'équation originale  $x = 0, y = \alpha$ , on obtient que :

$$f(0) = \alpha + f(0)^2.$$

De plus, en substituant dans l'équation originale  $x = y = \alpha$ , on obtient que  $f(0) = \alpha$ . Ainsi, on obtient  $f(0) = 0$ .

En injectant  $x = 0$  dans l'équation originale, on obtient alors que  $f$  est involutive. Il est donc naturel de remplacer  $x$  par  $f(x)$  dans l'équation originale, ce qui donne pour tout  $x, y$



réels  $f(xf(x) + f(y)) = y + x^2$ . En combinant cette relation avec l'équation originale, on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \pm x.$$

Il faut maintenant montrer qu'il n'y a pas de solutions hybrides. Soit  $x$  non nul tel que  $f(x) = x$ . Soit maintenant  $y$  non nul quelconque et montrons que  $f(y) = y$ . Supposons par l'absurde que  $f(y) = -y$ . Alors, l'égalité de l'énoncé se réécrit  $\pm(x^2 - y) = y + x^2$ . Si, le signe est un  $+$ , l'égalité est équivalente au contradictoire  $y = 0$ ; si le signe est un  $-$ , l'égalité est équivalente au tout aussi contradictoire  $y = 0$ .

Ainsi, les deux seules solutions a priori possible sont  $\pm \text{Id}$  et une simple vérification montre qu'elles conviennent.

Solution de l'exercice 2 Pour  $x = 0$ , l'équation de l'énoncé nous donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(0) = f(yf(0)).$$

Supposons par l'absurde que  $f(0) \neq 0$  et posons  $y = \frac{x}{f(0)}$  dans l'équation précédente. Nous obtenons que  $f$  est constante, ce qui est clairement en contradiction avec l'équation de l'énoncé. Ainsi,  $f(0) = 0$ .

Pour  $y = 0$ , l'équation de l'énoncé nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(xf(x)) = x^2.$$

Pour  $y = -x$ , l'équation de l'énoncé nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-xf(x)) = -x^2.$$

En combinant ces deux équations, nous obtenons que  $f$  est surjective.

De plus, si  $\alpha$  est un antécédent de 0, injecter  $x = \alpha$  dans l'équation  $f(xf(x)) = x^2$  nous assure que  $0 = \alpha^2$  et donc que  $\alpha = 0$ . Le seul antécédent de 0 est donc 0.

Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $f(x) = f(y) =: c$ . Nous avons déjà traité le cas où  $c = 0$ , nous supposons donc  $c \neq 0$ . En utilisant l'équation originale pour  $x = 0$  puis pour  $y = y - x$ , nous obtenons que :

$$x^2 = f(xf(x)) = f(xf(y)) = f((y - x)f(x)) + x^2.$$

Ainsi,  $f((y - x)c) = 0$ , d'où  $(y - x)c = 0$ , d'où (comme  $c \neq 0$ )  $x = y$ . Ainsi,  $f$  est injective.  $f$  est donc bijective.

De plus, les équations  $f(xf(x)) = x^2$  et  $f(-xf(x)) = -x^2$  nous assurent que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}f(\sqrt{-x}) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

En particulier,  $f^{-1}$  est impaire et donc  $f$  est également impaire.

En utilisant plusieurs fois l'équation originale, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, f(yf(x)) &= -x^2 + f(xf(x + y)) = -x^2 - (f((x + y)f(x + y - x)) - (x + y)^2) \\ &= 2xy + f((x + y)f(-y)) + (-y)^2 = 2xy + f(-yf(-y + x + y)) \\ &= 2xy - f(yf(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, on sait que, quelque soient  $x$  et  $y$ ,  $f(yf(x)) = xy$ . Par symétrie, on en déduit immédiatement que  $f(xf(y)) = xy$ . On obtient donc que  $f(yf(x)) = f(xf(y))$ , ce qui se réécrit par injectivité comme  $yf(x) = xf(y)$ . Quitte à supposer que  $x$  et  $y$  sont non nuls, on en déduit que  $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ . On en déduit immédiatement que cette quantité est constante sur  $\mathbb{R}^*$ , donc que  $f$  est linéaire sur  $\mathbb{R}^*$  puis que (car  $f(0) = 0$ )  $f$  est linéaire sur  $\mathbb{R}$ .

Après vérification, on vérifie que les deux seules solutions de cette équation fonctionnelle sont  $\pm \text{Id}$ .

Solution de l'exercice 3 Considérons l'ensemble  $E = \{f(x) - f(y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

En considérant la quantité  $f(x - f(y)) - f(x) = f(f(y)) + xf(y) - 1$  et en faisant varier  $x$  en laissant  $y$  fixe, on se rend compte que (à part dans le cas  $f(y) = 0$ ) cette quantité parcourt  $\mathbb{R}$ . Or, la fonction nulle n'étant clairement pas solution, on peut effectivement trouver un tel  $y$ , prouvant que  $E = \mathbb{R}$ .

En substituant  $f(x)$  à  $x$  dans l'équation originale, on montre que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(f(x) - f(y)) = f(f(y)) + f(x)f(y) + f(f(x)) - 1.$$

En exploitant la symétrie du membre de droite, on obtient que  $f(f(x) - f(y)) = f(f(y) - f(x))$ . On remarque immédiatement que cela peut s'écrire comme  $\forall a \in E, f(a) = f(-a)$ , donc que (puisque  $E = \mathbb{R}$ ),  $f$  est paire.

En utilisant cette parité et en posant  $x = 0$  dans l'équation originale, nous obtenons directement que  $f(0) = 1$ .

De plus, en substituant  $f(y)$  à  $x$  dans l'équation originale, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(0) = f(f(y)) + f(y)^2 + f(f(y)), \text{ d'où } \forall y \in \mathbb{R}, f(f(y)) = 1 - \frac{f(y)^2}{2}.$$

En utilisant cette relation dans l'équation  $f(f(x) - f(y)) = f(f(y)) + f(x)f(y) + f(f(x)) - 1$ , on obtient que :

$$f(f(x) - f(y)) = 1 - \frac{f(y)^2}{2} + f(x)f(y) + 1 - \frac{f(x)^2}{2} - 1 = 1 - \frac{(f(x) - f(y))^2}{2}.$$

Ainsi, on a montré que pour tout  $a$  dans  $E$ ,  $f(a) = 1 - \frac{a^2}{2}$ . Comme  $E = \mathbb{R}$ , la seule solution éventuelle est  $x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ , qui respectivement convient effectivement.

Solution de l'exercice 4 Rappelons (c.f. cours de Pierre) que  $\forall (q, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}, f(qx) = qf(x)$ .

Soit  $U$  un ouvert non vide ne contenant aucun point du graphe de  $f$ .

Supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas linéaire. Alors, il existe  $A = (x, f(x))$  et  $B = (y, f(y))$  des points du graphe qui ne sont pas alignés avec l'origine  $O$ . D'après la remarque préliminaire, tous les points de la forme  $(qx, qf(x))$  avec  $q$  rationnel appartiennent également au graphe, donc ce dernier est dense dans la droite  $(OA)$ . On montre de la même façon qu'il est dense dans la droite  $(OB)$ . En particulier, il existe  $C \in (OA)$  et  $D \in (OB)$  des points du graphe tels que la droite passe par  $U$ . Notons  $x'$  et  $y'$  les abscisses respectives de  $C$  et  $D$ . Alors, d'après la remarque préliminaire et en utilisant l'équation de Cauchy, on remarque que pour tous  $q, r$  rationnels,  $f(qx' + ry') = qf(x') + rf(y')$ . On obtient donc un ensemble dense de points du graphe sur la droite  $(CD)$ , ce qui prouve en particulier qu'il existe des points du graphe à l'intérieur de  $U$ , apportant la contradiction désirée.

Solution de l'exercice 5 Le sens direct est évident : on applique simplement deux fois la première équation.

Supposons que  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ .

En posant  $x = y = 0$  dans l'équation de l'énoncé, on obtient que  $f(0) = 3f(0)$ ; d'où  $f(0) = 0$ .

En posant  $y = -1$ , on obtient que pour tout  $x$  réel,  $f(x) + f(-1) + f(-x) = f(-1)$ , d'où  $f$  impaire.

En posant  $y = 1$ , on montre que pour tout  $x$  réel,  $f(2x + 1) = 2f(x) + f(1)$ . On a donc immédiatement que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, f(2f(u + v + uv) + 1) = 2f(u) + 2f(v) + 2f(uv) + f(1).$$

De plus, en utilisant l'équation de l'énoncé avec  $x = u$  et  $y = 2v + 1$ , on montre que pour tous  $u, v \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(2f(u + v + uv) + 1) &= f(u + (2v + 1) + u(2v + 1)) = f(u) + f(2v + 1) + f(2uv + u) \\ &= f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv + u). \end{aligned}$$

En combinant ces deux dernières équations, on obtient donc que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, f(u) + 2f(uv) = f(2uv + u).$$

On remarque en particulier que, pour  $v = -\frac{1}{2}$ , on montre que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$ . On peut donc réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, f(u) + f(2uv) = f(u + 2uv).$$

En substituant  $u = x$  et  $2uv = y$  (en supposant  $x$  non nul), on montre que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

De plus, cette équation est encore valide pour  $x = 0$  puisque l'on a déjà démontré que  $f(0) = 0$ .

On a donc bien démontré que les deux équations étaient équivalentes.

Solution de l'exercice 6 Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  tel que l'équation de l'énoncé soit vérifiée.

En posant  $x = y = 0$  dans cette équation, on obtient que  $f(0) = f(0) + f(0)^n$ , d'où  $f(0)^n = 0$  i.e.  $f(0) = 0$ .

En posant  $x = 0$ , on montre que pour tout  $y$  réel,  $f(y^n) = (f(y))^n$ . L'équation de l'énoncé se réécrit donc  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y^n) = f(x) + f(y^n)$ . On en déduit en particulier (en posant  $y = y^n$ ) que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

En posant  $y = -x$  dans cette dernière équation, on obtient clairement que  $f$  est impaire. En particulier, cette propriété permet de se passer de la condition  $y > 0$  dans l'équation de Cauchy.

Fixons un réel  $x$ . Soit  $\alpha = f(1)$ . On sait d'après Cauchy que pour tout rationnel  $q$ ,  $f(q) = \alpha q$ . On sait de plus que pour tout rationnel  $q$ ,  $f(qx) = qf(x)$ . On peut alors montrer que pour

$X \in \mathbb{Q}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \binom{n}{k} \alpha^k X^k f(x)^{n-k} &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{k} f(X)^k f(x)^{n-k} = (f(X) + f(x))^n = f(X + x)^n = f((X + x)^n) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n \binom{n}{k} X^k x^{n-k}\right) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{k} f(X^k x^{n-k}) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{k} X^k f(x^{n-k}). \end{aligned}$$

En posant respectivement  $P$  et  $Q$  les polynômes  $\sum_{i=1}^n \binom{n}{k} \alpha^k X^k f(x)^{n-k}$  et  $\sum_{i=1}^n \binom{n}{k} X^k f(x^{n-k})$  respectivement, on en déduit que  $P - Q$  admet une infinité de racines et est donc nul. En particulier, le coefficient devant  $X^{n-2}$  est le même dans ces deux polynômes, ce qui se réécrit comme  $\alpha^{n-2} f(x)^2 = f(x^2)$ . En particulier, on en déduit qu'il y a un quart de plan sans points du graphe de  $f$ . L'exercice 4 permet alors de conclure que  $f$  est linéaire.

Après vérification, les seules solutions sont la fonction nulle, l'identité et, si  $n$  est impair, la fonction  $-\text{Id}$ .

Solution de l'exercice 7 L'étude des petites valeurs ainsi que l'omniprésence des puissances de 2 donne rapidement une expression plus agréable de  $f$  : c'est la fonction qui renverse l'écriture en base 2. Les équations de l'énoncé définissant clairement intégralement  $f$ , il suffit de vérifier que cette autre fonction, que nous nommerons  $g$  vérifie aussi ces conditions. Fixons  $n \in \mathbb{N}^*$  et notons  $\overline{b_1 b_2 \dots b_n}^2$  l'écriture en base 2 de  $n$ . Alors  $g(1) = g(\overline{1}) = \overline{1} = 1$ ,  $g(3) = g(\overline{11}) = \overline{11} = 3$ , et :

$$g(2n) = g(\overline{b_1 b_2 \dots b_n 0}) = \overline{0 b_n \dots b_2 b_1}^2 = \overline{b_n \dots b_2 b_1}^2 = g(\overline{b_1 b_2 \dots b_n}) = g(n).$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} g(4n+1) &= g(\overline{b_1 b_2 \dots b_n 01}) = \overline{10 b_n \dots b_2 b_1}^2 = 2^n + \overline{1 b_n \dots b_2 b_1}^2 \\ &= 2 \cdot \overline{1 b_n \dots b_2 b_1}^2 - \overline{b_n \dots b_2 b_1}^2 = 2g(2n+1) - g(n), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} g(4n+3) &= g(\overline{b_1 b_2 \dots b_n 11}) = \overline{11 b_n \dots b_2 b_1}^2 = 2 \cdot 2^n + \overline{1 b_n \dots b_2 b_1}^2 \\ &= 3 \cdot \overline{1 b_n \dots b_2 b_1}^2 - 2 \cdot \overline{b_n \dots b_2 b_1}^2 = 2g(2n+1) - g(n). \end{aligned}$$

Le nombre de points fixes se calcule alors facilement : la moitié (au sens large) du nombre en détermine le reste, et il faut que le dernier chiffre soit 1. En utilisant que  $2011 = \overline{11111011011}^2$ , cela donne un total de  $1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 2 \cdot (14) = 90$  points fixes.

Solution de l'exercice 8 Supposons par l'absurde que  $f$  est surjective.

Notons pour tout entier  $n$  strictement positif  $a_n$  un antécédent de  $n$ .

Remarquons qu'en posant  $x = u$  puis  $y = v$  on montre que  $f(u) = f(v)$  pour  $u, v \in \mathbb{R}$ , et que pour  $n > 0$  :

$$\begin{aligned} f\left(u + \frac{1}{n}\right) &= f\left(u + \frac{1}{f(a_n)}\right) = f\left(a_n + \frac{1}{f(u)}\right) = f\left(a_n + \frac{1}{f(v)}\right) \\ &= f\left(v + \frac{1}{f(a_n)}\right) = f\left(v + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On peut appliquer ce raisonnement  $m$  fois pour montrer que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R} : f(u) = f(v), \forall m, n \in \mathbb{N}^*, f\left(u + \frac{m}{n}\right) = f\left(v + \frac{m}{n}\right).$$

Ainsi, on a montré que  $\forall q \in \mathbb{Q}_+^* : f(u) = f(v), \forall m, n \in \mathbb{N}^*, f(u + q) = f(v + q)$ . Or, en appliquant l'équation de l'énoncé, on voit que  $f\left(a_1 + \frac{1}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 - 1 + \frac{1}{f(a_1)}\right) = f(a_1)$ . Ainsi, en appliquant un certain nombre de fois le résultat précédent, on voit que  $f(a_1) = f\left(a_1 + \frac{1}{f(a_1-1)}\right), f\left(a_1 + \frac{1}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{2}{f(a_1-1)}\right), f\left(a_1 + \frac{2}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{3}{f(a_1-1)}\right)$  jusqu'à  $f\left(a_1 + \frac{f(a_1-1)-1}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{f(a_1-1)}{f(a_1-1)}\right)$ . En combinant toutes ces égalités, on en déduit que  $f(a_1) = f(a_1 + 1)$ . On en déduit alors immédiatement que  $\forall q \in \mathbb{Q}_+^*, f(a_1 + q) = f(a_1 + q + 1)$ .

On remarque que l'égalité de l'énoncé montre (puisque le second membre parcourt alors  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}^*$ ) que  $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{1}{\mathbb{N}^*}\right) = \mathbb{N}^*$ . Pour les valeurs particulières suivantes de  $x$ , on en déduit donc que :

$$\begin{cases} x = a_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow \exists \alpha : f\left(a_1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}\right) = 1. \\ y = a_1 \Rightarrow \exists \beta : f\left(a_1 + \frac{1}{\beta}\right) = q \text{ où } \frac{p}{q} \text{ est l'écriture irréductible de la fraction } \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

On déduit alors de l'équation de l'énoncé ainsi que de la propriété  $\forall q \in \mathbb{Q}_+^*, f(a_1 + q) = f(a_1 + q + 1)$  que :

$$\begin{aligned} f\left(a_1 + \frac{1}{q}\right) &= f\left(a_1 + \frac{1}{f\left(a_1 + \frac{1}{\beta}\right)}\right) \\ &= f\left(a_1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{f(a_1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{1}{\beta} + 1\right) = f\left(a_1 + \frac{1}{\beta}\right) = q \end{aligned}$$

Soit  $k$  un entier strictement positif tel que  $kp \equiv [q]$  (existant d'après Bézout). Alors, en utilisant  $\frac{kp-1}{q}$  fois cette même propriété, on déduit de  $f\left(a_1 + \frac{1}{q}\right) = q$  que  $f\left(a_1 + \frac{kp}{q}\right) = q$ . En utilisant plusieurs fois la stabilité par addition par un rationnel de l'égalité entre les images, on déduit de  $f(a_1) = 1 = f\left(a_1 + \frac{p}{q}\right)$  que  $f\left(a_1 + \frac{kp}{q}\right) = 1$ . Ainsi,  $q = 1$ , ce qui est contradictoire puisque  $\frac{p}{q}$  est défini comme étant la somme de  $\frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}$ .

### 3 Test

**Exercice 1** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

**Exercice 2** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(f(n)) < f(n + 1).$$

**Exercice 3** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(x)f(yf(x)) = f(x + y).$$

**Exercice 4** Trouver toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

**- Correction -**

Solution de l'exercice 1 En laissant  $x$  fixé et en faisant varier  $y$ , on voit immédiatement que  $f$  est surjective. De plus, substituer à  $y$  deux antécédents d'un même nombre montre que  $f$  est injective.

Le changement de variable  $x = -x$  montre que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \pm f(x)$ . L'injectivité de  $f$  assure alors que  $\forall x \neq 0, f(-x) = -f(x)$ . En particulier, si  $f^{-1}(0) \neq 0, f(-f^{-1}(0)) = -f(f^{-1}(0)) = 0 = f(f^{-1}(0))$ , d'où par injectivité  $-f^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ , ce qui est contradictoire avec la supposition  $f^{-1}(0) \neq 0$ . On a donc prouvé que  $f(0) = 0$ . En particulier, on a montré que  $f$  était impaire.

Injecter  $x = 0$  dans l'équation originale montre que  $f$  est involutive. De plus, injecter  $y = 0$  dans l'équation originale montre que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)^2$ . En remplaçant  $y$  par  $f(y)$  dans l'équation originale, on en déduit en utilisant ces deux résultats que  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y)$ . Cela se réécrit bien sûr sous la forme  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, f(a + b) = f(a) + f(b)$ . Finalement, l'impairité permet de conclure que  $f$  respecte bien l'équation fonctionnelle de Cauchy.

De plus, l'identité  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)^2$  assure que  $f$  est positive sur les positifs, ce qui prouve que son graphe n'est pas dense dans le plan (le quart de plan inférieur droit ne contenant aucun point du graphe de  $f$ ). Le résultat du cours montre alors que  $f$  est linéaire.

Après vérification, on en déduit que l'unique solution à cette équation est la fonction identité.

Solution de l'exercice 2 Soit pour tout entier naturel  $n$   $P_n$  la proposition " $\forall m \in 0; 1; \dots; n, \forall k \in \mathbb{N}_{\geq m+1}, f(m) < f(k)$ " que nous allons prouver par récurrence.

Prouvons  $P_0$ . Soit  $\alpha$  un entier où  $f$  atteint son minimum. Supposons par l'absurde que  $\alpha \geq 1$ . L'inégalité de l'énoncé nous assure alors que  $f(f(\alpha - 1)) < f(\alpha)$ , ce qui contredit clairement la définition de  $\alpha$ . Ainsi,  $\alpha = 0$ , ce qui prouve bien  $P_0$ .

Soit  $n$  un entier naturel et supposons que  $P_n$  est vérifiée. Soit alors  $\alpha$  un entier où  $f$  atteint son minimum sur  $(\mathbb{N})_{\geq n+1}$ . Supposons par l'absurde que  $\alpha > n + 1$ . Alors, l'inégalité de l'énoncé nous assure que  $f(f(\alpha - 1)) < f(\alpha)$ , ce qui est contradictoire sauf si  $f(\alpha - 1) \leq n$ . Mais alors, par stricte croissance de  $f$  sur  $0; 1; \dots; n, f(\alpha - 1) \leq n \leq f(n)$ , ce qui contredit l'hypothèse de récurrence puisque  $\alpha - 1 > n$ . Ainsi,  $\alpha = n + 1$ , ce qui assure que  $P_{n+1}$  est vérifiée.

Ainsi, on a prouvé par récurrence que  $P_n$  était vérifiée pour tout entier naturel  $n$ . Ceci assure en particulier que  $f$  est strictement croissante. La condition de l'énoncé assure alors directement que pour tout entier naturel  $n, f(n) < n + 1$ . Or l'hypothèse de stricte croissance assure que  $n \leq f(n)$ , ce qui prouve que  $f(n) = n$ .

Après vérification, on en déduit que l'unique solution à cette inéquation est la fonction identité.

Solution de l'exercice 3 Montrons dans un premier temps par l'absurde que  $f \leq 1$ . Supposons donc qu'il existe  $x \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $f(x) > 1$ . On peut alors substituer  $y = \frac{x}{f(x)-1}$  dans l'équation d'origine, ce qui nous donne après simplification par  $\frac{xf(x)}{f(x)-1}$  que  $f(x) = 1$ , identité clairement contradictoire avec la supposition  $f(x) > 1$ . Ainsi, on a prouvé que  $f \leq 1$ .

On remarque alors que,  $f(yf(x))$  étant inférieur à 1, nous obtenons que  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq f(x + y)$ , ce qui prouve que  $f$  est décroissante.

On en déduit immédiatement que, mis à part si  $f$  est la fonction constante égale à 1 :

$$\exists a \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in ]0; a[, \quad f(x) = 1 \text{ et } \forall x \in ]a; +\infty[, \quad f(x) < 1.$$

Mais, en supposant  $a > 0$ , on obtient la contradiction  $1 < 1$  en posant  $x = y = \frac{2}{3}$  dans l'équation originale. Ainsi, on obtient que  $a = 0$ , ce qui signifie simplement que  $f < 1$ . On en déduit immédiatement que  $f$  est strictement décroissante (de la même façon que l'on avait montré qu'elle était décroissante), ce qui prouve en particulier qu'elle est injective.

Pour  $x, y > 0$ , nous pouvons alors conduire le calcul suivant (en remarquant que  $x + y - yf(x) > 0$  puisque  $yf(x) < y$ ) :

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) = f((yf(x)) + (x+y-yf(x))) = f(yf(x))f(f(yf(x))(x+y-yf(x))).$$

Après simplification par  $f(yf(x))$ , il suffit d'utiliser l'injectivité de  $f$  pour montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x = f(yf(x))(x+y-yf(x)).$$

En fixant  $x$  et en posant  $y = \frac{z}{f(x)}$ , on voit alors que :

$$\forall z \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(z) = \frac{x}{x + \frac{z}{f(x)} - z}.$$

Ainsi, on en déduit après simplification par  $x$  que :

$$\exists \lambda : \forall z \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(z) = \frac{1}{1 + \lambda z}.$$

Après vérification (et en remarquant que la fonction constante égale à 1 correspond au cas  $\lambda = 0$ ), on en déduit que les solutions à cette équation fonctionnelle sont les applications de la forme  $x \mapsto \frac{1}{1+\lambda x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Solution de l'exercice 4 Soit  $g$  l'application  $f - \text{Id}$ .

L'équation de l'énoncé se réécrit après simplification sous la forme suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x+y+g(y)) = g(x+y) + y.$$

Remarquons dans un premier temps que cette équation implique que  $g$  est injective. En effet, si  $y_1$  et  $y_2$  sont des réels strictement positifs vérifiant la condition  $g(y_1) = g(y_2)$ , on déduit à l'aide de l'équation que :

$$g(y_1 + y_2) + y_2 = g(y_1 + y_2 + g(y_2)) = g(y_2 + y_1 + g(y_1)) = g(y_2 + y_1) + y_1.$$

On en déduit après simplification que  $y_1 = y_2$ , ce qui prouve que  $g$  est effectivement injective.

On remarque ensuite que, en notant  $a = x + y$  et  $b = y$ , l'équation fonctionnelle se réécrit ainsi :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* : a > b, \quad g(a + g(b)) = g(a) + b.$$

En prenant un réel strictement positif  $c$  suffisamment grand, on peut alors faire le calcul suivant :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(c + g(a) + g(b)) = g(c + g(a)) + b = g(c) + a + b = g(c + g(a) + g(b)).$$

En utilisant l'injectivité de  $g$  puis en simplifiant par  $c$ , on voit que  $g$  respecte l'équation de Cauchy.

Finalement,  $f$  étant à valeurs strictement positives, on sait que  $g > -\text{Id}$ , ce qui montre que le graphe de  $g$  n'est pas dense (il n'y a aucun point dans le triangle délimité par la droite d'équation  $y = -x$  et l'axe des ordonnées). Ainsi, le cours nous assure que  $g$  est linéaire. On en déduit immédiatement que  $g$  est également linéaire.

Après vérification, on en déduit que l'unique solution à cette équation fonctionnelle est  $2\text{Id}$ .



# V. Troisième période

## 1 Incontournable : Géométrie

### 1 Cours

Nous renvoyons aux cours de géométrie téléchargeables sur le site d'Animath.

### 2 Premier TD

**Exercice 1** Soit  $ABC$  un triangle. Montrer que l'intersection de la bissectrice issue de  $\widehat{B}$  et de la médiatrice de  $[AC]$  appartient au cercle circonscrit de  $ABC$ .

**Exercice 2** Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles tels que  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ ,  $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$  et  $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ . Montrer que  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ .

**Exercice 3** Soit  $ABC$  un triangle. Sur la droite  $(AC)$ , on place les deux points  $E$  et  $E'$  tels que les longueurs  $AE'$ ,  $AE$ ,  $AB$  soient égales et telles que  $E'$  soit du côté de  $C$ . Montrer qu'alors :

1. les droites  $(BE)$  et  $(BE')$  sont respectivement parallèles à la bissectrice intérieure et à la bissectrice extérieure de l'angle  $\widehat{A}$ ,
2. le triangle  $EBE'$  est un triangle rectangle.

**Exercice 4** Soit  $ABC$  un triangle aux angles aigus d'orthocentre  $H$ . Montrer que les symétriques de  $H$  par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.

**Exercice 5** On considère deux cercles tangents intérieurement en un point  $C$  et une corde  $[AB]$  du grand cercle tangente au petit cercle en  $E$ . Montrer que la droite  $(CE)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ACB}$ .

**Exercice 6** Soient  $A_0, B, C$  trois points non alignés du plan. On note  $A_1$  le centre du cercle inscrit de  $A_0BC$ ,  $A_2$  celui de  $A_1BC$  et ainsi de suite pour construire les points  $A_2, A_3, \dots$ . Pour un entier  $n$ , calculer le rayon du cercle inscrit de  $A_nBC$ .

**Exercice 7** Une droite passant par le sommet  $A$  d'un triangle équilatéral  $ABC$  coupe le côté  $[BC]$  en  $Q$  et le cercle circonscrit au triangle en  $P$ . Montrer que  $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$ .

- Correction -

Solution de l'exercice 1 Notons  $D$  l'intersection de la bissectrice issue de l'angle  $\widehat{B}$  et du cercle circonscrit de  $ABC$  (voir figure). Il faut et il suffit de montrer que  $D$  appartient à la médiatrice

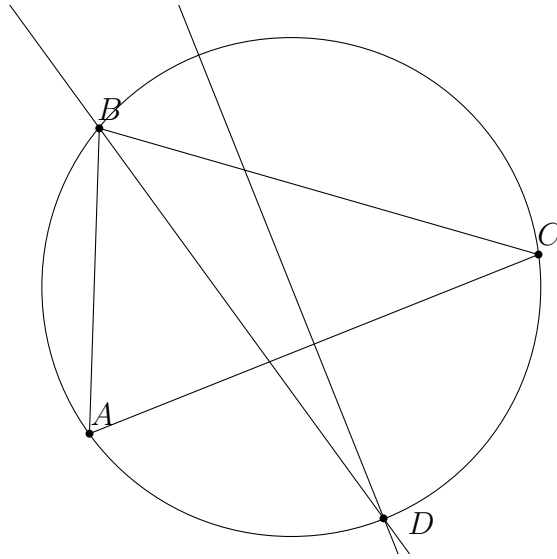


FIGURE 1 – Exercice 1

de  $[AC]$ . Comme les angles  $\widehat{ABD}$  et  $\widehat{DBC}$  sont égaux, ceci implique les longueurs des arcs  $\widehat{AD}$  et  $\widehat{DC}$  sont égales, et donc que  $D$  appartient à la médiatrice de  $[AC]$ .

Solution de l'exercice 2 Superposons les deux triangles de sorte que  $A = A'$  et que les points  $B, A, B'$  et  $C, A, C'$  soient respectivement alignés, comme sur la figure 2.

Les angles  $ABC$  et  $A'B'C'$  étant égaux, les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  sont parallèles. On en déduit que le résultat par application du théorème de Thalès.

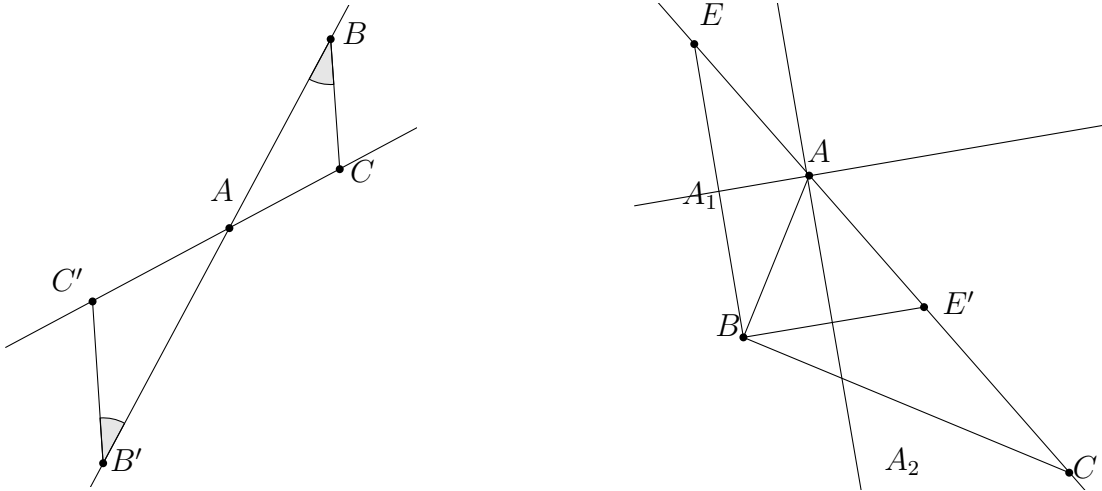


FIGURE 2 – Exercices 2 et 3

Solution de l'exercice 3 Notons  $AA_1$  et  $AA_2$  respectivement les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle  $\widehat{A}$ . Les triangles  $EAB$  et  $E'AB$  sont isocèles, et  $AA_1$  (resp.  $AA_2$ ) est perpendiculaire à  $(BE')$  (resp. à  $(BE)$ ). Comme  $(AA_1)$  et  $AA_2$  sont perpendiculaires, les droites  $(BE)$  et  $(AA_1)$ , respectivement  $(BE')$  et  $(AA_2)$  sont parallèles.

Solution de l'exercice 4 Notons  $B_H$  le pied de la hauteur issue de  $B$  et  $B'$  son intersection avec le cercle circonscrit à  $ABC$  (voir figure 4).

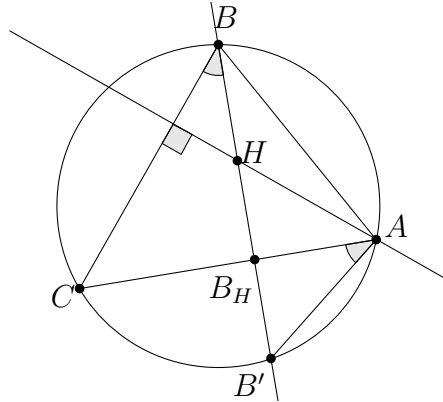


FIGURE 3 – Exercice 4

Il suffit de montrer que les angles  $\widehat{HAB_H}$  et  $\widehat{B_HAB'}$  sont égaux. En effet, dans ce cas, les triangles rectangles  $HAB_H$  et  $B_HAB'$  auraient trois angles identiques et un angle en commun et seraient alors égaux. Ceci implique  $B'B_H = B_HH$  et donc que  $B'$  est le symétrique de  $H$  par rapport au côté  $(AC)$ .

Montrons donc que  $\widehat{HAB_H} = \widehat{B_HAB'}$ . Notons  $\alpha = \widehat{HAB_H}$ . Comme les angles  $\widehat{HAB_H}$  et  $\widehat{CBB'}$  interceptent le même arc, ils sont égaux. On en déduit que  $\widehat{CBB'} = \beta$ , puis  $\widehat{BCA} = 90^\circ - \beta$  car  $CBB_H$  est rectangle en  $B_H$ . Mais alors  $\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{BCA} = \beta$ , ce qu'on voulait montrer.

On démontre de même que les symétriques de  $H$  par rapport aux autres côtés appartiennent au cercle circonscrit.

Solution de l'exercice 5

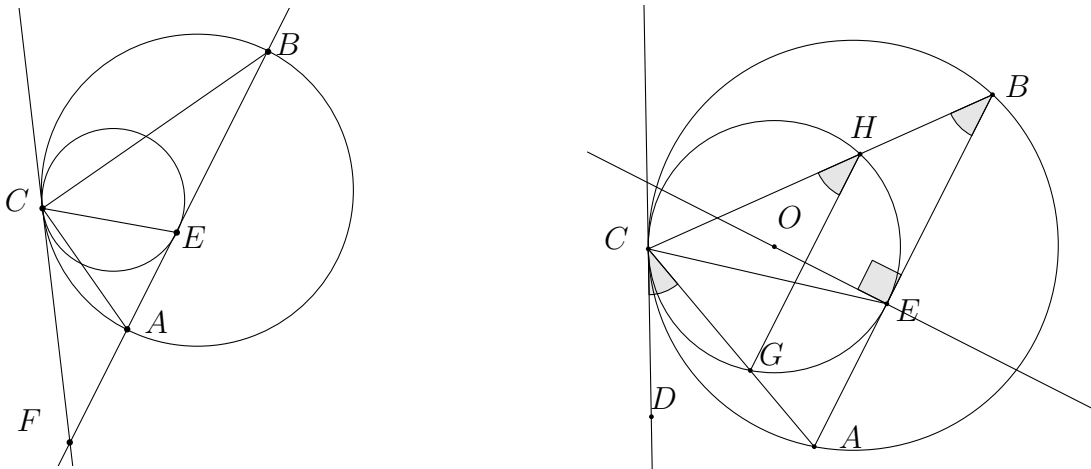


FIGURE 4 – Exercice 5.

