Sujet après-midi

Durée : 4 heures

Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les problèmes dans l'ordre que vous souhaitez.

Problème 1.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $x^9 + y^9 = 2$. Montrer que :

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geqslant 2$$

Ébauche de corrigé :

D'une part : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geqslant 2 \Longleftrightarrow x^3 + y^3 \geqslant 2xy$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x^3+y^3)^3}{8} \geqslant x^3y^3$$

D'autre part : $x^9 + y^9 = 2 \Longleftrightarrow (x^3+y^3)(x^6+y^6-x^3y^3) = 2$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (x^3+y^3)((x^3+y^3)^2 - 3x^3y^3) = 2\\
&\Longleftrightarrow (x^3+y^3)^3 - 3x^3y^3(x^3+y^3) = 2\\
&\Longleftrightarrow (x^3+y^3)^3 - 2 = 3x^3y^3(x^3+y^3)\\
&\Longleftrightarrow \frac{(x^3+y^3)^3 - 2}{3(x^3+y^3)} = x^3y^3
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geqslant 2 \Longleftrightarrow \frac{(x^3+y^3)^3}{8} \geqslant \frac{(x^3+y^3)^3 - 2}{3(x^3+y^3)}$

On pose alors $t = x^3 + y^3 > 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geqslant 2 &\Longleftrightarrow 3t^4 \geqslant 8(t^3-2)\\
&\Longleftrightarrow 3t^4 - 8t^3 + 16 \geqslant 0\\
&\Longleftrightarrow (t-2)^2(3t^2+4t+4) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Et cette dernière inégalité est vraie : la fonction polynomiale $t \longmapsto (t-2)^2$ est trivialement positive pour tout réel t, et la fonction polynomiale $t \longrightarrow 3t^2+4t+4$ a un coefficient dominant positif et un discriminant $\Delta = -32 < 0$, donc est également positive pour tout réel t.

La fonction polynomiale issue du produit de ces dernières est alors également positive pour tout réel t.

En remontant les équivalences on obtient que l'inégalité que l'on voulait prouver est nécessairement vraie. De plus, cette inégalité est optimale dans la mesure où il y a égalité lorsque $x = y = 1$ (il y a d'ailleurs même égalité si et seulement si $x = y = 1$).

Problème 2.

Considérons $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{N}^*$. Soit $N = \sum_{i=1}^{6} k_i = k_1 + \cdots + k_6$.

On suppose que :
- N divise $k_1k_2k_3 + k_4k_5k_6$
- N divise $k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3 - (k_4k_5 + k_5k_6 + k_4k_6)$

Montrer que N n'est jamais un nombre premier.

Ébauche de corrigé :

Les hypothèses font énormément penser aux polynômes symétriques élémentaires associés à un polynôme de degré 3, c'est donc la piste principale à envisager !

Méthode 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On constate que :

$(n+k_1)(n+k_2)(n+k_3)$
$= n^3 + (k_1+k_2+k_3)n^2 + (k_1k_2+k_2k_3+k_1k_3)n + k_1k_2k_3$
$\equiv n^3 - (k_4+k_5+k_6)n^2 + (k_4k_5+k_5k_6+k_4k_6)n - k_4k_5k_6 \ [N]$
$\equiv (n-k_4)(n-k_5)(n-k_6) \ [N]$

En particulier, pour $n = k_4$, on obtient :

$$(k_4+k_1)(k_4+k_2)(k_4+k_3) \equiv 0 \ [N]$$

Si on suppose par l'absurde N premier, on a alors $N|(k_4+k_1)$ ou $N|(k_4+k_2)$ ou $N|(k_4+k_3)$. C'est impossible dans les trois cas dans la mesure où N est par construction strictement plus grand que (k_4+k_1), (k_4+k_2) et (k_4+k_3).

Nécessairement N n'est pas premier.

Méthode 2 : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) = (n+k_1)(n+k_2)(n+k_3) - (n-k_4)(n-k_5)(n-k_6)$$

On a que $P(n) = Nn^2 + An + B$, avec :

- $A = (k_1k_2+k_2k_3+k_1k_3) - (k_4k_5+k_5k_6+k_4k_6)$
- $B = k_1k_2k_3 + k_4k_5k_6$

Par hypothèse on a que $N|A$ et $N|B$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que $N|P(n)$.

En particulier, $N|P(k_4) = \underbrace{(k_4+k_1)}_{<N}\underbrace{(k_4+k_2)}_{<N}\underbrace{(k_4+k_3)}_{<N}$.

Et il suit alors que N ne peut être premier.

Problème 3.

Soient $m, n \in [\![1, 2024]\!]$. Supposons que $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$. Déterminer le maximum de $m^2 + n^3$.

