Problèmes du Marathon de géométrie

Daniel Cortild

November 2, 2018

Problème 1
Soit ABC un triangle est un point D a l'intérieur de celui-ci tel que : ¡DAC=¡DCA=30 et ¡DBA=60 . soit E le milieu de [BC] . F un point de AC tel que : AF=2FC . Prouver que (DE) et (EF) sont perpendiculaire .

Problème 2
Le triangle OPC est isocèle en P. Le cercle de centre O passant par C coupe $[PO]$ en A et $[PC]$ en B. Si B est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$, trouver le ratio $\frac{PC}{OC}$.

Problème 3

Problème 4
Un triangle aigu ABC est inscrit dans un cercle de centre O. Soit D l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec le côté $[BC]$. Supposons que la perpendiculaire à AO passant par D rencontre AC en un point P intérieur au cercle. Montrer que $AB = AP$.

Problème 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit. Soit I_A le centre du cercle inscrit du triangle DAB. On définit ainsi de manière cyclique I_B, I_C et I_D. Quelle particularité a le quadrilatère $I_AI_BI_CI_D$? Donnez une preuve.

Problème 6
On donne trois points distincts A, B, C sur une droite d tels que $B \in [AC]$. On construit les trois demis-cercles de diamètres respectifs $[AB], [BC]$ et $[AC]$ du même côté de d. La perpendiculaire par B à AC coupe le grand demi-cercle en D. Prouver que la tangente commune aux deux plus petits cercles, différente de BD, est parallèle à la tangente en D du grand demi-cercle.

Problème 7
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible. Soit X le croisement des diagonales. Soit I_A et S_A respectivement le centre du cercle inscrit à ABX et le milieu de l'arc AB. On définit ainsi cycliquement I_B, S_B,.... Prouvez que les I_kS_k sont concourantes.

Problème 9
Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O et Q se rencontrent aux points A et B. On prend les points C, E sur $\mathcal{C}_1$ et D, F sur $\mathcal{C}_2$ tels que E, A, F et C, A, D soient alignés. Si G et H sont respectivement les milieux de $[CD]$ et de $[EF]$, démontrer que le quadrilatère $AHBG$ est cyclique.

Problème 10
Lettons $\triangle UVW$ bi de illuminati symbol. UX end VA art de anges bissectrices de resp(ect bro) $\widehat{WUV}$ en $\widehat{UVW}$. Elles meetent en O. $XA \cap ¥ = C, N$ ouaire ¥ is the circumcercle de $\triangle WUV$. Proover que de straal van ¥ is half de straal circummundi van $\triangle CON$. #solutioninlatin #mathbitches #mathmoney #IMOmoomoneymooproblems #nodrawingsnocry #cakeiseaten #inversion #tryinanglechasingiwannalaugh #truefact #NOHOMOtheties #photowithnorthkorea #artfuckinglovesjiooometri #stealingCorentin'saccountandgettinghimbannedfrommathraining #letABCbethreeletters

Problème 11
Soit $\triangle ABC$ un triangle acutangle. Les droites l_1 et l_2 sont perpendiculaires à (AB), respectivement en A et en B. Les droites issues du milieu M de $[AB]$ et perpendiculaires à (AC) et (BC) coupent respectivement l_1 et l_2 en E et F. Si D est le point d'intersection de (EF) et (MC), montrer que

$$\widehat{ADB} = \widehat{EMF}.$$

Problème 12
Prouver qu'un quadrilatère convexe est un parallélogramme ssi il existe un point du plan tel que toute droite le traversant coupe le quadrilatère en deux parties d'aires égales.

Problème 13
Soit un cercle Ω et une corde fixe $[AB]$. Soit également un point $C \in \Omega$ variable. Notons D, E, F les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C. Soit ω le cercle exinscrit au triangle DEF relatif à D. Enfin, soit M, le point de tangence entre ω et $[EF]$. Prouver que le lieu de M en fonction de C appartient à une droite.

Problème 14
Let A, B, C, and D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameters AC and BD intersect at X and Y . The line XY meets BC at Z. Let P be a point on the line XY other than Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at B and N. Prove that the lines AM, DN, and XY are concurrent. Problème que j'ai inventé... vous vous en doutez.

Problème 15
Let circles Γ_1, Γ_2 with midpoints O_1, O_2 intersect in points A and B. The line O_1A intersects Γ_2 again in C and the line O_2A intersects Γ_1 again in D. The line through B, parallel to AD intersects Γ_1 again in E. Suppose O_1A is parallel to DE. Show that CD is a tangent to Γ_2.

Problème 16
In an acute-angled triangle ABC, $[CF]$ is an altitude, and $[BM]$ is a median. Given that $BM = CF$ and $\angle MBC = \angle FCA$, prove that triangle ABC is equilateral.

Problème 17
Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with AB parallel to CD. Let P and Q be the midpoints of AC and BD, respectively. Prove that if $\angle ABP = \angle CBD$, then $\angle BCQ = \angle ACD$.

Problème 18 (que je viens de retrouver dans mes vieilles feuilles de Wépion, j'espère que vous ne l'avez pas déjà fait)
: Soit ABC un triangle et soient D, E, F des points tels que - B et E se trouvent de part et d'autre de la droite AC, - D et C se trouvent de part et d'autre de la droite AB, - A et F se trouvent du même côté de la droite BC, - les triangles ADB, CEA et CFB sont semblables. Démontrer que les triangles BDF et FEC sont également semblables et que les segments $[AF]$ et $[DE]$ se coupent en leur milieu respectif.

Problème 20
Let $\triangle ABC$ be an acute-angled triangle with $AB > AC$, O be its circumcenter and D the midpoint of side BC. The circle with diameter AD meets sides AB, AC again at points E, F respectively. The line passing through D parallel to AO meets EF at M. Show that $EM = MF$. Plus simple que le précédent.

Problème 21
Let ABC be a triangle, and let D be a point on side BC. A line through D intersects side AB at X and ray AC at Y . The circumcircle of triangle BXD intersects the circumcircle ω of triangle ABC again at point Z distinct from point B. The lines ZD and ZY intersect ω again at V and W respectively. Prove that $AB = VW$

Problème 22
Soit deux parallèles coupant un cercle pour former un trapèze $ABCD$. La médiatrice aux segments AB et CD coupe le cercle en N et S Appelons I l'intersection de AS et ND et M l'intersection des diagonales. Prouvez que IM est perpendiculaire à la médiatrice. et désolé pour le dessin de travers du problème 21 alors qu'il est droit sur mon Iphone :-(

Problème 23
Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, les points A', B', C', D' sont les centres de gravité des triangles BCD, CDA, DAB, ABC respectivement. Prouver que les quadrilatères $A'B'C'D'$ et $ABCD$ sont semblables et trouver le rapport de leurs aires.

Problème 24
Deux cercles Ω_1 et Ω_2 se coupent en A et B. Soient X, Y, Z, W des points tels que $X, Y \in \Omega_1$, $Z, W \in \Omega_2$ et X, A, Z sont alignés. Prouver que $XY \parallel ZW$ si et seulement si Y, B, W sont alignés.

Problème 25
Soit ABC, un triangle et D, le pied de la bissectrice issue de B. La droite BD intersecte le cercle circonscrit en $E \neq B$. Le cercle de diamètre DE intersecte le cercle circonscrit en $F \neq E$. Prouver que BF est une symédiane du triangle ABC.

Problème 26
Soit un parallélogramme $ABCD$, avec $AB < AC < BC$. Les points E et F sont sur le cercle circonscrit ω de ABC de telle manière que ED et FD sont tangentes à ω. Les segments $[AD]$ et $[CE]$ se coupent. Sachant que $\widehat{ABF} = \widehat{DCE}$, prouver que $\widehat{ABC} = 60°$.

Problème 27 (inventé pour l'occasion)
: Soit ABC un triangle et ω son cercle circonscrit. Soit T un point de ω tel que la tangente en T à ω soit parallèle à BC et tel que T soit de l'autre côté de BC par rapport A Les droites AT et BC se coupent en I Soit O l'intersection de la médiatrice de $[AI]$ avec BC La tangente à ω passant par O passe par le point G tel que G soit sur ω et soit du même côté de BC que T La perpendiculaire à AT passant par A (merci Cédric ;-)) et la droite GI se coupent en P Prouver que P appartient à ω

Problème 28
Soient $ABCD$ un carré; P un point de $]BC[$; Q, R les points d'intersection de AP et CD, DP et AB respectivement. Prouver que $BQ \perp CR$.

Problème 29
Soit AB un segment contenant le point M tel que $AM < BM$. On construit deux carrés $AMCD$ et $MBEF$ du même côté de la droite AB. Prouver que AF, BC et DE sont concourantes.

