Problème #4227

La suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfait $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$ pour tous $m,n\in\mathbb{N}$ avec $m\geq n$. Si $a_1=1$, déterminer les valeurs que peut prendre a_{1995}.

On change la formule en :

$$2a_{m+n}+2a_{m-n}=a_{2m}+a_{2n}$$

Pour $n=m$:

$$2a_m+2a_m=a_{2m} \iff \boxed{a_{2m}=4a_m}$$

Pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$:

$$2a_{2m}+2a_0=a_{2m}+a_{2m} \iff \boxed{a_0=0}$$

$$2a_{m+1}+2a_1=a_{2m}+a_2 \iff 2a_{m+1}+2=4a_m+4a_1 \iff \boxed{a_{m+1}=2a_m+2}$$

$$2a_{m+2}+2a_2=a_{2m}+a_4 \iff 2a_{m+2}+8=4a_m+4a_2 \iff \boxed{a_{m+2}=2a_m+8}$$

$$\dots$$

On trouve comme forme générale respectivement :

$$a_n=3\cdot 2^{n-1}-2 \text{ pour tout } n\geq 1$$