- (Première solution) Soit  $F$  le point d'intersection de la corde  $(AB)$  avec la tangente commune. Les triangles  $FAC$  et  $FCB$  sont semblables et  $FC = FE$ . Par suite :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{FE}{FB} = \frac{FA}{FE} = \frac{FE - FA}{FB - FE} = \frac{AE}{EB},$$

et la droite  $(CE)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ACB}$ .

- (Deuxième solution, d'après des idées d'élèves) Notons  $O$  le centre du petit cercle et soient  $G, H$  les points d'intersection de respectivement  $(CB)$  et  $(CA)$  avec le petit cercle. On introduit le point  $D$  comme sur la figure 5. On commence par faire une petite chasse aux angles pour montrer que  $(AB)$  et  $(GH)$  sont parallèles. On a  $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{GHC}$ . Donc  $(AB)$  et  $(GH)$  sont parallèles. Or  $(OE)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires. Donc  $(OE)$  et  $(GH)$  sont perpendiculaires. Donc  $(OE)$  est la médiatrice de  $[GH]$ . Donc, d'après le premier exercice,  $(CE)$  est la bissectrice de  $\widehat{ACB}$ .

### Solution de l'exercice 6

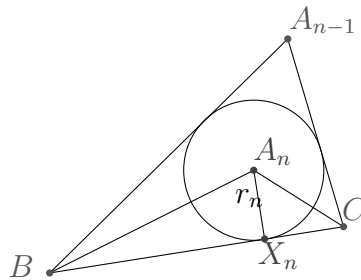


FIGURE 5 – Exercice 6

Notons  $r_n$  le rayon cherché et  $X_n$  le point de tangence entre le cercle inscrit de  $A_n B C$  et  $[BC]$ . Remarquons qu'en notant  $\beta = \widehat{B}$  et  $\gamma = \widehat{C}$ , on a  $\widehat{A_n B C} = \beta/2^n$  et  $\widehat{A_n C B} = \gamma/2^n$ . On en déduit que  $\widehat{B A_n C} = 180^\circ - (\beta + \gamma)/2^n$ . D'après la loi des sinus appliquée dans  $A_n C B$  :

$$B A_n = BC \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right)}{\sin\left(180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2^n}\right)}.$$

Donc  $B A_n = BC \sin(\gamma/2^n) / \sin((\beta + \gamma)/2^n)$ . Comme  $B A_n X_n$  est rectangle, on en déduit que :

$$r_n = BC \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2^n}\right)}.$$

Solution de l'exercice 7 L'angle  $\widehat{BPC}$  valant  $120^\circ$ , on peut prolonger la demi-droite  $(CP)$  jusqu'à un point  $D$  tel que le triangle  $BDP$  soit équilatéral. Alors les droites  $(AP)$  et  $(BD)$  sont parallèles, et les triangles  $BCD$  et  $QCP$  sont semblables. On en déduit que :

$$\frac{BD}{QP} = \frac{CD}{CP} = 1 + \frac{PD}{CP}.$$

En divisant cette égalité par  $BD = PB = PD$ , on obtient l'égalité demandée.

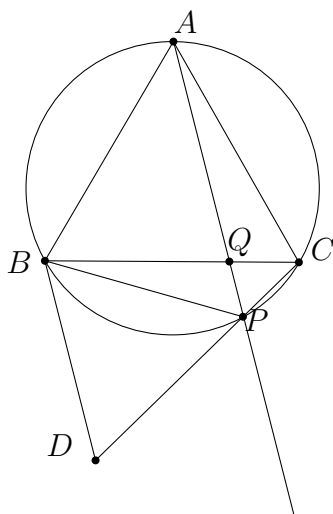


FIGURE 6 – Exercice 7

### 3 Second TD

**Exercice 1** Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux cercles de même rayon, sécants en  $A$  et  $B$ . Une tangente commune aux deux cercles les touche en  $C$  et  $D$ . Montrer que  $(AC)$  est orthogonale à  $(BD)$ .

**Exercice 2** (Théorème du pôle Sud) Soit  $ABC$  un triangle et  $\Gamma$  son cercle circonscrit. On note  $I$  le centre de son cercle inscrit, et  $I_A$  le centre du cercle exinscrit à  $A$ . La bissectrice issue de  $A$  coupe  $\Gamma$  en  $D$ .

Montrer que  $DB = DC = DI = DI_A$ .

**Exercice 3** (Application) Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscriptible. Montrer que les centres des cercles inscrits à  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  et  $BCD$  forment un rectangle.

**Exercice 4** (Droite de Simson) Soit  $ABC$  un triangle et  $\Gamma$  son cercle circonscrit. Soit  $D$  un point du plan, et soient  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les projetés orthogonaux respectifs de  $D$  sur  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ . Montrer que  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont alignés si et seulement si  $D \in \Gamma$ .

**Exercice 5** Soit  $ABC$  un triangle,  $\Gamma$  son cercle inscrit et  $\Gamma_A$  son cercle exinscrit à  $A$ .  $\Gamma$  touche  $(BC)$  en  $I$ ,  $\Gamma_A$  touche  $(BC)$  en  $J$ . Soit  $K$  le point d'intersection de  $\Gamma$  et  $(AJ)$  le plus proche de  $A$ . Montrer que  $\widehat{JIK}$  est droit.

**Exercice 6** Soit  $ABCD$  un quadrilatère non croisé. Soient  $I$  et  $K$  les points du plan tels que  $ABI$  et  $CDK$  soient des triangles équilatéraux sortants par rapport à  $ABCD$ . Similairement, soient  $J$  et  $L$  les points du plan tels que  $BCJ$  et  $DAL$  soient des triangles équilatéraux rentrants par rapport à  $ABCD$ . Montrer que  $IJKL$  est un parallélogramme.

**Exercice 7** (Théorème de Napoléon) Soit  $ABC$  un triangle. On construit pour chaque côté du triangle un triangle équilatéral extérieur à  $ABC$  ayant ce côté comme base. Soient  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les centres respectifs des triangles équilatéraux de bases  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ . Montrer que  $A'B'C'$  est équilatéral.

**Exercice 8** (Triangle orthique) Soit  $ABC$  un triangle acutangle et  $H$  son orthocentre. Soient  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les pieds des hauteurs issues respectivement de  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Montrer que  $H$  est le centre du cercle inscrit à  $A'B'C'$ .

## - Correction -

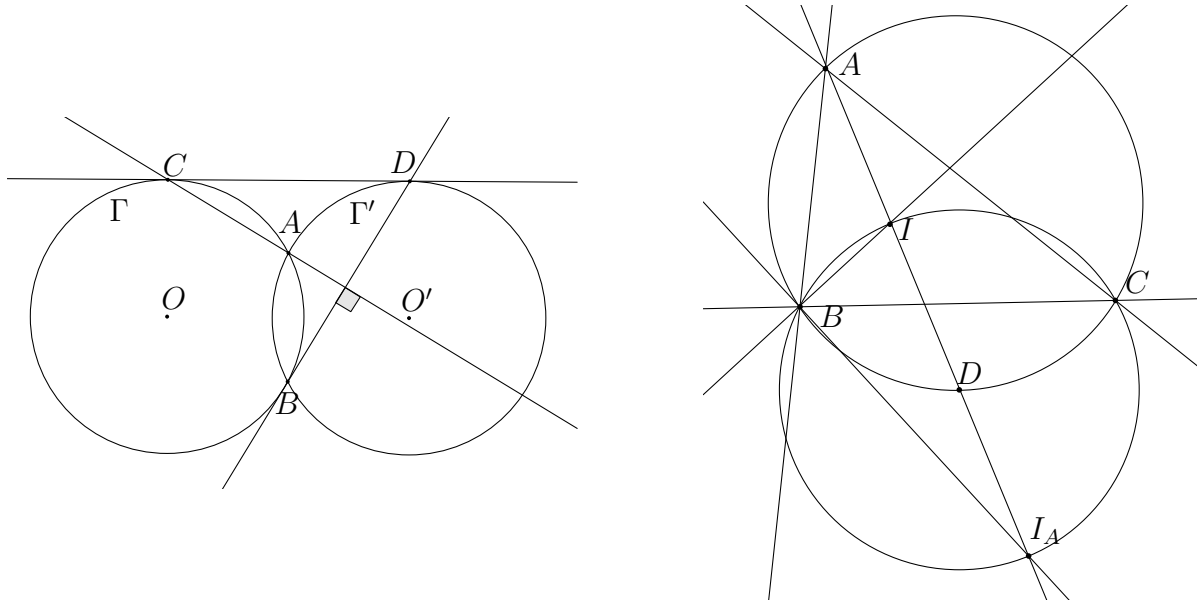


FIGURE 7 – Exercices 1 et 2

Solution de l'exercice 1 Il suffit de montrer que  $\widehat{ACD} + \widehat{BDC} = 90^\circ$ . D'après le théorème de l'angle inscrit, cela revient à prouver  $\widehat{AOC} + \widehat{BO'D} = 180^\circ$ , avec  $O$  et  $O'$  les centres respectifs de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . Or la symétrie centale de centre  $M$  le milieu de  $[AB]$  envoie  $B$  sur  $A$ ,  $O'$  sur  $O$  et  $D$  sur  $C'$  le point diamétralement opposé à  $C$ , donc  $\widehat{BO'D} = \widehat{AOC'}$ , ce qui donne le résultat demandé.

Solution de l'exercice 2 D'après le théorème de l'angle inscrit,  $(OD)$  est la bissectrice de  $\widehat{BOC}$ , donc la médiatrice de  $[BC]$ , donc  $BD = CD$ . Montrons que  $BDI$  est isocèle en  $I$ . On a  $\widehat{IBC} = \beta/2$  et  $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \alpha/2$ , donc  $\widehat{IBD} = \alpha/2 + \beta/2$ . De plus,  $\widehat{BID} = 180^\circ - \widehat{BIA} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \alpha/2 + \beta/2$ . Donc  $BD = ID$ . Enfin, comme les bissectrices intérieures et extérieures sont orthogonales, on peut obtenir  $I_A$  comme l'intersection de  $(AD)$  et de la perpendiculaire à  $(BI)$  passant par  $B$ . Le "théorème de l'équerre" montre alors que  $I_A$  est sur le cercle de centre  $D$  et contenant  $I$ . Donc  $DB = DC = DI = DI_A$ .

Solution de l'exercice 3 Soient  $D'$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les centres des cercles inscrit respectivement à  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $ACD$  et  $ABD$ . Appelons  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des arcs  $BC$  et  $AD$ . L'exercice précédent montre que  $IB = IC = ID' = IA'$ , et comme  $(IJ)$  est la bissectrice de  $\widehat{AID}$  (th. de l'angle inscrit), c'est la bissectrice de  $\widehat{A'ID'}$  et donc la médiatrice de  $[A'D']$ . On montre similairement que c'est aussi la médiatrice de  $[C'B']$ , donc  $(IJ)$  est un axe de symétrie de  $A'B'C'D'$  qui échange  $A'$  et  $D'$  ainsi que  $B'$  et  $C'$ .  $A'B'C'D'$  est donc un trapèze isocèle. Si on appelle  $K$  et  $L$  les milieux respectifs des arcs  $AB$  et  $CD$ , on montre de la même manière que  $(KL)$  est un autre axe de symétrie de  $A'B'C'D'$ , qui échange  $C'$  et  $D'$  ainsi que  $A'$  et  $B'$ . Cela prouve que  $A'B'C'D'$  est un rectangle.

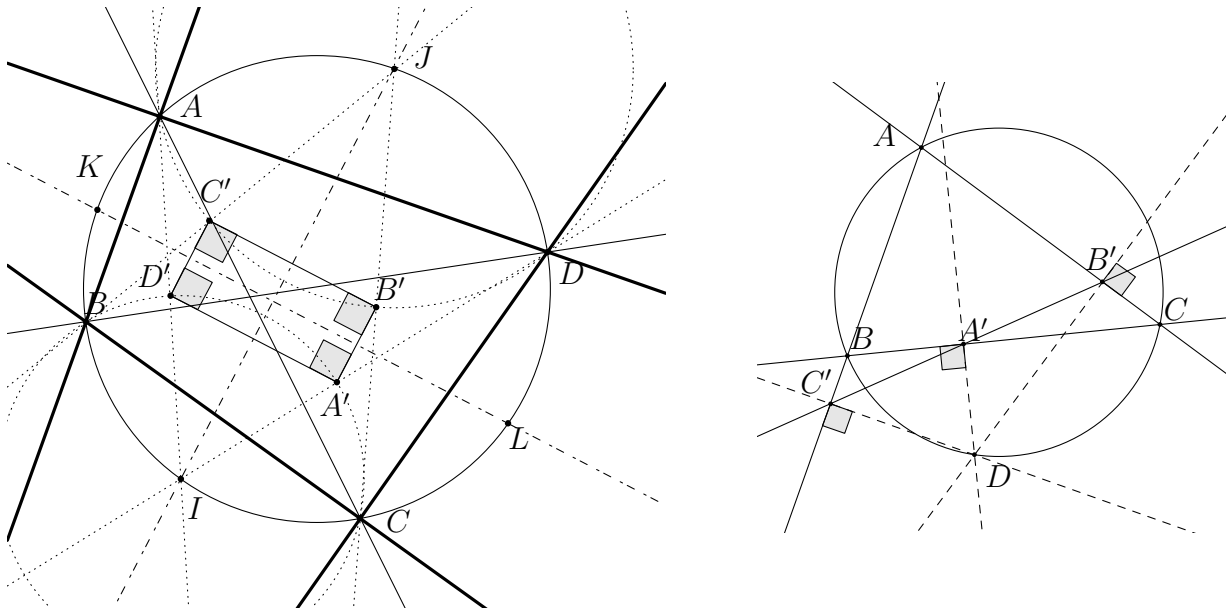


FIGURE 8 – Exercices 3 et 4

Solution de l'exercice 4

$$\begin{aligned}
 A', B', C' \text{ alignés} &\Leftrightarrow \widehat{BA'C'} = \widehat{CA'B'} \\
 &\Leftrightarrow \widehat{BDC'} = \widehat{CDB'} \\
 &\Leftrightarrow \widehat{B'DC'} = \widehat{CDB} \\
 &\Leftrightarrow ABCD \text{ inscriptible,}
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \widehat{B'DC'} = 180^\circ - \widehat{BAC}.$$

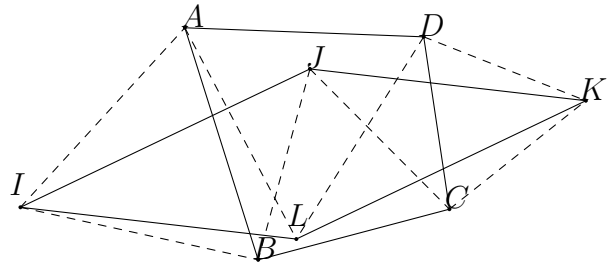
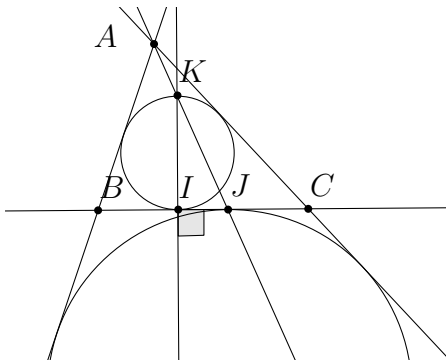


FIGURE 9 – Exercices 5 et 6

Solution de l'exercice 5 L'homotétie de centre  $A$  qui envoie  $\Gamma_A$  sur  $\Gamma$  envoie  $J$  (le point d'intersection de  $(AJ)$  et  $\Gamma_A$  le plus proche de  $A$ ) sur  $K$ , donc la tangente à  $\Gamma$  en  $K$  est l'image de  $(BC)$  par cette homotétie et est donc parallèle à  $(BC)$ . Donc  $[KI]$  est un diamètre de  $\Gamma$ , donc  $(KI) \perp (BC)$ .

Solution de l'exercice 6 La rotation de centre  $B$  et d'angle  $\pi/3$  envoie  $A$  sur  $I$  et  $C$  sur  $J$ . La rotation de centre  $D$  et d'angle  $\pi/3$  envoie  $A$  sur  $L$  et  $C$  sur  $K$ . Donc  $\vec{IJ}$  et  $\vec{LK}$  sont tous deux

l'image par rotation d'angle  $\pi/3$  de  $\vec{AC}$ , donc sont égaux. Donc  $IJKL$  est un parallélogramme.

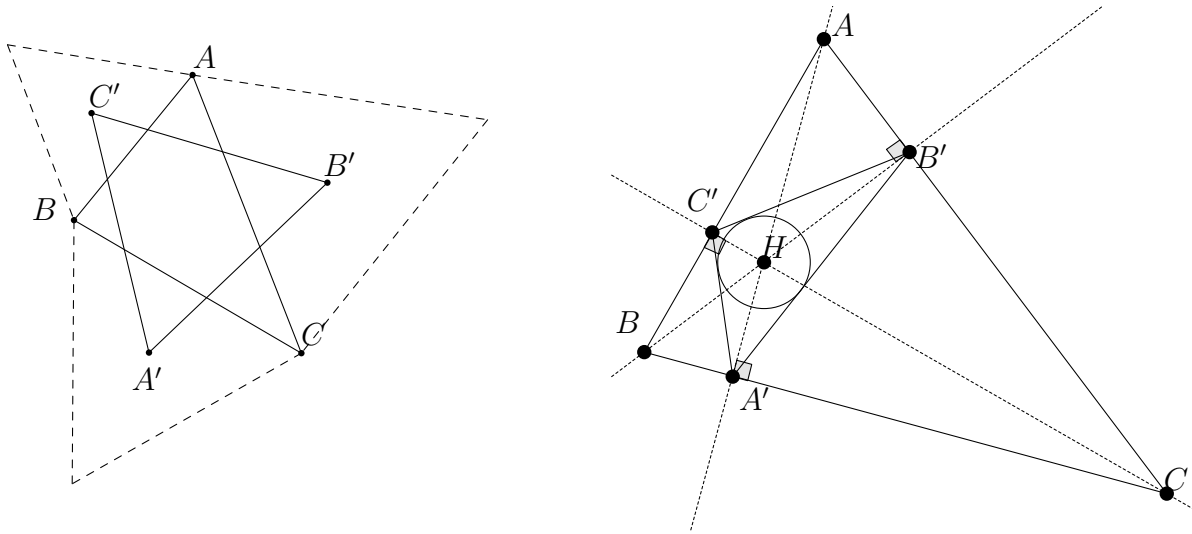


FIGURE 10 – Exercices 7 et 8

Solution de l'exercice 7 Supposons  $ABC$  direct. Soient  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  les rotations de centres respectifs  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , et d'angles  $120^\circ$ . On a  $r_1 \circ r_2 \circ r_3 = Id$ . En effet, cette transformation est la composée de trois rotations d'angle  $120^\circ$ , donc est une translation. Mais comme  $r_1 \circ r_2 \circ r_3(B) = r_1 \circ r_2(A) = r_1(C) = B$ ,  $B$  est un point fixe de cette translation, donc la composée ci-dessus est l'identité. Soit maintenant  $A''$  tel que  $A''B'C'$  soit équilatéral direct, et notons  $a$ ,  $b$  et  $c$  les symétries axiales d'axes respectifs  $(B'C')$ ,  $(C'A')$  et  $(A'B')$ . On a  $r_3 = a \circ b$  et  $r_2 = c \circ a$ , donc  $r_2 \circ r_3 = c \circ a \circ a \circ b = c \circ b = r'_1$ , où  $r'_1$  est défini par  $r'_1 = c \circ b$  et est donc la rotation de centre  $A''$  et d'angle  $-120^\circ$ . Or on a  $r_1 \circ r'_1 = Id$ , donc  $r_1$  et  $r'_1$  sont l'inverse l'une de l'autre. Entre autres, ce sont des rotations de même centre, donc  $A' = A''$  et donc  $A'B'C'$  est équilatéral.

Solution de l'exercice 8

Comme  $BC'HA'$  est inscriptible, on a  $\widehat{C'A'H} = \widehat{C'BH} = \widehat{ABB'} = 90^\circ - \alpha$ . De même, comme  $CB'HA'$  est inscriptible, on a  $\widehat{B'A'H} = \widehat{B'CH} = 90^\circ - \alpha$ . Donc  $(A'H)$  est la bissectrice de  $\widehat{B'A'C'}$ . Par symétrie (ou par la même technique), on montre que  $(B'H)$  est la bissectrice de  $\widehat{A'B'C'}$  et que  $(C'H)$  est la bissectrice de  $\widehat{B'C'A'}$ . Donc  $H$  est le centre du cercle inscrit au triangle  $A'B'C'$ , dit *triangle orthique* du triangle  $ABC$ .

## 4 Test

**Exercice 1** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $C$ . Soit  $K$  le pied de la hauteur issue de  $C$  dans le triangle  $ABC$ . Soit  $E$  le pied de la bissectrice issue de  $C$  dans le triangle  $ACK$ .

Prouver que  $BE = BC$ .

**Exercice 2** Soit  $\Gamma$  un cercle,  $BC$  une corde de  $\Gamma$ . Soit  $A$  le milieu de l'arc  $BC$ . Par  $A$  on mène deux cordes quelconques  $AD$  et  $AE$  qui coupent le segment  $[BC]$  en  $F$  et  $G$  respectivement.

Montrer que le quadrilatère  $DFGE$  est inscriptible dans un cercle.



**Exercice 3** On considère deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui se coupent en  $A$  et en  $B$ . La tangente en  $A$  à  $\Gamma_1$  recoupe  $\Gamma_2$  en  $C$  et la tangente en  $B$  à  $\Gamma_2$  recoupe  $\Gamma_1$  en  $D$ . La droite  $(BC)$  recoupe  $\Gamma_1$  en  $F$  et la droite  $(AD)$  recoupe  $\Gamma_2$  en  $E$ .

Prouver que  $DECF$  est un parallélogramme.

**Exercice 4** Les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , de centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$ , se rencontrent en  $A$  et  $B$ . Soit  $P \in ]AB[$  autre que le milieu de  $[AB]$ . La droite menée par  $P$  et perpendiculaire à  $(O_1P)$  rencontre  $\Gamma_1$  en  $C$  et en  $D$ . La droite menée par  $P$  et perpendiculaire à  $(O_2P)$  rencontre  $\Gamma_2$  en  $E$  et en  $F$ .

Prouver que  $C, D, E, F$  sont les sommets d'un rectangle.

- Correction -

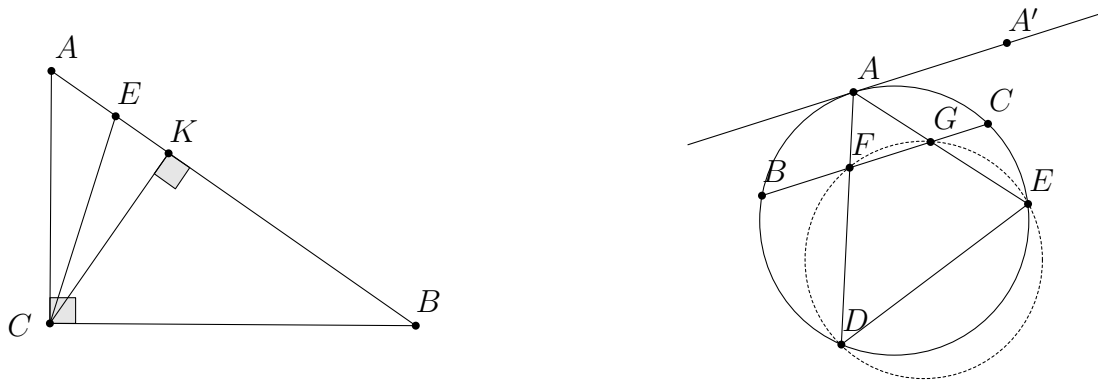


FIGURE 11 – Exercices 1 et 2

Solution de l'exercice 1 Soit  $\alpha = \widehat{CEB}$ . On a alors  $\widehat{ACE} = \widehat{ECK} = 90^\circ - \alpha$ , donc  $\widehat{ECB} = 90^\circ - \widehat{ACE} = \alpha$ , donc  $CEB$  est isocèle en  $B$ .

Solution de l'exercice 2 Considérons la tangente  $a$  au cercle en  $A$ , et un point  $A'$  de  $a$  du même côté de  $(OA)$  que  $C$ . On a alors  $\widehat{EDA} = \widehat{EAA'} = \widehat{EGC}$ , la première égalité étant le cas tangent du théorème de l'angle inscrit, et la deuxième provenant du fait que  $a$  est parallèle à  $(BC)$ . Donc  $\widehat{EDF} = \widehat{EGC} = 180^\circ - \widehat{EGF}$ , ce qui prouve que  $EGFD$  est inscriptible.

Solution de l'exercice 3 D'après le cas tangent du théorème de l'angle inscrit, on a  $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$  et  $\widehat{BDA} = \widehat{BAC}$ , donc les triangles  $ABC$  et  $DAB$  sont semblables, donc  $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$  et ainsi  $(DE)$  est parallèle à  $(CF)$ . De plus,  $\widehat{AEC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{ABF} = 180^\circ - \widehat{ADF}$  donc  $(EC)$  est parallèle à  $(DF)$ . Cela achève la démonstration.

Solution de l'exercice 4 Comme  $OCD$  et  $O'EF$  sont isocèles, on a  $PC = PD$  et  $PE = PF$ . De plus, comme  $P$  est sur l'axe radical des deux cercles, on a  $PC^2 = PC.PD = PA.PB = PE.PF = PE^2$ . Donc les diagonales  $[CD]$  et  $[EF]$  de  $CEDF$  sont de même longueur et se coupent en leur milieu, donc  $CEDF$  est un rectangle.

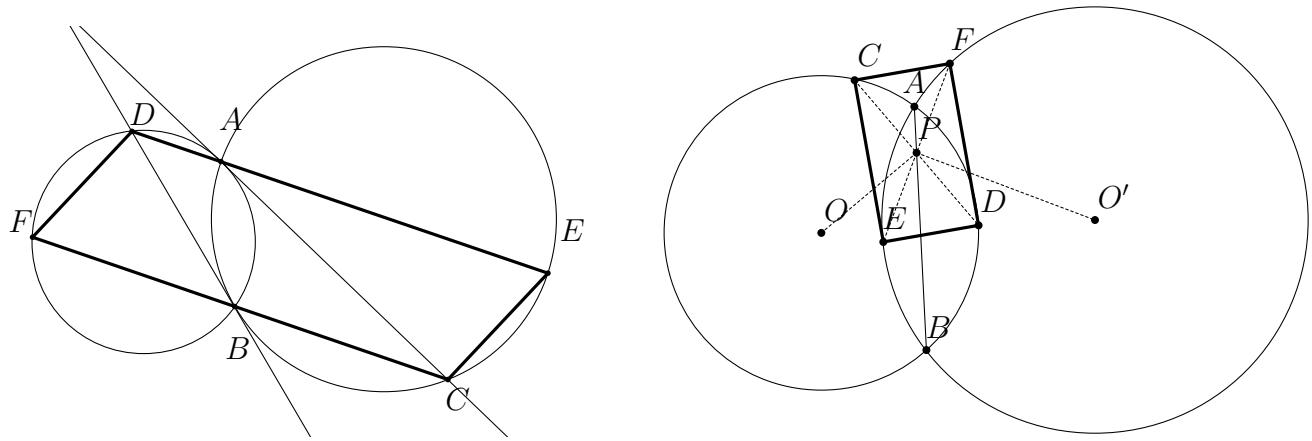


FIGURE 12 – Exercices 3 et 4

## 2 Avancés : Géométrie Projective

### 1 TD

**Exercice 1** Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$ , et  $P$  un point extérieur au cercle. Soit  $A \in \Gamma$  tel que  $(PA)$  soit tangente à  $\Gamma$ , et  $B$  le point diamétralement opposé à  $A$ . Soit  $\Delta$  une droite passant par  $P$  et coupant  $\Gamma$  en  $C$  et  $D$ . La parallèle à  $(PO)$  passant par  $C$  coupe  $(AB)$  en  $M$  et  $(BD)$  en  $E$ . Montrer que  $M$  est le milieu de  $[CE]$ .

**Exercice 2** Soit  $ABC$  un triangle, et  $A'$  le pied de la bissectrice issue de  $A$ . On considère un point  $X$  sur  $[A'A]$ , et on pose :  $B' = (BX) \cap (AC)$ ,  $C' = (CX) \cap (AB)$ ,  $P = (A'B') \cap (CX)$ , et  $Q = (A'C') \cap (BX)$ . Montrer que  $\widehat{PAC} = \widehat{QAB}$ .

**Exercice 3** Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux cercles sécants en  $A$  et  $A'$ . Une première tangente commune aux deux cercles les touche en  $B$  et  $C$ , et l'autre tangente commune les touche en  $D$  et  $E$ . Montrer que les orthocentres des triangles  $ABC$ ,  $A'BC$ ,  $ADE$  et  $A'DE$  forment un rectangle.

**Exercice 4** Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscriptible. On pose  $E = (AD) \cap (BC)$  et  $F = (AC) \cap (BD)$ . Soit  $M$  le milieu de  $[CD]$ , et  $N$  le point du cercle circonscrit à  $AMB$  distinct de  $M$  vérifiant  $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}$ . Montrer que  $E, F$  et  $N$  sont alignés.

**Exercice 5** Soit  $ABC$  un triangle,  $\Gamma$  son cercle inscrit, et  $I$  le centre de  $\Gamma$ . On note  $A', B'$  et  $C'$  les points de tangence respectifs de  $\Gamma$  avec  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ . Soit  $\Delta$  la droite parallèle à  $(B'C')$  passant par  $A$ . On pose  $J = (A'C') \cap \Delta$  et  $K = (A'B') \cap \Delta$ . Montrer que  $\widehat{JIK}$  est un angle aigu.

**Exercice 6** Soient  $a$  et  $b$  des tangentes respectives en  $A$  et  $B$  à un cercle  $\Gamma$ . Soit  $\Delta$  un diamètre de  $\Gamma$ . On pose  $A' = a \cap \Delta$ ,  $B' = b \cap \Delta$ , et  $S = (AB') \cap (A'B)$ . Soit  $T$  le projeté orthogonal de  $S$  sur  $\Delta$ . Montrer que  $(TS)$  est une bissectrice de  $\widehat{ATB}$ .

**Exercice 7** Soit  $ABC$  un triangle de cercle circonscrit  $\Gamma$ , et  $\Delta$  une droite. On pose  $D = (BC) \cap \Delta$ ,  $E = (CA) \cap \Delta$  et  $F = (AB) \cap \Delta$ . On choisit aussi  $A', B'$  et  $C'$  sur  $\Gamma$  tels que  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  soient parallèles à  $\Delta$ . Montrer que  $(A'D)$ ,  $(B'E)$  et  $(C'F)$  sont concourantes.

## - Correction -

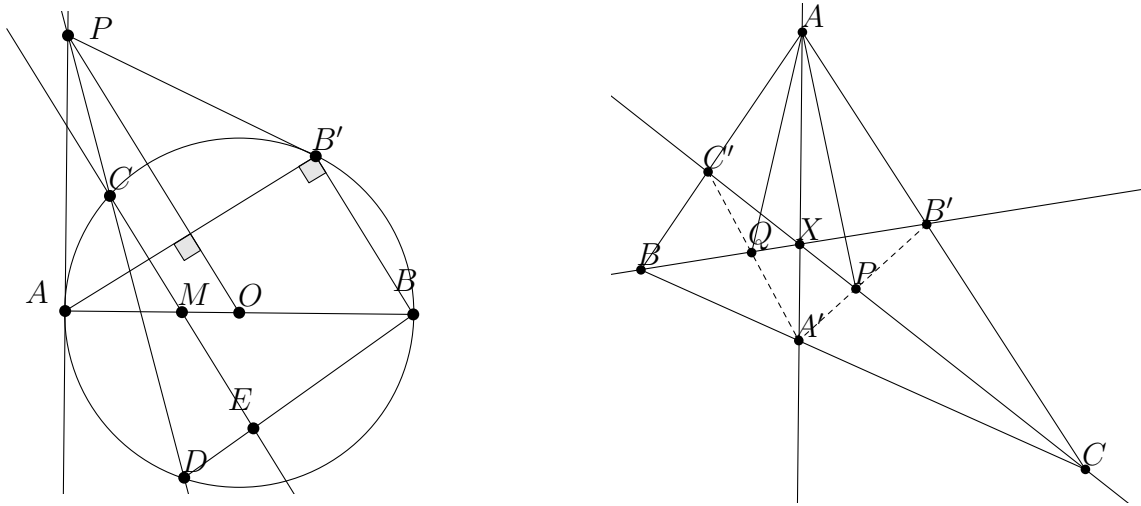


FIGURE 13 – Exercices 1 et 2

Solution de l'exercice 1 On veut montrer que  $C, E, M$  et  $\infty$  sont harmoniques sur  $(CE)$ . Projétons depuis  $B$  sur le cercle : cela revient à montrer que  $A, B', C$  et  $D$  sont harmoniques, où  $B'$  est le point d'intersection autre que  $B$  de la parallèle à  $(OP)$  passant par  $B$ . Or, on a :

$$\widehat{AOP} = \widehat{ABB'} = \widehat{BB'O} = \widehat{POB'},$$

donc  $B'$  est le pied de l'autre tangente à  $\Gamma$  issue de  $P$ , ce qui donne immédiatement l'harmonie de  $A, B, C, D$ .

Solution de l'exercice 2 Considérons la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$ , elle intersecte  $(BC)$  en  $D$  à l'infini. Le problème revient à prouver que les droites  $(AA'), (AD), (AQ), (AP)$  sont harmoniques, ce qui est un problème purement projectif. On peut donc appliquer une transformation projective à la figure qui envoie  $ABC$  sur un triangle équilatéral et  $D$  à l'infini, et le problème est alors trivial.

Solution de l'exercice 3 L'axe radical  $\Delta = (AA')$  passe par le milieu  $M$  de  $[BC]$  et celui  $N$  de  $[DE]$ . L'inversion de centre  $M$  et de rayon  $MB$  laisse les cercles invariants, donc échange  $A$  et  $A'$ . Cela prouve que la polaire de  $A$  par rapport au cercle de diamètre  $[BC]$  (ou par rapport à celui de diamètre  $[DE]$  par un raisonnement analogue) est la droite  $p'$  orthogonale à  $\Delta$  passant par  $A'$ , et de même la polaire de  $A'$  par rapport à chacun des deux cercles précédents est la droite  $p$  orthogonale à  $\Delta$  passant par  $A$ . Or, l'orthocentre de  $A'BC$  est sur la polaire de  $A'$  par rapport au cercle de diamètre  $[BC]$ , et celui de  $A'DE$  sur la polaire de  $A'$  par rapport au cercle de diamètre  $[DE]$ , donc deux sommets du quadrilatère sont sur  $p$ , et un raisonnement semblable montre que les deux autres sont sur  $p'$ . Comme toute la figure est symétrique par rapport à la droite  $d$  joignant les centres des cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , et que  $d$  est parallèle à  $p$  et  $p'$ , on a prouvé que le quadrilatère de l'énoncé est un rectangle.