Problème 30
Deux cercles ω_1 et ω_2 de même rayon se coupent en deux points distincts X_1 et X_2. On considère un cercle ω tangent extérieurement à ω_1 au point T_1 et tangent intérieurement à ω_2 au point T_2. Prouver que les droites X_1T_1 et X_2T_2 se coupent en un point appartenant à ω.

Problème 31
Soient $ABCD$ un carré et P, Q deux points sur les côtés $[AB], [AD]$, respectivement. On note $S = CQ \cap AB$; $R = CP \cap AD$ et $T = SR \cap PQ$. Prouver que $\widehat{CAT}$ est droit.

Problème 32
Soit $ABCD$, un tétraèdre. Prouver qu'il existe 2 arêtes a, b ne partageant pas de sommet en commun telles que les 2 sphères de diamètre a et b couvrent entièrement le tétraèdre.

Problème 33
Soient ABC un triangle, ω son cercle inscrit, $D = \omega \cap BC$, E tq DE est un diamètre de ω et $F = AE \cup BC$. Montrer que $BF = CD$.

Problème 34
Moyennement célèbre, j'espère que vous ne connaissez pas encore : Soit ABC, un triangle quelconque. On trisecte chaque angle comme sur la figure. Montrer que le 'petit' triangle est équilatéral.

Problème 35
Soit ΔABC un triangle acutangle non-isocèle. Soient D et E respectivement le milieu de $[BC]$ et le pied de la hauteur issue de A dans ΔABC ; et d la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$. Soit P le point sur la médiatrice de $[DE]$ tel que $d \perp DP$. Prouver que P appartient au cercle d'Euler de ΔABC.

Problème 36
Soient ABC, un triangle inscrit au cercle ω. Soit S, le pôle sud relatif à A. Soient $X \in AB$ et $Y \in AC$ tq $XY \| BC$. On prend P (resp. Q), la seconde intersection de SX (resp. SY) avec ω et $R = PQ \cap XY$. Montrer que AR est tangent à ω. Pour la réflexion :

Problème 37
Soit ABC un triangle isocèle avec $|AB| = |AC|$. La bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le droite AC en un point D tel que $|BC| = |BD| + |AD|$. Prouver que $|\widehat{BAC}| = 100°$.

Problème 38
Soient ABC un triangle acutangle, Γ son cercle circonscrit, h la hauteur issue de C et b la bissectrice issue de C. Soient $h \cap [AB] = \{D\}$, $b \cap [AB] = \{F\}$, $h \cap \Gamma = \{C, E\}$, $b \cap \Gamma = \{C, G\}$, $DG \cap \Gamma = \{G, H\}$ et $FH \cap \Gamma = \{H, I\}$. Prouver que $|AI| = |BE|$. Edit : Merci Corentin, message édité ;-)

Problème 39
Soit ABC, un triangle acutangle scalène. Notons N, le centre du cercle d'Euler et D, l'intersection des tangentes au cercle circonscrit passant par B et C. Montrer que A, D, N sont alignés si et seulement si $\widehat{BAC} = 45°$.

Problème 40 (inspiré de IMO 2010.4)
Soit un triangle ABC de cercle circonscrit ω La tangente à ω en C coupe AB en S Soit un point P à l'intérieur du triangle ABC tel que $|SP| = |SC|$ Les droites AP, BP, CP recoupent ω aux points K, L, M respectivement. La droite SP recoupe les droites ML et MK aux points X et Y respectivement. Prouver que l'intersection des droites AX et BY se situe sur ω

Problème 41
Soient ABC, un triangle et D, E, les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Notons Γ_{XYZ}, le cercle circonscrit du triangle en question. Soient P et Q tels que $\{D, P\} = \Gamma_{ADE} \cap \Gamma_{BCD}$ et $\{E, Q\} = \Gamma_{ADE} \cap \Gamma_{BCE}$. Montrez que $AP = AQ$.

Problème 42
: un gentil pour attirer le plus de gens possible Soient 2 cercles C_1, C_2 de rayons r_1, r_2 respectivement avec $r_1 \geq r_2$ et de centres O_1, O_2 respectivement. Ces 2 cercles sont sécants en deux points distincts M, N Soit T_1 le point diamétralement opposé à M sur C_1 La tangente t à C_1 en T_1 coupe la droite MN en P Soit T_2 le point de MO_2 tel que $PT_2 \perp MT_2$ Prouver que

$$\widehat{NPT_1} \leq \widehat{NPT_2}$$

Quand a-t-on égalité?

Problème 43 (Vivement les arguments foireux)
: Soit ABC, un triangle de cercle circonscrit Γ et de cercle inscrit ω. Soit X, un point de Γ. Notons Y, Z, les intersections des tangentes à ω passant par X et Γ. Montrez que YZ est tangent à ω.

Problème 45 (USAJMO 2016)
Soit ABC, un triangle isocèle en A et Ω, son cercle circonscrit. Soit P sur l'arc BC de Ω ne contenant pas A. Notons I_B (resp. I_C), le centre du cercle inscrit à $\triangle ABP$ (resp. $\triangle ACP$). Montrez que, lorsque P varie, le cercle circonscrit à $\triangle PI_BI_C$ passe par un point fixe.

Problème 46 (1st Olympiad of the Metropolises, Problem 4)
: Un quadrilatère convexe $ABCD$ a 2 angles droits en A et C Un point E sur l'extension du segment $[AD]$ au-delà de D est tel que $A\hat{B}E = A\hat{D}C$ Le point K est le symétrique de C par rapport à A Prouver que $A\hat{D}B = A\hat{K}E$

Problème 47 (MEMO 2014)
Soit ABC, un triangle avec $AB < AC$ et notons I, le centre de son cercle inscrit. Soit E le point de $[AC]$ tel que $AE = AB$ et G le point de EI tel que $\widehat{GBI} = \widehat{ABC}$ (avec G, I et E dans ce sens sur la droite). Montrer que la perpendiculaire à AC passant par E, la droite AI et la bissectrice de $\angle BGI$ sont concourantes.

Problème 48 (Test 1 groupe D du Stage Animath 2016, Problème 2)
: 2 cercles T_1 et T_2 se coupent en A et B. Une tangente commune extérieure touche T_1 en P et T_2 en Q. Les tangentes en P et Q au cercle circonscrit APQ s'intersectent en X. Soit C le symétrique de B par rapport à PQ. Montrer que A, C, X sont alignés.

Problème 49
Soit ABC, un triangle acutangle. Notons H_A, H_B et H_C, les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement ainsi que H, l'orthocentre. Montrer que

$$\frac{AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB}{AH \cdot AH_A + BH \cdot BH_B + CH \cdot CH_C} \leq 2$$

Problème 50 (IMO 1998, Problem 5)
: Soit un triangle ABC dont le centre du cercle inscrit est I. Le cercle inscrit est tangent en K, L, M aux côtés $[BC], [CA], [AB]$ respectivement. La parallèle à MK passant par B rencontre les droites LM et LK en R et S respectivement. Prouver que l'angle $R\hat{I}S$ est acutangle.

Problème 51
On considère K et L deux points d'un cercle C de centre O. Soit A un point de la droite (KL) en dehors du cercle. On note P et Q les points de contact des tangentes à C issues de A. Soit M le milieu de $[PQ]$. Montrer que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{MLO}$ sont égaux. J'espère qu'il n'est pas déjà présent sur le site

Problème 53
Soit ABC un triangle, P le pied de la bissectrice issue de B et I le centre du cercle inscrit. Supposons que $AP + AB = CB$. Prouver que $\triangle API$ est isocèle. (Brazilian MO 2006)

Problème 54 (29th Iberoamerican Mathematical Olympiad, Problem 5)
Soit un triangle acutangle ABC d'orthocentre H. Le pied de la hauteur issue de A sur BC est noté D et les milieux de $[BH]$ et $[CH]$ sont notés M et N. Les droites DM et DN recoupent les droites AB et AC en X et Y. Enfin la droite XY recoupe les droites BH et CH en P et Q. Prouver que les points P, H, Q, D sont cocyliques.

Problème 55 (Baltic Way 2004)
Soit ABC, un triangle et Ω, son cercle circonscrit. Soit $X \in [BC]$. Notons $Y \neq A$, la seconde intersection de AX et Ω. Montrer que

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geq \frac{4}{BC}$$

Problème 56 (Estonian Math Competitions 2014/2015, IMO TST, S9)
L'orthocentre d'un triangle acutangle ABC est noté H. Soient K et P les milieux des segments $[BC]$ et $[AH]$ respectivement. La bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC oupe la droite KP en D. Prouver que $HD \perp AD$.