En déduire un programme qui prend en argument $k \in \mathbb{N}^*$ et qui donne, sous la condition de l'équation diophantienne de l'énoncé, le max de $m^2 + n^3$ lorsque m, n appartiennent plus généralement à $[\![1, k]\!]$.

Remarque concernant l'énoncé :

Les candidats avec de la culture seront sans doute avantagé, néanmoins nous rédigerons ici un corrigé "naturel". Cet exercice est très largement inspiré d'une propriété démontrée par Wasteels en 1902.

Ébauche de corrigé :

Soient $m, n \in [\![1, 2023]\!]$. Étant donné que $n^2 - mn - m^2 = \pm 1$, on va diviser cela en trois situations :

• Si $m > n$ on se trouve dans une situation impossible : effectivement on aurait alors $n^2 - mn - m^2 \leqslant (m-1)^2 - mn - m^2 = 1 - m(2+n) < -1$, absurde.

• Si $m = n$ alors la condition entraîne $-n^2 = -1$, d'où $m = n = 1$.

• Si $m < n$ cela se corse. En faisant des tests avec des petits entiers on constate assez rapidement que si (m, n) est un couple vérifiant l'équation diophantienne alors $(n, n+m)$ est également un couple qui fonctionne.

En effet : $(m+n)^2 - n(m+n) - n^2 = m^2 + mn - n^2 = -(n^2 - mn - m^2) = \pm 1$.

Donc en partant du couple $(1, 1)$ qui fonctionne, on construit le couple $(1, 2)$, puis $(2, 3)$, puis $(3, 5)$, puis $(5, 8)$, etc, et on constate avec stupeur que les nombres de Fibonacci répondent à l'équation diophantienne.

Pour autant, rien ne nous dit que les couples constitués de nombres de Fibonacci consécutifs sont les seules solutions. Pour cela, remarquons que si (m, n) est un couple vérifiant l'équation diophantienne alors $(n-m, m)$ fonctionne également.

En effet : $m^2 - (n-m)m - (n-m)^2 = m^2 + mn - n^2 = -(n^2 - mn - m^2) = \pm 1$.

Et ainsi par un processus descendant on obtient un couple de solution strictement plus petit. Effectivement $m > n - m$; dans le cas contraire on aurait $n \geqslant 2m$, i.e $n(n-m) \geqslant 2m^2$, et alors $n^2 - mn - m^2 \geqslant m^2 > 1$, c'est absurde. (le cas $m = 1$ ne posant pas problème on l'évince et on suppose $m > 1$)

Par descente infinie le processus doit terminer, et termine sur le couple $(1, 2)$.

On a bien montré que les seules solutions de cette équation diophantiennes sont les couples de nombres de Fibonacci consécutifs inférieurs à 2023. En l'occurence, le maximum de $m^2 + n^3$ sous ces conditions est donné par $987^2 + 1597^3$.

Compléments :

Une autre approche aurait été de voir l'équation $n^2 - mn - m^2 = \pm 1$ comme un polynôme du second dégré en la variable n. Via la formule du discriminant, on obtient alors que :

$$n = \frac{m \pm \sqrt{5m^2 \pm 4}}{2}$$

Et il est bien connu (par quelques personnes du moins) que $5x^2 \pm 4$ est un carré parfait SI ET SEULEMENT SI x est un nombre de Fibonacci.

Effectivement on peut prouver que si m et n sont des nombres de Fibonacci consécutifs alors m et n vont nécessairement satisfaire l'équation obscure de l'énoncé, cela vient de la relation vraie pour tout $k \geqslant 1$ prouvée par Cassini au XVIIème siècle, affirmant que $F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$.

Cela donne, pour tout $k \geqslant 1$, $F_k^2 - (F_{k+1} - F_k)F_{k+1} = (-1)^{k+1}$, i.e $F_k^2 + F_kF_{k+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k-1}$, ce qui assure que $F_{k+1}^2 - F_kF_{k+1} - F_k^2 = \pm 1$.

L'autre sens est plus corsé et il semble qu'il est obligatoire de faire une descente du saut de Viète comme on l'a fait dans le corrigé plus haut, donc gagne-t-on vraiment à se la jouer polynôme ?

Note : 1597 est le septième nombre premier de Fibonacci ! Qu'attend-on pour faire de la théorie des corps sur $\mathbb{Z}/1597\mathbb{Z}$?

Voici de plus un programme envisageable pour la seconde partie de la question :

```python
def Fibo(n):
    if n==0 or n==1:
        return 1
    else :
        F0,F1=1,1
        for i in range (2,n+1):
            F0,F1=F1,F0+F1
        return F1

def max(k):
    i=2
    while Fibo(i+1)<=k:
        i+=1
    return Fibo(i-1)**2 + Fibo(i)**3
```

Problème 4.