Solution de l'exercice 4 Soit  $G = (AB) \cap (CD)$  et  $M'$  la seconde intersection du cercle circonscrit à  $ABM$  avec  $(CD)$ . On a alors  $GM.GM' = GA.GB = GC.GD$  donc les points  $G, M', C$  et  $D$  sont harmoniques. Donc  $M', E, F$  sont alignés sur la polaire de  $G$  par rapport à  $\Gamma$ . Maintenant,

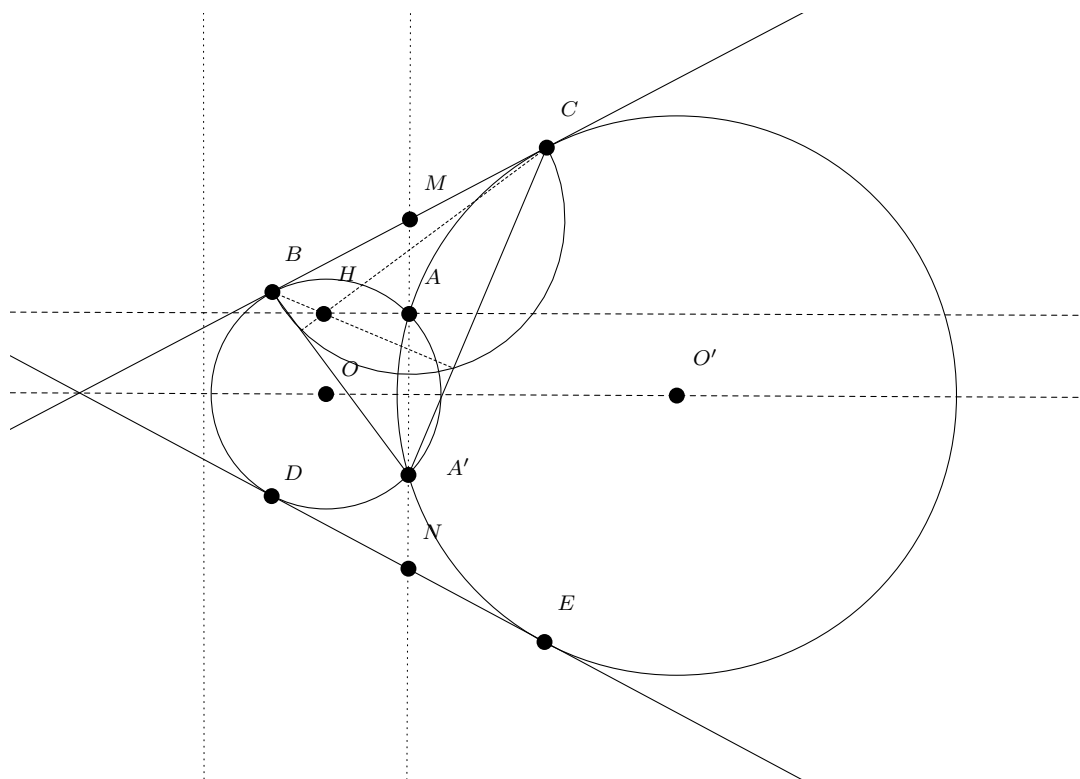


FIGURE 14 – Exercice 3.

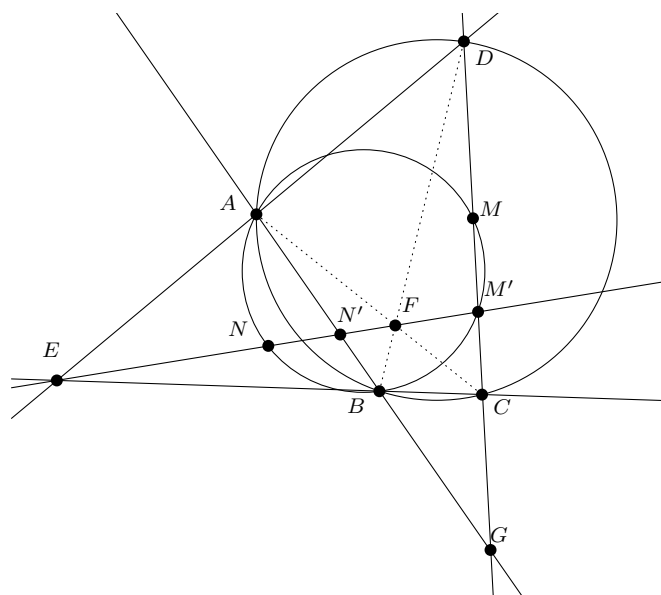


FIGURE 15 – Exercice 4

remarquons que par définition de  $N$ , les points  $A, B, M$  et  $N$  sont harmoniques sur  $\Gamma'$  le cercle circonscrit à  $ABM$ . Projetons ces points sur  $(AB)$  depuis  $M'$  : on obtient quatre points harmoniques  $A, B, G$  et  $N'$ , où  $N'$  est l'intersection de  $(AB)$  et  $(M'N)$ . Mais alors, comme  $G, N', A, B$

sont harmoniques ainsi que  $G, M', C, D$ , la droite  $(M'N') = (MN)$  est la polaire de  $G$  par rapport à  $\Gamma$ , et contient donc aussi  $E$  et  $F$ .

*Solution de l'exercice 5* On va montrer que  $J$  est sur la polaire de  $K$  (par rapport à  $\Gamma$ ), ce qui donnera le résultat puisque dans le cas général, si  $X$  est sur la polaire de  $Y$ , on a  $\vec{OX} \cdot \vec{OY} = r^2$ . Soit  $G = (IA) \cap (C'B')$ . La polaire de  $A$  étant  $(B'C')$  et puisque  $(IA) \perp (B'C')$ , la polaire de  $G$  est  $(JK)$ , donc  $G$  est sur la polaire de  $K$ . Comme la polaire de  $C$  est  $(A'B')$ , on déduit que la polaire de  $K$  est  $(CG)$ . Il faut alors montrer que  $(CG)$ ,  $(A'C')$  et  $(JK)$  sont concourantes. Soient  $C_1 = (AB) \cap (CG)$ ,  $J_1 = (A'C') \cap (CG)$ , et  $J_2 = (JK) \cap (CG)$ . En projetant les points  $C, C_1, G, J_2$  depuis  $A$  sur  $(B'C')$  on prouve qu'ils sont harmoniques. En projetant les points  $C, C_1, G, J_1$  depuis  $C'$  on obtient quatre droites harmoniques d'après le théorème du quadrangle complet (le quadrangle étant  $ABCG$ , où  $G$  est le point de Gergonne du triangle). Donc  $C, C_1, G, J_2$  sont harmoniques, et  $C, C_1, G, J_1$  le sont aussi : cela prouve que  $J_1 = J_2 = J$  et donc que  $J$  est sur la polaire  $(CG)$  de  $K$  par rapport à  $\Gamma$ .

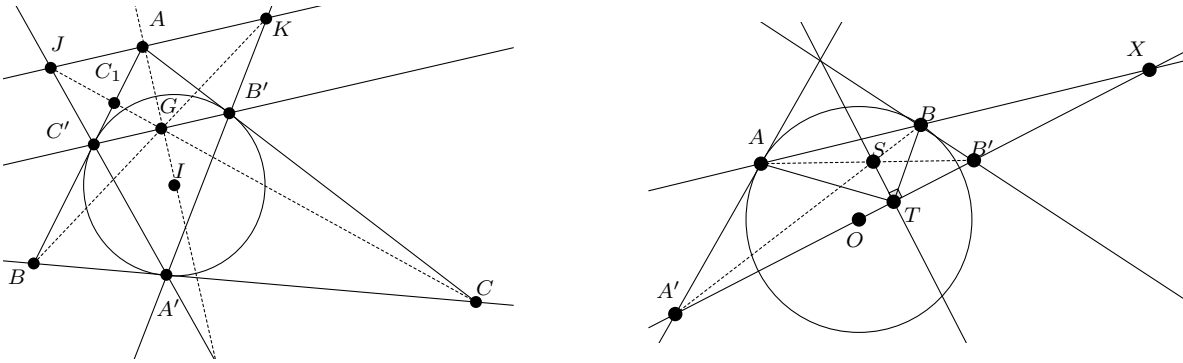


FIGURE 16 – Exercices 5 et 6

*Solution de l'exercice 6* Soit  $X = (AB) \cap \Delta$ . Envoyons  $X$  à l'infini et  $\Gamma$  sur un cercle par une transformation projective (cela est toujours possible, cf. projection stéréographique). On a supposé ici que  $X$  était à l'extérieur du cercle ; s'il est à l'intérieur on l'envoie sur le centre du cercle et la démonstration est essentiellement la même. Il est alors clair par construction que  $S$  appartient à la polaire de  $X$  par rapport à  $\Gamma$ . Donc dans la figure initiale  $(ST)$  est la polaire de  $X$ , car cette polaire est orthogonale à  $(OX) = \Delta$ . Soit  $Y = (AB) \cap (ST)$ , on a immédiatement  $X, Y, A, B$  harmoniques. Donc les droites  $(TX) = \Delta, (TY) = (TS), (TA), (TB)$  sont harmoniques, et comme  $\Delta \perp (TS)$ , on déduit que  $(TS)$  est la bissectrice de  $\widehat{ATB}$ .

*Solution de l'exercice 7* Soit  $Z = (C'F) \cap (B'E)$ . Appliquons la réciproque du théorème de Pascal à l'hexagone  $ABB'ZC'C$  : les points  $E, F$  et  $\infty_{(BB')}$  sont alignés donc  $Z$  appartient à la conique circonscrite à  $ABB'CC'$  : c'est ici le cercle  $\Gamma$ . Soit  $Z' = (A'D) \cap (B'E)$ . Appliquons la réciproque du théorème de Pascal à l'hexagone  $CBB'Z'A'A$  : les points  $D, E$  et  $\infty_{(BB')}$  sont alignés donc  $Z'$  appartient à  $\Gamma$ . On a donc  $Z = (B'E) \cap \Gamma = Z'$  donc  $(A'D), (B'E)$  et  $(C'F)$  sont concourantes en  $Z \in \Gamma$ .

## 2 Test

**Exercice 1** Soient  $A, B, C, D$  quatre points sur un cercle  $\Gamma$ . Les tangentes à  $\Gamma$  par  $A$  et  $B$  s'intersectent en  $E$ , et les tangentes par  $C$  et  $D$  s'intersectent en  $F$ . Montrer que  $(DA), (BC)$  et  $(EF)$  sont concourantes.

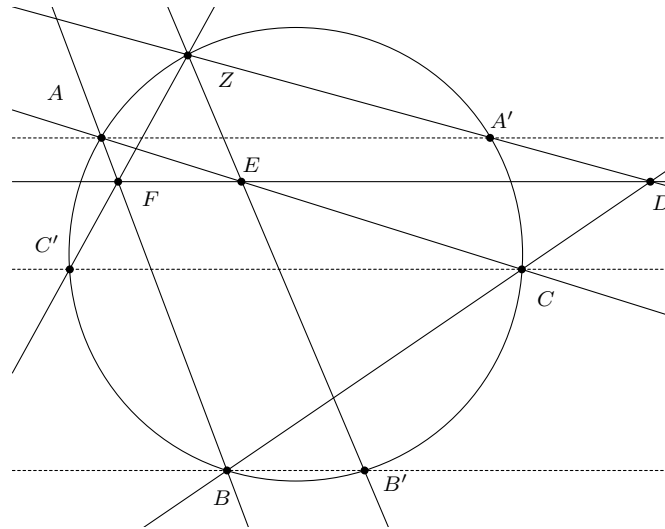


FIGURE 17 – Exercice 7

**Exercice 2** Deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont sécants en  $A$  et  $B$ . Un troisième cercle  $\Gamma$  les contenant est tangent à  $\Gamma_1$  en  $C$  et à  $\Gamma_2$  en  $D$ .  $(AB)$  intersecte  $\Gamma$  en  $E$  et  $F$ . Montrer que les tangentes à  $\Gamma$  passant par  $E$  et  $F$  se coupent sur  $(CD)$ .

**Exercice 3** Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle  $\Gamma$ . Notons  $P$  le point d'intersection de  $(AB)$  et  $(CD)$ . La perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $P$  coupe  $(DA)$  et  $(BC)$  en  $E$  et  $F$  respectivement. La perpendiculaire à  $(AD)$  passant par  $P$  coupe  $(AD)$  et  $(BC)$  en  $H$  et  $G$  respectivement. Montrer que  $P$ , le centre de  $\Gamma$  et le milieu de  $[EG]$  sont alignés.

**Exercice 4** Soit  $ABC$  un triangle acutangle, soit  $\Gamma$  son cercle circonscrit, et soient  $B'$  et  $C'$  les milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[AB]$ . Notons  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ , et  $G$  le centre de gravité de  $ABC$ . Soit enfin  $D$  le point d'intersection de  $\Gamma$  et  $(GH)$  tel que  $H$  se trouve entre  $D$  et  $G$ . On note  $B''$  et  $C''$  les points d'intersection de  $\Gamma$  avec  $(B'C')$ . Montrer que  $AB''/AC'' = DB''/DC''$ .

**Exercice 5** Dans un triangle  $ABC$ ,  $M$  et  $N$  désignent respectivement les points d'intersection des bissectrices des angles en  $B$  et  $C$  avec les côtés opposés. On appelle  $D$  l'intersection de la droite  $[MN)$  avec le cercle circonscrit à  $ABC$ . Montrer que :

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

- Correction -

Solution de l'exercice 1 Soit  $P = (AB) \cap (CD)$ . La polaire de  $P$  contient (par symétrie de la construction)  $E, F$  et  $G = (AD) \cap (BC)$ , donc  $(DA), (BC)$  et  $(EF)$  sont concourantes en  $G$ .

Solution de l'exercice 2 La tangente en  $C$  est l'axe radical de  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$ , et la tangente en  $D$  est l'axe radical de  $\Gamma$  et  $\Gamma_2$ . Donc ces tangentes se coupent sur l'axe radical  $(AB)$  de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Donc  $C, D, E, F$  sont harmoniques, ce qui prouve l'assertion à démontrer.

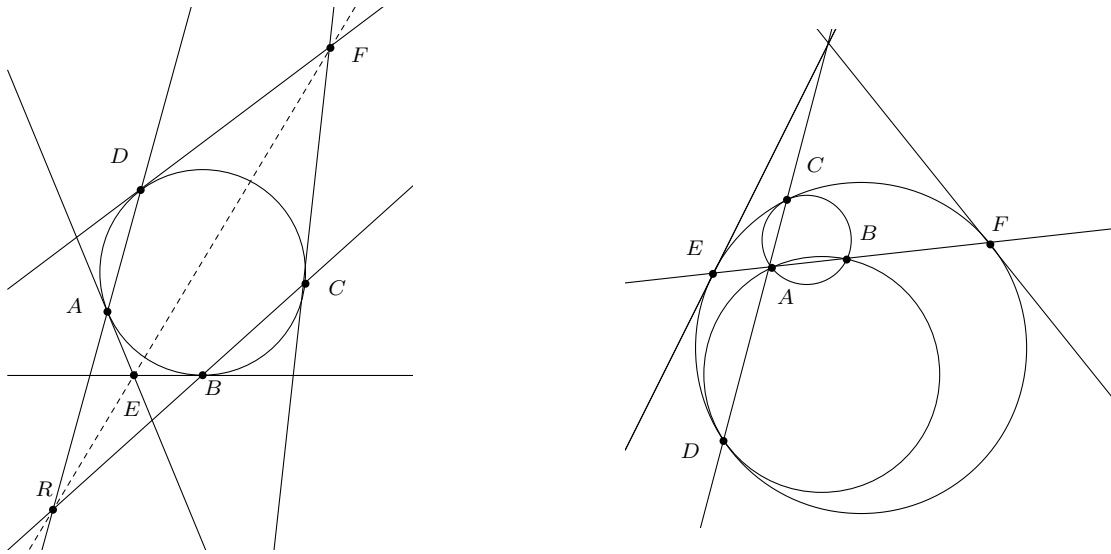


FIGURE 18 – Exercices 1 et 2

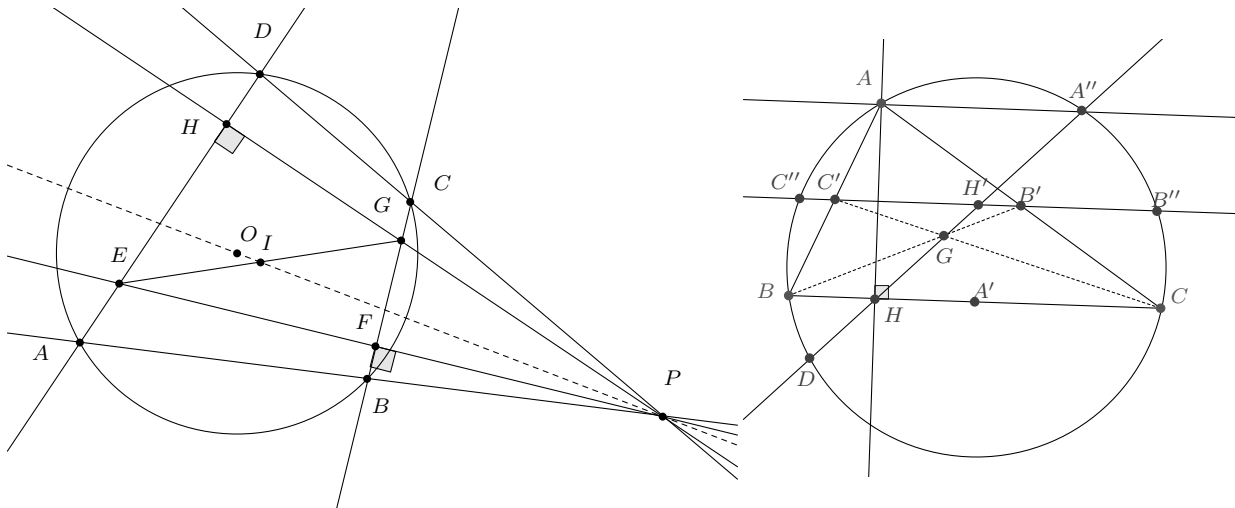


FIGURE 19 – Exercices 3 et 4

*Solution de l'exercice 3* Remarquons d'abord que  $E, F, G$  et  $H$  sont cocycliques sur un cercle  $\Gamma'$  de diamètre  $(GE)$ , donc il suffit de montrer que les polaires  $\pi$  et  $\pi'$  respectives de  $P$  par rapport à  $\Gamma$  et par rapport à  $\Gamma'$  sont parallèles. Soit  $R = (AD) \cap (BC)$ , et soit  $\Delta$  la droite passant par  $R$  telle que  $(RA), (RB), (RP)$  et  $\Delta$  soient harmoniques. Nous allons montrer qu'en fait  $\Delta = \pi = \pi'$ . Par construction,  $R$  appartient à  $\pi, \pi'$  et à  $\Delta$ . De plus, le point d'intersection de  $(AC)$  et  $(BD)$  est sur  $\pi$  et  $\Delta$ , et le point d'intersection de  $(HF)$  et  $(GE)$  est sur  $\pi'$  et  $\Delta$ . Cela achève de démontrer que  $\Delta = \pi = \pi'$ , et donc le problème.

*Solution de l'exercice 4* L'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-1/2$  envoie  $B$  sur  $B', C$  sur  $C', A$  sur  $A'$  le milieu de  $[BC]$  et donc  $H$  sur  $H'$  le projeté orthogonal de  $A'$  sur  $(C'B')$ . Comme les cordes  $(BC)$  et  $(B''C'')$  sont parallèles et orthogonales à  $(A'H')$ ,  $H'$  est le milieu de  $[B''C'']$  et  $(A'H')$  contient le centre  $O$  de  $\Gamma$ . Soit  $A''$  le point de  $\Gamma$  tel que  $(AA'')$  soit parallèle à  $(BC)$ . Comme  $(A'H')$  passe par le milieu de  $[AA'']$ ,  $G$  est le milieu de  $[A''H]$  et donc  $D, H, G, H'$  et  $A''$  sont alignés. En projetant  $A, D, C'', B''$  depuis  $A''$  sur  $(B''C'')$ , on obtient  $\infty, H', C'', B''$  qui sont harmoniques. Donc  $A, D, C'', B''$  sont harmoniques et donc  $AB''/AC'' = DB''/DC''$ .

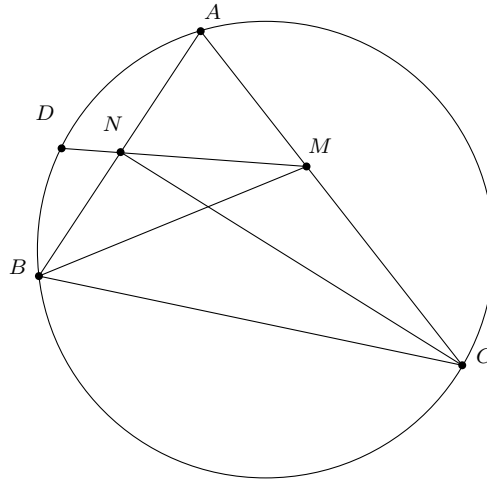


FIGURE 20 – Exercice 5.

Solution de l'exercice 5 Soit  $N'$  le milieu de l'arc  $\widehat{AB}$  et soit  $M'$  le milieu de l'arc  $\widehat{AC}$ . Alors :

$$\frac{AD}{DB} = b_{ABDN'} = b_{BAEL} = b_{M'CDA} = 1 - b_{ACDM'} = 1 + \frac{AD}{DL}.$$

La seconde égalité provient d'une projection en  $N$  et la troisième égalité provient d'une projection en  $M$ .

### 3 Avancés : nombres complexes et géométrie

#### 1 Cours : Introduction aux nombres complexes

Ce cours est un résumé rapide de ce qui a été fait au stage, énonçant les résultats importants et donnant quelques éléments de preuve.

##### - Définition des nombres complexes -

Dès que l'on fait de l'algèbre, on tombe à un moment où à un autre sur des équations algébriques, dont certaines n'ont pas de solution réelles. Les nombres complexes sont nés pour palier ce problème. L'idée derrière la construction des nombres complexes est de plonger  $\mathbb{R}$  dans un ensemble plus gros, obtenu en rajoutant à  $\mathbb{R}$  une solution de l'équation algébrique  $X^2 = -1$ , appelée  $i$ .

Qu'est-ce que veut dire l'équation  $i^2 = -1$ ? Par exemple, l'équation  $(-3)^2 = 9$  signifie qu'en appliquant deux fois la transformation "multiplication par  $-3$ " au réel 1 de la droite réelle, on arrive sur 9. Avec ce type de raisonnement,  $i$  s'interprète donc comme une transformation de la droite réelle telle que, en l'appliquant deux fois à 1, on tombe sur  $-1$ . La façon naturelle d'interpréter cela est de plonger la droite réelle dans un plan, et d'interpréter la transformation  $i$  comme un quart de tour autour de l'origine. On a donc envie de définir ce plan contenant la droite réelle pour l'ensemble des nombres complexes, et une multiplication complexe s'interprétant en termes de rotation. Cela conduit aux définitions suivantes :



**Définition 1.** Ensemblistement, on définit  $\mathbb{C}$  comme étant égal à  $\mathbb{R}^2$ . On note le nombre complexe de coordonnées  $(a, b)$  sous la forme  $a + ib$ . On définit les additions et multiplications de complexes de la façon suivante :  $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$  et  $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ . Cette définition est la seule définition "raisonnable" de la multiplication complexe, c'est à dire la seule qui soit distributive, commutative, compatible avec la multiplication réelle, et telle que  $i^2 = -1$ . Si  $z = a + ib$ ,  $a$  s'appelle la partie réelle de  $z$ , notée  $\Re(z)$ , et  $b$  est sa partie imaginaire, notée  $\Im(z)$ . Un nombre à partie réelle nulle est appelé imaginaire pur. On appelle conjugué de  $a + ib$  le complexe  $a - ib$ , image du premier par une symétrie d'axe l'horizontale. Le conjugué de  $z$  est noté  $\bar{z}$ .

On vérifie que l'on peut diviser des nombres complexes : pour calculer l'inverse  $\frac{1}{a+ib}$ , on multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée  $a - ib$ , ce qui donne  $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

**Définition 2.** On définit :  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

**Proposition 3.** On a :  $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$ .

Cette proposition confirme notre interprétation des nombres complexes en termes de rotation. Accessoirement, elle contient toute la trigonométrie usuelle, et permet donc de retrouver ses formules rapidement en examinant les parties réelles ou imaginaires.

**Définition 4.** Tout nombre complexe  $z$  possède une écriture polaire sous la forme  $re^{i\theta}$ , où  $r$  est un réel positif, et  $\theta$  est un angle. Attention : cette écriture n'est pas unique, car  $\theta$  est défini à  $2\pi$  près. Le nombre  $r$  est le module du nombre complexe  $z$ , et est noté  $|z|$ . L'angle  $\theta$  est appelé argument du nombre  $z$ .

Cette écriture nous permet d'interpréter la multiplication complexe en termes géométriques : la multiplication complexe multiplie les distances à l'origine, et additionne les angles par rapport à l'horizontale. En d'autres termes, la multiplication par le complexe  $re^{i\theta}$  est la similitude directe de centre 0, de rapport  $r$  et d'angle  $\theta$ .

**Proposition 5.** On a les égalités suivantes :

- $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ .

### - Théorème de D'Alembert-Gauss -

**Théorème 6.** Tout polynôme à coefficients réels possède une racine dans  $\mathbb{C}$ .

Ce théorème implique immédiatement que tout polynôme à coefficients réels est scindé sur  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire qu'il se factorise complètement comme produit de polynômes de degré 1. Il est aussi vrai si on prend des polynômes à coefficients complexes. Ce théorème extrêmement puissant (il est souvent appelé théorème fondamental de l'algèbre) est la raison pour laquelle les nombres complexes sont si omniprésents en mathématiques.

**Corollaire 7.** Tout polynôme à coefficients réels se factorise comme produit de polynômes de degré 1 et 2.

*Démonstration.* Un polynôme à coefficients réels est égal à son conjugué, et donc si  $P$  a une racine complexe  $\lambda$  dans sa factorisation sur  $\mathbb{C}$ , alors  $\bar{\lambda}$  est racine de même multiplicité, or le polynôme  $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$  est à coefficients réels.  $\square$

Ce résultat est un exemple de résultat portant uniquement sur des réels, mais impossible à prouver sans faire intervenir les complexes. Je vais en expliquer un autre. Considérons un polynôme de second degré  $aX^2 + bX + c = a[(X - b/2a)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$ . Quand son discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  est positif, on sait que ses racines sont réelles et on peut les calculer explicitement en fonction de  $\sqrt{\Delta}$ . Si  $\Delta$  est négatif, cette preuve marche aussi en complexe : on écrit les solutions en fonction de  $i\sqrt{-\Delta}$  (dont le carré est  $\Delta$ ).

Essayons de faire la même chose avec un polynôme de degré 3 sous forme réduite,  $X^3 + pX + q$ . Dans le cas où son discriminant  $\Delta = q^2 + 4p^3/27$  est négatif, les complexes permettent de s'en sortir. Je n'entrerais pas dans le détail des formules. Par exemple, à propos de l'équation  $X^3 - 15x + 4 = 0$ , les calculs nous disent qu'elle admet une racine s'écrivant  $u + v$ , où  $u$  et  $v$  sont des complexes vérifiant  $u^3 = 2 + 11i$  et  $v^3 = 2 - 11i$ . On vérifie que  $u = 2 + i$  et  $v = 2 - i$  conviennent, et donnent la racine 4. On a donc une formule, faisant intervenir des complexes, mais donnant au final un nombre réel. Ce qui est étonnant, c'est qu'en fait ce cas où le discriminant est négatif correspond au cas où le polynôme a trois racines réelles. On peut démontrer que, dans ce cas purement réel, il est impossible de donner des formules générales (dans un sens à préciser) calculant ces racines réelles, et ne faisant pas intervenir les nombres complexes.

Voici deux autres exemples de résultats portant sur les réels, dont la démonstration fait intervenir les complexes.

**Exercice 1** Trouver tous les polynômes  $P$  à coefficients réels tels que  $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ .

*Solution de l'exercice 1* Soit  $\lambda$  une racine complexe de  $P$ . Alors  $\lambda^2$  est racine, donc  $|\lambda| = 1$ . De plus,  $(\lambda + 1)^2$  est racine, donc  $|\lambda + 1| = 1$ . Ainsi,  $\lambda = j = e^{2i\pi/3}$ , ou bien  $\lambda = \bar{j}$ . Le polynôme cherché est donc de la forme  $P = ((X - j)(X - \bar{j}))^n = (1 + X + X^2)^n$ . Réciproquement ces polynômes conviennent.

**Exercice 2** Calculer  $\sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3i}$ .

*Solution de l'exercice 2* On s'inspire de la preuve  $2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = (1 + 1)^n + (1 - 1)^n$ , donnée par la formule du binôme :

$$3 \sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3i} = (1 + 1)^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n.$$

On a utilisé le fait que  $1 + j + j^2 = 0$ . Le résultat cherché est donc  $\frac{2^n + 2 \cos n\pi/3}{3}$ .

On pourrait continuer indéfiniment, tant les nombres complexes sont importants dans tous les domaines des mathématiques. Je vais conclure en donnant mon exemple préféré d'utilisation des nombres complexes : le théorème des nombres premiers. Les démonstrations les plus naturelles de ce théorème difficile font en effet toutes intervenir les nombres complexes :

**Théorème 8.** La proportion de nombres premiers inférieurs à  $n$  est équivalente à  $\frac{\log n}{n}$ .

- Preuve du théorème de D'Alembert-Gauss -

Nous avons vu à quel point il pouvait être utile de prendre les racines d'un polynôme, si utile que nous allons utiliser cette technique pour donner une esquisse de preuve du théorème de D'Alembert-Gauss lui-même. Sans rentrer dans les détails, la construction faite en première partie, consistant à rajouter à un ensemble  $\mathbb{R}$  la racine d'une équation algébrique, est en fait parfaitement générale. En partant d'un polynôme  $P$  à coefficients réels, cette construction permet de construire un ensemble  $K$  contenant  $\mathbb{C}$  (possédant lui aussi une addition et une multiplication compatibles avec celle de  $\mathbb{C}$ ) sur lequel le polynôme  $P$  est scindé. Cet ensemble est appelé corps de rupture du polynôme  $P$ . Nous avons maintenant besoin d'un outil permettant de relier ces racines, appartenant à un ensemble  $K$  que l'on contrôle très mal, aux coefficients du polynômes, qui sont réels. Ce lien est fourni par la théorie des polynômes symétriques.

**Définition 9.** Un polynôme en les variables  $(X_1, \dots, X_n)$  est symétrique s'il est invariant par permutation de ses variables.

**Définition 10.** Soit  $1 \leq k \leq n$ . On définit le  $k$ -ème polynôme symétrique élémentaire  $\sigma_k$  en les variables  $(X_1, \dots, X_n)$  par

$$\sigma_k(X_1, \dots, X_n) = \sum_{S \in \{1, \dots, n\}, |S|=k} \prod_{i \in S} X_i.$$

**Proposition 11.**

$$\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) X^{n-k}.$$

Cette proposition est presque évidente : il suffit de développer. On peut donc exprimer les coefficients (réels) de notre polynôme  $P$  en fonction de ses racines (appartenant à son corps de rupture). On a même mieux :

**Théorème 12.** Soit  $Q$  un polynôme symétrique à coefficients réels à  $n$  variables  $(X_1, \dots, X_n)$ . Alors il existe un polynôme  $P$  à coefficients réels et à  $n$  variables tel que :

$$Q(X_1, \dots, X_n) = P(\sigma_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \sigma_n(X_1, \dots, X_n)).$$

*Démonstration.* Ce théorème possède une preuve algorithmique simple : on ordonne les monômes de  $Q$  par ordre lexicographique (i.e. on associe à chaque monôme la suite des exposants des variables  $(X_1, \dots, X_n)$ , et on classe cela avec l'ordre du dictionnaire). On retranche alors à  $Q$  un terme en les polynômes symétriques choisi pour tuer le monôme le plus grand, et on itère.  $\square$

Ainsi, tout polynôme symétrique en les racines de  $P$  (dans le corps de rupture) s'exprime en fonction des coefficients de  $P$  (des réels), et est donc réel. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème de D'Alembert-Gauss.

On raisonne par récurrence sur la valuation 2-adique du degré de  $p$ . L'initialisation est que tout polynôme de degré impair à une racine : on regarde ses valeurs en  $\pm\infty$  (ce qui est un résultat analytique, il est en effet impossible de donner une preuve purement algébrique du théorème de D'Alembert-Gauss).

Montrons le résultat au rang  $k$ . On écrit le degré  $n$  de  $P$  sous la forme  $2^k m$ , avec  $m$  impair, et on note ces racines  $(r_1, \dots, r_n)$ , dans  $K$ . Soit  $t$  un réel, on définit :

$$q_t(z) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} (z - r_i - r_j - tr_i r_j).$$

Les coefficients de ce polynôme sont symétriques en les  $r_i$ , donc sont réels d'après la discussion précédente. Comme il est de degré  $2^{k-1}m(n-1)$ , on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : une de ses racines  $r_i + r_j + tr_i r_j$  est en fait complexe. Comme ce résultat est vrai pour tout  $t$ , et qu'il y a une infinité de nombres réels, on peut même trouver un couple  $(i, j)$  et deux réels  $t$  et  $s$  tels que  $r_i + r_j + sr_i r_j$  et  $r_i + r_j + tr_i r_j$  soient tous deux complexes. Ainsi,  $r_i r_j$  et  $r_i + r_j$  sont complexes, et  $r_i$  et  $r_j$  sont donc les racines du polynôme à coefficients complexe  $X^2 - (r_i + r_j)x + r_i r_j$ . Par les formules habituelles, ces racines sont complexes, ce qui clôt la récurrence.

### - Applications à la géométrie plane -

L'idée de l'utilisation des complexes en géométrie est d'associer à chaque point du plan sa coordonnée complexe (que l'on appelle son affixe), et de faire les calculs sur ces coordonnées. On notera le point en majuscule, et son affixe en minuscule. Cette méthode très puissante a de nombreux avantages par rapport à la géométrie cartésienne classique. Essentiellement :

- on travaille avec une coordonnée au lieu de deux,
- les calculs trigonométriques sont violemment simplifiés par la notation exponentielle,
- on dispose d'une nouvelle opération, la multiplication, possédant de très fortes propriétés géométrique.

Les quelques exemples de résultats suivants sont ainsi des conséquences immédiates de l'interprétation géométrique de la multiplication complexe.

**Proposition 13.**    -  $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a}$  est imaginaire pur  
                          -  $AB \parallel CD$  ou  $ABCD$  sont alignés  $\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a}$  est réel

Plus généralement, l'angle orienté entre les droites  $AB$  et  $CD$  (dans cet ordre) est l'argument de  $\frac{d-c}{b-a}$ . L'interprétation de la multiplication en termes de similitudes montre quant-à-elle :

**Proposition 14.** Les triangles  $ABC$  et  $DEF$  sont semblables (avec même orientation) si et seulement si

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{d-f}{e-f}.$$

Enfin, le théorème de l'angle inscrit se réécrit comme :

**Proposition 15.** Les points  $ABCD$  sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Le signe : correspond ici à une division. La quantité utilisée dans cette proposition s'appelle le birapport complexe, et est par ailleurs un élément clé de la géométrie projective complexe.