Problème 57 (USAMO 1999)
Soit $ABCD$ un trapèze isocèle (avec $AB \parallel CD$). Le cercle inscrit au triangle $\triangle BCD$ touche CD en E. Soit F, le point sur la bissectrice (intérieure) de $\angle DAC$ tel que $EF \perp CD$. Notons G, la seconde intersection du cercle circonscrit au triangle $\triangle AFC$ avec la droite CD. Montrer que le triangle $\triangle AFG$ est isocèle.

Problème 58
Soit ABC dont les côtés sont de longueurs a, b, c et M un point quelconque du plan. Prouver que

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{MA^2 + MB^2 + MC^2}$$

Quand a-t-on égalité?

Problème 59
Soit $ABCD$, un quadrilatère orthodiagonal ($AC \perp BD$). Notons $E = AC \cap BD$. Montrer que les symétriques de E par rapport à AB, BC, CD et DA respectivement sont cocycliques.

Problème 60
Soit un triangle ABC et D le pied de la bissectrice issue de A Prouver que $AB.AC = DB.DC + AD^2$

Problème 61 (Baltic Way 2014)
Soit $ABCD$ un carré inscrit dans un cercle ω et P un point sur le petit arc AB de ω. Notons $CP \cap BD = R$ et $DP \cap AC = S$. Montrer que les triangles ARB et DSR ont même aire.

Problème 62 (2017 Hong Kong TST, Problem 1)
Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice issue de A sur BC. La perpendiculaire de B sur AD intersecte le cercle circonscrit de ABD en B et E. Prouver que E, A et le centre O du cercle ABC sont alignés.

Problème 63 (Sharygin 2016 Grade 9)
Soient I, O, les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC. Notons d, la droite passant par I et perpendiculaire à OI. Notons $X = BC \cap d$ et Y, l'intersection de la bissectrice extérieur issue de A et d. Trouver le ratio $YI : XI$.

Problème 63' (Butterfly theorem)
Soit M le milieu d'une corde arbitraire $[PQ]$ d'un cercle Γ. Quatre autres cordes sont tracées : $[AB]$ et $[CD]$ passant par M, puis les cordes $[AD]$ et $[BC]$, ces deux dernières intersectant la corde $[PQ]$ en X et Y respectivement. Alors $MX = MY$.

Problème 64 (China Girls Math Olympiad 2006, Problem 2)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales s'intersectent en O Les triangles OAD et OBC s'intersectent en O et M La droite MO coupe les cercles OAB et OCD en T et S respectivement. Prouver que M est le milieu de $[ST]$

Problème 65 (USAJMO 2011)
Soit le cercle ω, $A, B, C, D, E \in \omega$ et P à l'extérieur de ω. Supposons que PB et PD soient tangents à ω, que A, C, P soient alignés et que $AC \parallel DE$. Montrer que BE passe par le milieu de $[AC]$.

Problème 66 (China Math Girls Olympiad 2010, Problem 6)
Dans le triangle acutangle ABC, $AC < AB$. Soit M le milieu de de $[BC]$. La bissectrice extérieure de $B\hat{A}C$ rencontre BC en P. Les points K et F sont sur PA tels que $MF \perp BC, MK \perp PA$. Prouver que $BC^2 = 4PF.AK$

Problème 67
Soient ABC un triangle et ω son A-cercle exinscrit. Un droite d parallèle à BC coupe les côtés AB AC aux points D et E respectivement. Notons ω' le cercle inscrit au triangle ADE. La tangente issue de D à ω (différente de AB) et celle issue de E à ω (différente de AC) s'intersectent en P. La tangente issue de B à ω' (différente de AB) et celle issue de C à ω' (différente de AC) s'intersectent en Q. Prouver que, indépendamment du choix de d, il existe un point fixe par lequel PQ passe toujours.

Problème 68 (Argentinian TST 2011, Problem 3)
Soit un trapèze $ABCD$ tq $BC \parallel AD, AD > BC$ et $AB \nparallel CD$. Soit M l'intersection de AC et BD. Soit ω_1 le cercle passant par M et tangent à AD en A et ω_2 celui passant par M et tangent à AD en D. Soit S l'intersection des droites AB et CD, X la seconde intersection de ω_1 et AS et Y la seconde intersection de ω_2 et DS et O le centre du cercle ASD. Prouver que $SO \perp XY$

Problème 69 (All-Russian 2016)
Soient ABC, un triangle et AM_A, BM_B et CM_C, ses médianes. Notons également G, son centre de gravité. On définit Ω_A, le cercle passant par le milieu de $[AG]$, M_B et M_C. On définit similairement Ω_B et Ω_C. Montrer que Ω_A, Ω_B et Ω_C concourent en un point.

Problème 70 (Estonian TST 1996, Problem 2)
Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle, α, β, γ leurs angles correspondants et r le rayon du cercle inscrit. Prouver

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma \geq 9r$$

Problème 71
Dans un triangle ABC, notons H_A (resp. H_B et H_C), le pied de la hauteur issue de A (resp. B et C). Montrer que "le triangle formé par les orthocentres de $\triangle AH_BH_C$, $\triangle BH_CH_A$ et $\triangle CH_AH_B$" est isométrique à $\triangle H_AH_BH_C$.

Problème 72(IMO
2003) Problem 4. $ABCD$ is cyclic. The feet of the perpendicular from D to the lines AB, BC, CA are P, Q, R respectively. Show that the angle bisectors of ABC and CDA meet on AC iff $RP = RQ$

Problème 73 (Stage Animath 2016, test 1 du groupe D, exercice 3)
Normalement, je n'ai aps fait d'erreur dans l'énoncé: Soit A, B, C, D quatre points dans le plan et soit E le point d'intersection des droites (AD) et (BC) et F le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Montrer que les quatre points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $FA \cdot FB + EA \cdot ED = EF^2$.

Problème 74 (ITAMO 2016, Problem 5)
Soit ABC un triangle et D le centre de son cercle ex-inscrit par rapport à A. Ce cercle est tangent à AB et AC en E et F respectivement. Soit J l'intersection de BD et EF Prouver que $B\hat{J}C = 90^o$

Problème 75 (Junior Olympiad of Malaysia Shortlist 2015 G2)
Soit ABC, un triangle et M, le milieu de $[BC]$. Notons I_B et I_C, les centres des cercles incrits aux triangles ABM et ACM respectivment. Montrer que la seconde intersection des cercles circonscrits aux triangle ABI_B et ACI_C se situe sur la droite AM.

Problème 77
Deux cercles ω_1 et ω_2 sont tangents intérieurement en A avec ω_1 à l'intérieur de ω_2 Soit B sur ω_1. Une tangente à ce cercle en B intersecte l'autre en X et Y. Prouver que $X\hat{A}B = B\hat{A}Y$ PS: un problème a été posté sur le marathon de combinatoire.

Problème 78
Soit ABC un triangle et soit D un point du segment $[BC]$ autre que B et C. Le cercle circonscrit au triangle ABD coupe $[AC]$ en E et le cercle circonscrit à ADC coupe $[AB]$ en F. Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC). Les droites $(A'C)$ et (DE) ont pour intersection P et les droites $(A'B)$ et (DF) ont pour intersection Q. Enfin, le droites (BP) et (CQ) se coupent X. Montrer que $X \in (AD)$.

Problème 79(IMO
2010, Problem 2) Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC et Γ son cercle circonscrit. La droite AI intersecte Γ en A et D. Soit E un point de l'arc BDC et F un point sur BC tels que $B\hat{A}F = C\hat{A}E \in]0, \frac{B\hat{A}C}{2}[$ Finalement, soit G le milieu de $[IF]$. Prouver que les droites DG et EI sont concourantes sur Γ

Problème 80
Soit ABC un triangle et h_B et h_C les hauteurs issues de B et C respectivement. Soient P_1, P_2 sur h_C et Q_1, Q_2 sur h_B tels que $A\hat{P_1}B = A\hat{P_2}B = A\hat{Q_1}C = A\hat{Q_2}C = 90^o$ Prouver que les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont cocycliques. En bonus déterminer le centre de ce cercle.

