



Olympiade Francophone de Mathématiques

Troisième édition

Épreuve Junior

Samedi 21 mai 2022

N.B. : Les problèmes ne sont pas classés selon leur difficulté.

1. Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ divise n .

Note : La partie entière d'un nombre réel $x \geq 0$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x ; on la note $\lfloor x \rfloor$. Par exemple $\lfloor 1,4 \rfloor = 1$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ et $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$.

2. On considère un tableau $n \times n$, avec $n \geq 1$. Aya souhaite colorier k cases de ce tableau de sorte qu'il existe une unique manière de placer n jetons sur des cases coloriées sans que deux jetons ne se trouvent sur la même ligne ou la même colonne. Quelle est la valeur maximale de k pour laquelle le souhait d'Aya est réalisable ?
3. Soit ABC un triangle. On note D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} avec la médiatrice du segment $[AC]$. La droite parallèle à la droite (AC) passant par le point B coupe la droite (AD) au point X . La droite parallèle à la droite (CX) passant par le point B coupe la droite (AC) en Y . Le cercle circonscrit au triangle ABY recoupe la droite (BX) au point E . Montrer que les points C , D et E sont alignés.
4. Trouver le plus petit entier $n \geq 1$ tel que l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 = 0$$

admette comme seule solution entière $a = b = c = d = 0$.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points