**Exercice 3** Soient quatre cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$ . On appelle  $A_1$  et  $B_1$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ,  $A_2$  et  $B_2$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ ,  $A_3$  et  $B_3$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$ , et  $A_4$  et  $B_4$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_1$ . (On suppose bien sur que tous ces points existent.) Montrer que si  $A_1, B_1, C_1$  et  $D_1$  sont cocycliques ou alignés alors  $A_2, B_2, C_2$  et  $D_2$  sont cocycliques ou alignés.

*Solution de l'exercice 3* Les cocyclicités des quatre quadruplets  $A_1 B_1 A_2 B_2, A_2 B_2 A_3 B_3, A_3 B_3 A_4 B_4$  et  $A_4 B_4 A_1 B_1$  nous disent que quatre birapports sont réels. En multipliant ou en divisant ces quatre birapports de façon convenable (plus précisément en multipliant le premier et le troisième, puis en divisant par le second et le quatrième), on montre que le produit

$$\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} \frac{a_3 - a_4}{a_4 - a_1} \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_2} \frac{b_4 - b_3}{b_1 - b_4}$$

est réel. Par hypothèse, le terme  $\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} \frac{a_3 - a_4}{a_4 - a_1}$  est réel, donc le terme  $\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_2} \frac{b_4 - b_3}{b_1 - b_4}$  est aussi réel, ce qui conclut.

**Exercice 4** Soit  $ABCDEF$  un hexagone, tel que l'on ait  $\widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{F} = 2\pi$ , et  $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$ . Montrer que  $BC \cdot AE \cdot FD = CA \cdot EF \cdot DB$ .

*Solution de l'exercice 4* On écrit  $\frac{c-b}{a-b} = \frac{|c-b|}{|a-b|} e^{i\widehat{B}}$ , puis les mêmes relations pour  $\widehat{D}$  et  $\widehat{F}$ . En multipliant, et en utilisant la relation sur les angles pour simplifier les exponentielles, et la relation sur les longueurs pour simplifier les modules, on trouve que :

$$(c-b)(e-d)(a-f) = (a-b)(c-d)(e-f).$$

Cette relation nous donne immédiatement que  $(c-b)(e-a)(d-f) = (a-c)(f-e)(b-d)$ , ce qui termine en prenant le module.

Tous les résultats utilisés pour l'instant étaient essentiellement des résultats vectoriels (faisant intervenir des différences d'affixes). Pour la plupart des exercices, il est par contre nécessaire de choisir une origine et de calculer explicitement sur les coordonnées. Dans ces cas, l'élément clé est le choix de l'origine et du cercle unité. La formule de multiplication des exponentielles complexes simplifie en effet grandement les calculs sur le cercle unité. Il est pertinent de choisir pour cercle unité un cercle important de la figure, de préférence un cercle circonscrit (pour avoir un maximum de points sur ce cercle), ou à la rigueur un cercle inscrit. Pour des formules plus précises, et des exercices thématiques, je recommande de jeter un coup d'œil au cours "Complex numbers in geometry", disponible sur le site [www.imomath.com](http://www.imomath.com), dans la rubrique "olympiad training material".

**Exercice 5** Soit  $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  un heptagone régulier, montrer que

$$\frac{1}{A_0 A_1} = \frac{1}{A_0 A_2} + \frac{1}{A_0 A_3}.$$

*Solution de l'exercice 5* On place 0 au centre de l'hexagone, et  $A_0$  en 1. On pose  $\omega = e^{i\pi/7}$ , on appelle  $A'_1$  (resp.  $A'_2$ ) l'image de  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) par la rotation de centre 1 et d'angle  $2\pi/7$  (resp.

$\pi/7$ ). Les quatre points  $A_0, A'_1, A'_2$  et  $A_3$  sont alignés, donc la formule à prouver est équivalente à :

$$\frac{1}{a'_1 - 1} = \frac{1}{a'_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2 - 1)} = \frac{1}{\omega(\omega^4 - 1)} + \frac{1}{\omega^6}.$$

En développant et en utilisant  $\omega^7 = -1$  pour simplifier, on prouve que cette équation est vérifiée.

## 2 Premier TD

**Exercice 1** Soit  $ABC$  un triangle avec  $\widehat{CAB} = 60^\circ$ ,  $P$  et  $Q$  les pieds des bissectrices issues de  $A$  et de  $B$ .

Calculer les angles de  $ABC$  sachant que  $AB + BP = AQ + QB$ .

**Exercice 2** Soit  $ABC$  un triangle orienté dans le sens trigonométrique.

Montrer que  $ABC$  est équilatéral si et seulement si  $a + jb + j^2c = 0$ .

**Exercice 3** Soit  $\Gamma$  un cercle de rayon  $R$  et  $A, B, C, D, E$  et  $F$  dans cet ordre sur  $\Gamma$  tels que  $AB = CD = EF = R$ . Pour tous points  $X$  et  $Y$  du plan,  $M_{XY}$  désigne le milieu du segment  $[XY]$ .

Montrer que le triangle  $M_{BC}M_{DE}M_{FA}$  est équilatéral.

**Exercice 4** Soit  $A$  et  $B$  sur le cercle unité.

Calculer une équation complexe simple de la droite  $(AB)$ .

**Exercice 5** Soit  $\Gamma$  un cercle et  $A, B, C, D, E$  et  $F$  des points sur  $\Gamma$ . Soit  $P, Q$  et  $R$  les points d'intersections respectifs de  $(AB)$  et  $(DE)$ ,  $(BC)$  et  $(EF)$  et  $(CD)$  et  $(FA)$ .

Montrer le théorème de Pascal, i.e. que  $P, Q$  et  $R$  sont alignés.

**Exercice 6** Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe. Soit  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$ ) le cercle inscrit au triangle  $ABC$  (resp.  $ADC$ ). Supposons qu'il existe un cercle  $\omega$  tangent aux droites  $(AD)$ ,  $(CD)$ , à la demi-droite  $[BA]$  au-delà de  $A$  et à la demi-droite  $[BC]$  au-delà de  $C$ .

Montrer que les tangentes extérieures communes à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  se coupent en un point de  $\omega$ .

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 Soit  $\beta = \widehat{ABC}$ . Soit  $\omega = e^{i\frac{\pi}{6}}$  et soit  $x = e^{i\frac{\beta}{2}}$ . L'égalité  $AB + BP = AQ + QB$  se réécrit  $1 + \frac{BP}{AB} = \frac{AQ}{AB} + \frac{QB}{AB}$ . En utilisant la loi des sinus dans les triangles  $APB$  et  $AQB$ , cela se réécrit également sous la forme suivante :

$$1 + \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(180^\circ - 30^\circ - \beta)} = \frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(180^\circ - 60^\circ - \frac{\beta}{2})} + \frac{\sin(60^\circ)}{\sin(180^\circ - 60^\circ - \frac{\beta}{2})}.$$

Après simplification, on sait donc que :

$$1 + \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(30^\circ + \beta)} = \frac{\sin(\frac{\beta}{2}) + \sin(60^\circ)}{\sin(60^\circ + \frac{\beta}{2})}.$$

En utilisant plusieurs fois la relation  $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{\frac{\omega - \frac{1}{\omega}}{2i}}{\frac{\omega x^2 - \frac{1}{\omega x^2}}{2i}} &= \frac{\frac{x - \frac{1}{x}}{2i} + \frac{\omega^2 - \frac{1}{\omega^2}}{2i}}{\frac{\omega^2 x - \frac{1}{\omega^2 x}}{2i}} \\
 \Leftrightarrow \frac{\omega x^2 - \frac{1}{\omega x^2} + \omega - \frac{1}{\omega}}{\omega x^2 - \frac{1}{\omega x^2}} &= \frac{x - \frac{1}{x} + \omega^2 - \frac{1}{\omega^2}}{\omega^2 x - \frac{1}{\omega^2 x}} \\
 \Leftrightarrow \frac{\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2}{\omega^2 x^4 - 1} &= \frac{\omega^2 x^2 - \omega^2 + \omega^4 x - x}{\omega^4 x^2 - 1} \\
 \Leftrightarrow \frac{\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2}{\omega^2 x^4 - 1} &= \frac{(\omega^2 x - 1)(x + \omega^2)}{(\omega^2 x - 1)(\omega^2 x + 1)} \\
 \Leftrightarrow \frac{\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2}{\omega^2 x^4 - 1} &= \frac{x + \omega^2}{\omega^2 x + 1} \\
 \Leftrightarrow (\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2)(\omega^2 x + 1) &= (x + \omega^2)(\omega^2 x^4 - 1) \\
 \Leftrightarrow \omega^2 x^5 + \omega^2 x^4 - \omega^2 x - 1 + \omega^4 x^3 + \omega^2 x^2 - \omega^2 x^3 - x^2 &= \omega^2 x^5 + \omega^4 x^4 - x - \omega^2 \\
 \Leftrightarrow (\omega^2 - 1)(\omega^2 x^3 + 1)(x^2 - x + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{\omega^{\frac{2}{3}}}; -\frac{j}{\omega^{\frac{2}{3}}}; -\frac{j^2}{\omega^{\frac{2}{3}}}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\
 \Leftrightarrow x \in \left\{ e^{\frac{8i\pi}{9}}; e^{\frac{5i\pi}{9}}; e^{\frac{2i\pi}{9}}; e^{\frac{i\pi}{6}}; e^{\frac{5i\pi}{6}} \right\} \\
 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} \in \left\{ \frac{8\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}.
 \end{aligned}$$

De plus, (un des angles du triangle valant déjà  $60^\circ$ ) pour correspondre à la réalité géométrique, il faut que  $\frac{\beta}{2}$  soit strictement inférieur à  $60^\circ$ . On trouve ainsi que  $\frac{\beta}{2}$  vaut  $\frac{2\pi}{9}$ . On obtient donc  $\beta = \frac{4\pi}{9}$ , d'où un dernier angle de  $\frac{2\pi}{9}$ .

Ainsi, l'angle  $\widehat{ABC}$  vaut  $80^\circ$  et l'angle  $\widehat{BCA}$  vaut  $40^\circ$ .

Solution de l'exercice 2 Puisqu'une multiplication par  $j$  correspond à une rotation de  $120^\circ$ , on sait que  $ABC$  est équilatéral si et seulement si  $(c - a) = j(b - c)$  i.e. si et seulement si  $a + jb + (-1 - j)c = 0$  i.e. si et seulement si  $a + jb + j^2c = 0$ .

Solution de l'exercice 3 Soit  $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$ . On sait que  $\omega^3 = e^{i\pi} = -1$ . On sait de plus que  $j = \omega^2$ . Quitte à symétriser la figure, je suppose que les points sont placés dans le sens trigonométrique. Je place l'origine du plan complexe en le sens du cercle. On obtient alors (en utilisant les trois triangles équilatéraux déjà dans la figure)  $b = \omega a$ ,  $d = \omega c$ ,  $f = \omega e$ . En particulier, on peut trouver les affixes des milieux considérés :  $m_{BC} = \frac{1}{2}(\omega a + c)$ ,  $m_{DE} = \frac{1}{2}(\omega c + e)$ ,  $m_{FA} = \frac{1}{2}(\omega e + a)$ . D'après l'exercice précédent, il suffit de prouver que  $m_{BC} + jm_{DE} + j^2m_{FA} = 0$ , i.e. (après multiplication par 2) que  $(\omega a + c) + \omega^2(\omega c + e) + \omega^4(\omega e + a) = 0$ , ce qui est clairement vrai puisque l'on peut factoriser par  $1 + \omega^3$  qui vaut 0.

Solution de l'exercice 4

$$\begin{aligned}
 Z \in (BC) &\Leftrightarrow \frac{z - b}{a - b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z - b}{a - b} = \frac{\bar{z} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} \Leftrightarrow (z - b)(\bar{a} - \bar{b}) = (a - b)(\bar{z} - \bar{b}) \\
 &\Leftrightarrow (z - b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = (a - b)\left(\bar{z} - \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow (z - b)(b - a) = ab(a - b)\left(\bar{z} - \frac{1}{b}\right) \\
 &\Leftrightarrow z = a + b - ab\bar{z}.
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 Posons  $\Gamma$  le cercle unité. Soit  $x = af - ab + de - cd + bc - ef$ . On peut utiliser la formule de l'exercice précédent pour calculer l'affixe de  $\bar{p}$  : on sait que  $p = a + b - ab\bar{p}$  et  $p = d + e - de\bar{p}$ , donc  $\bar{p} = \frac{a+b-d-e}{ab-de}$ . On procède de même pour les autres points. Ainsi :

$$\bar{p} - \bar{q} = \frac{a + b - d - e}{ab - de} - \frac{b + c - e - f}{bc - ef} = \frac{(b - e)x}{(ab - de)(bc - ef)}.$$

En conjuguant cette équation, on obtient que :

$$p - q = \frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{e}\right)\bar{x}}{\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{de}\right)\left(\frac{1}{bc} - \frac{1}{ef}\right)} = -abcdef \frac{(b - e)\bar{x}}{(ab - de)(bc - ef)}.$$

Ainsi, on obtient que :

$$\frac{p - q}{\bar{p} - \bar{q}} = -\frac{abcdef\bar{x}}{x}.$$

Par permutation cyclique, on obtient que :

$$\frac{q - r}{\bar{q} - \bar{r}} = -\frac{abcdef(-\bar{x})}{-x} = -\frac{abcdef\bar{x}}{x}.$$

Ainsi :

$$\frac{p - q}{\bar{p} - \bar{q}} = \frac{q - r}{\bar{q} - \bar{r}}.$$

Ceci est équivalent à  $\frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}} \in \mathbb{R}$ , ce qui signifie bien que  $P, Q$  et  $R$  sont colinéaires.

Solution de l'exercice 6 Posons  $\omega$  le cercle unité,  $K, L, M, N$  les points de contact avec les droites  $(BC), (AD), (CD), (AB)$ . Soit  $T$  le point d'intersection des tangentes communes extérieures à  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Soit  $r_1$  et  $r_2$  leur rayon et  $J_1$  et  $J_2$  leur centre.

En considérant le cas limite de l'exercice 4, on montre facilement que  $a = \frac{2}{l+\bar{n}}$  et de même pour  $B, C$  et  $D$ .

En considérant l'homothétie de centre  $T$  envoyant  $\omega_1$  sur  $\omega_2$ , on montre que :

$$\frac{t - j_1}{r_1} = \frac{t - j_2}{r_2}.$$

On peut donc exprimer  $t$  en fonction des autres paramètres :

$$t = \frac{j_1 r_2 - j_2 r_1}{r_2 - r_1}.$$

Soit  $\bar{\tau}$  le vecteur d'affixe  $i \frac{c-a}{|c-a|}$ .

$$\tau^2 = -\frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}} = -\frac{\bar{l} + \bar{n} - \bar{k} - \bar{n}}{l + n - k - m} klmn.$$

Soit  $\lambda = \frac{1}{2}(\bar{a}\tau + a\bar{\tau}) = \bar{\tau} \frac{km-ln}{k+m-l-n}$ .



On peut de plus calculer  $j_1$  en utilisant dans un premier temps que  $O$ ,  $J_1$  et  $B$  sont colinéaires, ce qui s'écrit  $j_1 = kn\bar{j}_1$ . De plus, (en prenant des distances orientées), on sait que :

$$0 = d(J_1, (AB)) + d(J_1, (AC)) = \frac{1}{2}(j_1\bar{n} + n\bar{j} - 2) + j_1\bar{\tau} + \tau\bar{j}_1 - 2\lambda.$$

Ainsi, on peut calculer  $j_1$ , on calcule alors  $r_1$  avec  $d(J_1, (AB))$  et, par symétrie, on peut calculer  $j_2$  et  $r_2$ . Ainsi, on peut calculer  $t$ , et il suffit alors de vérifier que  $\tau\bar{\tau} = 1$ . Les calculs explicites sont laissés au lecteur.

### 3 Second TD

**Exercice 1** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme à coefficients complexes. Montrez que  $P$  admet une racine dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 2** Calculez en fonction de  $n$  la somme suivante :

$$\sum_{k \equiv 1[4]} \binom{n}{k}$$

**Exercice 3** Montrez que pour tout  $n \geq 3$ , il existe un couple d'entiers impairs  $(x_n, y_n)$  tel que

$$x_n^2 + 7y_n^2 = 2^n$$

**Exercice 4** Pour tout  $t > 0$ , on considère la somme  $S = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$ , où  $r_1, r_2, r_3, r_4$  sont les racines du polynôme

$$P_t[X] = \frac{1}{t}X^4 + \left(1 - \frac{10}{t}\right)X^3 - 2X^2 + \sqrt[3]{2t}X + \arctan(t)$$

Quelle est la valeur minimale de  $|S|$  et en quel  $t$  est-elle atteinte ?

**Exercice 5** Soient  $x, y, z$  trois réels qui vérifient

$$\frac{\sin(x) + \sin(y) + \sin(z)}{\sin(x+y+z)} = \frac{\cos(x) + \cos(y) + \cos(z)}{\cos(x+y+z)} = a$$

Montrez que

$$\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a$$

**Exercice 6** Montrez la formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

En déduire que si  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  sont rationnels, alors  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  sont eux aussi rationnels.

**Exercice 7** (Entiers de Gauss) Les entiers de Gauss  $\mathbb{Z}[i]$  sont tous les nombres de la forme

$$a = a_1 + ia_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$$

On définit la norme de  $a$  par  $N(a) = a_1^2 + a_2^2$ , et on appelle les éléments de  $\mathbb{Z}[i]$  de norme 1 les unités.

1. Vérifiez que  $N(ab) = N(a)N(b)$ .
2. Prouvez l'existence d'une division euclidienne : Soient  $a$  et  $b$  deux entiers de Gauss, montrez que l'on peut trouver deux entiers de Gauss  $q$  et  $r$  (pas forcément uniques) tels que
  - $a = bq + r$
  - $N(r) < N(b)$
 En déduire le théorème de Bezout pour les entiers de Gauss.
3. On définit les deux concepts suivants :
  - on dit que  $p$  est *irréductible* si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même (à une unité près)
  - on dit que  $q$  est *premier* si  $q|ab \Rightarrow q|a$  ou  $q|b$ .
 Montrez que dans  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $p$  premier  $\Leftrightarrow p$  irréductible. (Indication : un sens est facile et l'autre sens utilise Bezout)
4. Démontrez l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans  $\mathbb{Z}[i]$ .
5. Montrez qu'un entier de Gauss  $a$  est premier ssi l'un de ces cas est vérifié
  - $N(a) = 2$  ou  $N(a) = p$  avec  $p$  un entier premier  $\equiv 1[4]$
  - $N(a) = q^2$  avec  $q$  un entier premier  $\equiv 3[4]$

- Correction -

Solution de l'exercice 1 On prend  $P \in \mathbb{C}[X]$ , et on considère  $Q(X) = P(X)\overline{P}(X)$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a alors  $Q(x) = P(x)\overline{P}(x) = |P(x)|^2 \in \mathbb{R}$ . Donc  $Q$  est à valeurs réelles sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $Q(X)$  est un polynôme à coefficient réel. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss,  $Q$  a donc au moins une racine  $z \in \mathbb{C}$ . Donc  $Q(z) = P(z)\overline{P}(z) = 0$  : soit  $P(z) = 0$  et on a une racine, soit  $\overline{P}(z) = 0$  et dans ce cas  $P(\overline{z}) = 0$ .

Solution de l'exercice 2 Fixons  $n > 0$ , on définit les 4 sommes suivantes :

$$S_i = \sum_{k \equiv i[4]} \binom{n}{k} \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Maintenant on va utiliser la formule  $(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$  avec  $x = 1, -1$  et  $i$ .

$$\begin{aligned} S_0 + S_1 + S_2 + S_3 &= 2^n \\ S_0 - S_1 + S_2 - S_3 &= 0 \\ S_0 - S_2 &= \operatorname{Re}((1+i)^n) \\ S_1 - S_3 &= \operatorname{Im}((1+i)^n) \end{aligned}$$

Ensuite il suffit d'utiliser que  $(1+i)^2 = 2i$  et on a selon les cas suivants :

$$\begin{aligned} n = 4k & : S_1 = 2^{4k-2} \\ n = 4k+1 & : S_1 = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1} \\ n = 4k+2 & : S_1 = 2^{4k} + (-1)^k 2^{2k} \\ n = 4k+3 & : S_1 = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 Pour  $n = 3$  on a le couple  $(1, 1)$ , pour  $n = 4$  le couple  $(3, 1)$ , etc. L'astuce est de considérer les complexes de la forme  $a + i\sqrt{7}b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , muni de la norme  $N(a + i\sqrt{7}b) =$

$a^2 + 7b^2$ . Comme il s'agit du carré du module, il est évident que cette norme est multiplicative. Utilisons cette propriété à bon escient pour construire la suite  $(x_n, y_n)$  par récurrence :

$$\begin{aligned} N((x_n + i\sqrt{7}y_n)(1 + i\sqrt{7})) &= N(x_n + i\sqrt{7}y_n)N(1 + i\sqrt{7}) \\ N((x_n - 7y_n) + i\sqrt{7}(x_n + y_n)) &= 2^{n+3} \end{aligned}$$

Mais les deux entiers  $x_n - 7y_n$  et  $x_n + y_n$  sont pairs alors qu'on veut des entiers impairs. Qu'à cela ne tienne, on les divise par 2 :

$$N\left(\frac{x_n - 7y_n}{2} + i\sqrt{7}\frac{x_n + y_n}{2}\right) = 2^{n+1}$$

Et donc si les entiers  $(\frac{x_n - 7y_n}{2}, \frac{x_n + y_n}{2})$  sont impairs, on a gagné. S'ils sont pairs, on recommence tout avec  $(x_n - i\sqrt{7}y_n)$  à la place, et on se retrouve avec  $(\frac{x_n + 7y_n}{2}, \frac{x_n + y_n}{2})$ . Il est facile de vérifier que parmi ces deux couples, l'un est un couple d'entiers pairs et l'autre un couple d'entiers impairs. On prend le couple impair et on a  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ .

Solution de l'exercice 4

$$\begin{aligned} S &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \\ &= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) \\ &= \left(-\frac{1 - 10/t}{1/t}\right)^2 - 2\frac{-2}{1/t} \\ &= t^2 - 16t + 100 \end{aligned}$$

Une étude de ce trinôme montre que la valeur minimale de  $|S|$  est 36 et est atteinte en  $t = 8$ .

Solution de l'exercice 5 Écrivons ces deux égalités sous la forme

$$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = a \cos(x + y + z) \quad \text{et} \quad \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = a \sin(x + y + z)$$

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} &= ae^{i(x+y+z)} \\ e^{-i(y+z)} + e^{-i(x+z)} + e^{-i(x+y)} &= a \end{aligned}$$

et en prenant la partie réelle on obtient la formule désirée.

Solution de l'exercice 6 La formule de Moivre est une simple traduction de  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ . Comme  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  s'obtiennent comme polynômes à coefficients entiers de  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ , la propriété est évidente.

Solution de l'exercice 7

1. Comme  $N$  est le carré du module, c'est évident.
2. On prouve tout d'abord un petit lemme : pour tout complexe  $z$  il existe un entier de Gauss  $a$  tel que  $|z - a| < 1$ . En effet, pour tout point du plan, le plus proche point à coordonnées entières est au plus à distance  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Maintenant faisons notre division euclidienne à proprement parler : soient  $a, b$  deux entiers de Gauss et soit  $z = \frac{a}{b}$ . On prend  $q$  un entier de Gauss à distance  $< 1$  de  $z$ , et  $r = a - bq$ . On a bien

$$N(r) = |b(z - q)|^2 = N(b)|z - q|^2 < N(b)$$

L'existence de l'algorithme d'Euclide et le théorème de Bezout s'ensuivent.

## 3. Il faut démontrer séparément les deux sens de l'équivalence

- Soit  $q$  un premier. Raisonnons par l'absurde : on suppose que  $q$  n'est pas irréductible :  $q = ab$  avec  $a, b$  qui ne sont pas des unités :  $1 < N(a), N(b) < N(q)$ . Comme  $q$  divise  $q$ , cela que soit  $q|a$ , soit  $q|b$ . Mais ceci est impossible puisque ces deux nombres ont une norme inférieure à celle de  $q$ .
- Soit  $p$  irréductible. Supposons que  $p$  divise  $ab$  mais ni  $a$  ni  $b$ . Comme  $p$  est irréductible, cela implique que  $\text{PGCD}(a, p) = \text{PGCD}(b, p) = 1$ . D'après Bezout, on peut trouver  $u_a, u_b \in \mathbb{Z}[i]$  tels que

$$u_a a \equiv u_b b \equiv 1[p]$$

Et donc  $u_a a u_b b \equiv 1[p]$  ce qui est en contradiction avec  $p|ab$ , donc  $p$  est bien premier.

- Quand on a l'équivalence entre premier et irréductible, l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers se fait exactement de la même façon que dans les entiers (par récurrence sur  $N(a)$ ).
- Pour démontrer ce résultat on va admettre le théorème des deux carrés de Fermat : un entier  $n$  peut s'écrire comme somme de deux carrés ssi pour tous les premiers  $q \equiv 3[4]$ ,  $v_q(n)$  est paire. En particulier, un entier premier  $p$  peut s'écrire comme somme de deux carrés ssi  $p \equiv 1[4]$  ou  $p = 2$ .

Soit  $a$  un entier de Gauss, alors si  $N(a)$  est un premier il est facile de voir que  $a$  est irréductible (si  $a = bc$ , alors  $N(a) = N(b)N(c)$ ). Maintenant si  $N(a) = q^2$  avec  $q$  premier  $\equiv 3[4]$ , supposons que  $a$  est composé :  $a = bc$ . Le seul cas possible est alors  $N(b) = N(c) = q$ , et  $q = b_1^2 + b_2^2$ , ce qui est en contradiction avec le théorème des deux carrés.

La réciproque est une conséquence de l'existence de la factorisation en facteurs premiers et du théorème des deux carrés de Fermat : soit  $a$  un entier de Gauss,  $N(a)$  est la somme de deux carrés, donc sa décomposition en facteurs premiers est :

$$N(a) = 2^{\alpha_2} \prod_{p \equiv 1[4]} p^{\alpha_p} \prod_{q \equiv 3[4]} q^{2\beta_q}$$

Donc, en choisissant pour tout  $p \equiv 1[4]$  un couple  $(x_p, y_p)$  tq  $x_p^2 + y_p^2 = p$

$$a\bar{a} = (1+i)^{\alpha_2} (1-i)^{\alpha_2} \prod_{p \equiv 1[4]} (x_p + iy_p)^{\alpha_p} (x_p - iy_p)^{\alpha_p} \prod_{q \equiv 3[4]} q^{2\beta_q}$$

et d'après le début de la question, tous les termes de ce produit sont des premiers dans l'anneau des entiers de Gauss. Il s'agit donc de la décomposition en facteurs premiers de  $a\bar{a}$ . Donc si  $a$  avait un facteur premier qui ne soit pas de la forme demandée, il devrait apparaître dans le produit. Comme il n'y en a pas, la réciproque est démontrée.

## 4 Test

**Exercice 1** Calculer explicitement la somme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx.$$

**Exercice 2** Soit  $ABC$  un triangle d'orthocentre  $H$  et  $P$  un point quelconque sur son cercle circonscrit. Soit  $E$  le pied de la hauteur issue de  $B$  et soit  $Q$  et  $R$  les points tels que  $PAQB$  et  $PARC$  soit des parallélogrammes. Si  $AQ$  et  $HR$  s'intersectent en  $X$ , montrer que  $(EX) \parallel (AP)$ .

**Exercice 3** Soit  $P$  un polynôme. Montrer que les zéros de son polynôme dérivé  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de  $P$ .

**Exercice 4** Soit  $ABC$  un triangle,  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  les pieds des hauteurs issues de  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement. Le cercle inscrit à  $ABC$  touche  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$  en  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  respectivement. Soit  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  les droites symétriques à  $(H_2H_3)$ ,  $H_3H_1$ ,  $H_1H_2$  par rapport à  $(T_2T_3)$ ,  $(T_3T_1)$  et  $T_1T_2$  respectivement. Montrer que les droites  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit de  $ABC$ .

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 On appelle  $S$  cette somme, et on pose  $T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin kx$ . Alors  $S = \Re(S + iT)$ . Or

$$S + iT = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n$$

par formule du binôme. Comme on a  $(1 + e^{ix}) = e^{-ix/2}(e^{-ix/2} + e^{ix/2}) = 2e^{-ix/2} \cos(x/2)$ . On trouve donc

$$S + iT = (2 \cos(x/2))^n e^{-inx/2}.$$

En prenant les parties réelles, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx = 2^n (\cos(x/2))^n \cos nx/2.$$

Solution de l'exercice 2 On suppose que le cercle circonscrit de  $ABC$  est le cercle unité, et on note  $a, b, c$  les complexes associés aux points  $A, B, C$  et  $h$  pour l'orthocentre. On utilise les formules :

$$a + b + c = h + 2o = h$$

$$e = \frac{1}{2}(a + b + c - ac\bar{b}) = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ac}{b}\right)$$

Comme  $paqb$  est un parallélogramme, les diagonales  $pq$  et  $ab$  se coupent en leur milieu, donc

$$q = a + b - p$$

De même,

$$r = a + c - p$$

Comme  $x$ ,  $a$  et  $q$  sont colinéaires,

$$\frac{x - a}{\bar{x} - \bar{a}} = \frac{a - q}{\bar{a} - \bar{q}} = \frac{p - b}{\bar{p} - \bar{b}} = -pb$$

$$\bar{x} = \frac{pb + a^2 - ax}{abp}$$

et comme  $h, r$  et  $x$  sont colinéaires,

$$\frac{x - h}{\bar{x} - \bar{h}} = \frac{h - r}{\bar{h} - \bar{r}} = \frac{p + b}{\bar{p} + \bar{b}} = pb$$

On en déduit que

$$\bar{x} = \frac{x - a - b - c + p + \frac{bp}{a} + \frac{bp}{c}}{bp}$$

On égalise nos deux équations pour  $\bar{x}$  et on trouve

$$x = \frac{1}{2} \left( 2a + b + c - p - \frac{pb}{c} \right)$$

On veut prouver  $(EX)$  et  $(AP)$  parallèles, c-à-d

$$\frac{e - x}{\bar{e} - \bar{x}} = \frac{a - p}{\bar{a} - \bar{p}} = -ap$$

Par les formules précédentes,

$$e - x = \frac{1}{2} \left( p + \frac{pb}{c} - a - \frac{ac}{b} \right) = \frac{bcp + b^2p - abc - ac^2}{2bc} = \frac{(b + c)(bp - ac)}{2bc}$$

et  $\bar{e} - \bar{x}$  est le conjugué de la formule précédente. La relation cherchée en découle (avec un peu de calcul).

Solution de l'exercice 3 On écrit la factorisation de  $P$  :  $P(z) = c \prod_{i=1}^n (X - a_i^{n_i})$ . On dérive, en se servant de la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'identité :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{z - a_i}.$$

On applique ceci à une racine de  $P'$  qui n'est pas racine de  $P$  :

$$0 = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{z - a_i} = \sum_{i=1}^r n_i \frac{n_i(\bar{z} - \bar{a}_i)}{|z - a_i|^2}.$$

On réécrit ça pour faire intervenir  $z$  plus clairement :

$$\left( \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - a_i|^2} \right) \bar{z} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - a_i|^2} \bar{a}_i.$$

Enfin, on prend les conjugués :

$$\left( \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - a_i|^2} \right) z = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - a_i|^2} a_i,$$

et on a bien réussi à écrire la racine  $z$  de  $P'$  comme barycentre à poids positifs des racines  $a_i$  de  $P$ .

Solution de l'exercice 4 Définissons le cercle unité comme étant le cercle inscrit de  $ABC$ . L'origine du repère est notée  $I$ .

De la même façon que dans le cours, nous savons que  $c = 2 \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$  et nous pouvons de même calculer par une permutation cyclique les affixes des points  $A$  et  $B$ .

Déterminons l'affixe du point  $h_3$ . Nous savons que  $(H_3 T_3) \perp (IT_3)$ . Ainsi :

$$\frac{h_3 - t_3}{\overline{h_3} - \overline{t_3}} = -\frac{t_3 - 0}{\overline{t_3} - \overline{0}} = -t_3^2.$$

Nous savons de plus que  $(CH_3) \parallel (IT_3)$ , ce qui s'écrit ainsi :

$$\frac{h_3 - c}{\overline{h_3} - \overline{c}} = \frac{t_3 - 0}{\overline{t_3} - \overline{0}} = t_3^2.$$

Cela nous donne un système de deux équations à deux inconnues pour  $h_3$  et  $\overline{h_3}$ , ce qui nous permet de les calculer explicitement.

Soit  $H'_2$  le projeté orthogonal de  $H_2$  sur  $(T_2 T_3)$ . D'après une formule vue dans le cours, on sait que :

$$h'_2 = \frac{1}{2}(t_2 + t_3 - t_2 t_3 \overline{h_3}).$$

Ainsi, si  $P_2$  (resp.  $P_3$ ) détermine le symétrique de  $H_2$  (resp.  $H_3$ ) par rapport à  $(T_2 T_3)$ , on sait (après calcul) que :

$$p_2 = 2h'_2 - h_2 = \frac{t_1(t_2^2 + t_3^2)}{t_2(t_1 + t_3)}.$$

Par permutation cyclique des variables, on obtient également que :

$$p_3 = \frac{t_1(t_2^2 + t_3^2)}{t_3(t_1 + t_2)}.$$

Ainsi, on obtient que :

$$p_2 - p_3 = \frac{t_1^2(t_2^2 + t_3^2)(t_3 - t_2)}{t_1 t_3(t_1 + t_2)(t_1 + t_3)}.$$

Or, si le point  $X$  appartient à  $(P_2 P_3)$ , il doit vérifier :

$$\frac{x - p_2}{\overline{x} - \overline{p_2}} = \frac{p_2 - p_3}{\overline{p_2} - \overline{p_3}} = -t_1^2.$$

En particulier, si  $X$  appartient au cercle unité, l'équation devient :

$$t_2 t_3 x^2 - t_1(t_2^2 + t_3^2)x + t_1^2 t_2 t_3 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont  $\frac{t_1 t_2}{t_3}$  et  $\frac{t_1 t_3}{t_2}$  et il est clair par permutation cyclique que ce sont également des points d'intersection du cercle unité avec une des autres droites considérées, ce qui conclut.





## VI. Chasse au Trésor

François Lo-Jack le pirate a dissimulé un trésor de guerre sur les terres de son château. Vous venez d'être recrutés pour lui extirper cette merveille. Comme François est très joueur il a décidé de vous laisser une chance pour trouver son trésor si vous résolvez assez d'énigmes et d'exercices qui sont cachés sur ses terres. Pour corser le jeu François a décidé de faire des équipes de débutants et des équipe d'avancés et de vous donner des exercices en fonction de votre niveau (donc les plus difficiles possible...). Pour avoir une chance de réussir cette mission vous devez avoir :

- Du papier et un crayon
- Une carte du domaine
- Un pantalon long (manches longues)
- Beaucoup de courage



Vous allez devoir résoudre des énigmes et des exercices qui vous permettront de connaître l'emplacement des prochaines énigmes et vous permettront peut-être d'atteindre le fabuleux trésor. Le but du jeu est de collecter un maximum de points.