Problème 81
Soit ABC un triangle d'orthocentre H . (BH) coupe (AC) en D. (CH) coupe (AB) en E et (DE) coupe (BC) en F La droite perpendiculaire à (AF) passant par H coupe (BC) en M Monntrer que M est le milieu de $[BC]$

Problème 82
Soient ABC un triangle et O sur la médiatrice de $[BC]$ Un cercle de centre O coupe AB en P et Q et AC en P' et Q'. Les droites QQ' et PP' coupent la droite BC en K et L respectivement. Montrer que $BK = CL$

Problème 83 (Cours d'inégalités géométriques de M. Macq en groupe A à Wépion, et une autre compétition sans importance)
Soit $ABCDEF$ un hexagone tel que $AB = BC = CD$ et $DE = EF = FA$ et $B\hat{C}D = E\hat{F}A = 60°$ Soit G et H intérieurs à $ABCDEF$ tels que $B\hat{G}A = D\hat{H}E = 120°$. Prouver que $|AG| + |BG| + |GH| + |EH| + |DH| \geq |CF|$

Problème 84
Soit ABC un triangle acutangle, D et E les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement, et M le milieu de BC. La droite AM coupe à nouveau le cercle circonscrit à ADE en P, et le cercle circonscrit à ABC en Q. Montrer que $MP = MQ$

Problème 85 (inventé pour l'occasion)
Soit ABC un triangle tel que $C\hat{A}B < 2A\hat{B}C, C\hat{A}B < 2B\hat{C}A$ et P le milieu de l'arc BC de son cercle circonscrit ne contenant pas A. La droite BP intersecte AC en D et la droite CP intersecte AB en E. Prouver que $AB.AE.CD = AC.AD.BE$.

Problème de
Fagnano)

Problème 87 (EGMO 2017 Problem 1)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $D\hat{A}B = B\hat{C}D = 90^o, A\hat{B}C > C\hat{D}A$. Soient Q, R sur $[BC], [CD]$ respectivement tels que QR intersecte AB et AD en P et S respectivement et $PQ = RS$. Soient M et N les milieux de $[BD]$ et $[QR]$ respectivement. Prouver que le quadrilatère A, M, N, C est cyclique.

Problème 88
, Brazil 2013 #5 Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et H son orthocentre soit D l' intersection de BH etAC et E l' intersection deCH et AB. Le cercle circonscrit à ADE coupe le cercle circonscrit à ABC en $F \neq A$. Prove que les bissectrices de $\angle BFC$ et $\angle BHC$ se coupent en BC.

Problème 89 (Polish MO 2017)
Soit $\triangle ABC$, un triangle et P, Q, deux points sur les segments $[AB]$, $[AC]$ respectivement tels que $|BP| = |CQ|$. Notons R, l'intersection de BQ et CP. Les cercles circonscrits aux triangles BPR et CQR s'intersectent en $S \neq R$. Montrer que S appartient à la bissectrice de l'angle $\angle BAC$.

Problème 90 (Polish MO 2014 Problem 6)
Dans un triangle acutangle ABC, D est le pied de la hauteur issue de A et M et N sont ses projetés orthogonaux sur AB et AC respectivement. MN et AD intersecte le cercle ABC en (resp.) P, Q et A, R. Prouver que D est le centre du cercle inscrit à PQR.

Problème 91
Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soient E et F les centres respectifs des cercles inscrits aux triangles ACD et ABD. Soit ω le cercle circonscrit au triangle DEF et X le point d'intersection de (BE) et (CF). (BE) et (BF) recoupent ω en P et Q respectivement. $(CE$ et (CF) le recoupent en R et S. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits à PQX et RSX. Montrer que Y appartient à (AD).

Problème 92 (Sharygin Geometry Olympiad 2016)
Soient ABC et $A'B'C'$, deux triangles partageant les mêmes cercles inscrit et circonscrit. Soit P, un point intérieur aux deux triangles. Montrer que la somme des distances entre P et les côtés du triangle ABC est égal à la somme des distances entre P et les côtés du triangle $A'B'C'$.

Problème 93
Soit PHR un triangle acutangle et Γ sont cercle circonscrit. Soit I le point de contact du cercle $H-$exinscrit au triangle PHR avec le segment $[PR]$. Un cercle ω est tangent aux côtés $[HP]$ et $[HR]$ du triangle PHR et tangent intérieurement à Γ en E. Montrer que $\widehat{PHI} = \widehat{RHE}$.

Problème 94
Montrer que le cercle d'Appolonius est bien un cercle. Plus sérieusement, étant donnés 2 points B, C, prouver que le lieu géométrique des points M tels que $\dfrac{MB}{MC} = k, k \in \mathbb{R}_{\not 1}^{+}$ est un cercle.

Problème 95
Soit ABC un triangle non aplati et D le pied de la bissectrice intérieure à $\widehat{BAC}$. Le cercle inscrit à ABD est tangent à $(AB), (BD), (DA)$ respectivement en Z, Y, X. Le cercle A-exinscrit (je ne sais pas trop si ça se dit) à ADC est tangent à $(AD), (DC), (AC)$ respectivement en X', Y', Z'. Montrer que X', Z, Y d'une part et $XY'Z'$ d'autre part sont alignés.

Problème 96 (Netherlands TST 06/03/2015 Problem 4)
Dans un triangle ABC, D est l'intersection de la bissectrice intérieure de $B\hat{A}C$ avec BC.Soit P la seconde intersection de la bissectrice extérieure de $B\hat{A}C$ avec le cercle ABC. Un cercle passant par A et P intersecte le segment $[BP]$ en E et le segement $[CP]$ en F. Prouver que $D\hat{E}P = D\hat{F}P$

Problème 97 (BXMO 2009/SL 2008#G2)
Soit $ABCD$ un trapèze de bases AB et CD, soit E un point sur la droite (BC) hors du segment $[BC]$ tel que le segment $[AE]$ coupe le segment $[CD]$. On suppose qu'il existe un point F à l'intérieur du segment $[AD]$ tel que $\widehat{EAD} = \widehat{CBF}$. On note I le point d'intersection des droites (CD) et (EF) et J celui des droites (AB) et (EF). Soit K le milieu du segment $[EF]$ et admettons que K soit distinct de I et de J Montrer que K appartient au cercle circonscrit au triangle ABI si et seulement si il appartient au cercle circonscrit au triangle CDJ.

Problème 98
4 cercles sont tangeant entre eux deux à deux (chaque cercle est tangent à deux autres cercles exactement) montrer que les points de tangence sont cocycliques

Problème 99 (Balkanic MO 2017 Problem 2)
Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < AC$ et ω son cercle circonscrit. Soient t_B et t_C les tangentes à ω en B et C respectivement et L leur intersection. La parallèle à AC passant par B coupe t_C en D et celle à AB passant par AC coupe t_B en E. Le cercle BDC coupe AC en T et le cercle BEC coupe AB en S. Prouver que ST, AL et BC sont concourantes. (Qui aura l'honneur de mettre le problème 100?!)

Problème 100 (EGMO 2016)
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et X le point d'intersection de ses diagonales (AC) et (BD). soient $C_1; D_1; M$ les milieux respectifs des segments $[CX]; [DX]; [CD]$. Les droites AD_1 et BC_1 se coupent en Y et la droite (MY) coupe respectivement les diagonales AC et BD en des points distincts E et F. Prouver que la droite (XY) est tangente au cercle circonscrit à EFX. J'espère qu'on ne l'a pas déjà fait ;-)

Problème 101 (Sharygin Geometry Olympiad 2016 Problem 2)
Soit ABC un triangle, I son incenter, I_A son A-excenter, A_1 le pied de la hauteur issue de A et A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle ABC. Prouver que $I\hat{A_1}I_A = I\hat{A'}I_A$

Problème 102
Soit ABC un triangle non-isocèle, O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit et S la deuxième intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit. On suppose que S appartient à la médiatrice de $[OI]$. Prouver que $\widehat{BAC}$ est le deuxième plus grand angle de ABC.

Problème 103 (Brazil MO 1986)
Une boule de billiard roule (sans frottement $\equiv$ indéfiniment) sur une table circulaire. Lorsque que la boule tape le bord, elle rebondit selon les lois habituelles de la réflexion. Montrer que si elle passe 3 fois par un point de la table, elle y passera une infinité de fois.

Problème 104 (Greece TST 2017)
Soit ABC un triangle acutangle scalène. Notons ω et Γ, ses cercles inscrit et circonscrit respectivement. Notons également D, E, F, les intersections de ω avec BC, CA et AB respectivement. Soient A', B', C', les points de Γ tels que les quadrilatères $AEFA', BDFB', CDEC'$ soient inscriptibles. Prouver que DA', EB', FC' sont concourantes.

Problème 105 (All-Russian 2012.3 G9)
Soit $ABCD$ un parallélogramme avec $D\hat{A}B$ obtus. Soient H le projeté orthogonal de A sur BC et K la seconde intersection de la C-médiane dans le triangle ABC avec le cercle ABC. Prouver que D, C, H, K sont cocycliques.

