Problème #5327

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction telle que

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que f est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que $-C \leq f(x) \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Supposons k point fixe de f :

$$f(k) = k \iff f(f(k)) = f(k) \iff f(k) = 0 \iff k = 0$$

$$\boxed{f(k) = k \iff k = 0}$$

En posant $y = f(x)$:

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Puis en posant $y = 0$:

$$f(f(x)) = -f(f(x)) \iff \boxed{f(f(x)) = 0}$$

Donc :

$$\boxed{f(f(x) - y) = f(y)}$$

Avec $x = 0$ on obtient :

$$\boxed{f(-y) = f(y)}$$

D'où f paire.

Donc en général :

$$f(f(x) + y) = f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Ou bien

$$f(f(x) - f(y)) = 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$$