- Vous allez trouver des énigmes dans le domaine du château (vous devrez laisser en place les énigmes et noter le nom de code). Une fois que vous avez trouvé une solution, vous devez aller voir Louis le Pirate avec le nom de code (sinon il ne pourra pas accepter votre réponse). Il vous donnera alors un exercice.
- La solution de l'exercice est un nombre entier qui vous indiquera la position de votre prochaine énigme. Les solutions sont à rendre avant 19 heures (les solutions rendues plus tard ne seront pas acceptées). Notez que la rédaction de l'exercice rapportera plus de point que la solution numérique (il est donc impératif de rédiger le plus d'exercice possible pour gagner la chasse au trésor).

- Un bonus sera attribué à la première équipe à répondre aux 8 énigmes (et un plus petit bonus sera attribué aux suivant).



### 5 Énigmes

**Exercice 1** Indiquez le nombre (entier) de points que vous voulez gagner pour cette énigme (entre 1 et 100). Vous gagnerez ce nombre de points si et seulement si vous êtes les plus proche **de la moyenne des valeurs** indiquées par les autre groupes et si aucun autre groupe n'a demandé le même nombre de points que vous.

**Exercice 2** Indiquez le nombre (entier) de points que vous voulez gagner pour cette énigme (entre 1 et 100). Vous gagnerez ce nombre de points si et seulement si vous êtes **la plus petite des valeurs** indiquées par tous les groupes et si aucun autre groupe n'a demandé le même nombre de points que vous.

**Exercice 3** Indiquez le nombre (entier) de points que vous voulez gagner pour cette énigme (entre 1 et 10). Vous gagnerez ce nombre de points si et seulement si vous êtes **la plus grande des valeurs** indiquées par tous les groupes et si aucun autre groupe n'a demandé le même nombre de points que vous.

**Exercice 4** Ce jeu se joue sur un échiquier  $8 \times 8$  comportant deux rois. On numérote les colonnes de  $A$  à  $H$  en partant de la gauche, on numérote les lignes de 1 à 8 en partant du bas. Le roi blanc joue en premier et commence en bas à gauche (en  $A1$ ), le roi noir commence en  $A8$ . Le but du roi blanc est d'atteindre une des cases  $F8$ ,  $G8$  ou  $H8$ , le but du roi noir est de l'en empêcher. (Les rois suivent les règles de déplacement des échecs : à son tour un roi se déplace d'une case dans une des huit directions, et n'a pas le droit de se mettre à portée du roi ennemi).

**Exercice 5** Ce jeu se joue sur une ligne horizontale comportant 14 cases vides. À tour de rôle, les deux joueurs placent une lettre  $A$  ou  $B$  sur une des cases (les deux joueurs ont le droit d'utiliser les deux lettres). Un joueur gagne s'il arrive à écrire  $ABA$ , et si aucun des deux joueurs n'y arrive, la partie est nulle.

Vous allez commencer ce jeu, et votre but est de faire match nul.

**Exercice 6** Ce jeu se joue sur une table où sont disposés des jetons en ligne. Les valeurs inscrites sur les jetons sont, au départ, de gauche à droite, 7 2 3 8 9 4 1 6 3 2 4 7 1. À tour de rôle, chaque joueur prend un des deux jetons situés aux extrémité de la ligne et le rajoute à sa

réserve. À la fin de la partie, les joueurs calculent la somme de tous les jetons de leur réserve, et celui qui a la plus grosse somme gagne.

**Exercice 7** Ce jeu se joue sur un tableau  $6 \times 6$ . À tour de rôle les joueurs écrivent un nombre (réel) dans une des cases, différent de tous les autres nombres déjà dans le tableau, jusqu'à ce que tout le tableau soit rempli. Ensuite, on noircit le plus grand nombre de chaque ligne. Le joueur qui commence gagne si les 6 cases noires sont reliées (on dit que deux cases sont reliées dès qu'elles se touchent, même en diagonale). Sinon le second joueur gagne.

**Exercice 8** Choisissez un entier compris entre 1 et 1 000 000. On les écrit dans cet ordre sur un cercle, à intervalle régulier. L'équipe gagnante sera celle dont le nombre est le plus éloigné des nombres des autres groupes sur ce cercle.

### - Correction -

Exercices 1,2,3,8. Ces énigmes ouvraient une réflexion mais n'appelaient pas de démonstration. Nous vous proposons donc un petit récapitulatif des réponses données :

- Pour l'énigme 1 la moyenne des réponses (entre 46 et 79) était 58. La réponse la plus proche était 53 mais a été donnée par deux groupes, qui se sont donc neutralisés, faisant ainsi gagner le groupe ayant proposé la valeur de 50.
- Pour l'énigme 2 la valeur minimale a été donnée par un groupe n'ayant pas pris beaucoup de risque car il a proposé la valeur 1 sur 100 neutralisant ainsi toute tentative de gagner plus.
- Pour l'exercice 3 les deux plus grandes valeurs étaient 10 et 8 mais ces deux valeurs ont été proposés par deux groupes simultanément. Ainsi la réponse suivante : 6 a remporté cette énigme.
- Pour l'énigme 8 la réponse qui était la plus isolée (la plus aléatoire ?) était 452228. Il est à noter que 3 groupes ont donné des valeurs distantes de moins de 2000.

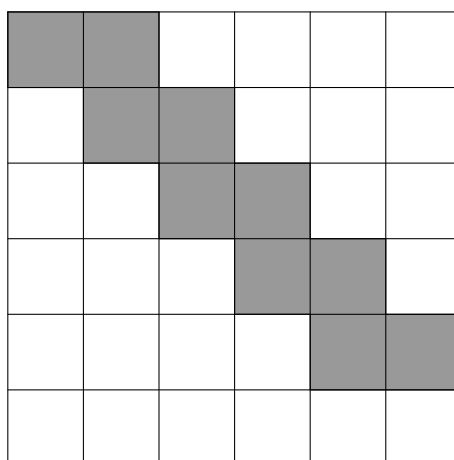
Solution de l'exercice 4 L'idée cruciale est celle d'opposition. Si un roi se trouve sur la même colonne que son ennemi, séparé de lui par un nombre impair de cases, alors il pourra le bloquer indéfiniment : quel que soit le coup de son adversaire, il pourra reprendre l'opposition au coup suivant (c'est un invariant). Blanc a donc perdu dès que noir arrive à prendre l'opposition. Par contre, blanc peut prendre l'opposition dès le début, la garder jusqu'à arriver en colonne G. Une fois en G, noir va partir soit en F, soit en H, et alors blanc part dans la direction opposée en avançant d'une ligne. Si noir revient en colonne G, alors blanc pourra toujours reprendre l'opposition. Blanc peut toujours gagner en moins de 17 coups, voici un exemple de partie où noir arrive à bloquer blanc pendant 17 coups : 1.A2B8, 2.B2C8, 3.C2D8, 4.D2E8, 5.E2F8, 6.F2G8, 7.G2F8, 8.H3G7, 9.G3F7, 10.H4G6, 11.G4F6, 12.H5F7, 13.G5F7, 14.H6G8, 15.G6F8, 16.H7F7, 17.H8.

Solution de l'exercice 5 Examinons une position perdante (c'est-à-dire une position telle que, quel que soit le coup du joueur dont c'est le tour, l'autre joueur forme ABA au coup suivant). Un examen rapide montre qu'une case libre dans une telle position est dans un bloc A..A de deux cases vides, entouré par deux A. Il reste donc un nombre pair de cases vides. Cela prouve que le second joueur ne peut pas perdre, et sa stratégie sera d'essayer de former un bloc A..A, et le premier joueur doit l'en empêcher. Sur une position avec plus de cases (disons 100), le second joueur gagne facilement : quel que soit le coup du premier joueur, il restera un bloc de

11 cases vides ..... , on joue un  $A$  au milieu de ce bloc, puis au coup suivant un  $A$  à gauche où à droite de manière à former un  $A..A$ , et la partie est gagnée, sans que l'autre joueur ne puisse rien y faire. L'idée pour annuler avec 14 cases est d'empêcher le second joueur de faire cela. On commence donc par jouer un  $B$  en septième case, pour éviter de créer des gros blocs de cases vides. La seule option pour le second joueur permettant d'espérer forcer un  $A..A$  est de jouer un  $A$  en position 11 : ..... $B...A....$  Mais alors on réplique avec un  $B$  en dernière case, et le second joueur ne peut pas répliquer en jouant un  $A$  en position 8, (sa seule façon de former un  $A..A$ ), car alors on gagnerait avec un  $A$  en sixième case. La partie sera donc nulle.

*Solution de l'exercice 6* Examinons une position de départ comportant un nombre pair de jetons, que l'on numérote de gauche à droite. Alors, si la somme des jetons en position paire est différente de celle des jetons en position impaire, le joueur qui commence gagne forcément : il peut toujours s'arranger pour prendre tous les jetons de même parité. On remarque que quel que soit le coup du premier joueur, on se retrouve dans cette situation, et que la différence entre somme des jetons pairs et impairs est suffisante pour compenser le premier jeton du premier joueur. Le second joueur gagne donc à tous les coups. Par exemple, si le premier joueur prend le jeton 7, on numérote alors les jetons, et la somme des jetons en position impaire est 29, celle des jetons en position paire est 21. Le second joueur gagne donc 29 à 28 en prenant tous les jetons en position impaires, en commençant par le 2.

*Solution de l'exercice 7* Le second joueur gagne à tous les coups. Une stratégie possible est de toujours jouer dans la même ligne que le premier joueur (c'est possible par parité). Si dans cette ligne une des cases grisées du dessin suivant est libre, il joue dedans. Enfin, s'il place le dernier élément d'une ligne, il le choisit plus grand que tous les autres de la ligne (c'est donc le second joueur qui fixe la position des cases noires). Ainsi, les cases noircies en fin de partie ne pourront jamais faire partie des cases grisées du dessin, qui forment une barrière empêchant les cases noires d'être reliées.



## 6 Exercices des débutants

### Exercice 1

1							2
	9		4				5
		6				7	
	5		9		3		
				7			
			8	5			4
7						6	
	3				9		8
		2					1

Considérez les trois chiffres contenus dans les cases grisées de cette grille de Sudoku. Faites la somme de tous les nombre que vous pouvez écrire en utilisant une et une seule fois chacun de ces trois chiffres. Soit  $x$  cette somme divisée par la somme des trois chiffres eux mêmes. Allez chercher une énigme à la case  $x$ .

**Exercice 2** Quelle est la valeur de la somme de tous les entiers inférieurs ou égaux à 1000 et qui sont multiples de 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 (quand on dit que " $n$  est multiple de 2 ou 3" il peut être multiple de 6).

Allez chercher une énigme à la case correspondant à l'arrondi inférieur du résultat de l'exercice divisé par 976.

**Exercice 3** Combien y a t'il de couples d'entiers  $(x, y)$  strictement positifs tels que :

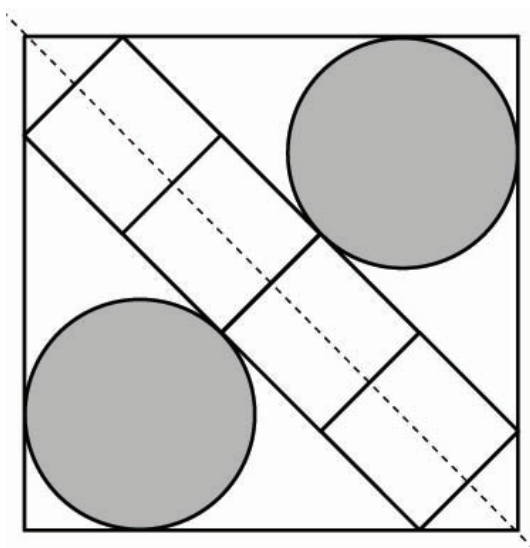
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2012^{10}}?$$

Allez chercher une énigme à la case correspondant à ce nombre.

**Exercice 4** Trouver tous les  $m, n > 0$  tels que la somme des entiers de  $n$  jusque à  $n + m$  vaut 1000. Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre qui est la somme de tous les  $m$  et  $n$  solutions de l'exercice.

**Exercice 5** Le grand carré de la figure mesure 10 de coté. On note  $x$  le diamètre des cercles intérieurs.

Allez chercher une énigme à la case correspondant à l'arrondi inférieur du nombre  $100x$ .



**Exercice 6**

Trouver les  $p$  premiers tels que  $4p + 1$  et  $7p - 4$  sont tous les deux premiers.

Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre qui est la somme de toutes les solutions de l'exercice multiplié par 20.

**Exercice 7** Trouver tous les entiers  $0 < x \leq y \leq z$  tels que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre qui est le produit de tous les  $x, y$  et  $z$  solutions de l'exercice divisé par 100 et arrondi inférieurement le tout moins deux.

**Exercice 8** Soit  $T$  l'ensemble des entiers qui s'écrivent  $9^k$  avec  $0 \leq k \leq 4000$ . Sachant que  $9^{4000}$  a 3 817 chiffres, combien d'éléments de  $T$  commencent par 9 ?

Allez chercher une énigme à la case correspondant à ce nombre.

**- Correction -**

Solution de l'exercice 9 La résolution de la grille de Sudoku étant relativement ardu (mais possible) une astuce arithmétique est la bienvenue. Remarquons que si on prend trois chiffres de différents  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . Alors les nombres qu'on peut former avec ces trois chiffres sont de la forme :  $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$  et donc leur somme est :

$$2a(10^2 + 10 + 1) + 2b(10^2 + 10 + 1) + 2c(10^2 + 10 + 1) = 2(a + b + c)(10^2 + 10 + 1)$$

et donc si on divise ce nombre par  $(a + b + c)$  on obtiens alors 222.

Solution de l'exercice 10 Si on note  $A_p$  le cardinal de l'ensemble des nombres inférieure à 1000 qui sont multiple de  $p$ . Par le principe d'inclusion exclusion la valeur cherché est  $A_2 + A_3 + A_5 - A_6 - A_{10} - A_{15} + A_{30}$  et avec la formule classique de calcul de somme on obtiens :

$$2 \frac{500.501}{2} + 3 \frac{333.334}{2} + 5 \frac{200.201}{2} - 6 \frac{166.167}{2} - 10 \frac{100.101}{2} - 15 \frac{66.67}{2} + 60 \frac{33.34}{2} = 367832$$

Solution de l'exercice 11 L'équation se réécrit sous la forme :

$$(x - 2012^{10})(y - 2012^{10}) = 2012^{20}.$$

Il y a donc autant de solutions que de diviseurs positifs de  $2012^{20}$  en remarquant que puisque  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2012^{10}}$  on a forcément  $x > 2012^{10}$  et  $y > 2012^{10}$ .

Solution de l'exercice 12 Le grand carré a un coté de 10. Le triangle dans lequel est inscrit le cercle a un coté de longueur 8. Donc la diagonale du carré mesure  $10\sqrt{2}$  et donc par Thalès la longueur des 4 petits carrés vaut :  $4/5 \times 10\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$  Ainsi dans le triangle dans lequel est inscrit le cercle on a :

- Son aire  $S$  est  $8 \cdot 8 / 2 = 32$
- Son demie périmètre est  $p = (8 + 8 + 8\sqrt{2}) / 2 = 8 + 4\sqrt{2}$ .

Ainsi si on note  $r$  le rayon du cercle inscrit on a :  $S = pr$ . Et donc enfin :

$$r = \frac{S}{p} = \frac{32}{8 + 4\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

Solution de l'exercice 13 On a les congruence  $4p + 1 \equiv p + 1 \pmod{3}$  et  $7p - 4 \equiv p + 2 \pmod{3}$ . Ainsi nécessairement l'un des nombres  $p$ ,  $4p + 1$ , et  $7p - 4$  est un multiple de 3. Comme  $4p + 13$  et  $7p - 4$  sont tous les deux strictement supérieur à 3, c'est donc  $p$  le multiple de 3 donc  $p = 3$ . Réciproquement pour  $p = 3$  on a  $4p + 1 = 13$  et  $7p - 4 = 17$  qui sont bien trois nombres premiers.

Solution de l'exercice 14 Comme les inconnues jouent un rôle symétrique, on peut supposer  $0 < x \leq y \leq z$ . Dans ces conditions, on a :

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$$

et donc  $x \leq 3$ . Il ne peut valoir 1, il vaut donc 2 ou 3. On traite les deux cas séparément en utilisant à nouveau la même méthode. Si  $x = 2$ , l'équation devient :

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

puis par le même argument  $x = 2 \leq y \leq 4$ . On test alors les cas un par un et on trouve que les seules solutions sont  $y = 3, z = 6$  et  $y = 4, z = 4$ . Pour  $x = 3$ , on obtient :

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

puis  $x = 3 \leq y \leq 3$ . La seule solution est, dans ce cas  $x = y = 3$ . Finalement, les solutions sont les triplet  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 4, 4)$ ,  $(3, 3, 3)$  et toutes leurs permutations.

Solution de l'exercice 15 D'après les formules classiques, la somme en question vaut :

$$\frac{(2n + m)(m + 1)}{2}$$

on est ainsi ramené à l'équation  $(2n + m)(m + 1) = 2000$ . Les nombres  $2n + m$  et  $m + 1$  sont donc des diviseurs associés de 2000. On remarque, d'une part que la somme de ces diviseurs vaut  $2n + 2m + 1$  et donc doit être impaire, et d'autre part que  $1 < m + 1 < 2n + m$ . De plus on a  $2000 = 2^4 \times 5^3$ . En vertu de ce qui précède, les seules solutions sont :

- $m + 1 = 5, 2n + m = 400$ , soit  $m = 4$  et  $n = 198$
- $m + 1 = 25, 2n + m = 80$ , soit  $m = 24$  et  $n = 28$
- $m + 1 = 16, 2n + m = 125$ , soit  $m = 15$  et  $n = 55$

Solution de l'exercice 16 On note  $(a_n)$  et  $(k_n)$  les deux suites définies par :  $a_n = 9^n$  et  $k_n$  est la longueur du nombre  $a_n$  en base 10. Remarquons que  $k_{n+1} \leq k_n + 1$ . D'autre part montrons qu'on a  $k_{n+1} = k_n$  si et seulement si  $a_{n+1}$  commence par 9.

- En effet si  $k_{n+1} = k_n$  c'est que  $10^{k_n} \leq a_n \leq (10^{k_{n+1}} - 1)/9$  et donc  $a_{n+1}$  commence par 9.
- Si  $a_{n+1}$  commence par 9 alors  $9 \cdot 10^{k_{n+1}} \leq a_{n+1}$  et donc  $10^{k_{n+1}} \leq a_{n+1}/9 = a_n$  donc  $k_{n+1} = k_n$ .

Donc avec l'indication de l'énoncé on sait que le nombre de d'éléments de  $T$  qui commencent par 9 est :  $4001 - 3817 = 184$ .

## 7 Exercices des avancés

**Exercice 1** Une compagnie internationale a 70 employés. Si  $X$  et  $Y$  sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par  $X$  et non parlée par  $Y$  ; et une langue parlée par  $Y$  mais pas par  $X$  : quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés ?

Si  $n$  est la réponse à l'exercice allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre :

$$\lfloor 700 \sin(10n) \rfloor.$$

**Exercice 2** Un triangle  $ABC$  a des cotés de longueurs entières positives et  $\widehat{A} = 2\widehat{B}$  et  $\widehat{C} > 90^\circ$ . Quelle est la longueur minimum du périmètre de  $ABC$ .

Allez chercher une énigme à la case correspondant à cette longueur.

**Exercice 3** Déterminer la limite de la suite  $u_n$  définie par :

$$u_n = \frac{6^1}{(3^1 - 2^1)(3^2 - 2^2)} + \frac{6^2}{(3^2 - 2^2)(3^3 - 2^3)} + \cdots + \frac{6^n}{(3^n - 2^n)(3^{n+1} - 2^{n+1})}.$$

Soit  $x$  défini par

$$x = \left\lfloor \frac{15 \left[ 10 \sin \left( \left\lfloor \frac{13x^3 + 4x + 2}{x + 3} + 10 \right\rfloor \right) \right]^2 + 7 \left\lfloor \frac{20x^3 + 1}{x^4 + 2x} \right\rfloor \left\lfloor \sqrt{2x}/12 \right\rfloor^5 - \left\lfloor 10 \sin(\sqrt{2025x^4}) \right\rfloor}{60} \right\rfloor.$$

Allez chercher une énigme à la case correspondant à  $x$ .

**Exercice 4** Un nombre de 10 chiffres est dit intéressant si les chiffres qui le composent sont tous différents et s'il est multiple de 11111.

Si  $n$  désigne le nombre de nombres intéressants , allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre :

$$\lfloor 3\sqrt{n} \rfloor$$

**Exercice 5** Déterminer les nombres premiers  $q$  tels qu'il existe un nombre premier  $p > q$  tel que  $q$  divise  $2^p + 3^p$ . La réponse est le produit de toutes les solutions de l'exercice. Allez chercher une énigme à la case correspondant à cette réponse.

### Exercice 6

Déterminer le nombre maximal  $n$  d'éléments que peut contenir un sous-ensemble  $A$  de  $\{1; \dots; 3000\}$  tel que, pour tout  $x \in A$  ; on ait  $2x \notin A$  ? Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre :

$$\lfloor 1000 \sin(-n) \rfloor.$$

**Exercice 7** Vingt enfants attendent leurs grands-pères à la sortie de la maternelle. Deux enfants quelconques ont toujours au moins un grand-père en commun. Quel est le nombre minimum de petits enfants que peut avoir le grand père qui a le plus grand nombre de petits enfants dans l'école ? On note :

–  $a$  la réponse à l'exercice.



- $b$  le nombre de cours, TD et TND du stage de Grésillon 2011.
- $c$  la pointure de Jean-François
- $d$  la vision de Pierre.
- $e$  le nombre de nationalités d'Igor.
- $f$  le nombre d'oreilles de François.

Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre :

$$a.b.c.d.e + 123.$$

**Exercice 8** Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout entiers  $m, n > 0$ ,  $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}$
- $f(2) = 0$ ,  $f(3) > 0$  et  $f(9999) = 3333$ .

Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre  $f(1982)$ .

### - Correction -

Solution de l'exercice 1 On note  $e_1, \dots, e_{70}$  les employés, et  $m$  le minimum de langues parlées (qui existent puisque, si l'on attribue une langue différentes à chaque  $e_i$ , on a bien la situation cherché). Dans le cas d'une répartition minimal à  $m$  langues, pour tout  $i$ , on note  $E_i$  l'ensemble des langues parlées par l'employé  $e_i$  et  $E$  l'ensemble des  $m$  langues. Les conditions de l'énoncé signifient alors que, pour tout  $i, j$  avec  $i \neq j$ ,  $E_i$  n'est pas inclus dans  $E_j$  et  $E_i$  n'est pas inclus dans  $E_j$ , c'est-à-dire que les ensembles  $E_1, \dots, E_{70}$  forment une antichaine de sous ensemble de  $E$ . D'après le théorème de Famille de Sperner, on a donc  $70 \leq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$  et un calcul direct montre qu'alors  $m \geq 8$ . Réciproquement, puisque  $\binom{8}{4} = 70$  il est facile de vérifier qu'après avoir arbitrairement numéroté les parties à 4 éléments de  $\{1, \dots, 8\}$  en les identifiant aux ensembles  $E_i$  par cette numérotation on détermine ainsi une répartition adéquate des 8 langues. Ainsi,  $m \leq 8$ . Finalement, le nombre minimum total de langues parlées par les employés est 8.

Solution de l'exercice 2 Soit  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ . On a  $\widehat{A} = 2\widehat{B}$  et  $\widehat{C} = 180^\circ - 3\widehat{B}$  et par la loi des sinus :

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Comme  $\sin \widehat{A} = \sin(2\widehat{B}) = 2 \sin \widehat{B} \cos \widehat{B}$  et  $\sin \widehat{C} = \sin(3\widehat{B}) = 3 \sin \widehat{B} - 4 \sin^3 \widehat{B}$  on a :

$$a = 2b \cos \widehat{B}, \quad c = b(3 - 4 \sin^2 \widehat{B}) = b(4 \cos^2 \widehat{B} - 1)$$

et donc  $a^2 = b(b+c)$ . Nous pouvons supposer  $\text{PGCD}(a, b, c) = 1$  (sinon on peut diviser  $a, b$  et  $c$  par leur PGCD) et en faite on a  $\text{PGCD}(b, c) = 1$  car avec la relation précédente, si  $b$  et  $c$  ont un facteur commun alors  $a$  l'a aussi. Donc comme on a  $a^2 = b(b+c)$  et que  $b$  et  $b+c$  sont premiers entre eux alors  $b$  et  $b+c$  doivent être des carrés. Donc il existe  $m$  et  $n$  entiers tels que :  $b = m^2$  et  $b+c = n^2$  et donc  $a = mn$ ,  $2 \cos \widehat{B} = n/m = a/b$ . Puisque  $\widehat{C} > 90^\circ$ , on a  $0 < \widehat{B} < 30^\circ$  et

$$\sqrt{3} < 2 \cos \widehat{B} = \frac{n}{m} < 2$$

. Il est alors facile de vérifier que  $(m, n) = (4, 7)$  est la solution et ce couple génère le triangle minimum  $(a, b, c) = (28, 16, 33)$  qui satisfait bien les conditions.

Solution de l'exercice 3 Soit  $n = abcdefghij$  un nombre intéressant, modulo 9 on a donc :

$$n = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 0 \pmod{9}$$

donc  $n$  est multiple de  $9.11111 = 10^5 - 1$ . Donc si on note  $n = 10^5x + y$  on a :

$$0 = n = 10^5x + y = x + y \pmod{10^5 - 1}$$

Mais comme  $0 < x + y < 2.99999$  on a que  $x + y = 99999$  et donc  $a + f = \dots = e + j = 0$ . Comme il y a  $5! = 120$  façons de distribuer les paires  $(0, 9), (1, 8), \dots, (4, 5)$  sur  $(a, f), (b, g), \dots, (e, j)$  et pour chaque paire on peut changer l'ordre des nombres, ceci nous donne  $2^5 = 32$  choix supplémentaires. Nous avons donc un total de  $32.120$  possibilités, mais le choix  $a = 0$  est impossible et donc le nombre total de choix est  $32.120.9/10 = 3456$ .

Solution de l'exercice 4 La limite vaut 2. Indice : montrer qu'il s'agit d'une série télescopique.

Solution de l'exercice 5 Si  $q$  divise  $2^p + 3^p$ , il est clair que  $q \neq 2$ . Si on note  $\omega_n(a)$  l'ordre de  $a$  modulo  $n$ , alors  $\omega_q(2/(-3))$  divise  $p$  et  $q - 1$ . Si  $\omega_q(2/(-3)) = 1$ , alors  $q = 5$ . Si  $q \neq 5$ , alors  $\omega_q(2/(-3)) = p$  et donc  $p$  divise  $q - 1$ , ce qui est absurde car  $p > q$ . Il y a donc un seul nombre premier  $q$  qui vérifie les conditions de l'énoncé qui est  $q = 5$ .

Solution de l'exercice 6 Répartissons les entiers strictement positifs (qu'ils dépassent ou pas 3000 est sans importance) en paire  $\{a, 2a\}$ , où l'exposant de 2 dans la décomposition en facteur premiers de  $a$  est pair, c'est-à-dire  $a = 2^{2k}b$  avec  $k \geq 0, b \geq 1$  et  $b$  impair. Pour  $k \geq 0$  fixé, il y a autant de nombres  $a$  de la forme ci-dessus et qui ne dépasse pas 3000 que d'entiers naturels  $b$  impairs tel que  $b \leq \frac{3000}{2^{2k}}$ . Comme  $3000 < 2^{12}$  (donc  $k < 6$ ), on trouve

- Pour  $k = 0$  il y a 1500  $b$  possibles.
- Pour  $k = 1$  il y a 375  $b$  possibles.
- Pour  $k = 2$  il y a 94  $b$  possibles.
- Pour  $k = 3$  il y a 23  $b$  possibles.
- Pour  $k = 4$  il y a 6  $b$  possibles.
- Pour  $k = 5$  il y a 1  $b$  possibles.

soit 1999 paires de la forme ci-dessus avec  $a \leq 3000$ . D'après le principe des tiroirs, tout ensemble qui contiendrait au moins 2000 éléments de  $\{1, \dots, 3000\}$  contiendra donc au moins une paire de la forme  $\{a, 2a\}$  ci-dessus, et (puisque ces 2000 nombres ne dépassent pas 3000) la paire en question est telle que  $a$  et  $2a$  sont inférieurs ou égaux à 3000. On en déduit que le maximum cherché ne dépasse pas 1999. Réciproquement, la construction ci-dessus assure que l'on peut trouver au moins 1999 nombres  $a$  de la forme  $a = 2^{2k}b$  avec  $k \geq 0, b \geq 1$  et  $b$  impair, qui ne dépassent pas 3000. L'ensemble  $A$  formé par tous ces nombres est bien tel que pour tout  $x \in A$ , on ait  $2x \notin A$  (le double d'un nombre de la forme ci-dessus a un exposant de 2 impaire dans sa décomposition en facteur premier). Le maximum cherché est donc au moins 1999. Finalement, le maximum est 1999.

Solution de l'exercice 7 On peut toujours supposer que les enfants n'ont pas tous un grand-père en commun, sans quoi la conclusion est déjà assurée. Soit donc  $e_1$  un enfant, et on appelle  $A$  et  $B$  ses deux grands-pères. D'après notre hypothèse, il existe un enfant  $e_2$  qui n'a pas  $A$  pour grand-père, mais qui doit alors avoir  $B$  comme grand-père commun avec  $e_1$ . On appelle  $C$  le second grand-père de  $e_2$ . De même, il existe un enfant  $e_3$  qui n'a pas  $B$  pour grand-père, mais qui doit alors avoir  $A$  comme grand-père commun avec  $e_1$  et  $C$  comme grand-père commun

avec  $e_2$ . De même chacun des autres enfants, ayant un grand-père commun avec  $e_1, e_2$  et  $e_3$ , doit avoir ses deux grands-pères parmi  $A, B, C$  et le principe des tiroirs assure alors que l'un d'entre eux a bien au moins 14 petits-enfants.

*Solution de l'exercice 8* Soit  $f$  une solution éventuelle. Commençons par déterminer les premières valeurs de  $f(n)$  pour y voir un peu mieux. La première condition implique que, pour tout entier  $m, n > 0$ ,

$$f(m+n) \geq f(m) + f(n)$$

En particulier, pour  $m = n = 1$ , il vient  $f(2) \geq 2f(1)$ . Et donc  $f(1) = 0$  (d'après la seconde hypothèse). Pour  $m = 2$  et  $n = 1$ , il vient  $f(3) = f(2) + f(1) + t = t$  où  $t \in \{0, 1\}$ . Puisque  $f(3) > 0$ , c'est donc que  $f(3) = 1$ . L'inégalité  $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$  nous permet alors de minorer le nombre  $f(3n)$  par récurrence : en effet, pour tout entier  $n \geq 0$  on a  $f(3(n+1)) \geq f(3n) + f(3) = f(3n) + 1$ . Une récurrence sans difficulté conduit alors à  $f(3n) \geq n$ , pour tout entier  $n \geq 0$ . Cette inégalité provenant d'inégalité successives, c'est ici que l'on va pouvoir exploiter la condition  $f(9999) = 3333$ . Par l'absurde : supposons qu'il existe  $n \in \{0, 1, \dots, 3333\}$  tel que  $f(3n) > n$ . Alors  $n < 3333$  et la récurrence précédente conduit de la même façon à  $f(3(n+k)) > n+k$  pour tout entier  $k$  tel que  $n+k \in \{n, n+1, \dots, 3333\}$ . En particulier,  $f(9999) > 3333$  qui est la contradiction souhaitée. Donc, pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, 3333\}$  on a

$$f(3n) = n$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer  $f(1982)$ . D'après la relation précédente et  $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$ , on a  $1982 = f(3 \times 1982) \geq f(2 \times 1982) + f(1982) \geq 3f(1982)$ . D'où  $f(1982) \leq \frac{1982}{3}$ , c.à.d.  $f(1982) \leq 660$  (puisque  $f(1982)$  est entier). D'autre part avec les relations précédentes on a  $f(1982) \geq f(1980) + f(2) = f(1980) = f(3 \times 660) = 660$ . Finalement  $f(1982) = 660$ . Notez qu'une telle fonction existe : par exemple  $x \mapsto \lfloor x/3 \rfloor$ .



## **VII. La Muraille**

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 1

Deux personnes, à tour de rôle, cassent une tablette de chocolat  $6 \times 8$  (évidemment par découpe possible suivant les côtés des carrés). Qui sera obligé de prendre la dernière découpe?

### Exercice 2

On place  $2n$  points dans le plan et on trace  $n^2 + 1$  segments entre ces points. Montrer que l'on peut trouver 3 points reliés deux à deux.

### Exercice 3

Soit  $n$  un entier. Prouver que parmi les fractions  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ , le nombre de fractions irréductible est pair.

### Exercice 4

Est-il possible de transformer la fonction  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  en la fonction  $g(x) = x^2 + 10x + 9$  par une suite de transformations de la forme:

$$f(x) \mapsto x^2 f(1/x + 1) \quad \text{ou} \quad f(x) \mapsto (x-1)^2 f(1/(x-1)).$$

### Exercice 5

Montrer que si  $m$  divise  $(m-1)! + 1$  alors  $m$  est premier.

### Exercice 6

Six cercles sont concourants en un point  $A$ . Montre que l'un de ces cercles contient le centre d'un autre.



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 7

Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit  $\Gamma$  du triangle  $ABC$ . La droite  $(BO)$  recoupe  $\Gamma$  en  $D$ . La droite perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $A$  recoupe  $\Gamma$  en  $E$ . Prouver que l'aire du quadrilatère  $BECD$  est égale à l'aire du triangle  $ABC$ .

### Exercice 8

- (a) Pour quelles valeurs de  $n$  l'entier  $2^n - 1$  est-il une puissance de 3?
- (b) Pour quelles valeurs de  $n$  l'entier  $2^n + 1$  est-il une puissance de 3 ?

### Exercice 9

Soit  $f$  une fonction qui à deux entiers strictement positifs associe un entier strictement positif, définie par  $f(1, 1) = 2$ ,  $f(m+1, n) = f(m, n) + m$ , et  $f(m, n+1) = f(m, n) - n$ .  
Quels sont les couples  $(p, q)$  tels que  $f(p, q) = 2011$ ?

### Exercice 10

Une compagnie internationale possède 70 employés. Si  $X$  et  $Y$  sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par  $X$  et non parlée par  $Y$ , et une langue parlée par  $Y$  mais pas par  $X$ .  
Quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés?

### Exercice 11

Soit  $n > 0$  un entier. Prouver qu'un carré de  $2^n \times 2^n$  cases unité, privé d'une case, peut être pavé par des coins (un coin est un carré  $2 \times 2$  dont on a enlevé une case).