Problème 106
Dans le triangle $\triangle ABC$, les points D et E sont sur les côtés AC et AB respectivement. Les droites BD et CE se coupe en un point P de la bissectrice de l'angle $\angle BAC$. Montrer que le quadrilatère $ADPE$ possède un cercle inscrit si et seulement si $AB = AC$. L'ancien problème, un peu plus compliqué :

Problème 107 (APMO 2017.2)
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$. La bissectrice intérieure de $B\hat{A}C$ intersecte le cercle ABC une seconde fois en D. La bissectrice extérieure de $B\hat{A}C$ intersecte la médiatrice de $[AC]$ en Z. Prouver que le milieu de $[AB]$ appartient au cercle ADZ.

Problème 108 (test de mi-parcours du groupe D du stage Animath 2013.)
Soit ABC un triangle, Γ_C et Γ_A ses cercles exinscrits opposés aux sommets A et C. Soit ω un cercle passant par B, tangent extérieurement à Γ_C et Γ_A, en intersectant (AC) en deux points E et F. Montrer que $\widehat{ABE} = \widehat{FBC}$.

Problème 108
bis : Si de plus $\angle ABC = 90°$, montrer que le centre de ω se situe sur $[BE] \cup [BF]$.

Problème 109
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique (non croisé). Soit O_1 sur CD tel que le cercle ABO_1 est tangent à CD, O_2 sur DA tq BCO_2 tangent DA, O_3 sur AB tq CDO_3 tangent AB et O_4 sur BC tq DAO_4 tangent BC. Prouver que $O_1O_3 \perp O_2O_4$

Problème 110
Soit Γ, un cercle passant par deux points A et B. Notons N, un point sur Γ équidistant de A et B. Prenons C sur l'arc $\widehat{BN}$ de Γ ne contenant pas A. Notons D, la projection orthogonale de N sur AC. Montrer que
$$AD = DC + CB$$

Problème 111 (Netherlands TST 2012)
Soit Γ le cercle circonscrit du triangle acutangle ABC. La bissectrice intérieure de $A\hat{B}C$ coupe AC en B_1 et Γ une seconde fois en P. La perpendiculaire à BC passant par B_1 coupe le petit arc BC de Γ en K. La perpendiculaire à AK passant par B coupe AC en L. Prouver que L, K, P sont alignés.

Problème 112
RMM 2015#4: Soit ABC un triangle et D le point de contact du cercle inscrit de ABC avec $[BC]$. Soient J_b et J_c les centres des cercles inscrits des triangles ABD et ACD. Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle AJ_bJ_c se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Problème 113 (Greece TST 2009)
Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit. Les médiatrices des segments $[GA]$, $[GB]$ et $[GC]$ se coupent en A_1, B_1 et C_1. Montrer que O est le centre de gravité du $\triangle A_1B_1C_1$.

Problème 115
Soit un triangle ABC de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à BC, CA, AB en D, E, F respectivement. Soit P du même côté de EF que A tq $P\hat{E}F = A\hat{B}C$ et $P\hat{F}E = A\hat{C}B$ Montrer que P, I, D sont alignés.

Problème 116 (Russian MO 2010)
Soit ABC, un triangle de périmètre 4. Deux points X et Y se trouve sur les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ respectivement de telle sorte que $AX = AY = 1$. Les segments $[BC]$ et $[XY]$ se coupent en un point M. Prouver que l'un des triangles ABM et ACM a un périmètre de longueur 2.

Problème 80/118 (USAMO 1990)
Soit ABC un triangle acutangle. Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe la hauteur CC' en deux points M et N. Le cercle de diamètre $[AC]$ coupe la hauteur BB' en deux points P et Q. Montrer que M, N, P et Q sont cocycliques.

Problème 119
SL 2003#G2: 3 points distincts A, B et C sont fixés sur une droite dans cet ordre. Soit Γ un cercle passant par A et C mais dont le centre ne se trouve pas sur (AC). Soit P le point d'intersection des tangentes à Γ en A et C. Supposons que Γ rencontre le segment $[PB]$ en Q. Prouver que l'intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{AQC}$ et de la droite (AC) ne dépend pas du choix de Γ.

Problème 120 (Canada MO 1990)
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible et P l'intersection de ses diagonales. Notons W, X, Y et Z les projections de P sur les droites AB, BC, CD et DA respectivement. Montrer que $WX + YZ = XY + WZ$.

Problème 122
Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H_Z, le pied de la hauteur issue de Z (pour $Z = A, B, C$). Montrer qu'il existe un point $P \neq O$ tel que P se situe sur le cercle (ZH_ZO) pour $Z = A, B, C$.

Problème 123 (All-Russian 2006)
Soit ABC un triangle, B_1 et C_1 les pieds des bissectrices respectifs à B, C. Soit I le centre du cercle inscrit. La droite B_1C_1 recoupe le cercle ABC en M, N. Prouver que le rayon du cercle MIN vaut deux fois celui du cercle ABC

Problème 19/124 (Costa Rica MO 2006 / ISL 2005 - G1)
Soit ABC un triangle satisfaisant $AC + BC = 3 \cdot AB$. Notons ω le cercle inscrit à ABC, I son centre et D, E ses points de contact avec BC et CA respectivement. Soient K et L les réflexions de D et E par rapport à I. Prouver que les points A, B, K, L sont cocyliques.

Problème 125
Soient ABC un triangle isocèle en A, D le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de D sur AC et M le milieu de $[DH]$. Prouver que $AM \perp BH$

Problème 126 (BAMO 2008)
Soit D un point se situant à l'intérieur d'un triangle ABC. Notons A_1, B_1 et C_1, les secondes inersections des droites AD, BD et CD avec les cercles circonscrits à BDC, CDA et ADB respectivement. Montrer que

$$\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BB_1} + \frac{CD}{CC_1} = 1$$

Problème 127
Deux paraboles dont les axes de symétrie sont perpendiculaires se coupent en quatre points. Montrer que ces quatre points sont cocycliques. (Note : calculs autorisés) Question subsidiaire : observe-t-on le même phénomène pour deux ellipses ? Et deux hyperboles ?

Problème 128
Soit ABC, un triangle équilatéral et $M \in [BC]$. Notons K et L, les projections de M sur AB et CA respectivement ainsi que O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que OM coupe $[KL]$ en son milieu.

Problème 129
Les points A,B et C se situent sur la circonférence du cercle unité. De plus il est connu que AB est un diamètre du cercle et

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{3}{4}$$

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ intersecte le cercle au point D. Déterminer la longueur de $|AD|$.

Problème 130 (Polish MO Final 2010)
Soient ABC un triangle et D, E, deux points sur le côté $[BC]$ tels que $BD < BE$. Notons p_1 et p_2, les périmètres des triangles ABC et ADE respectivement. Montrer que

$$p_1 > p_2 + 2 \cdot \min\{BD, EC\}$$

Problème 131
Soit ABC un triangle et I son incentre. Son incircle est tangent en D, E, F à BC, CA, AB respectivement. EF et BC se coupent en T. Prouver que $IT \perp AD$

Problème 132
EGMO 2014#P2 Soient D et E des points appartenant respectivement aux intérieurs des côtes $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC, tels que $DB = BC = CE$. Soient F le point d'intersection des droites (CD) et (BE), I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, H l'orthocentre du triangle DEF et M me milieu de l'arc BAC du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que I, H, M sont alignés

Problème (133 (ELMO 2017)
åppåremment) : Soit ABC un triangle d'orthocentre H et soit M le milieu de $[BC]$. Soient P et Q, deux points distincts sur le cercle de diamètre $[AH]$, différents de A, tels que M, P et Q soient alignés. Prouver que l'orthocentre du $\triangle APQ$ se situe sur le cercle circonscrit du triangle $\triangle ABC$.

Problème 133
EDIT: on peut garder le problème de Corentin.

Problème 134
BMO 2016#3: Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique avec $AB < CD$. Les diagonales s'intersectent en F et les droites (AD) et (BC) se coupent en E. Soit K et L les projections orthogonales de F sur AD et BC respectivement et soient M, S, T les milieux de EF, CF et DF respectivement. Montrer que la seconde intersection des cercles circonscrits aux triangles MKT et MLS se trouvent sur CD.

Problème 135 (2014 ELMO Shortlist)
Soit $ABCD$ un quadrilatére inscrit dans un cercle ω. Notons $E = AB \cap CD$ et $F = AD \cap BC$. Soient ω_1, ω_2, les cercles circonscrits aux triangles AEF, CEF, respectivement. Finalement, soient G et H, les secondes intersections de ω avec ω_1 et ω_2 respectivement. Montrer que AC, BD et GH sont concourantes.