Considérons un damier rectangulaire composé de $n \times p$ carrés, avec $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

On colorie certains de ces carrés en noir, de telle sorte que pour tout carré, au maximum 2 carrés adjacents sont colorés. Déterminer alors n et p tel que $n \times p$ soit le plus petit possible, et qu'il soit possible de colorer 2024 carrés en noir.

Ébauche de corrigé :

Sans perte de généralités, on peut supposer que $n \leq p$.

Une solution avec $np = 3036$

On considère un damier où $n = 3$ et $p = 1012$.
On peut alors colorer en noir la ligne du haut et la ligne du bas, ce qui respecte les contraintes de l'énoncé.
On a donc trouvé un solution avec $\boxed{np = 3036}$
Montrons maintenant qu'on ne peut pas faire mieux.

Etude du cas $n = 3$

On considère le motif ci-dessous : seuls 2 des 4 carrées marqués a peuvent être noirs, et de même pour les carrés marqués b. Il y a donc au plus 8 carrés noirs sur les 12.
De même, au plus 6 carrés parmi les 9 des trois premières colonnes peuvent être noirs.

	a	b	
a	b	a	b
	a	b	

Considérons alors un damier de longueur $p = 1011$.
On peut le diviser en 252 motifs 3×4 et un motif de 3×3.
D'après ce qui précède, il y a au plus $252 \times 8 + 6 = 2022$ carrés noirs.
$p = 1011$ ne suffit donc pas à colorer 2024 carrés en noir, et donc $p \geq 1012$
$p = 1011$ ne suffit donc pas à colorer 2024 carrés en noir, et donc $p \geq 1012$
Il faut donc $p \geq 1012$.

Etude du cas $n \geq 4$

On considère un damier rectangulaires de côtés de $n \times p$, dont au moins 2024 carrés sont noirs, en respectant les contraintes de l'énoncé.

On suppose que $np \leq 3035$.

On peut catégoriser les carrés en 3 catégories, en fonction du nombre de carrés adjacents qu'ils ont :

— C_2 carrés qui ont 2 carrées adjacents, dont N_2 sont noirs ;
— C_3 carrés qui ont 3 carrées adjacents, dont N_3 sont noirs ;
— C_4 carrés qui ont 4 carrées adjacents, dont N_4 sont noirs.

Sur le schéma ci-dessous, le numéro correspond au nombre de carrés adjacents pour chaque carré.

2	3	3	3	2
3	4	4	4	3
3	4	4	4	3
3	4	4	4	3
2	3	3	3	2

On a alors :

— $C_2 = 4$, et $N_2 \leq C_2$.
— $C_3 = 2(p+n) - 8$, et $N_3 \leq C_3$.
— $C_4 = (n-2)(p-2)$, et $N_4 \leq C_4$.

Par hypothèse, on a : $N_4 + N_3 + N_2 \geq 2024$

On effectue le comptage suivant : pour chaque carré, on compte le nombre de carrés adjacents qui sont noirs. Les carrés avec 4 carrées adjacents sont donc comptés 4 fois, ceux avec 3 carrés adjacents sont comptés 3 fois, et de même les carrés avec 2 carrés adjacents sont comptés 2 fois.

On compte alors un total de $4N_4 + 3N_3 + 2N_2$ carrés noirs.

D'autre part, chaque carré ayant au plus 2 carré adjacents noirs, on compte au maximum $2np$ carrés noirs.

D'où :

$$\begin{aligned}
2np &\geq 4N_4 + 3N_3 + 2N_2 \\
2np &\geq 3(N_4 + N_3 + N_2) + N_4 - N_2 \\
2np &\geq 3 \times 2024 + N_4 - N_2 \\
np &\geq 3036 + \frac{N_4 - N_2}{2}
\end{aligned}$$

De plus, $N_2 \leq 4$, donc la condition $np \leq 3035$ impose $N_4 \leq 2$.

D'où $2024 \leq N_4 + N_3 + N_2 \leq 2 + C_3 + C_2 = 2 + 2(p+n) - 8 + 4$

Donc $\boxed{p + n \geq 1013}$

On cherche alors à minimiser np sous les contraintes $p \geq n \geq 4$ et $n + p \geq 1013$. Ce minimum est atteint pour $n = 4$ et $p = 1009$, et alors $np = 4036 > 3036$.

Conclusion

Il suit dont que le scénario décrit en introduction est optimal, avec $n = 3$ et $p = 1012$.