### Exercice 12

Trouver toutes les fonctions  $f$  allant de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Q}$  telles que  $f(1) = 2$  et pour tout couple  $(x, y)$  on ait :

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 13

On place des nombres entiers dans un tableau carré. Au dessus de chaque colonne, on écrit le plus grand entier de cette colonne. On appelle  $a$  le plus petit élément parmi ceux écrits au dessus d'une colonne. À gauche de chaque ligne, on écrit le plus petit entier de cette ligne. On appelle  $b$  le le grand élément parmi ceux écrits à gauche d'une ligne. Comparer les deux entiers  $a$  et  $b$ .

### Exercice 14

Deux personnes, à tour de rôle, mettent des tours sur un échiquier  $8 \times 8$  de sorte qu'elles ne soient pas en prise mutuelle. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.  
Qui sera le vainqueur de ce jeu?

### Exercice 15

Combien y a-t-il de façons de ranger les entiers  $1, 2, \dots, n$  de sorte que chaque valeur soit plus grande que toutes celles qui la précèdent ou soit plus grande que toutes celles qui la précèdent?

### Exercice 16

De combien de façons peut-on paver un rectangle  $2 \times n$  avec des dominos  $2 \times 1$  ?  
Combien de ces pavages sont-ils symétriques ?  
Combien y a-t-il de pavages distincts (on considère que deux pavages sont identiques lorsqu'ils sont symétriques l'un de l'autre) ?

### Exercice 17

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers tels que  $PGCD(m, n) + PPCM(m, n) = m + n$ . Prouver que l'un des nombres divise le deuxième.

### Exercice 18

Soit  $A$  le point d'intersection de deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de rayons  $p$  et  $q$ . Soient respectivement  $B$  et  $C$  deux points de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  tels que  $(BC)$  est tangente aux deux cercles.  
Prouver que  $pq = R^2$ , où  $R$  est le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 19

Montrer que parmi les réels positifs  $a, 2a, \dots, (n-1)a$ , l'un au moins est à distance au plus  $1/n$  d'un entier positif, pour tout  $a > 0$ .

### Exercice 20

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des ensembles finis. Montrer que:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

où  $\#(A)$  désigne le cardinal d'un ensemble  $A$ .

### Exercice 21

Soit  $n$  un entier divisible ni par 2, ni par 5. Montrer qu'il existe un multiple de  $n$  ne comportant que des 1.

### Exercice 22

Considérons les  $2^n - 1$  sous-ensembles non vides de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Pour chacun de ces sous-ensembles, on calcule le produit des inverses de ses éléments. Trouver la somme de tous ces produits.

### Exercice 23

On choisit un point sur chaque côté d'un carré de côté 1. On considère alors  $a, b, c$  et  $d$  les longueurs du quadrilatère ainsi formé.

Montrer que

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4 \quad \text{et} \quad 2\sqrt{2} \leq a + b + c + d \leq 4.$$

### Exercice 24

Montrer que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 25

On dispose de 13 poids, valant chacun un nombre entiers de kilos. On suppose que, quel que soit le poids choisi, il est possible de partitionner les 12 poids restants en deux ensembles de 6 poids de même somme totale. Montrer que les 13 poids sont égaux.

### Exercice 26

Deux personnes, à tour de rôle, mettent sur une table rectangulaire des pièces de monnaie identiques de sorte qu'elles ne se superposent pas. Celui qui perd est celui qui n'a plus aucune place où mettre une pièce? Qui sera le vainqueur de ce jeu?

### Exercice 27

Déterminer le nombre de mots de  $n \geq 1$  lettres choisies parmi  $a, b, c$  et qui contiennent un nombre pair de  $a$ .

### Exercice 28

On colore chaque sommet d'un échiquier  $8 \times 8$ , soit en bleu, soit en rouge, de telle sorte que chaque case possède 2 sommets bleus et 2 rouges. De combien de façon peut-on effectuer un tel coloriage?

### Exercice 29

Cinq entiers naturels engendrent 10 sommes quand on les ajoute deux à deux de toutes les façons possibles. Est-il possible que ces 10 sommes soient 10 entiers naturels consécutifs ?

### Exercice 30

Calculer le terme général de la suite définie par  $x_0 = 3$ ,  $x_1 = 4$ , et  $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$  pour  $n$  plus grand que 1.



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 31

On place les entiers  $1, \dots, 2n$  dans n'importe quel ordre à des places numérotées  $1, \dots, 2n$ . On ajoute la valeur de sa place à chaque entier. Montrer qu'il y a deux sommes qui ont le même reste modulo  $2n$ .

### Exercice 32

On a des pièces de 1, 2, 5, 10, 20, 50 centimes et 1 euro. Prouver que si avec  $N$  de ces pièces on peut payer une facture de  $M$  centimes, alors il est possible de payer une facture de  $N$  euros avec  $M$  pièces.

### Exercice 33

Montrer que  $385^{1980} + 18^{1980}$  n'est pas un carré parfait.

### Exercice 34

Un cercle passant par les sommets  $A$  et  $C$  d'un triangle  $ABC$  coupe le côté  $[AB]$  en son milieu  $D$  et le côté  $[BC]$  en  $E$ . Le cercle tangent à  $(AC)$  et passant par  $E$  recoupe la droite  $(DE)$  en  $F$ . Soit  $K$  le point d'intersection des droites  $(DE)$  et  $(AC)$ .

Prouver que les droites  $(CF)$ ,  $(AE)$  et  $(BK)$  sont concourantes.

### Exercice 35

On place  $m$  jetons ( $m > n$ ) sur les sommets d'un  $n$ -gone convexe. À chaque étape, deux jetons se trouvant sur un même sommet sont déplacés sur un voisin différent de ce sommet. Montrer que si l'on retrouve la distribution initiale après un certain nombre de mouvements, ce nombre de mouvements est un multiple de  $n$ .

### Exercice 36

Montrer que si  $a, b, c$  sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont le plus long côté est  $c$ , montrer que  $c^n > a^n + b^n$  pour tout entier  $n > 2$ .

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 37

Montrer que  $2^n$  ne divise pas  $n!$ .

### Exercice 38

Soit  $M$  un ensemble de 2011 entiers, tel qu'aucun d'entre eux n'ait de facteur premier strictement plus grand que 23.  
Montrer qu'il existe un sous-ensemble de  $M$  à 4 éléments dont le produit est une puissance quatrième.

### Exercice 39

Deux personnes, à tour de rôle, mettent des fous sur un échiquier  $8 \times 8$  de sorte qu'ils ne soient pas en prise mutuelle. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.  
Qui sera le vainqueur de ce jeu?

### Exercice 40

Considérons  $n$  sièges en ligne. Un enfant est assis sur chaque siège. Chaque enfant peut se déplacer d'au plus un siège. Trouver le nombre  $a_n$  de façons dont ils peuvent se déplacer.

### Exercice 41

Soient 10 segments de longueurs entières comprises entre 1 cm et 55 cm. Montrer qu'on peut construire les trois côtés d'un triangle avec trois de ces segments.

### Exercice 42

Montrer que si  $n$  est la somme de deux carrés, alors  $2n$  l'est aussi.



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 43

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ , avec  $\widehat{BAC} = 100^\circ$ . Soit  $D$  le point de la droite  $(AB)$  tel que  $AD = BC$ , et  $B$  est entre  $A$  et  $D$ . Montrer que  $\widehat{ADC} = 30^\circ$ .

### Exercice 44

Montrer que:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{999} + \frac{1}{1000} < \frac{2}{5}.$$

### Exercice 45

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ , les points  $M$  et  $N$  sont pris sur les côtés  $AB$  et  $AC$  respectivement. Les droites  $(BN)$  et  $(CM)$  se coupent en  $P$ . Montrer que les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles si, et seulement si,  $\widehat{APM} = \widehat{APN}$ .

### Exercice 46

- (i) Montrer que tous les nombres de la forme 1007, 10017, 100117, ... sont divisibles par 53.
- (ii) Montrer que tous les nombres de la forme 12008, 120308, 1203308, ... sont divisibles par 19.

### Exercice 47

On supprime le premier chiffre du nombre  $7^{1996}$ , et on l'ajoute au nombre restant. On répète ce procédé jusqu'à obtenir un nombre à 10 chiffres. Montrer que cet entier a deux chiffres égaux.

### Exercice 48

Deux personnes, à tour de rôle, cassent (le long d'une ligne droite) un petit bâton de chocolat  $5 \times 10$ ; le premier qui détache un morceau  $1 \times 1$  a gagné. Qui sera le vainqueur?

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 49

Soit  $ABC$  un triangle quelconque et  $H$  son orthocentre. Soient deux points  $M$  et  $N$  pris respectivement sur les côtés  $AB$  et  $AC$ . Les cercles des diamètres  $BN$  et  $CM$  se coupent en  $P$  et  $Q$ .  
Montrer que les points  $P, Q, H$  sont alignés.

### Exercice 50

Montrer que si  $n$  points du plan ne sont pas tous colinéaires, il y a au moins  $n$  droites distinctes passant par deux d'entre eux.

### Exercice 51

Quel est le plus grand des deux nombres suivants :

1. La suite  $2^{2^{n-1}}$  pris  $n$  fois ou  $3^{3^{n-1}}$  pris  $(n-1)$  fois ?
2. La suite  $3^{3^{n-1}}$  pris  $n$  fois ou  $4^{4^{n-1}}$  pris  $(n-1)$  fois ?

### Exercice 52

Dans une urne il y a un certain nombre de boules, avec une lettre de l'alphabet inscrite sur chacune. On tire une boule au hasard, on note la lettre écrite et on la remet dans l'urne. Ensuite on répète ce procédé jusqu'à avoir un mot de 6 lettres.  
Quelle est la probabilité maximale de se retrouver avec BAOBAB ?

### Exercice 53

Dans un restaurant il y a 50 gentlemen. Mais au moment de partir il y a une coupure de courant et chacun prend un chapeau au hasard parmi ceux qui sont dans le vestiaire.

1. Quelle est la probabilité que tout le monde parte avec son chapeau ?
2. Quelle est la probabilité que personne ne parte avec son chapeau ?

### Exercice 54

Soit  $ABC$  un triangle et  $d$  une droite passant par le centre du cercle inscrit  $\gamma$  de  $ABC$ . Soient  $A_1$  (resp.  $B_1, C_1$ ) le projeté orthogonal de  $A$  (resp.  $B, C$ ) sur  $d$  et  $A_2$  (resp.  $B_2, C_2$ ) le point de  $\gamma$  diamétralement opposé au point de tangence entre  $\gamma$  et  $[BC]$  (resp.  $[CA], [AB]$ ).  
Prouver que les droites  $(A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2)$  sont concourantes en un point appartenant à  $\gamma$ .



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 55

On commence avec une pile de  $n$  jetons. Puis, à chaque étape, on choisit une colonne comportant aux moins deux jetons de plus que la colonne immédiatement à sa droite, et on déplace un jeton de cette colonne vers la colonne située à sa droite. Si c'est impossible, on s'arrête.

Montrer que quel que soit les choix fait à chaque étape, on aboutit toujours à la même configuration finale.

### Exercice 56

Sur une feuille on écrit tous les nombres entiers strictement positifs. Ensuite on en relie certains selon la règle suivante : deux entiers sont reliés si et seulement si leur somme est un nombre premier. On veut colorier tous les entiers de telles sorte que deux entiers reliés ne soient jamais de la même couleur.

Quel est le nombre minimal de couleurs dont on a besoin ?

### Exercice 57

Les points  $D$  et  $E$  appartiennent respectivement aux segments  $[AB]$  et  $[AC]$ , de sorte que les droites  $(DE)$  et  $(BC)$  soient parallèles. Soit  $P$  un point arbitraire intérieur au triangle  $ABC$ . Les droites  $(PB)$  et  $(PC)$  rencontrent  $(DE)$  respectivement en  $F$  et  $G$ . On appelle  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) le centre du cercle circonscrit à  $PDG$  (resp.  $PFE$ ).

Prouver que  $(AP)$  et  $(O_1O_2)$  sont perpendiculaires.

### Exercice 58

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en 0 vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y).$$

### Exercice 59

Alice et Bob jouent sur un échiquier plan infini. Alice commence par choisir une case et la colorie en rouge, puis Bob choisit une case non encore coloriée et la colorie en vert, et ainsi de suite. Alice gagne la partie si elle réussit à colorier en rouge quatre cases qui dont les centre forment les sommets d'un carré de côtés parallèles à ceux des cases.

- Prouver qu'Alice possède une stratégie gagnante.
- Qu'en est-il si Bob a, lui, le droit de colorier deux cases en vert à chaque coup?

### Exercice 60

Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe. Soient  $P = (AB) \cap (CD)$  et  $Q = (AD) \cap (BC)$ . Soit  $R$  un point arbitraire à l'intérieur de  $ABCD$ . Soient  $K = (BC) \cap (PR)$ ,  $L = (AB) \cap (QR)$  et  $M = (AK) \cap (DR)$ .

Prouver que les points  $L, M, C$  sont alignés.

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 61

Pour un entier  $n \geq 1$ , le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de  $n$  est noté  $Z(n)$ . Montrer l'existence et calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z(n!)}{n}.$$

### Exercice 62

1. Montrer que dans n'importe quelle famille de 5 entiers, on peut en choisir 3 dont la somme est divisible par 3.
2. Montrer que dans n'importe quelle famille de 11 entiers, on peut en choisir 6 dont la somme est divisible par 6.

### Exercice 63

On considère l'ensemble des mots constitués des lettres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On définit les deux familles d'ensembles suivantes :

- $A_n = \{ \text{mots de longueur } n \text{ qui ne contiennent ni } aa \text{ ni } bb \}.$
- $B_n = \{ \text{mots de longueur } n \text{ tels que trois lettres consécutives ne sont jamais toutes distinctes} \}.$

Montrer que  $\#B_{n+1} = 3\#A_n$ .

### Exercice 64

L'ensemble  $\{1, 2, \dots, 3n\}$  est partitionné en trois ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $n$  éléments chacun. Montrer qu'il est possible de choisir un élément dans chacun de ces trois ensembles, tels que la somme de deux d'entre eux soit égale au troisième.

### Exercice 65

Existe-t-il des fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui vérifient

$$f(f(n)) = f(n) + 2011$$

pour tout entier  $n \geq 0$  ?

### Exercice 66

Les élèves d'une classe sont allés se chercher des glaces par groupe d'au moins deux personnes. Il y a eu  $k > 1$  groupes en tout. Deux élèves quelconques ne sont jamais partis ensemble plus d'une fois, mais ils ont fait partie d'un même groupe au moins une fois. Prouver qu'il n'y a pas plus de  $k$  élèves dans la classe.



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 67

Soient  $a, b, c, d$  les longueurs des côtés consécutifs d'un quadrilatère convexe  $ABCD$ . Soient  $m$  et  $n$  les longueurs de ses diagonales.

Prouver que:

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

### Exercice 68

Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une application telle qu'on ait:

1. pour tous entiers  $a$  et  $b$  premiers entre eux,  $f(ab) = f(a)f(b)$
2. pour tous nombres premiers  $p, q$ ,  $f(p+q) = f(p) + f(q)$

Prouver que  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 3$  et  $f(1999) = 1999$ .

### Exercice 69

Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , 2 est racine primitive modulo  $3^n$ .

### Exercice 70

On veut paver un rectangle  $m \times n$  ( $m, n > 1$ ) par des **L** (pensez Tetris). Montrer que ce pavage est possible si et seulement si  $mn$  est multiple de 8.

### Exercice 71

Combien y-a-t-il d'ensembles de 4 entiers positifs impairs dont la somme des éléments vaut 98?

### Exercice 72

Une suite croissante  $(s_n)_{n \geq 0}$  est dite super-additive si pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers on a  $s_{i+j} \geq s_i + s_j$ . Soient  $(s_n)$  et  $(t_n)$  deux telles suites super-additives. Soit  $(u_n)$  la suite croissante d'entiers vérifiant qu'un nombre apparaît autant de fois dans  $(u_n)$  que dans  $(s_n)$  et  $(t_n)$  combinées.

Montrer que  $(u_n)$  est elle aussi super-additive.

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 73

Soit  $ABC$  un triangle, soit  $A'B'C'$  un triangle directement semblable à  $ABC$  de telle sorte que  $A$  appartienne au côté  $B'C'$ ,  $B$  au côté  $C'A'$  et  $C$  au côté  $A'B'$ . Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ ,  $H$  son orthocentre et  $H'$  celui de  $A'B'C'$ . Montrer qu'on a  $\vec{OH} = \vec{OH'}$ .

### Exercice 74

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= yf(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

### Exercice 75

Pour un entier  $n \geq 1$ , on note  $\sigma(n)$  la somme des diviseurs positifs de  $n$ . Montrer que  $\sigma(N)/N < 2$ , où  $N = 2^{2^n} + 1$ .

### Exercice 76

Existe-t-il un ensemble infini de points du plan, tel que trois points quelconques de cet ensemble ne soient jamais alignés, et tel que la distance entre deux points de cet ensemble soit toujours rationnelle?

### Exercice 77

Deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se rencontrent en  $A$  et en  $B$ . Par le point  $A$  passe une droite qui recoupe  $\Gamma_1$  en  $C$ , et  $\Gamma_2$  en  $D$ , avec  $A \in [CD]$ . On désigne par  $M$  et  $N$  les milieux respectifs des arcs  $BC$  et  $BD$  qui ne contiennent pas  $A$ , et par  $K$  le milieu de  $[CD]$ . Prouver que le triangle  $MKN$  est rectangle.

### Exercice 78

Alice et Bob disposent d'un nombre fini d'ampoules, chacune pouvant être soit allumée soit éteinte. Alice décide alors de placer à sa guise des guirlandes entre certaines paires d'ampoules. Puis, Bob installe un système d'interrupteurs qui, si l'on change l'état d'une ampoule  $L$  quelconque change alors aussi, et simultanément, l'état de toutes les autres ampoules reliées à  $L$  par une guirlande. Initialement, toutes les ampoules sont éteintes. Peut-on, à l'aide de ces interrupteurs, allumer simultanément toutes les ampoules?



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 79

Soit  $f(x) = x^3 + 17$ . Prouver que pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un entier  $x$  pour lequel  $f(x)$  est divisible par  $3^n$  et par  $3^{n+1}$ .

### Exercice 80

On considère un ensemble de  $2n + 1$  droites du plan, deux jamais parallèles ni perpendiculaires et trois jamais concourantes. Trois droites forment donc toujours un triangle non-rectangle.

Déterminer le nombre maximal de triangles aigus qui puissent ainsi être formés.

### Exercice 81

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a^3 - 3ab^2 = 44$  et  $b^3 - 3a^2b = 8$ . Que vaut  $a^2 + b^2$ ?

### Exercice 82

Montrer que tout ensemble fini  $A$  d'entiers positifs est inclus dans un ensemble fini  $B$  d'entiers positifs tel que tout élément de  $B$  divise la somme des éléments de  $B$ .

### Exercice 83

Soient  $A, B, C_2, C_1$  des points d'un cercle  $\Gamma$  dans cet ordre. Soit  $\gamma$  un cercle tangent à  $[AC_2]$ ,  $[BC_1]$  et  $\Gamma$ . On note  $M_2$  le point de contact entre  $\gamma$  et  $[AC_2]$  et par  $N_1$  le point de contact entre  $\gamma$  et  $[BC_1]$ .

Prouver que le centres des cercles inscrits à  $ABC_1$  et  $ABC_2$  sont sur  $[M_2N_1]$

### Exercice 84

Déterminer tous les couples  $(x, k)$  d'entiers positifs qui vérifient l'équation:

$$3^k - 1 = x^3.$$

## VII. LA MURAILLE

### Exercice 85

Il y a 2011 pièces sur une table. On retourne une de ces pièces, puis on en retourne 2, puis 3, et ainsi de suite jusqu'à retourner les 2011 pièces à la dernière étape.

Montrer qu'en procédant de la sorte il est possible d'arriver à une configuration où toutes les pièces sont sur faces, ou bien toutes les pièces sont sur piles, mais qu'il est impossible d'arriver à ces deux configurations.

### Exercice 86

Soit  $A, B$  et  $C$  les mesures en degré d'un triangle et  $a, b$  et  $c$  les longueurs des côtés opposés. Démontrer que:

$$60^\circ \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \leq 90^\circ.$$

### Exercice 87

On suppose qu'on a une fonction  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante qui vérifie

$$f(f(n)) = 3n.$$

Calculer  $f(2011)$ .

### Exercice 88

Soit  $O$  le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère  $ABCD$ . Soient  $E = (AB) \cap (CD)$  et  $F = (BC) \cap (AD)$ . Soient aussi  $K = (EO) \cap (AD)$ ,  $L = (EO) \cap (BC)$ ,  $M = (FO) \cap (AB)$  et  $N = (FO) \cap (CD)$ . Montrer que les droites  $(KN)$ ,  $(LM)$  et  $(EF)$  sont concourantes.

### Exercice 89

Soit  $E$  un ensemble de  $n \geq 2$  points du plan. On désigne respectivement par  $D$  et  $d$  la plus grande et la plus petite distance entre deux points distincts de  $E$ .

Prouver que:

$$D \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1)d.$$

### Exercice 90

Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers et de degré au moins 2. Prouver qu'il existe une suite arithmétique infinie (dans les deux directions) qui ne contient aucun nombre de la forme  $P(k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 91

Soit  $S$  un ensemble infini de points du plan tel que si  $A, B$  et  $C$  sont trois points quelconques dans  $S$ , la distance de  $A$  à la droite  $(BC)$  soit un entier. Prouver que les points de  $S$  sont tous alignés.

### Exercice 92

Trouver toutes les fonctions continues  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant:

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2.$$

### Exercice 93

Alice et Bob jouent à un jeu : ils commencent par écrire l'entier 2 sur une feuille. Ensuite Alice y ajoute un entier entre 1 et 2011 et écrit l'entier obtenu. Puis c'est au tour de Bob d'ajouter un entier entre 1 et 2011 au nombre inscrit, etc. Le premier à écrire un nombre non-premier a perdu. On suppose qu'Alice et Bob sont tous les deux de très bons mathématiciens. Qui va gagner ?

### Exercice 94

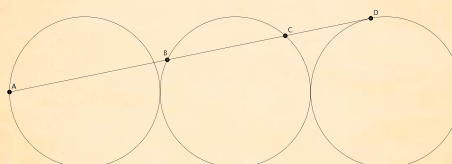
Soit  $n$  un nombre pouvant s'écrire de deux façons différentes comme somme de carrés d'entiers. Montrer que  $n$  est composé.

### Exercice 95

Soient  $m, n$  des entiers tels que  $1 \leq n \leq m-1$ . Une porte est fermée par plusieurs serrures, chacune devant être ouverte pour pouvoir ouvrir la porte. Une même clé ne peut ouvrir deux serrures différentes. Il y a  $m$  personnes qui possèdent, chacune, une ou plusieurs clés de telle façon qu'aucun groupe de  $n$  personnes puisse ouvrir la porte, mais que tout groupe de  $n+1$  en soit capable. Trouver le nombre minimal de serrures et, dans ce cas, le nombre de clés que possède chaque personne.

### Exercice 96

Chaque cercle a pour rayon 5. La droite  $(AD)$  est tangente au troisième cercle. Combien mesure le segment  $[BC]$  ?



## VII. LA MURAILLE

### Exercice 97

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  qui vérifient pour tout  $p$  premier et  $n$  naturel

$$f(n)^p \equiv n \pmod{f(p)}.$$

### Exercice 98

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles d'entiers disjoints, dont l'union est l'ensemble des nombres entiers naturels. Montrer que pour tout entier  $n$  il existe deux entiers distincts  $a$  et  $b$  strictement supérieurs à  $n$  et tels que  $\{a, b, a+b\}$  est inclus soit dans  $A$ , soit dans  $B$ .

### Exercice 99

On veut colorier certains des points de l'ensemble  $E_n = \{(a, b)/a, b \text{ entiers et } 0 \leq a, b \leq n\}$  de sorte que tout carré  $k \times k$  dont les sommets sont dans  $E_n$  contienne au moins un point colorié sur son bord. On note  $m(n)$  le nombre minimum de points à colorier pour que la condition désirée soit satisfaite.

Prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(n)}{n^2} = \frac{2}{\pi}.$$

### Exercice 100

Soit  $E = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$  un ensemble de  $n \geq 3$  points appartenant à un même cercle  $\Gamma$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on désigne par  $G_i$  l'isobarycentre des  $n-1$  points de  $E \setminus \{M_i\}$ , et par  $\Delta_i$  la droite passant par  $G_i$  et perpendiculaire à  $\Gamma$  en  $M_i$ .

Prouver que les droites  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  sont concourantes.

## VIII. Solutions de la Muraille

Solution de l'exercice 1 (résolu par Nathanaël Courant) On commence avec 1 morceau de chocolat  $6 \times 8$  et on veut finir avec 48 morceaux  $1 \times 1$ . Or à chaque coupe on transforme un morceau en deux morceaux, c-à-d on ajoute un morceau. Il faut donc exactement 47 coupes. Comme 47 est impair, ce sera le premier joueur qui fera la dernière coupe.

Solution de l'exercice 3 (résolu par Raphaël Monat) La fraction  $\frac{p}{q}$  est irréductible ssi  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux. Le nombre de fractions irréductibles entre  $\frac{1}{n}$  et  $\frac{n-1}{n}$  est donc  $\varphi(n)$ . On prend  $n > 2$ , on considère deux cas :

- L'entier  $n$  a un facteur premier  $p$  différent de 2. Dans ce cas  $(p-1) | \varphi(n)$ , donc  $\varphi(n)$  est pair.
- L'entier  $n$  est une puissance de 2 :  $n = 2^\alpha$  et comme  $n > 2$ ,  $\alpha \geq 2$ . Dans ce cas  $\varphi(n) = 2^{\alpha-1}$  est pair.

Solution de l'exercice 4 (résolu par Raphaël Monat) Numérotions les transformations

$$\begin{aligned} T_1 & : f(x) \mapsto x^2 f\left(\frac{1}{x} + 1\right) \\ T_2 & : f(x) \mapsto (x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

Voyons ce que ces transformations font aux polynômes du second degré.

$$\begin{aligned} T_1(ax^2 + bx + c) &= x^2 \left( a \left( \frac{1}{x} + 1 \right)^2 + b \left( \frac{1}{x} + 1 \right) + c \right) \\ &= a + 2ax + ax^2 + bx + bx^2 + cx^2 \\ &= (a + b + c)x^2 + (b + 2a)x + a \end{aligned}$$

Donc pour les polynômes du second degré,  $T_1$  correspond à la transformation  $t_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$t_1(a, b, c) = (a + b + c, 2a + b, a)$$

Et de la même façon on calcule que  $T_2$  correspond à

$$t_2(a, b, c) = (c, b - 2c, a - b + c)$$

Ensuite on remarque que

$$t_1(t_2(a, b, c)) = t_1(c, b - 2c, a - b + c) = (a, b, c)$$

$$t_2(t_1(a, b, c)) = t_2(a + b + c, 2a + b, a) = (a, b, c)$$





Solution de l'exercice 15 (résolu par Urvan Christen) On commence par placer le 1. Comme c'est le plus petit on a seulement deux possibilités : soit tout à droite, soit tout à gauche. Dans les emplacements qui restent on a deux positions possibles pour le 2 : à droite ou à gauche, puisque seul le 1 est plus petit que 2. Ainsi de suite jusqu'à  $(n - 1)$ . Ensuite il ne reste plus qu'une position pour placer  $n$ . Il y a donc  $2^{n-1}$  possibilités.

Solution de l'exercice 17 (résolu par Lucas Perotin, Timothée Schoen et Augustin Bariant, mais aussi Lingli Lin) On peut supposer  $m \geq n$ . Si  $n|m$ , alors  $\text{PGCD}(m, n) = n$ ,  $\text{PPCM}(m, n) = m$  et leur somme vaut bien  $m + n$ .

Si  $n \nmid m$ , alors  $\text{PPCM}(m, n)$  est un multiple de  $m$  mais n'est pas égal à  $m$ . On en déduit que  $\text{PPCM}(m, n) \geq 2m$ , et  $\text{PPCM}(m, n) + \text{PGCD}(m, n) > 2m \geq m + n$ .

Solution de l'exercice 25 (résolu par Alban Pierre) Prenons un jeu de 13 poids qui vérifie cette propriété. Si on retire un nombre entier de kilos de chaque poids, ils vérifient encore la propriété, donc on peut supposer que le poids le plus léger fait 0 kg.

S'il y a un poids pair et un poids impair, alors en retirant successivement le pair puis l'impair, la somme des 12 poids restants est paire puis impaire (ou l'inverse), donc dans un des cas on ne peut pas diviser en deux tas de 6 poids de même masse. Donc tous les poids ont la même parité et comme l'un des poids fait 0 kg, tous les poids sont pairs. On peut donc diviser toutes les masses par 2 et recommencer indéfiniment. Pour que ceci soit possible il faut que tous les poids aient une masse 0. Donc tous les poids sont égaux.

Solution de l'exercice 26 (résolu par Xavier Poulot-Cazajous) Le premier joueur gagne : il place la première pièce au centre, et à chaque pièce que place son adversaire il joue le symétrique par rapport au centre.

Solution de l'exercice 27 (résolu par Galatée Hémerly) Notons  $P_n$  le nombre de mots de longueur  $n$  avec un nombre pair de  $a$  et  $I_n$  le nombre avec un nombre impair de  $a$ . Trivialement,  $P_1 = 2$  et  $I_1 = 1$ . Il y a en tout  $3^n$  mots de longueur  $n$ , donc

$$P_n + I_n = 3^n$$

Maintenant calculons une formule de récurrence pour  $P_n$ . Un mot de longueur  $n + 1$  est dans l'une de ces catégories :

- un  $a$  suivi d'un mot de  $n$  lettres avec un nombre impair de  $a$
- un  $b$  suivi d'un mot de  $n$  lettres avec un nombre pair de  $a$
- un  $c$  suivi d'un mot de  $n$  lettres avec un nombre pair de  $a$

On obtient la formule suivante :

$$P_{n+1} = I_n + P_n + P_n = (3^n - P_n) + 2P_n = P_n + 3^n.$$

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \\ P_2 &= 2 + 3 \\ P_3 &= 2 + 3 + 3^2 \\ \dots &\quad \dots \\ P_n &= 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 3^i \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 29 (résolu par Lucas Perotin, Timothée Schoen et Augustin Bariant) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe 5 nombres entiers  $a, b, c, d, e$  tels que leurs sommes deux à deux soient 10 entiers consécutifs  $n, n+1, \dots, n+9$ . Calculons maintenant la somme  $S$  de ces 10 sommes :

$$S = n + (n+1) + \dots + (n+9) = 10n + 45.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} S &= (a+b) + (a+c) + (a+d) + (a+e) + (b+c) + (b+d) + (b+e) + (c+d) + (c+e) + (d+e) \\ &= 4(a+b+c+d+e). \end{aligned}$$

Mais la première équation est clairement impaire alors que la seconde est paire, on a une contradiction.

Solution de l'exercice 30 (résolu par Nathanaël Courant)

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 4$$

On va montrer par récurrence que  $x_n = n + 3$ . Supposons  $x_n = n + 3$  :

$$x_{n+1} = (n+2)^2 - n(n+3) = n^2 + 4n + 4 - n^2 - 3n = n + 4$$

ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 33 (résolu par Nathanaël Courant) Calculons tout modulo 13. si  $n$  est premier avec 13, alors

$$n^{12} \equiv 1[13] \text{ donc } n^{1980} = (n^{12})^{165} \equiv 1[13].$$

Donc  $18^{1980} + 385^{1980} \equiv 2[13]$ . Or les carrés mod 13 sont 0, 1, 3, 4, 9, 10 et 12. On n'a donc pas un carré.

Solution de l'exercice 37 (résolu par Lingli Lin et Galatée Hémery simultanément) On regarde la décomposition en facteurs premiers de  $n!$  :

$$n! = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots$$

et on veut montrer que  $\alpha_1 < n$ . Or

$$\alpha_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor + \dots$$

et on a  $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{2^k}$  et si  $k$  est assez grand,  $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = 0 < \frac{n}{2^k}$ . Donc

$$\alpha_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots < \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots = n.$$

Solution de l'exercice 39 (résolu par Alban Pierre) Pour chaque fou placé par le joueur 1, le joueur 2 peut reproduire ce coup sur une case de la couleur opposée (il joue sur la case symétrique par rapport à un axe de symétrie vertical de l'échiquier). Le joueur 2 peut donc toujours jouer, c'est lui qui gagnera.

Solution de l'exercice 41 (résolu par Chloé Papin) Raisonnons par l'absurde : supposons que l'on a 10 longueurs  $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{10} \leq 55$  telles qu'on ne puisse jamais construire un triangle avec trois longueurs. En particulier,

$$l_{n+2} > l_{n+1} + l_n \text{ pour tout } n \in [1, 7]$$

$$\begin{aligned} l_1 &\geq 1 \\ l_2 &\geq 1 \\ l_3 &> l_1 + l_2 \geq 2 \\ l_4 &> l_2 + l_3 > 3 \\ l_5 &> l_3 + l_4 > 5 \\ l_6 &> l_4 + l_5 > 8 \\ l_7 &> l_5 + l_6 > 13 \\ l_8 &> l_6 + l_7 > 21 \\ l_9 &> l_7 + l_8 > 34 \\ l_{10} &> l_8 + l_9 > 55 \end{aligned}$$

On a la contradiction souhaitée.

Solution de l'exercice 42 (résolu par Xavier Poulot-Cazajous) On suppose que  $n = a^2 + b^2$ .

$$\begin{aligned} 2n &= 2a^2 + 2b^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 46 (résolu par Xavier Poulot-Cazajous)

1. On définit la suite  $U_n = 10011 \dots 17$  où il y a  $n$  "1" consécutifs.

$$U_{n+1} = 10(U_n - 7) + 17 = 10U_n - 53$$

Donc si 53 divise  $U_n$  il divise également  $U_{n+1}$ . Il ne reste plus qu'à initialiser la récurrence :

$$U_0 = 1007 = 53 \times 19.$$

2. On utilise la même technique.  $V_n = 12033 \dots 308$  avec  $n$  "3".

$$V_0 = 12008 = 19 \times 632$$

$$V_{n+1} = 10(V_n - 8) + 308 = 10V_n - 19 \times 12.$$

Solution de l'exercice 48 (résolu par François Bacher) Le joueur A a une stratégie gagnante : Il commence par couper le rectangle  $5 \times 10$  en deux carrés  $5 \times 5$ . Ensuite il va copier sans arrêt le joueur B : le joueur B va couper l'un des carrés  $5 \times 5$ . À ce moment-là le joueur A observe les nouveaux morceaux : si l'un des morceaux est de largeur 1, il peut découper un petit carré et il

gagne, sinon il fait la même coupe mais sur le deuxième carré  $5 \times 5$ . Le joueur B ne peut donc pas gagner au tour suivant. Ce manège continue jusqu'à ce que le joueur A ait une occasion de gagner.

Solution de l'exercice 51 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) On va noter  $a^{(k)}$  pour  $a^{a^{\dots}}$  avec  $k$  fois le nombre  $a$ .