Problème 136
Soit un triangle ABC. Les carrés $BCDE$ et $ACFG$ sont construits respectivement sur les côtés BC et AC du triangles ABC, de sorte que ces carrés soient extérieurs à ce triangle. Les droites AE et BG se croise au point I. Montrer que CI est perpendiculaire à AB

Problème 137 (USA TSTST 2017)
Soit ABC un triangle de circumcercle Γ, de circumcentre O et d'orthocentre H. Supposons que $AB \neq AC$ et $\angle A \neq 90°$. Soient M et N les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, et E et F les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. Soit P l'intersection de MN avec la tangente à Γ passant par A. Soit Q la seconde intersection de Γ avec le circumcercle du triangle $\triangle AEF$. Finalement, soit R l'intersection des droites AQ et EF. Prouver que $PR \perp OH$. Un schéma pour la réflexion. ;-)

Problème 138
Soient ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$, I le centre de son cercle inscrit et E, F les points de tangence respectifs du cercle inscrit à CA, AB. La droite perpendiculaire à AM passant par I coupe la droite EF en T. Prouver que $AT \parallel BC$

Problème 139 (All-Russian MO 2015)
Soit ABC un triangle, ω son circumcercle, G son centre de gravité et H le pied de la hauteur issue de A. Soit X, l'intersection de la demi-droite $[GH)$ avec le cercle ω. Montrer que le cercle (BHX) est tangent à la droite (AB).

Problème 140
Soit ABC un triangle avec $AB > AC$. Soit D le point sur (AB) tel que $DB = DC$ et M le milieu de $[AC]$. La parallèle à (BC) passant par D intersecte la droite (BM) en K. Montrer que $\widehat{KCD} = \widehat{DAC}$.

Problème 141 (Sharygin 2009)
Soient ABC un triangle, ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Notons E et F, les points de contact de ω avec CA et AB respectivement. Soient M et N, les projections orthogonales de B et C sur CI et BI respectivement. Montrer que E, F, M et N sont alignés.

Problème 142
Dans un triangle ABC avec $\widehat{BAC} \neq 60°$, on définit I_B et I_C comme les centres des cercles B-exinscrits et C-exinscrits respectivement. Soit B' le symétrique de B par rapport à AC et C' le symétrique de C par rapport à AB. Soit P l'intersection de I_CB' et I_BC'. Soient P_A, P_B et P_C les symétriques de P par rapports aux côtes BC, CA, AB respectivement. Montrer que les droites AP_A, BP_B et CP_C sont concourantes.

Problème 143
Soit $ABCD$, un tétraèdre de l'espace euclidien. Prouver que

$$AB \cdot CD + AC \cdot BD > AD \cdot BC.$$

Problème 144
Prouver que le produit des rayons des trois cercles exinscrits à un triangle donné n'excède pas $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ fois le produit des longueurs des côtés du triangle. Déterminer quand l'égalité a lieu.

Problème 145 (Sharygin 2012)
Soit ABC, un triangle et M, le milieu du segment $[BC]$. Notons P, la projection orthogonale de B sur la médiatrice du segment $[AC]$. Supposons que MP et AB s'intersectent en Q. Montrer que BPQ est isocèle en Q.

Problème 146
Le parallélogramme $ABCD$ est tel que $AB = a, AD = 1, \widehat{BAD} = \alpha$, et le triangle ABD est acutangle. Prouver que les cercles de rayons 1 et de centres A, B, C, D couvrent entièrement le parallélogramme si et seulement si

$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

Problème 147
Reconstruisez à la règle et au compas le triangle ABC à partir du sommet A, du milieu du côté $[BC]$ et de son orthocentre.

Problème 148
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $2\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180$ Soit E le pied de la bissectrice intérieure de A dans BAD, la médiatrice de $[AE]$ coupe (CB) et (CD) en X et Y respectivement, montrer que $ACXY$ cocycliques.

Problème 149 (HK TST2 2018 Problem 1)
Soit ABC un triangle isocèle en A. Un cercle Γ se trouvant à l'extérieur du triangle est tangent à AC en C. Le point D est sur Γ de sorte que le cercle ABD est tangent intérieurement à Γ. Le segment $[AD]$ intersecte Γ une seconde fois en E. Prouver que BE est tangent à Γ

Problème 150
Soit ABC un triangle, K son cercle circonscrit et K_a son cercle A-exinscrit, les deux tangentes communes à K et K_a coupent (BC) en P et Q. Montrer que $\widehat{PAC} = \widehat{QAB}$

Problème 151
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Soient P et Q les points qui sont respectivement sur les droites DA et DC mais pas sur les demi-droites $DA]$ et $DC]$, tels que $|AP| = |BC|$ et $|CQ| = |AB|$. Soit M le mileu de le milieu de $[PQ]$. Montrer que les droites MA et MC sont perpendiculaires.

Problème 152 (First France TST 2018, Problem 2)
Soient deux cercles ω_1, ω_2 tangents en T tels que ω_1 soit à l'intérieur de ω_2.Soient M, N deux points distincts sur ω_1 différents de T. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes de ω_2 passant respectivement par M et N. On suppose que les segments $[AC], [BD]$ et $[MN]$ sont concourants en K. Montrer que TK est la bissectrice de $\widehat{MTN}$

Problème 153
ABC un triangle. On construit les carrés $ABDE$ et $BCFG$ extérieurs au triangle ABC. Montrer que les milieux de $[AC]$, $[CG]$, $[GD]$, $[DA]$ sont les sommets d'un carré.

Problème 154
Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit Γ, un cercle passant par B et C de centre Q. Notons D et E, les secondes intersections de Γ avec AB et AC respectivement. Soit P, la seconde intersection du cercle (ADE) avec Ω. Montrer que $AP \perp QP$.

Problème 155 (Stage Montpellier 2014, test 1 groupe D)
Soit Γ un demi-cercle $[PQ]$. Une perpendiculaire à (PQ) coupe Γ et $[PQ]$ en A et B. Un cercle ω est tangent à Γ, $[PB]$, $[AB]$ en C,D, E. Montrer que (AD) est la bissectrice de $\widehat{PAB}$.

Problème 156
Soient C_1 et C_2 deux cercles tangents extérieurement en T, de rayons 1 et 2 respectivement. Une tangente commune extérieure touche C_1 et C_2 en A et B respectivement. Calculer AB.

Problème 157
On se donne un cercle Ω, un diamètre $[AB]$ de ce cercle et un point $P \notin \Omega \cup AB$. Décrire une construction de la perpendiculaire à AB passant par P à la règle uniquement. (Bonus : Laisser tomber $P \notin AB$.)

Problème 158
Soient deux cercles ω_1, ω_2 de centres respectifs O_1, O_2 tangents extérieurement en T avec $O_1T < O_2T$ et AB une tangente extérieure avec $A \in \omega_1$ et $B \in \omega_2$ Cette tangente intersecte O_1O_2 en C. La droite BT intersecte la médiatrice de $[CT]$ en D. La droite O_2D intersecte la tangente intérieure des deux cercles en N et la droite AT en P. Enfin soit X le symétrique de B par rapport à O_1O_2 Prouver que le quadrilatère NTO_2X est cyclique.

Problème 159
Soit ABC un triangle rectangle en C, H le pied de la hauteur issue de C.Soit E le pied de la bissectrice issue de C dans le triangle ACH. Soit F le point sur (CH) tel que (BF) est parallèle à (CE). Soit K le point d'intersection de FA et de la parallèle à (AC) passant par H. Montrer que K est sur (EC).

Problème 160 (Sharygin Finals 2017 - Grade 8)
Soit ABC un triangle et D, E et F les pieds de médianes issues de A, B et C respectivement. Notons X et Y, les réflexions de D par rapport à BE et CF respectivement. Montrer que les cercles (CFX) et (BEY) sont concentriques.

Problème 161 (Romanian Masters 2018 Problem 1)
Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique et P un point sur $]AB[$. La diagonale AC intersecte $[DP]$ en Q. La droite passant par P parallèle à CD intersecte CB en K. La droite passant par Q parallèle à BD intersecte CB en L. Prouver que les cercles BKP et CLQ sont tangents.

Problème 162 (Japan MO Finals 2017)
Soit ABC un triangle avec O le centre de son cercle circonscrit. Soient D, E et F les pieds des altitudes de A, B et C, respectivement, et soit M le milieu de BC. AD et EF se croisent en X, AO et BC se croisent en Y, et soit Z le milieu de XY. Montrer que A, Z, M sont alignés.

