# Problème #5262

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(xf(y) + y) + f(xy + x) = f(x + y) + 2xy \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

En posant $x = y = 0$ :

$$f(0) + f(0) = f(0) \iff \boxed{f(0) = 0}$$

En posant $x = 1$ :

$$f(y + f(y)) + f(y + 1) = f(y + 1) + 2y \iff \boxed{f(y + f(y)) = 2y}$$

Supposons $f(k) = 0$ :

$$\begin{aligned} & f(k) + k = k \\ \iff & f(f(k) + k) = f(k) \\ \iff & 2k = 0 \iff k = 0 \\ & \boxed{f(k) = 0 \iff k = 0} \end{aligned}$$

En permutant les variables de l'équation, on voit que le coté gauche ne change pas; la multiplication et l'addition sont commutatives, donc :

$$\boxed{f(xf(y) + y) + f(xy + x) = f(yf(x) + x) + f(xy + y)}$$

Avec $x = 1$ :

$$f(y+f(y))+f(y+1) = f(yf(1)+1)+f(2y) \iff \boxed{f(yf(1) + 1) + f(2y) = f(y + 1) + 2y}$$

Avec $x = -1$ :

$$\boxed{f(y - f(y)) + f(-y - 1) = f(yf(-1) - 1)}$$