1. Pour  $n = 1$  et  $n = 2$ ,

$$2 > 1 \text{ et } 2^2 > 3.$$

On a pour tous  $k \geq 0$ ,

$$2^{2^2} < 3^3$$

et si  $2^{(k+1)} < 3^{(k)}$ , alors  $2^{(k+2)} = 2^{2^{(k+1)}} < 3^{3^{(k)}} = 3^{(k+1)}$ . Donc par récurrence c'est le terme avec les 3 le plus grand pour tous les  $n \geq 3$ .

2. On a  $3^3 > 4^2$ . On va prouver par récurrence que  $3^{(n)} > (4^{(n-1)})^2$ .

$$3^{(n+1)} > 3^{(4^{(n-1)})^2} = \left(3^{4^{(n-1)}}\right)^{4^{(n-1)}}.$$

$$\text{Or } 3^{4^{(n-1)}} > 4^2,$$

$$\text{donc } 3^{(n+1)} > (4^2)^{4^{(n-1)}} = (4^{(n)})^2.$$

C'est donc le terme avec les 3 le plus grand pour tout  $n$ .

Solution de l'exercice 52 (résolu par Ludovic Stephan) Tout d'abord, pour maximiser la probabilité de tirer BAOBAB, on peut enlever toutes les boules qui n'ont pas un A, un B ou un O. Maintenant, pour  $a, b, o > 0$ , soit  $f(a, b, o)$  la probabilité de tirer BAOBAB. On veut maximiser cette fonction, donc on calcule sa dérivée.

$$f(a, b, o) = \frac{b^3 \cdot a^2 \cdot o}{(a + b + o)^6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{(3b^2 a^2 o (b + a + o)^6 - 6b^3 a^2 o (b + a + o)^5)}{(b + a + o)^{12}} = \frac{3b^2 a^2 o (a + o - b)}{(b + a + o)^7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2b^3 a o (b + o - 2a)}{(b + a + o)^7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial o} = \frac{b^3 a^2 (b + a - 5o)}{(b + a + o)^7}$$

On veut annuler cette dérivée. En utilisant le fait  $a, b, o > 0$ , on se retrouve avec le système suivant :

$$\begin{cases} -b + a + o = 0 \\ b - 2a + o = 0 \\ b + a - 5o = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 30 \\ a = 2o \\ 5o - 5o = 0 \end{cases}$$

Remarque la ligne 3 est égale à  $-3 \times \text{ligne 1} - 2 \times \text{ligne 2}$ , c'est donc normal qu'on ait une droite de solutions plutôt qu'un seul point. On trouve comme probabilité :

$$f(2o, 3o, o) = \frac{(3o)^3(2o)^2o}{(6o)^6} = \frac{108}{6^6} = \frac{1}{432}.$$

À présent il faut regarder sur le bord du domaine. On remarque facilement que  $f(ka, kb, ko) = f(a, b, o)$ , donc on peut toujours se ramener aucas où  $a + b + o = 1$ . Le bord correspond à  $a$  ou  $b$  ou  $o = 0$  mais pas les trois en même temps. Dans ce cas la proba vaut 0. La probabilité maximale de tirer BAOBAB est donc bien une chance sur 432, et elle est obtenue par exemple avec une urne contenant 2 boules A, 3 boules B et une boule O.

Solution de l'exercice 53 (résolu par Lucas Flammant) On numérote les gentlemen de 1 à 50, l'arrangement des chapeaux correspond à une permutation aléatoire de  $\{1, \dots, 50\}$ .

La probabilité que tous les gentlemen repartent avec leur chapeau est la probabilité que la permutation aléatoire soit la permutation identité ? Comme il y a  $50!$  permutations possibles la probabilité recherchée est  $\frac{1}{50!}$ .

La probabilité que personne ne reparte avec son chapeau est celle que la permutation n'ait pas de point fixe. On va dénombrer les permutations ayant au moins un point fixe. On note  $W_i$  l'ensemble des permutations  $p$  telles que  $p(i) = i$ . On cherche à calculer  $|W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{50}|$ . Tout d'abord on remarque que  $|W_i| = 49!$  et pour tout  $n$ -uplet  $i_1, \dots, i_n$ ,  $|W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_n}| = (50-n)!$ . En effet, les  $n$  points  $i_1, \dots, i_n$  sont fixés et il suffit donc de trouver le nombre de façons de mélanger les  $(50-n)$  entiers restants. On peut maintenant utiliser la formule d'inclusion-exclusion (que vous pouvez démontrer dans l'exercice 20) :

$$\begin{aligned} |W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{50}| &= |W_1| + |W_2| + \dots + |W_{50}| - |W_1 \cap W_2| - |W_1 \cap W_3| \\ &\quad - \dots - |W_{49} \cap W_{50}| + \dots - |W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_{50}| \\ &= \binom{50}{1}(50-1)! - \binom{50}{2}(50-2)! + \binom{50}{3}(50-3)! - \dots + (-1)^{50+1} \binom{50}{50}(50-50)! \\ &= \frac{50!}{1!} - \frac{50!}{2!} + \frac{50!}{3!} - \dots + \frac{50!}{50!} \end{aligned}$$

En divisant ce résultat par  $50!$  on obtient la probabilité que l'un des gentlemen ait son chapeau. La proba qu'aucun n'ait son chapeau est donc

$$p = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{50!} \approx 0.368$$

Solution de l'exercice 55 (résolu par Séginus Mowlavi) On va considérer les piles sont sur les marches d'un escalier : le sol en dessous de chaque pile est plus haut d'une unité que la pile à sa gauche. La règle de déplacement d'un jeton est qu'on peut le faire glisser vers la droite, mais qu'on ne peut pas le monter.

On prouve d'abord le lemme suivant : il est impossible qu'une pile soit deux jetons (ou plus) plus haute qu'une pile située à sa gauche. On suppose qu'il y ait une configuration qui contredise le lemme. On peut choisir la première configuration à le contredire, et en étudiant tous les cas possibles (note de l'éditeur : ce que Séginus a fait consciencieusement, mais que je laisse

au lecteur pour raison de paresse) on voit que la configuration juste avant contredisait aussi le lemme, et on a fini notre preuve par l'absurde.

Comme un jeton qui a une case libre à sa gauche peut être déplacé, les configurations finales possibles sont les configurations qui vérifient le lemme précédent et qui vérifie la propriété : "aucun jeton n'a de cas libre à sa gauche". Je laisse au lecteur le loisir de prouver (pour la même raison) que pour un nombre  $n$  de jetons fixé il n'y a qu'une seule telle configuration. Pour l'obtenir, imaginez que vous remplissiez les lignes de droite à gauche en partant du bas.

Solution de l'exercice 56 (résolu par Lucas Flammant) Deux couleurs suffisent : on colorie tous les entiers pairs en rouge et les entiers impairs en bleu. La somme de deux nombres distincts de même couleur est alors paire et  $> 2$ , et donc pas premier. Il n'y a donc aucun segment entre deux points de même couleur.

Pour que la preuve soit complète il faut montrer qu'une couleur ne suffit pas. Les nombres 2 et 3 sont reliés (car  $2 + 3 = 5$ ) et donc ne peuvent pas être de la même couleur.

Solution de l'exercice 58 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) On considère la fonction  $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}$ .

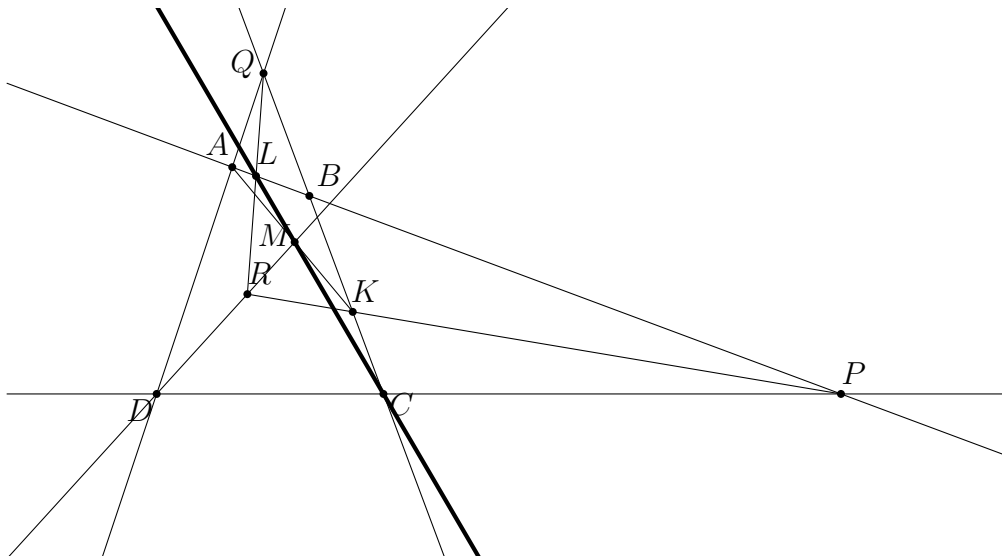
$$\begin{aligned} g(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} &= g(x) + g(y) + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + x^2y + y^2x \\ g(x+y) &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

Donc la fonction  $g$  est solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy avec un point de continuité. Ceux qui ont suivis le cours d'équations fonctionnelles savent que les solutions sont  $g(x) = ax$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . Les solutions du problème sont donc de la forme

$$f(x) = ax + \frac{x^3}{3}.$$

Réciproquement, toutes ces fonctions marchent.

Solution de l'exercice 60 (résolu par Victor Quach) Faisons une figure :



Soit  $Z = (AD) \cap (PR)$ . On considère les droites  $(ZA) = (ZQ) = (ZD)$  et  $(ZR) = (ZP) = (ZK)$ . D'après le théorème de Pappus, les points  $(AP) \cap (RQ) = L$ ,  $(AK) \cap (RD) = M$  et  $(QK) \cap (PD) = C$  sont alignés.

Solution de l'exercice 61 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) Le nombre de zéros dans  $n!$  correspond au nombre de fois qu'on peut faire un facteur 10, il s'agit donc de la plus grande valeur entre  $v_2(n!)$  et  $v_5(n!)$  ( $v_p(k)$ , dite la valuation  $p$ -adique de  $k$  est l'exposant du premier  $p$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $k$ ). Il est évident qu'il y a plus de multiples de 2 que de multiples de 5, on aura l'égalité  $Z(n!) = v_5(n!)$ . Rappelons la formule de Legendre :

$$v_5(n!) = \left[ \frac{n}{5} \right] + \left[ \frac{n}{5^2} \right] + \left[ \frac{n}{5^3} \right] + \left[ \frac{n}{5^4} \right] + \dots$$

Écrivons  $n$  en base 5 :

$$n = a_m \cdot 5^m + a_{m-1} \cdot 5^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 5 + a_0$$

et voyons ce que donne la formule de Legendre :

$$v_5(n!) = \sum_{k=1}^m a_k \left( \sum_{i=0}^{k-1} 5^i \right) = \sum_{k=1}^m a_k \frac{5^k - 1}{4} = \frac{n}{4} - \frac{\sum_{k=0}^m a_k}{4}$$

Le second terme est inférieur ou égal au nombre de chiffres de  $n$ . Et comme  $\frac{\text{nb de chiffres de } n}{n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , la limite recherchée est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z(n)}{n} = \frac{1}{4}.$$

Solution de l'exercice 62 (résolu par Louise Gassot)

1. On veut ranger 5 entiers dans 3 classes de congruence modulo 3. Soit il y en a 3 dans la même classe et leur somme est divisible par 3, soit il y en a au plus 2 par classe et dans ce cas il y en a au moins un dans chaque classe : on en choisit un par classe et la somme de ces trois entiers est congru à  $0 + 1 + 2 \pmod{3}$ , donc divisible par 3.
2. On prend 11 entiers. Comme  $11 \geq 5$ , on peut en trouver trois  $a_1, a_2, a_3$  dont la somme  $A$  est divisible par 3. Parmi les 8 restants, on peut encore en trouver trois  $b_1, b_2, b_3$  dont la somme  $B$  est divisible par 3, et rebelote parmi les 5 restants :  $c_1, c_2, c_3$  de somme  $C$  divisible par 3. Parmi  $A, B$  et  $C$  il y en a deux de même parité, donc leur somme est paire. C'est une somme de 6 entiers paire et divisible par 3, donc divisible par 6.

Solution de l'exercice 65 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) Soit  $f$  une solution éventuelle. Tout d'abord, supposons  $f(n) = f(m)$ , alors

$$n + 2011 = f(f(n)) = f(f(m)) = m + 2011$$

Donc  $f$  est injective.

Deuxièmement, on met au point une formule pratique

$$\begin{aligned} f(n + 2011) &= f(f(f(n))) \\ f(n) + 2011 &= f(n + 2011) \end{aligned}$$

Troisièmement, supposons qu'il existe  $0 \leq n < 2011$  tel que  $f(n) \geq 4022$ . Prenons la relation précédente avec  $f(n) - 4022$  à la place de  $n$  :

$$f(f(n) - 4022) + 2011 = f((f(n) - 4022) + 2011)$$

$$0 \leq f(f(n) - 4022) = f(f(n) - 2011) - 2011 = f(f(n)) - 4022$$

Donc  $n = f(f(n)) - 2011 \geq 2011$ , ce qui est en contradiction avec ce que l'on avait supposé. Donc si  $n < 2011$ , alors  $f(n) < 4022$ .

Maintenant nous allons étudier l'ensemble  $A = \{n \in [0, 2011[, f(n) < 2011\}$ . Il est trivial que si  $n \in A$ , alors  $f(n) \notin A$ , donc pour chaque  $n \in A$ , il y a un  $k \notin A$ . Il y a donc au plus 1005 éléments de  $A$ . Maintenant prenons  $n < 2011$  tel que  $n \notin (A \cup f(A))$  (cet ensemble contient au plus 2010 éléments). Comme  $n \notin A$  et d'après le troisième paragraphe,  $2011 \leq f(n) < 4022$ , mais alors  $n = f(f(n) - 2011)$ , ce qui est en contradiction avec  $n \notin f(A)$ . On a donc la contradiction souhaitée, il n'existe pas de solutions à cette équation.

Solution de l'exercice 68 (résolu par Matthieu Piquerez) Le plus simple pour résoudre cette équation fonctionnelle est de bidouiller un petit peu. Soit  $f$  une solution éventuelle.

$$f(1)f(2) = f(2) \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f(2)f(3) = f(6) = f(3) + f(3) \Rightarrow f(2) = 2$$

$$f(12) = f(5) + f(7) = f(3) + f(2) + f(5) + f(2) = 2f(3) + 3f(2) = 2f(3) + 3f(2) = 2f(3) + 6$$

$$f(12) = f(3)f(4) = f(3)(f(2) + f(2)) \Rightarrow f(3) = 3$$

$$f(5) = f(3) + f(2) = 5$$

$$f(7) = f(5) + f(2) = 7$$

$$f(14) = f(7) + f(7) = 14$$

$$f(11) + f(3) = f(14) \Rightarrow f(11) = 11$$

$$f(18) = f(11) + f(7) = 18$$

$$f(13) + f(5) = f(18) \Rightarrow f(13) = 13$$

$$f(1999) + f(3) = f(2002) = f(2)f(7)f(11)f(13) = 2002 \Rightarrow f(1999) = 1999$$

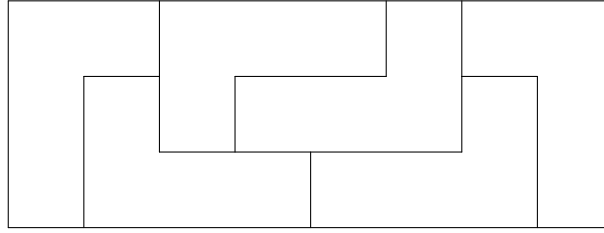
Solution de l'exercice 70 (résolu par Matthieu Piquerez) Si  $mn$  est un multiple de 8, alors il y a deux cas possibles :

- Soit  $2|m$  et  $4|n$  (ou l'inverse) auquel cas on pave avec des rectangles  $2 \times 4$  suivants



- Soit  $8|m$  et  $n > 1$  est impair auquel cas on pave les trois premières lignes comme ceci





et on se ramène au cas précédent.

À présent montrons la réciproque. Un L occupe 4 cases, donc  $mn$  doit être un multiple de 4. Supposons que  $mn$  n'est pas divisible par 8, cela signifie que le rectangle est pavé par un nombre impair de L. On va colorier les colonnes paires en rouge et les colonnes impaires en bleu. On vérifie facilement que le nombre de cases bleues est pair et que chaque L recouvre soit 3 cases rouges et une bleue ou un case rouge et 3 bleues. Le nombre de cases bleues recouvertes est donc impair, ce qui abouti à une contradiction.

Solution de l'exercice 71 (résolu par Jean Kieffer) On va faire une bijection entre les ensembles de 4 entiers impairs dont la somme est 98 et le nombre de façons de placer 3 blocs parmi 50 espaces. Ces blocs délimitent 4 régions distinctes. Pour chaque région on compte le nombre de "pics" et le nombre de "creux" (extrémités comprises). Il y a toujours un pic de plus que de creux, donc tous les nombres sont impairs. D'un autre côté, au départ il y avait 50 creux et 51 pics, et 3 creux sont cachés par des blocs. La somme des entiers est donc 98.

Le nombre cherché est donc égal au nombre de façons de placer 3 blocs dans 50 espaces, c-à-d  $\binom{50}{3}$ .

Solution de l'exercice 74 (résolu par Cyril Letrouit) On commence par montrer que  $f$  est injective :

$$f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 f(x) = f(x f(y_1)) = f(x f(y_2)) = y_2 f(x)$$

et comme d'après les hypothèses,  $f(x) > 0$  cela veut dire  $y_1 = y_2$ . Avec  $x = y = 1$

$$f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1 \text{ par injectivité.}$$

On veut montrer  $f(y)^2 = f(y^2)$ . On prend  $x = f(y)$  :

$$f(f(y)^2) = y f(f(y))$$

et avec  $x = 1$ ,  $f(f(y)) = y$ . Donc

$$f(f(y)^2) = y^2 = f(f(y^2))$$

donc par injectivité  $f(y)^2 = f(y^2)$ .

On étudie les points fixes de  $f$  autres que 1. Si  $p$  est un point fixe alors d'après le paragraphe précédent  $p^2$  est aussi un point fixe. Par récurrence on peut prouver que  $p^n$  est aussi un point fixe :

$$p^{n+1} = p^n f(p) = f(p f(p^n)) = f(p^{n+1}).$$

Si  $p > 1$  alors quand on fait tendre  $n$  vers l'infini  $p^n$  tend vers l'infini.

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p^n) = 0$$

On aboutit à une contradiction, il n'y a donc pas de point fixe  $p > 1$ . Maintenant supposons  $p < 1$ .

$$pf\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}f(p)\right) = f(1) = 1$$

Donc  $\frac{1}{p}$  est aussi un point fixe, et il est  $> 1$ , ce qui impossible. Le seul point fixe est donc 1.

Si on prend  $x = y$ , on obtient

$$f(xf(x)) = xf(x)$$

Donc  $xf(x)$  est un point fixe, il vaut donc 1. Donc  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

*Solution de l'exercice 76* (résolu par Nathanaël Courant, Arthur Blanc-Renaudie et Bodo Lass)

Prenons un cercle de rayon 1. On va placer les points de la manière suivante : on se fixe un angle  $\alpha$ , on place un premier point. Ensuite on tourne le cercle de  $\alpha$  et on place le deuxième point, puis on tourne à nouveau de  $\alpha$  et on place le troisième, etc.

Choisissons deux points et calculons la distance  $a$  entre eux. Soit  $2\beta$  l'angle au centre, par Al-Kashi :

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(2\beta) \\ a^2 &= 2(1 - \cos(2\beta)) \\ a^2 &= 2(1 - \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) \\ a^2 &= 4\sin^2(\beta) \\ a &= 2|\sin(\beta)| \end{aligned}$$

Par construction,  $\beta$  est un multiple de  $\alpha$ , donc  $\frac{\beta}{2}$  est un multiple de  $\frac{\alpha}{2} = \alpha'$ . Il est maintenant temps de choisir notre  $\alpha'$  : nous allons prendre  $\alpha' = \arcsin(3/5)$ . Pour vous le représenter c'est l'angle qu'on trouve dans le triangle rectangle 3-4-5. Il reste deux choses à vérifier :

1. pour tout  $n$ ,  $\sin(n\alpha') \in \mathbb{Q}$
2. on définit bien une infinité de points, c-à-d qu'on ne revient pas au point de départ après un certain nombre de tours

Le premier point se montre facilement par récurrence : On va prouver que pour tout  $n$ ,  $\sin(n\alpha')$  et  $\cos(n\alpha')$  sont rationnels.

$$\sin(\alpha') = \frac{3}{5} \text{ et } \cos(\alpha') = \frac{4}{5}$$

$$\sin((n+1)\alpha') = \cos(n\alpha') \sin(\alpha') + \sin(n\alpha') \cos(\alpha')$$

$$\cos((n+1)\alpha') = \cos(n\alpha') \cos(\alpha') - \sin(n\alpha') \sin(\alpha')$$

Le deuxième point est un peu plus dur, il faut utiliser les entiers de Gauss : ce sont les nombres complexes de la forme  $a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont entiers. L'arithmétique sur les entiers de Gauss est à peu près la même que l'arithmétique classique. En particulier tout entier de Gauss admet une unique (à un facteur  $-1$  ou  $i$  près) décomposition en facteurs premiers. Pour reconnaître un entier de Gauss premier : ce sont ceux dont la norme ( $N(a + ib) = a^2 + b^2$ )

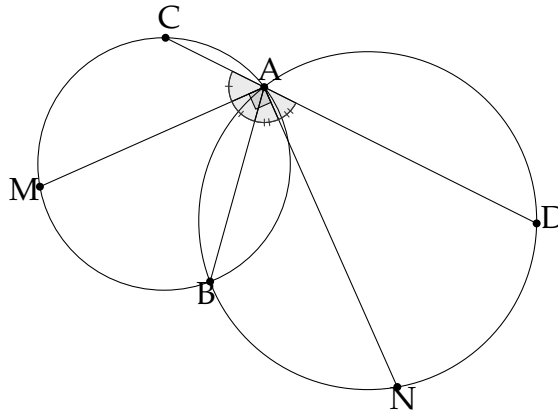
est soit  $2n$  soit un premier  $p$  congru à  $2 \bmod 4$ , soit un carré de premier  $q^2$  avec congru à  $3 \bmod 4$ .

Avec toutes ces informations, regardons  $(4 + 3i)$ . Cet entier forme un angle  $\alpha'$  avec l'axe des réels. Pour observer un angle  $n\alpha'$  il suffit de regarder  $(4 + 3i)^n$ . Si dans la construction on revenait à notre point de départ, cela signifierait qu'il existe  $n > 0$  tel que  $(4 + 3i)^n$  soit réel. En regardant son module on peut même connaître sa valeur :  $(4 + 3i)^n = 5^n$ . Mais ces deux nombres ont des décompositions en facteurs premiers différentes :

$$(4 + 3i) = i(2 - i)^2 \text{ et } 5 = (2 - i)(2 + i).$$

L'égalité est donc impossible, l'angle  $\alpha'$  vérifie bien toutes les conditions requises, et notre suite de points vérifie tout ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 77 (résolu par Matthieu Piquerez et Victor Quach) Commençons par tracer une figure correcte.



Par hypothèse,  $M$  est le milieu de l'arc  $BC$  qui ne contient pas  $A$ . Donc  $\widehat{CAM} = \widehat{MAB} = x$ . De même  $\widehat{BAN} = \widehat{NAD} = y$ . Or  $2x + 2y$  est la mesure d'un angle plat, donc  $\widehat{MAN} = x + y$  est droit.

Solution de l'exercice 79 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) Nous allons faire la preuve en deux parties : nous allons d'abord prouver que pour tout  $n \geq 2$  il existe un  $x$  tel que  $f(x)$  soit divisible par  $3^n$ , et dans un deuxième temps nous prouverons qu'il existe un  $x$  tel que  $f(x)$  soit divisible par  $3^n$  mais pas par  $3^{n+1}$ .

Nous allons montrer par récurrence que  $P_n$  : "il existe un  $x$  tel que  $3^n | f(x)$ " est vraie pour tout  $n \geq 2$ . Tout d'abord on remarque que  $f(1) = 18$ , donc  $P_2$  est vérifiée. À présent supposons  $P_n$  vraie et choisissons un  $x$  tel que  $3^n | f(x)$ . Tout d'abord, comme  $x^3 + 17$  est divisible par 3, on en déduit que  $x$  n'est pas divisible par 3. Regardons maintenant  $x + k3^{n-1}$  :

$$f(x + k3^{n-1}) = (x + k3^{n-1}) + 17 = (x^3 + 17 + kx^23^n) + (k^2x3^{2n+1} + k^33^{3n-3})$$

La parenthèse de droite est divisible par  $3^{n+1}$ . Ensuite il faut choisir  $k$  tel que la parenthèse de gauche le soit également

$$(x^3 + 17 + kx^23^n) = 3^n \left( \frac{x^3 + 17}{3^n} + kx^2 \right)$$

Comme  $x$  est premier avec 3, alors  $x^2$  est aussi avec 3, donc on peut choisir un  $k$  parmi  $\{0, 1, 2\}$  tel que  $\frac{x^3+17}{3^n} + kx^2$  soit divisible par 3, et dans ce cas on achève la récurrence.

Pour l'autre sens de la preuve, on va procéder de la même manière : soit  $x$  tel que  $3^n | f(x)$ , et on considère

$$f(x + k3^{n-1}) = 3^n \left( \frac{x^3 + 17}{3^n} + kx^2 \right) + (k^2 x 3^{2n+1} + k^3 3^{3n-3})$$

sauf que cette fois on choisira  $k$  pour que  $\frac{x^3+17}{3^n} + kx^2$  ne soit pas divisible par 3. Dans ce cas,  $f(x + k3^{n-1})$  est divisible par  $3^n$  mais pas  $3^{n+1}$ .

Solution de l'exercice 81 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie)

$$\begin{aligned} (a^3 - 3ab^2)^2 &= a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 \\ (b^3 - 3ba^2)^2 &= b^6 - 6b^4a^2 + 9b^2a^4 \\ 44^2 + 8^2 &= a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 \\ a^2 + b^2 &= \sqrt[3]{44^2 + 8^2} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 82 (résolu par Lucas Flammant) Nous construisons une suite d'ensembles  $B_1, B_2, \dots$  qui vérifient les conditions de l'énoncé et tels que  $\{1, 2, 3, \dots, i\} \subset B_i$  :

$$B_i = \left\{ 1, 2, \dots, i, \frac{(i-1)i(i+1)}{2}, \frac{(i-2)i^2(i+1)}{2}, \frac{(i-3)(i-1)i^2(i+1)}{2}, \dots, \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \dots (i-1)i^2(i+1)}{2} \right\}$$

Pour être plus clair, on rajoute tous les termes

$$\frac{(i-k)(i-k+1)(i-k+2)(i-k+3) \dots (i-1)i^2(i+1)}{2}$$

où le terme avec un chapeau signifie qu'il a été enlevé du produit. Avec cette expression, la somme va se simplifier : calculons la

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \dots + i + \frac{(i-1)i(i+1)}{2} + \frac{(i-2)i^2(i+1)}{2} + \frac{(i-3)(i-1)i^2(i+1)}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \dots (i-1)i^2(i+1)}{2} \\ S &= \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(i-1)i^2(i+1)}{2} + \frac{(i-2)i^2(i+1)}{2} + \frac{(i-3)(i-1)i^2(i+1)}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \dots (i-1)i^2(i+1)}{2} \\ S &= \frac{(i^2(i+1))}{2} + \frac{(i-2)i^2(i+1)}{2} + \frac{(i-3)(i-1)i^2(i+1)}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \dots (i-1)i^2(i+1)}{2} \\ S &= \frac{(i-1)i^2(i+1)}{2} + \frac{(i-3)(i-1)i^2(i+1)}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \dots (i-1)i^2(i+1)}{2} \\ \dots & \\ S &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (i-1)i^2(i+1)}{2} \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que cette somme est divisible par tous les éléments de  $B_i$ .

Solution de l'exercice 84 (résolu par Cyril Letrouit) On veut résoudre  $3^k - 1 = x^3$ . On remarque tout de suite la solution  $(0, 0) : 3^0 - 1 = 0^3$ . Maintenant on peut toujours considérer que  $k$  et  $x$  sont non nuls.

$$3^k = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Donc il existe deux entiers  $s$  et  $m$  tels que  $(x + 1) = 3^s$  et  $(x^2 - x + 1) = 3^m$ . De plus, comme  $x \geq 1$ ,  $s \geq 1$ .

$$\begin{aligned} 3^{2s} - 3^m &= (x + 1)^2 - (x^2 - x + 1) \\ 3^{2s} - 3^m &= 3x \\ 3^{2s-1} - 3^{m-1} &= x \end{aligned}$$

Il y a donc trois cas de figures :

- soit  $2s - 1 = 0$  et  $s = 1/2$ , ce qui ne va pas puisqu'on veut  $s$  entier
- soit  $m - 1 = 0$  et dans ce cas il faut  $x^2 - x + 1 = 3$ , dont les solutions sont  $-1$  (pas bon) et  $2$  (ça marche  $3^2 - 1 = 2^3$ )
- soit  $2s - 1$  et  $m - 1$  sont non nuls et  $x$  est divisible par 3, mais ceci est en contradiction avec l'équation.

Les deux uniques solutions sont donc  $(0, 0)$  et  $(2, 2)$ .

Solution de l'exercice 85 (résolu par Jean Kieffer) On note 0 l'état pile et 1 l'état face. Au total on fait  $1 + 2 + \dots + 2011 = 2023066$  changements, un nombre pair. Regardons la somme des états à un moment donné : à chaque changement on transforme un 0 en 1 ou un 1 en 0, donc on change la parité de la somme. Après 2023066 changements, la parité de la somme de l'état final est la même que celle de l'état initial. Donc si l'état initial est pair on ne peut pas atteindre l'état "tous face" et si l'état initial est impair on ne peut pas atteindre "tous pile".

Supposons que l'état initial est pair et montrons que l'on peut atteindre "tous pile". On commence par faire les 2011 étapes de façon débile : le premier coup on retourne la première pièce, le deuxième coup les deux premières pièces, etc. Dans l'état final il y a donc un nombre pair de pièces qui sont face : on les regroupe par paires de façon quelconque. Pour chaque paire  $(i, j)$  avec  $i < j$ , on va changer la  $i$ -ème étape : au lieu de retourner les  $i$  premières pièces, on retourne les  $(i - 1)$  première et la  $j$ -ème. Ainsi on a retourné la  $i$ -ème une fois de moins et la  $j$ -ème une fois de plus, donc à la fin elles sont toutes les deux pile. On fait ça pour toutes les paires et Voilà !

Solution de l'exercice 86 (résolu par Maxime Perdriat) Soient  $a \geq b \geq c$  donc  $A \geq B \geq C$  car  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

1. Démontrons que

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{A + B + C}{3}.$$

C'est une simple application de l'inégalité de Chebyshev, ou de l'inégalité de réordonnement :

$$aA + bB + cC \geq \frac{a + b + c}{3}(A + B + C)$$

On a donc la première inégalité :

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

2. Démontrons que

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \leq \frac{A + B + C}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2(aA + bB + cC) &= 2aA + 2bB + 2cC \\ (a + b + c)(A + B + C) &= (a + b + c)A + (a + b + c)B + (a + b + c)C \end{aligned}$$

Dans un triangle, la somme des côtés ne peut être inférieure au double d'un des côtés (égale si le triangle est plat). On a donc démontré la deuxième inégalité :

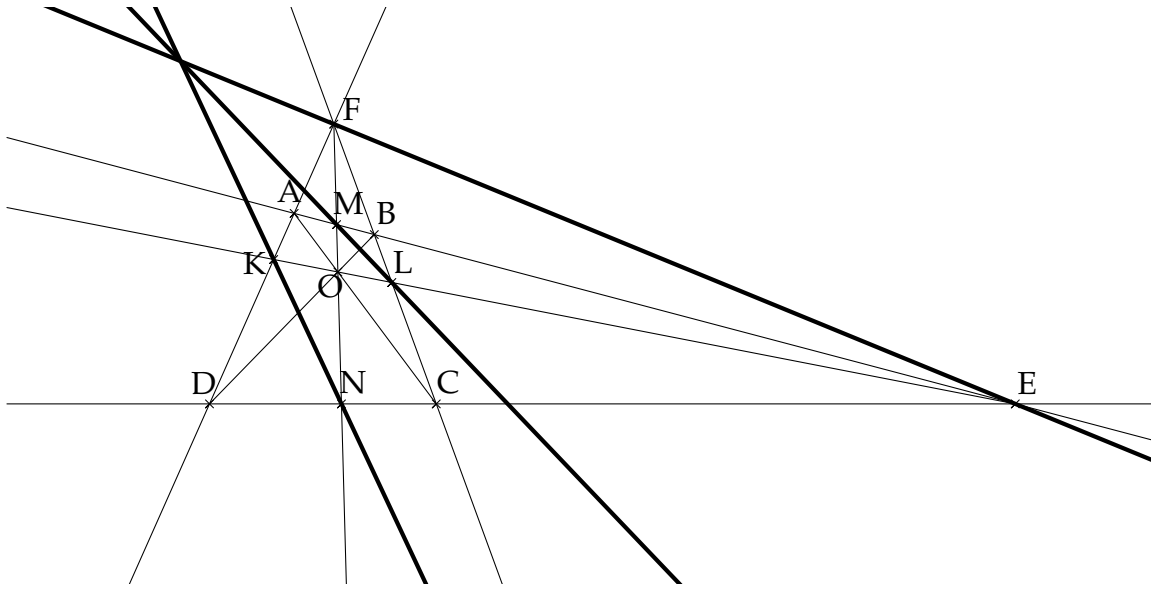
$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \leq \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Solution de l'exercice 87 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) Soit  $f$  une solution éventuelle. Commençons par calculer  $f(1)$ . Si  $f(1) = 1$ , alors  $f(f(1)) = 1 \neq 3$  et ça ne marche pas, donc  $f(1) > 1$ . Supposons  $f(1) \geq 3$ , alors comme  $f(1) > 1$  et  $f$  strictement croissante,  $f(f(1)) > 3$  et ça ne marche pas non plus, donc  $f(1) < 3$ . Donc  $f(1) = 2$ .

On obtient assez vite  $f(2) = f(f(1)) = 3$ , ensuite  $f(3) = f(f(2)) = 6$ ,  $f(6) = f(f(3)) = 9$ . Par une récurrence simple on obtient que  $f(3^n) = 2 \times 3^n$  et  $f(2 \times 3^n) = 3^{n+1}$ .

Comme  $f$  est strictement croissante, pour tout  $n \in [2 \times 3^n, 3^{n+1}]$ ,  $f(n) = n + 3^n$ . Or  $2 \times 3^6 = 1458$  et  $3^7 = 2187$ , donc  $f(2011) = 2011 + 3^6 = 2740$ .

Solution de l'exercice 88 (résolu par Victor Quach) Faisons une figure :



Les triangles  $MBL$  et  $NDK$  sont perspectifs par rapport à  $O$ . Donc d'après le premier théorème de Desargues  $(MB) \cap (ND)$ ,  $(BL) \cap (DK) = F$ , et  $(KN) \cap (LM) = E$  sont alignés.