Problème 163 (Iranian 2016 MO 3rd Round, G1 Day 2)
Soit ABC un triangle et ω un cercle passant par B et C. Ce cercle intersecte AB en E et AC en F. Les droites BF et CE intersecte le cercle ABC une seconde fois en B' et C' respectivement. Soit $A' \in BC$ tel que $\widehat{C'A'B} = \widehat{B'A'C}$. Prouver que quel que soit le choix de ω, le cercle $A'B'C'$ passe par un même point.

Problème 164 (Greece MO 2018)
Soit ABC, un triangle tel que $AB < AC < BC$ et Γ son cercle circonscrit. Soient D et E, deux points sur les petits arcs AC et AB de Γ respectivement. Notons $K = BD \cap CE$ et L la seconde intersection des cercles (BKE) et (CKD). Montrer que A, K et L sont alignés si et seulement si K se trouve sur la symédiane issue de A.

Problème 165 (G4, 2009)
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et soient $E = AC \cap BD$, $F = AD \cap BC$. Les milieux de AB et CD sont G et H respectivement. Montrer que EF est tangent au cercle passant par E, G et H.

Problème 166 (G4 2016)
: Soit ABC un triangle tel que $AB = AC \neq BC$ et soit I son centre de cercle inscrit . La droite BI coupe AC en D, et la droite passante par D perpendiculaire à AC coupe AI en E. Montrer que la reflection de I par rapport à AC appartient à (BDE).

Problème 167 (Donné à Wépion)
Soit ABC un triangle et γ son cercle inscrit de centre I. On note d_A(respectivement d_B, d_C) les perpendiculaires à AI (respectivement BI, CI) passant par I. On note A' (respectivement B', C') leurs intersections avec t, une tangente à γ. Montrez que AA', BB' et CC' sont concourantes.

Problème 168 (British MO 2018, Round 2)
Soit ABC un triangle et M le milieu de AC. Considérons le cercle tangent en B à BC et passant par M et notons P sa seconde intersection avec AB. Montrer que $AB \cdot BP = 2BM^2$.

Problème 169 (IMO Shortlist 2002)
Soit B un point sur S_1, un cercle, et A un point différent de B sur la tangente en B à S_1. Soit C un point du plan pas sur S_1 tel que AC coupe S_1 en 2 points distincts. Soit S_2 le cercle tangent à AC en C et à S_1 en D, de façon à ce que S_2 soit de l'autre côté de B par rapport à AC. Montrer que le centre du cercle circonscrit à BCD appartient au cercle circonscrit à ABC

Problème 170 (IMO Shortlist 2008)
Soit $ABCD$un quadrilatère convexe et soit P et Q des points dans $ABCD$ tel que $PQDA$ et $QPBC$ sont cycliques. Supposons q'il existe un point $E \in (PQ)$ tel que $\angle PAE = \angle QDE$ et $\angle PBE = \angle QCE$. Montrer que $ABCD$ est cyclique.

Problème 171 (IMO Shortlist 1996)
Soient O et H le centre circonscrit et l'orthocentre d'un triangle acutangle ABC tel que $BC > CA$. Soit F le pied de la hauteur CH. La perpendiculaire à OF au point F intersecte AC en P. Montrer que $\angle FHP = \angle BAC$

Problème 172 (Iran 2015)
Considérons le triangle ABC . les points D, E situés dans les cotés de AB, AC tel que $BDEC$ est un quadrilatère cyclic. Soit $P = (BE) \cap (CD)$ et H appartient à AC tel que $\angle PHA = 90°$.Soit M, N les milieux de AP, BC. Montrer que $ACD \sim MNH$.

Problème 173 (Sharygin 2013)
Soit ABC un triangle non-isocèle. Soit O le centre de son cercle circonscrit, K celui de (BCO). La hauteur issue de A dans ABC intersecte le cercle (BCO) en P. PK intersecte le cercle (ABC) en E et en F. Montrer que $EP = PA$ ou $FP = PA$

Problème 174 (2018 Caucasus Olympiad, Senior Competition)
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soient P, Q et R, des points de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ resp. tels que $AP = AR$, $BP = BQ$ et $\angle PIQ = \angle BAC$. Montrer que $AC \perp QR$.

Problème 175 (Turkey TST 2018)
Dans un non-isoscele triangle ABC, D est le milieu du segment $[BC]$. Les points E et F appartiennent à $[AC]$ et $[AB]$, respectivement, et les cercles (CDE) et (AEF) se coupent en P dans $[AD]$. La bissectrice de P dans $\triangle EFP$ coupe EF en Q. Montrer que la tangente à (AQP) en A est perpendiculaire à BC.

Problème 176 (Sharygin 2017 Grade 10 Problem 5)
Soient BB' et CC' les hauteurs issues de B et C dans un triangle ABC (avec $B' \in AC$,$C' \in AB$). Considérons deux cercles passant par A et C' et tangents à BC en P et Q. Prouver que $AB'PQ$ est cyclique.

Problème 177
Soit Γ un cercle de diamètre $[AB]$ et C un point quelconque sur Γ distinct de A et B. Soit D un point sur AC tel que $A \in [CD]$. Le point E est sur la perpendiculaire à DC passant par A et est tel que AB coupe $[DE]$ en son milieu. F est l'intersection de AC avec BE et G est l'intersection de la tangente à Γ en A avec la perpendiculaire à AC en F. Montrer que, si $\widehat{GBC} = \widehat{ABE}$, alors $|AB| = |DE|$. (c'est moi qui l'ai écrit j'espère qu'il vous plaira)

Problème 178 (Exo d'échauffement)
Soit ABC un triangle de cercle inscrit k de centre I. Les points de tangences de k aux côtés BC, CA, AB du triangle sont respectivement D, E, F. Soit M le point d'intersection de (BC) et (EF). Un cercle passant par B et C est tangent au cercle k en le point N, et le cercle circonscrit au triangle DMN recoupe (AD) en L. Montrer que I, L, M sont alignés.

Problème 179 (D'après 1st Belgian TST 2018)
Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} > 90^o$ et O le centre de son cercle circonscrit. Notons D et E les intersections des médiatrices respectives de $[AB]$ et $[AC]$ avec BC. Les cercles ABD et ACE s'intersectent une seconde fois en P. Nommons X le centre du cercle DEP. Prouver que les droites AP, BC et OX sont concourantes.

Problème 180 (Estonian TST 2016)
Soit ABC, un triangle acutangle et O, le centre de son cercle circonscrit. Notons $c_1 = (ABO)$ et $c_2 = (ACO)$ ainsi que P et Q, les points diamétralement opposés à O dans c_1 et c_2 respectivement. Soit T, l'intersection des tangentes en P (resp. Q) à c_1 (resp. c_2). Finalement, soit D la seconde intersection de AC avec c_1. Montrer que T, D et O sont alignés.

Problème 181 (Canada 2018)
Cinq points situés sans un cercle A, B, C, D, et E dans le sens horaire. Supposons $AE = DE$ et soit $P = (AC) \cap (BD)$. Soit Q un point qui appartient à la droite passante par A et B tel que A est entre B et Q et $AQ = DR$ D'une manière similaire, soit R un point qui appartient à la droite passante par C et D tel que D est entre C et R avec $DR = AP$. Montrer que PE est perpendiculaire à QR.

Problème 182 (IMO SL 1997)
Soient D, E, F les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C dans le triangle acutangle ABC. La parallèle à EF passant par D intersecte AC et AB en Q et R. On note P l'intersection de EF et de BC. Montrer que le cercle circonscrit à PQR passe par le milieu de BC

Problème 183 (Iran TST 2017)
$ABCD$ est un trapèze $AB \parallel CD$. Les diagonales s'intersectent en P. Soit ω_1 un cerle qui passe par B et tangent à AC en A. Soit ω_2 un cercle qui passe par C et tangent à BD en D. ω_3 est le cercle circonscrit de $\triangle BPC$. Montrer que le corde en commun de ω_1, ω_3 et le corde en commun de ω_2, ω_3 s'intersectent en AD.

Problème 184 (Test de Stage d'Ete Animath 2017 ou All-Russian MO 2001)
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, tangents en un point T, avec ω_1 à l'intérieur de ω_2. Soit $k \in \omega_1$ différent de T. La tangente à ω_1 en K recoupe ω_2 en A et B. Soit S le milieu de l'arc AB de ω_2 qui contient pas T. Montrer que le rayon du cercle circonscrit à (AKS) ne dépend pas de K.