Solution de l'exercice 90 (résolu par Lucas Flammant) On considère  $P \in \mathbb{Z}[X]$  de degré supérieur à 2. En soustrayant un entier, on peut considérer que le terme constant est nul. En particulier,  $X$  divise  $P(X)$ . Comme  $P$  est de degré au moins 2, il existe (quitte à considérer  $-P$ ) un entier  $k$  tel que  $P(k) > k$ . On pose  $n = P(k)$  et on étudie le polynôme  $P$  modulo  $n$ . Tout d'abord, pour  $k \geq 1$  :

$$(x - y)^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}),$$

donc si  $x \equiv y[n]$  alors  $P(x) \equiv P(y)[n]$ , le polynôme  $P$  est  $n$ -périodique modulo  $n$ . De plus,  $P(0) = 0$  et  $P(k) = n \equiv 0[n]$ . Il y a donc au moins une classe modulo  $n$  qui n'a pas d'antécédent, c'est notre suite arithmétique infinie.

Solution de l'exercice 93 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) Déjà il y aura forcément un gagnant puisque d'après le théorème des restes chinois on peut trouver 2011 entiers consécutifs non premiers, donc il y aura un moment où un joueur sera bloqué. L'un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Nous allons prouver que c'est Alice.

Supposons que c'est Bob qui a une stratégie gagnante. Alice joue en premier et doit choisir un nombre premier entre 3 et 2013. Elle choisit 3. Bob peut maintenant appliquer sa stratégie. Il doit choisir un premier entre 4 et 2014, mais 2014 n'est pas premier, donc il doit choisir entre 4 et 2013. Mais alors Alice aurait pu au tour lui voler sa stratégie au tour précédent. C'est donc Alice qui va gagner.

Solution de l'exercice 95 (résolu par Arthur Nebout) Prenons un groupe de  $n$  personnes. Il faut qu'il manque une même clé à tous les membres du groupe (pour qu'ils ne puissent pas ouvrir) mais que toutes les personnes en dehors du groupe la possède (pour que si on ajoute une personne on puisse ouvrir).

À tout groupe de  $n$  personnes on peut associer une clé qui vérifie la condition précédente. Il est facile de vérifier que ces clés sont deux à deux distinctes, il y a donc au moins  $\binom{m}{n}$  clés différentes.

Il est facile de voir qu'il y a exactement ce nombre de clés : une clé est associée à un groupe de  $n$  personnes, et chacun possède les clés dont ils n'appartiennent pas au groupe associé. Chaque personne a donc autant de clés qu'il y a de groupes de  $n$  personnes qui ne l'incluent pas, c-à-d  $\binom{m-1}{n}$ .

Solution de l'exercice 96 (résolu par Sebastien Chevalerey) On se place dans un repère orthonormé centré en  $A$  et dont l'axe des abscisses passe par les trois centres des cercles  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ . De plus on considère que tous les cercles ont un rayon 1 pour ne pas avoir à manipuler de trop grandes quantités.  $A = (0, 0)$ ,  $O_3 = (5, 0)$ . Le triangle  $ADO_3$  est rectangle en  $D$ , donc par Pythagore  $AD^2 = AO_3^2 - O_3D^2 = 24$ .

Calculons maintenant les coordonnées  $(x_D, y_D)$  de  $D$ . Le point  $D$  est l'intersection du cercle de centre  $O_3$  de rayon 1 et du cercle de centre  $A$  de rayon  $\sqrt{24}$  :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_D^2 + y_D^2 = 24 \\ (x_D - 5)^2 + y_D^2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_D^2 + y_D^2 = 24 \\ 10x_D - 25 = 24 - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_D = 4.8 \\ y_D^2 = 0.96 \end{cases} \end{aligned}$$

On considère  $D$  comme ayant une ordonnée positive donc  $y_D = \sqrt{0.96}$ . L'équation de la droite  $(AD)$  est donc

$$y = \sqrt{0.96} \frac{1}{4.8} x = \frac{\sqrt{96}}{48} x.$$

Les points  $B$  et  $C$  sont les deux points d'intersection de la droite  $(AD)$  avec le deuxième cercle, ils correspondent aux deux solutions du système d'équations suivant

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{96}}{48} x \\ (x - 3)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Après calcul on obtient les solutions suivantes :

$$\left(\frac{72 - 8\sqrt{6}}{25}, \frac{6\sqrt{6} - 4}{25}\right) \text{ et } \left(\frac{72 + 8\sqrt{6}}{25}, \frac{6\sqrt{6} + 4}{25}\right).$$

Et maintenant il ne reste qu'à calculer la distance  $BC$  :

$$BC = \sqrt{(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2} = \dots = \frac{8}{5}$$

Et comme on avait tout mis à l'échelle  $1/5$  pour avoir des cercles de rayon 1, la distance recherchée est 8.

Solution de l'exercice 97 (résolu par Jean Kieffer) Pour  $n$  entier et  $p$  premier

$$f(n)^p \equiv n[p]$$

Si on prend  $n = p$ , on obtient  $f(p)^p \equiv p[f(p)]$ . Il s'ensuit que  $f(p)|p$ , donc  $f(p) = 1$  ou  $p$ .

Si  $f(p) = 1$  pour tout  $p$  premier, alors l'équation est vérifiée quelles que soient les valeurs de  $f$  sur les non-premiers.

Si  $f(2) = 2$  et  $f(p) = 1$  pour tous les premiers impairs, alors  $f$  vérifie l'équation ssi  $f(n)$  est toujours de la même parité que  $n$ .

S'il existe un  $p_0$  premier impair tel que  $f(p_0) = p_0$ , alors pour tout  $n$ ,  $f(n)^{p_0} \equiv n[p_0]$ . Mais d'après le petit théorème de Fermat,  $f(n)^{p_0} \equiv f(n)[p_0]$ , donc pour tout  $n$  :

$$f(n) \equiv n[p_0].$$

Soit  $q$  un premier différent de  $p_0$ . On sait que  $f(q) = 1$  ou  $q$  et que  $f(q) \equiv q[p_0]$ . Donc si  $q \not\equiv 1[p_0]$  alors  $f(q) = q$ . Il faut maintenant montrer que si  $p_0$  est un premier impair, alors il existe une infinité de premiers  $\not\equiv 1[p_0]$  (cette démonstration est laissée au lecteur). Il y a donc un nombre infini de premiers tels que  $f(q) = q$ . Pour chacun de ces premiers  $f(n) \equiv n[q]$ , c-à-d ( $f(n) - n$ ) est divisible par un nombre infini de premiers, donc  $f(n) = n$ .

Les solutions sont donc :

- les fonctions  $f$  telles que  $f(p) = 1$  pour tout  $p$  premier et  $f$  quelconque ailleurs
- les fonctions  $f$  telles que  $f(2) = 2$ ,  $f(p) = 1$  pour tout  $p$  premier impair et  $f(n)$  a la même parité que  $n$
- la fonction  $f(n) = n$

Solution de l'exercice 98 (résolu par Arthur Blanc-Renaudie) On va prouver que pour toute partition  $A, B$  de  $\mathbb{N}$  on peut trouver 2 entiers  $a, b \geq 1$  tels que  $a, b$  et  $a + b$  soient dans le même ensemble. ensuite, pour trouver  $a', b' \geq n$ , il suffira de regarder la partition suivante :

$$A_n = \{k \in \mathbb{N}, n \cdot k \in A\} \text{ et } B_n = \{k \in \mathbb{N}, n \cdot k \in B\}.$$

On peut trouver  $a, b \geq 1$  tels que  $a, b$  et  $a + b$  appartiennent tous à  $A_n$  ou tous à  $B_n$ , et on prendra  $a' = n \cdot a$  et  $b' = n \cdot b$ .

Séparons les entiers en deux ensembles  $A$  et  $B$ . Raisonnons par l'absurde : on suppose que si  $1 \leq a < b$  sont tous les deux dans  $A$ , alors  $a + b \in B$ , et inversement. Par symétrie, on peut supposer que  $1 \in A$ . Dans ce cas il n'y a jamais deux entiers consécutifs dans  $A$  (à part peut-être 1 et 2).



Maintenant prouvons que  $B$  ne peut pas contenir deux entiers consécutifs non plus. Supposons que  $B$  contienne  $b$  et  $b+1$ . S'il n'y a aucun autre entier dans  $B$ , alors  $A$  a plein d'entiers consécutifs et on a une contradiction. S'il y a un autre entier  $c$  dans  $B$ , alors  $(b+c)$  et  $(b+c+1)$  sont tous les deux dans  $A$ , et on a aussi une contradiction. Donc  $B$  ne peut pas contenir d'entiers consécutifs.

Ni  $A$  ni  $B$  n'a le droit d'avoir des entiers consécutifs (hormis 1 et 2), la seule solution est que l'un contienne les entiers pairs et l'autre les impairs. Mais ça ne marche pas puisque par exemple 4, 6 et 10 sont dans le même ensemble. On a donc prouvé ce qu'on voulait.



# IX. Test de sélection

## 8 Énoncés

**Exercice 1** Sept personnes dînent chaque samedi soir autour d'une table ronde. Combien de fois est-il possible d'aller dîner si chacun veut avoir deux nouveaux voisins à chaque fois ? Quel est le résultat pour huit personnes ?

**Exercice 2** Dans un jeu, un entier strictement positif  $n$  peut être remplacé par l'entier  $ab$  si  $n = a + b$ , avec des entiers strictement positifs  $a$  et  $b$ . Peut-on obtenir le nombre 2011 en commençant par  $n = 5$  ?

**Exercice 3** Soit  $ABC$  un triangle ayant trois angles aigus, et soit  $O$  le centre de son cercle circonscrit  $\Gamma$ . Les droites  $(AO)$ ,  $(BO)$ ,  $(CO)$  rencontrent  $\Gamma$  une seconde fois en  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  respectivement. Démontrer que l'aire de l'hexagone  $AC'BA'CB'$  est deux fois plus grande que l'aire du triangle  $ABC$ .

**Exercice 4** Un paysan possède un pré carré de 33m de côté, clôturé sur tout son périmètre. Il désire le partager en trois parcelles de même aire. Un tel partage est-il possible avec

1. au plus 55m de clôture,
2. au plus 54m de clôture,

**Exercice 5** Dix-sept personnes dînent chaque samedi soir autour d'une table ronde. Combien de fois est-il possible d'aller dîner si chacun veut avoir deux nouveaux voisins à chaque fois ? Quel est le résultat pour dix-huit personnes ?

**Exercice 6** Soient  $p$  et  $q$  deux nombres réels tels que l'équation du second degré  $x^2 + px + q = 0$  admette deux racines réelles distinctes  $u$  et  $v$  ( $u > v$ ). On modifie légèrement les coefficients  $p$  et  $q$ , de moins de 0,01, et on suppose que l'équation modifiée  $x^2 + p'x + q' = 0$  (où  $|p' - p| < 0,01$  et  $|q' - q| < 0,01$ ) admet elle aussi deux racines réelles distinctes,  $u'$  et  $v'$  ( $u' > v'$ ). Existe-t-il de telles valeurs  $p, q, p', q'$  pour lesquelles  $|u' - u| > 10000$  ?

## 9 Solutions

*Solution de l'exercice 1* Sous les conditions de l'énoncé, à chaque dîner, une personne donnée a deux nouveaux voisins. Elle aura donc eu quatre voisins différents après le deuxième dîner, six voisins différents après le troisième, huit voisins différents après la quatrième, ce qui n'est pas possible : s'il y a sept personnes en tout, chacune ne peut avoir que six voisins différents, ce qui limite à trois le nombre de dîners réalisables sous les conditions de l'énoncé. Ce résultat est le même s'il y a huit personnes en tout. Il reste à prouver qu'on peut organiser trois dîners de sorte que chacun ait deux nouveaux voisins à chaque dîner. Au premier dîner, les sept

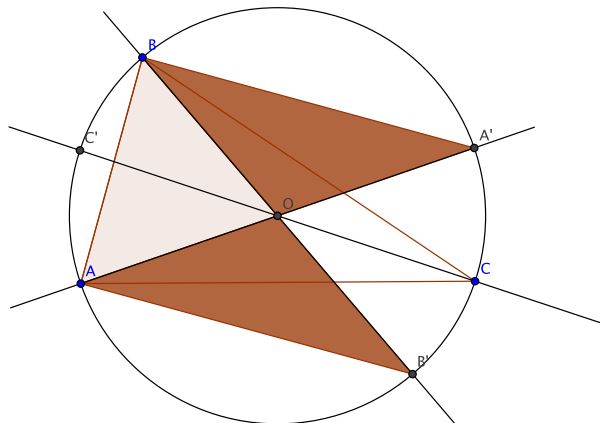
personnes sont numérotées dans l'ordre de 1 à 7 : 1 2 3 4 5 6 7. Au deuxième dîner, par rapport au premier, on les place « une personne sur deux » : 1 3 5 7 2 4 6, et au troisième, « une personne sur trois » : 1 4 7 3 6 2 5. On vérifie facilement qu'un tel placement convient, mais ce n'est pas le seul. Si l'on ajoute une huitième personne, il suffit de l'intercaler de sorte qu'elle ait elle aussi deux nouveaux voisins à chaque fois, par exemple : 1 2 8 3 4 5 6 7 puis 1 3 5 8 7 2 4 6 et enfin 1 8 4 7 3 6 2 5. Ainsi, n'auront jamais été voisins : 2 et 3, 5 et 7, 1 et 4 ainsi que 8 et 6.

*Solution de l'exercice 2* Oui, on peut obtenir 2011 en commençant par  $n = 5$  : en effet, si on procède à la décomposition  $n = (n-2)+2$ , le jeu permet de remplacer  $n$  par  $2n-4$  qui (lorsque  $n \geq 5$ ) est strictement plus grand que  $n$ . Ainsi  $5 = 3+2$  est remplacé par  $3 \times 2 = 6$  puis  $6 = 4+2$  est remplacé par  $4 \times 2 = 8$  puis 8 par 12, puis 20, 36, 68, 132, 260, 516, 1028, 2052. On peut, par ce procédé, atteindre des nombres aussi grands que l'on veut. Et une fois arrivé à 2052, on peut redescendre jusqu'à 2011, en remarquant que la décomposition  $n = (n-1)+1$  permet de remplacer  $n$  par  $(n-1)$ , donc  $2052 = 2051+1$  est remplacé par 2051, puis 2050... jusqu'à 2011. Il existe de nombreuses autres manières d'atteindre un nombre supérieur à 2011 : certains ont jugé plus naturel, par exemple, d'écrire :  $5 = 3+2$ , puis  $3 \times 2 = 6 = 3+3$ , puis  $3 \times 3 = 9 = 4+5$ , puis  $4 \times 5 = 20 = 10+10$ , puis  $10 \times 10 = 100 = 50+50$ , et enfin  $50 \times 50 = 2500$ . Il reste alors 489 opérations pour redescendre jusqu'à 2011. En réalité, il est possible d'atteindre 2011 beaucoup plus rapidement, par exemple :  $5 = 3+2$ , puis  $3 \times 2 = 6 = 4+2$ , puis  $4 \times 2 = 8 = 4+4$ , puis  $4 \times 4 = 16 = 8+8$ , puis  $8 \times 8 = 64 = 36+28$ , puis  $36 \times 28 = 1008 = 1006+2$ , et enfin  $1006 \times 2 = 2012 = 2011+1$ .

*Solution de l'exercice 3* *Solution 1* : Les triangles  $AOB$  et  $AOB'$  ont même hauteur issue de  $A$  et des bases  $OB$  et  $OB'$  de même longueur. Ainsi  $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{AOB'}$ . On montre de même que  $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{A'OB}$ ,  $\mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{BOC'}$ ,  $\mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{B'OC}$ ,  $\mathcal{A}_{COA} = \mathcal{A}_{COA'}$  et  $\mathcal{A}_{COA} = \mathcal{A}_{C'OA}$ . En sommant ces identités membre à membre, on obtient

$$2(\mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC} + \mathcal{A}_{COA}) = \mathcal{A}_{AOB'} + \mathcal{A}_{A'OB} + \mathcal{A}_{BOC'} + \mathcal{A}_{B'OC} + \mathcal{A}_{COA'} + \mathcal{A}_{C'OA}.$$

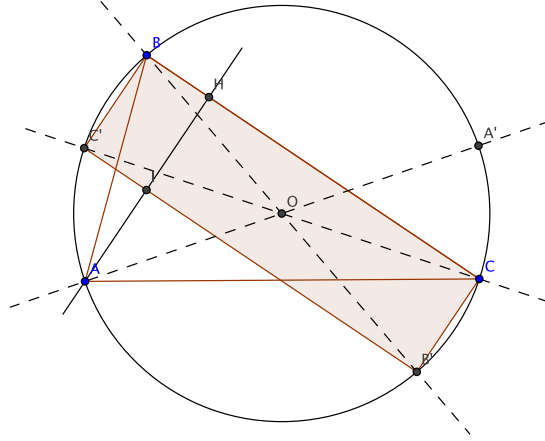
Ainsi,  $2\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AC'BA'CB'}$ .



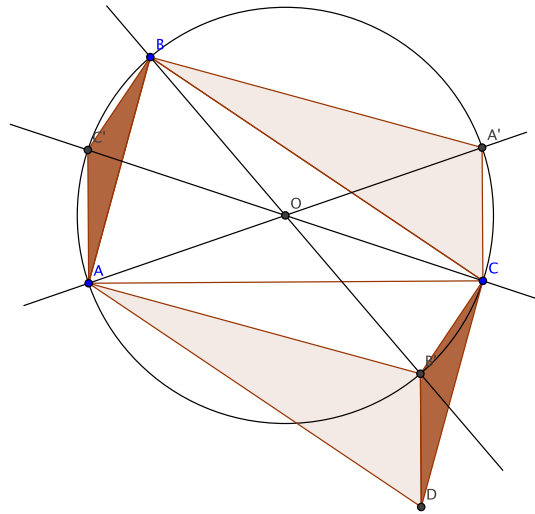
*Solution 2* : Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$  et  $I$  le point d'intersection de  $(AH)$  et  $(B'C')$ . Comme les diagonales du quadrilatère  $BC'B'C$  sont de même longueur et se coupent en leur milieu,  $BC'B'C$  est un rectangle. En particulier,  $BC = B'C'$  et, en utilisant le parallélisme,  $(AI)$  est une hauteur du triangle  $AB'C'$  puis  $C'B = IH$ . La symétrie de centre  $O$

échange les points  $A, B'$  et  $C'$  avec les points  $A'B$  et  $C$  respectivement, ce dont on déduit que  $\mathcal{A}_{A'BC} = \mathcal{A}_{AB'C'}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AC'BA'CB'} &= \mathcal{A}_{A'BC} + \mathcal{A}_{AB'C'} + \mathcal{A}_{BC'B'C} = 2\mathcal{A}_{AB'C'} + \mathcal{A}_{BC'B'C} \\ &= AI \cdot B'C' + IH \cdot BC = AI \cdot BC + IH \cdot BC \\ &= (AI + IH) \cdot BC = AH \cdot BC \\ &= 2 \frac{AH \cdot BC}{2} = 2\mathcal{A}_{ABC}. \end{aligned}$$



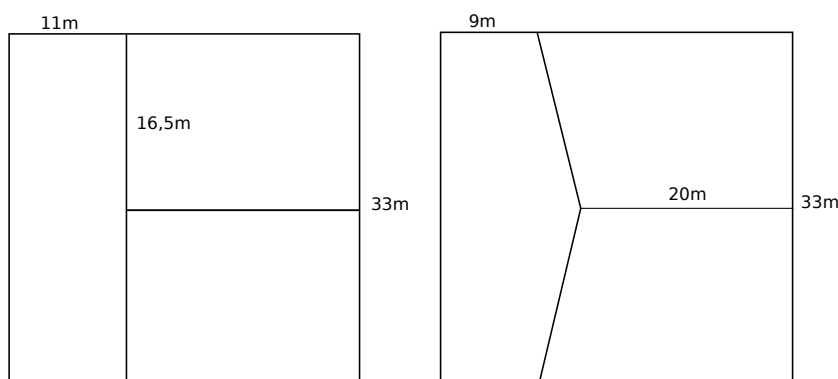
*Solution 3 :* La symétrie de centre  $O$  échangeant  $A, B$  et  $C$  avec  $A', B'$  et  $C'$ , on sait que  $\vec{AB'} = \vec{BA'}$  et  $\vec{A'C} = \vec{C'A}$ . Soit  $D$  le point tel que  $\vec{B'D} = \vec{A'C}$ . Alors, comme  $\vec{AB'} = \vec{BA'}$ , le triangle  $AB'D$  est un translaté du triangle  $BA'C$ . En particulier,  $\mathcal{A}_{AB'D} = \mathcal{A}_{BA'C}$  et  $AD = BC$ . Comme  $\vec{A'C} = \vec{C'A}$ , on sait que  $\vec{B'D} = \vec{C'A}$ . On en déduit de même que  $\mathcal{A}_{AC'B} = \mathcal{A}_{DB'C}$  et  $CD = BA$ . On remarque donc que les triangles  $ABC$  et  $CDA$  sont isométriques, d'où  $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{CDA}$ .



Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AC'BA'CB'} &= \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{AB'C} + \mathcal{A}_{ABC'} \\ &= \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{AB'C} + \mathcal{A}_{CB'D} + \mathcal{A}_{AB'D} \\ &= \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CDA} = 2\mathcal{A}_{ABC}. \end{aligned}$$

*Solution de l'exercice 4* Avec 33 m de clôture, on peut obtenir une parcelle de 11m  $\times$  33m et une parcelle de 22m  $\times$  33m. Avec 22m de clôture, on peut partager la seconde parcelle en deux parties de même aire. Mais au lieu de diviser le pré en trois rectangles, on peut le diviser en deux trapèzes de 16,5m de hauteur (la somme des côtés parallèles étant donc 44 m) et un pentagone, comme sur la figure. Ainsi, au lieu d'utiliser  $22\text{m} + 2 \times 16,5\text{m} = 55\text{m}$ , il suffit d'utiliser  $20\text{m} + 2 \times \sqrt{16,5^2 + 4^2}\text{m}$ , d'après le théorème de Pythagore. Or,  $16,5^2 + 16 < 17^2$ , car  $17^2 - 16,5^2 = (17 - 16,5)(17 + 16,5) = 16,75$ , ce qui suffit.



C'est un coup de chance que le trapèze de côtés parallèles 20m et 24m convienne. On pouvait étudier plus généralement le trapèze de côtés parallèles  $22 - x$  et  $22 + x$ , ce qui revient à l'étude de fonction définie par  $f(x) = 22 - x + 2\sqrt{16,5^2 + (2x)^2}$ . C'est pour  $5/3 < x < 13/5$  que  $f(x) < 54$ , donc en particulier pour  $x = 2$ , mais le minimum  $22 + 33/4\sqrt{15} = 53,9521126\dots$  est atteint en  $x = 11/5\sqrt{15} = 2,13014\dots$

*Solution de l'exercice 5* **Remarque :** Cet exercice est le même que l'exercice 1 (les collégiens devaient résoudre le 1, les lycéens le 5), mais dans un cas moins particulier. La solution proposée ci-dessous est très générale, mais difficilement accessible à un lycéen moyen. Cet exercice permettait donc de repérer les élèves les mieux à même d'affronter de redoutables problèmes olympiques.

*Solution :* La première chose à remarquer est la suivante. On appelle  $n$  le nombre de convives (17 ou 18), et  $k$  le nombre de dîners ; on s'intéresse à un convive en particulier parmi les  $n$ . Sachant qu'il a deux voisins à chaque dîner, et qu'il ne doit jamais rencontrer deux fois la même personne, il rencontrera donc  $2k$  personnes différentes au total. Or il n'y a que  $n - 1$  personnes qu'il peut rencontrer ; on a donc  $2k \leq n - 1$ , ce qui signifie – dans les deux cas – qu'il y a au plus 8 dîners possibles. Montrons maintenant qu'il existe effectivement 8 placements tels que deux personnes ne sont jamais voisines plus d'une fois. On numérote les convives et les places de 0 à  $n - 1$  (puisque la table est ronde, la  $(n - 1)$ -ième place est donc à côté de la 0-ième), et les placements de 1 à 8. Pour  $n = 17$ , on peut procéder de la façon suivante : au  $i$ -ième dîner, on place la  $j$ -ième personne à la  $ij$ -ième place modulo 17. (Le schéma complet des placements est présenté un peu plus bas. De façon moins abstraite, mais plus longue et plus vague, on peut dire que le premier samedi, on place tous les convives dans l'ordre ; le deuxième samedi, on en place un sur deux ; le troisième, un sur trois ; et ainsi de suite ; sachant que quand les numéros dépassent 17, on « revient à 0 ».) On doit vérifier deux choses. Vérifions d'abord que c'est un vrai placement. Chaque convive reçoit une et une seule place, car entre 0 et 16, il y a un et un seul nombre congru à un résidu donné modulo 17. Aucune place n'est occupée par deux convives : en effet, soit  $j$  et  $j'$  deux convives

qui occupent la même place au  $i$ -ième dîner. Alors on a  $ij \equiv ij' \pmod{17}$ , soit  $17|ij - ij'$  ou encore  $17|i(j - j')$ . Puisque 17 est premier et que  $0 < i < 17$ ,  $i$  est premier avec 17, donc  $17|j - j'$ . On a donc  $j \equiv j' \pmod{17}$ , c'est-à-dire  $j = j'$ . Et comme il y a autant de places que de convives, toutes les places sont forcément occupées. Vérifions maintenant que c'est bien une solution du problème. Puisque la différence entre les numéros de deux places voisines est congrue à  $\pm 1$  modulo 17, cela signifie qu'au  $i$ -ième dîner, la différence entre les numéros de deux personnes voisines est congrue à  $\pm i$  modulo 17. Or les nombres  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 8$  sont tous différents modulo 17 : deux personnes données ne peuvent donc être voisins qu'à un seul dîner. On aurait pu aussi présenter explicitement le schéma des placements :

Place	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1er dîner	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2e dîner	0	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	13	15
3e dîner	0	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	5	8	11	14
4e dîner	0	4	8	12	16	3	7	11	15	2	6	10	14	1	5	9	13
5e dîner	0	5	10	15	3	8	13	1	6	11	16	4	9	14	2	7	12
6e dîner	0	6	12	1	7	13	2	8	14	3	9	15	4	10	16	5	11
7e dîner	0	7	14	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10
8e dîner	0	8	16	7	15	6	14	5	13	4	12	3	11	2	10	1	9

et vérifier que chaque convive apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et a des voisins différents à chaque ligne. Mais une telle solution, bien que moins abstraite, serait beaucoup plus laborieuse (366 vérifications à faire au total!), et a le défaut d'être « parachutée » : on peut voir qu'elle marche, mais on ne comprend pas bien pourquoi elle marche. Pour  $n = 18$ , une solution possible consiste à partir de la disposition précédente, et à intercaler la nouvelle personne quelque part à chaque fois. Comme on sait déjà que les 17 premières personnes sont bien placées comme il faut, il suffit de faire en sorte que la dernière personne (qui porte, elle, le numéro 17 : ceci n'est pas une erreur, car on a numéroté à partir de 0) ait des voisins différents à chaque fois. On peut par exemple la mettre entre 3 et 4 au premier dîner, entre 11 et 13 au deuxième, puis entre 2 et 5, entre 10 et 14, entre 1 et 6, entre 9 et 15, entre 0 et 7, et enfin entre 8 et 16 au huitième dîner : chaque nombre entre 0 et 16 apparaît bien au plus une fois dans cette liste. La disposition complète est donc la suivante :

Place	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1er dîner	0	1	2	3	17	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2e dîner	0	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	17	13	15
3e dîner	0	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	17	5	8	11	14
4e dîner	0	4	8	12	16	3	7	11	15	2	6	10	17	14	1	5	9	13
5e dîner	0	5	10	15	3	8	13	1	17	6	11	16	4	9	14	2	7	12
6e dîner	0	6	12	1	7	13	2	8	14	3	9	17	15	4	10	16	5	11
7e dîner	0	17	7	14	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10
8e dîner	0	8	17	16	7	15	6	14	5	13	4	12	3	11	2	10	1	9

Solution de l'exercice 6 La réponse est oui. *Solution 1* : Supposons que  $|p' - p| < 0,01$  et  $|q' - q| < 0,01$ . On a  $2|u - u'| = |p' - p + \sqrt{p^2 - 4q} - \sqrt{p'^2 - 4q'}|$ . Comme  $|p' - p| < 0,01$ , pour avoir  $|u' - u| > 10000$ , il suffit d'avoir  $|\sqrt{p^2 - 4q} - \sqrt{p'^2 - 4q'}| > 20001$  d'après l'inégalité triangulaire. Posons alors  $\eta = p^2 - 4q$ ,  $p' = p + \epsilon_1$  et  $q' = q + \epsilon_2$  de sorte que :

$$|\sqrt{p^2 - 4q} - \sqrt{p'^2 - 4q'}| = |\sqrt{\eta} - \sqrt{\eta + 2p\epsilon_1 + \epsilon_1^2 - 4\epsilon_2}|.$$

Pour rendre cette quantité grande, l'idée est de prendre  $\eta$  suffisamment « petit » et  $p$  grand. Par exemple, on fixe  $p = 10^{14}$ ,  $\epsilon_1 = 10^{-3}$ ,  $\epsilon_2 = 10^{-3}$ . On pose alors  $\eta = 4\epsilon_2 - \epsilon_1^2 > 0$  et  $q = (p^2 - \eta)/4$ . Finalement, on pose  $p' = p + \epsilon_1$  et  $q' = q + \epsilon_2$ . Vérifions que ces valeurs conviennent. On a :

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{p^2 - 4q} - \sqrt{p'^2 - 4q'} \right| &= \left| \sqrt{\eta} - \sqrt{\eta + 2p\epsilon_1 + \epsilon_1^2 - 4\epsilon_2} \right| \\ &= \left| \sqrt{\eta} - \sqrt{2p\epsilon_1} \right| \\ &\geq \sqrt{2p\epsilon_1} - 1 = \sqrt{2 \times 10^{14} \times 10^{-3}} - 1 > 20001, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

*Solution 2 :*  $u$  et  $v$  sont racines de l'équation  $0 = (x - u)(x - v) = x^2 - (u + v)x + uv$ , donc  $p = -(u + v)$  et  $q = uv$ . Il existe une valeur de  $N$ , pour laquelle l'équation de racines  $u = N + 1$  et  $v = N - 1$ , à savoir  $x^2 - 2Nx + (N^2 - 1) = 0$ , et celle de racines  $N + 10001,001$  et  $N - 10001$  à savoir  $x^2 - (2N + 0,001)x + (N^2 + 0,001N - (10001,001 \times 10001)) = 0$ , ont même coefficient constant (il suffit que  $0,001N = 10001 \times 10001,001 - 1$ , donc que  $q = 100020010001$ ) tout en vérifiant  $p' = -(2N + 0,001) = p - 0,001$ .



## X. Citations mémorables

- Jean-François explique l'addition des complexes :
  - Bon alors pour additionner, t'additionnes les vecteurs.
  - Ok, c'est quoi un vecteur ?
  - Bah, en gros c'est une flèche."
- En TD d'arithmétique :
  - 15 :42 :13 - On fait quoi c't'aprèm ? - Matthieu
  - 15 :42 :14 - On est cet aprèm...
- "Montrons la conjecture de Riemann pour résoudre cet exercice" - Igor
- "Ok... donc c'est affreux mais c'est pas grave" - Igor
- "On pourrait prendre un hexagone... comme ça ça fait trois triangles hexagonaux" (anonyme)
- "Je sais pas pourquoi je le mets mais je le mets quand même" - Igor
- "Là il parle anglais" - Igor (parlant d'un candidat aux IMO interviewé)
- "X puissance quoi ? Bon au hasard" - Igor
- "Preuve, ou application parce que c'est trop un théorème de OUF ?" - Igor parlant du LTE
- "2p égal 2p" - François
- "On va noter  $a_i = a^i$ " - Seginus
- "Pour avoir égalité faut avoir égalité un peu partout" - Seginus
- "Regarde Seginus c'est rigolo ! La preuve de Victor marche pas mais elle est amusante" - Cyril
- "Ca ça veut rien dire mais c'est pas grave" - Igor
- "Si vous connaissez pas les vecteurs fermez les yeux sinon ça va vous effrayer" - Igor démontrant le théorème d'Al-Kashi avec le produit scalaire
- "Je parle de moi à la 3ème personne !" - Igor
- "Igor : - En regardant modulo trente-douze  
François B. : - Ca ça fait quand même modulo 42 !"
- "Ca ça m'a l'air d'être un théorème cool donc faut le retenir" - Igor découvrant un théorème sur les polynômes cyclotomiques
- "Igor : Montrons qu'ils sont tous entiers  
Cyril : Non non, ils sont pas tous entiers  
Igor : Si si, ils le sont !  
Cyril : Mais je suis sûr, à un moment, j'ai vu un 105 !  
Quelqu'un : Mais 105 est entier !  
Cyril : Ah non, j'avais compris ... Ah ouais ! 105 est entier ! ..."
- "On va pas commencer à mettre des points partout, on est pas des Autrichiens !" - Cyril
- "J'ai presque une quinte flush, à 5 cartes près" - anonyme

- "Antoine : En gros, y a 8 énigmes...  
A. : Est-ce que c'est comme l'année dernière ?  
Antoine : Exactement, mais c'est pas pour autant que t'es obligé de faire chier le monde"
- "C'est  $\tau\tau$  qui rentre dans un barre. Et paf, ça fait  $|\tau|^2$ ." - Victor
- "Quelqu'un : C'est sûr, y en aura une dans les bois, une dans la grange" Elie : Lagrange ?  
Multiplicateurs ?"
- "Léonard : C'est pas grave, on aura pas les chokobons... Faudra qu'on les choure  
Matthieu : Schur ? Inégalité de ?"
- "On va refaire le coup de la boîte de conserve mais comme ça (avec les multiplicateurs de Lagrange), vous allez voir on va plus rien comprendre, ça va être génial" - Antoine
- "- J'ai pas envie d'avoir cours c't'aprem ...  
- C'est pas grave, t'as TD.  
- J'explicite : j'ai pas envie de bosser c't'aprem ... - C'est pas grave, t'as TD." - Deux personnes qui tiennent à rester anonymes"
- "... ce qui n'aboutit à rien, ce qui me contrarie fortement" - [Au tableau]
- "... ce qui récurse la récurrence" - Urvan [Dans sa copie de l'exercice 3]
- "Il est 5 heures et demi, il faut se réveiller !" - Arthur B.R. [qui suit son réveil]
- "En gros, ils avaient trouvé une formule pour faire l'inverse du loto, la plupart du temps, tu gagnes que dalle et de temps en temps, tu perds une fortune." - Pierre [lors de l'exposé sur les martingales]
- "Hé ! Mais moi je veux qu'on me cite euh !" - Galatée [d'où ...]
- "Moi je serais une très bonne cacahuète mais un mauvais Gorille ! Mouhahaha" [rire typique de Galatée fière de ce qu'elle a dit]
- "Paaaarrrroooooooodooontaaaax" - Léonard [qui se prend pour un chanteur d'opéra]