Problème 185 (Italy TST 2005) Un schéma pour la lecture.
Soit Γ, un cercle de diamètre AB et ℓ une droite extérieure à Γ, perpendiculaire à AB, avec B plus proche de ℓ que A. Un point C est choisi sur $\Gamma \setminus \{A, B\}$. La droite AC intersecte ℓ en D. Soit E, un point de Γ tel que la droite DE soit tangente à Γ. Soient $\{F\} = BE \cap \ell$, $\{A, G\} = AF \cap \Gamma$ et finalement H la réflexion de G par rapport à AB. Montrer que F, C et H sont alignés.

Problème 186 (Shortlist 2014)
Soit Ω et O le cercle circonscrit et son centre de triangle acutangle ABC avec $AB > BC$. La bissectrice $\angle ABC$ coupe Ω en $M \neq B$. Soit Γ le cercle dont le diamètre BM. Les bissectrices de $\angle AOB$ et $\angle BOC$ coupent Γ en P et Q, respectivement. Le point R est choisit dans la droite PQ tel que $BR = MR$. Montrer que $BR \parallel AC$.

Problème 187 (Envoi OFM 2017)
Soit ABC un triangle. Pour un point P de (BC) donné, on note $E(P)$ et $F(P)$ les deuxièmes points d'intersection des droites (AB) et (AC) avec le cercle de diamètre $[AP]$. Soit $T(P)$ l'intersection des tangentes à ce cercle en $E(P)$ et $F(P)$. Montrer que quand P varie sur (BC), le lieu géométrique de $T(P)$ est une droite.

Problème 188 (USAMO 2008)
Soit ABC un triangle acutangle scalène. Notons M, N et P, les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ coupent la droite AM en D et E respectivement. Les droites BD et CE se coupent en F. Montrer que A, F, N et P sont cocycliques.

Problème 188'
;-)

Problème 189 (BxMO 2010)
La droite l contient trois points distincts A, B et P dans cet ordre. Soit a la perpendiculaire à l passant par A, et soit b la perpendiculaire à l passant par B. Une droite passant par P, distincte de l, coupe a en Q et b en R. La perpendiculaire à BQ passant par A coupe BQ en L et BR en T. La perpendiculaire à AR passant par B coupe AR en K et AQ en S. (a) Montrer que P, T, S sont alignés. (b) Montrer que P, K, L sont alignés.

Problème 190 (Rioplatense Olympiad 2000)
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$ et S, son pôle sud relatif à A. Notons E, le point de $[AC]$ tel que $2AE = AB + AC$ et P, la seconde intersection de SE avec le cercle (ABC). Notons finalement M et N, les milieux de $[AB]$ et $[BC]$ respectivement. Montrer que AS, BP et MN sont concourantes.

Problème 191 (EGMO 2018 Problem 5)
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Un cercle Ω est tangent à $[AB]$ et à Γ en un point se situant du même côté de AB que C. De plus la bissectrice de $\widehat{ACB}$ intersecte Ω en deux points P et Q. Montrer que $\widehat{ABP} = \widehat{QBC}$

Problème 192 (IMO SL 1997)
Soit $A_1A_2A_3$ un triangle non-isocèle de centre inscrit I. Soit $C_i, i = 1, 2, 3$, le petit cercle passant par I et tangent à A_iA_{i+1} et à A_iA_{i-1} (Les indices sont pris modulo 3). Soit $B_i, i = 1, 2, 3$, la seconde intersection de C_{i+1} et C_{i-1}. Finalement soit $D_i, i = 1, 2, 3$, les cercles passant par I, A_i et B_i. Montrer que les centres de D_1, D_2 et D_3 sont alignés.

Problème 193
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Nommons D, E et F les pieds respectifs des perpendiculaires issues de A sur BC, B sur AC et de C sur AB. La parallèle à AC passant par B intersecte EF en X. Soit M le milieu de $[AB]$. Prouver que $\widehat{ACM} = \widehat{XDB}$

Problème 194
BalkanMO 2018: $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle k et M l'intersection des diagonales. La perpendiculaire à $[AB]$ passant par M coupe $[AB]$ en E. Si (EM) est la bissectrice de $\widehat{CED}$ montrer que $[AB]$ est un diamètre de k.

Problème 195
$ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle k et M l'intersection des diagonales. La perpendiculaire à $[AB]$ passant par M coupe $[AB]$ en E. Si $[AB]$ est un diamètre de k, montrer que (EM) est la bissectrice de $\widehat{CED}$

Problème 196 (PAMO 2017)
Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Le cercle de diamètre $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit au triangle ABH en K. Montrer que le point d'intersection des droites (CK) et (BH) est le milieu du segment $[BH]$.

Problème 197
AB une corde qui n'est pas un diamètre du cercle k de centre O. T un point du segment $[OB]$. La perpendiculaire à (Ob) passant par T coupe (AB) en C et le cercle k en D et E.On note S le projété orthogonal de T sur AB. Montrer que $AS \cdot BC = TE \cdot TD$.

Problème 198 (EGMO 2015)
soit H l'orthocentre et G le centre de gravité d'un triangle acutangle ABC avec $AB \neq AC$. AG intersecte le cercle circonscrit à ABC en A et en P. Soit P' la réflexion de P par BC. Montrez que $\angle CAB = 60$ si et seulement si $HG = GP'$

Problème 199 (PAMO 2018, Problème 4)
Etant donné un triangle ABC, soit D le point d'intersection de la droite passant par A perpendiculaire à (AB), et de la droite passant par B perpendiculaire à (BC). Soit P un point à l'intérieur du triangle. Montrer que les points D, A, P et B sont cocycliques si et seulement si $\angle BAP = \angle CBP$.

Problème 200
Soit $ABCD$ un quadrilatère (non croisé) tel que $\widehat{ABC} = 90^o$, $\widehat{BCD} = 100^o$ et $AB = CD$. Notons S l'intersection des médiatrices de $[AD]$ et $[BC]$. Déterminer l'amplitude de $\widehat{ASD}$.

Problème 202
Soit $\triangle ABC$ un triangle equilateral. Soient D, E deux points sur AC tels que $\widehat{ABD} = \widehat{DBE} = \widehat{EBC} = 20^o$. Soit M le milieu de BD. Si on note par P l'intersection de CM et BE, calculer $\widehat{BDP}$.

Problème 203

Problème 204
Etant donnés trois cercles distincts du même rayon R passant par un point commun O. Soient A, B, C les trois autres points d'intersection (qui sont différents de O). Montrer que le rayon du cercle (ABC) est aussi R.

Problème 205
Théorème du cornet de glace Soit ABC un triangle, soit I son cercle inscrit et I_A son cercle exinscrit opposé à A. Soit D le point d'intersection de I avec (BC) Soit D_1 le point d'intersection de I_A avec (BC) Soit A' le milieu de $[BC]$ Montrer que A' est le milieu de D_1D.

Problème 206
Soit $\triangle ABC$ un triangle, Soit D le point d'intersection de son cercle inscrit avec (BC). Montrer que le centre du cercle inscrit, le milieu de BC et le milieu de AD sont alignés.

Problème 207
Soit $ABCD$ et $BEFG$ deux carrés Soit H le milieu de $[CG]$ Montrer que (HB) est perpendiculaire à (AE)

Problème 208
Un point P est situé à l'extérieur d'un cercle Ω. On note A et B les points de contact des deux tangentes à Ω passant par P. Soit M le milieu de $[BP]$. La droite (AM) recoupe le cercle en C, et la droite (PC) recoupe le cercle au point D. Montrer que les droites (AD) et (BP) sont parallèles.

Problème 209
On prend un point I et un triangle équilatéral ABC. Montrer qu'il est toujours possible de former un triangle ayant des côtés de longueur IA, IB, IC.

Problème 210
Soit ABC un triangle et H son orthocentre. On prend un point P sur $[BC]$ et on note D le projeté orthogonal sur (AP) de H. La parallèle à (BC) passant par D recoupe (AB) en E et (AC) en F, le cercle circonscrit à ADB en X et celui circonscrit à ADC en Y. Enfin, soit Z l'intersection de (XB) et (YC). Montrer que $ZE = ZF$ SSI P est le milieu de $[BC]$.

Problème 211 (KoMäL B.4977)
Soit ABC un triangle rectangle en A. Notons D, E et F les points de tangence de son cercle inscrit avec BC, CA et AB respectivement. Finalement, soit X l'orthocentre de DEF. Montrer que $AX \perp BC$.

Problème 212 (IMO 2009, P4)
Soit ABC un triangle isocèle en A. Les bisectrices de $\angle CAB$ et $\angle ABC$ croisent les côtés BC et CA en D et E, respectivement. Soit K le centre du cercle inscrit à ABC. Supposons que $\angle BEK = 45$. Trouvez toutes les valeurs possibles pour $\angle CAB$