De l'Egalité des Nombres Inégaux

Schpotzermann & Wienerschnitzel

Edité par Laurent Beeckmans (Ecole Supérieure d'Informatique, Rue Royale 67, B-1000 Bruxelles) et Didier Gonze (Humboldt Universität zu Berlin, Invalidenstraße 43, D-10115 Berlin)

Résumé

L'objet de cet article magistral est de convaincre le lecteur que, contrairement à ce que l'on a encore trop tendance à penser de nos jours, tous les nombres sont égaux devant les lois mathémathiques. Petit à petit, il apparaîtra au cours de la lecture que des nombres *a priori* aussi divers que 0, 1, -2, $\sqrt{3}$,... qui à première vue semblent complètement différents sont en réalité rigoureusement égaux, ni plus, ni moins.

Notre exposé suivra l'ordre chronologique du développement de la fascinante théorie de l'égalité des nombres inégaux. Mais trêve de bavardages, commençons d'emblée avec le *Résultat Historique de Wurstbrötchen*, qui fut le catalyseur d'une série de découvertes stupéfiantes qui comptent aujourd'hui parmi les bases fondamentales des mathématiques contemporaines.

Résultat Historique de Wurstbrötchen (1901):

$$\boxed{0 = 1}$$

Démonstration. Considérons la série

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Publié dans *Mathématiques amusantes*, Cahiers de l'IREM de Bruxelles, 2005, no 2. pp. 83-102.

Groupons par paires:

$$\begin{aligned} S &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 0+0+0+\cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre ~~paire~~ part:

$$\begin{aligned} S &= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots \\ &= 1-0-0-0-\cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

et donc $0 = 1$.

CQFD

La suite ne se fit pas attendre, car à peine un peu plus que pas tout à fait trois années plus tard, Schnaps démontra un théorème étonnant:

Théorème Etonnant de Schnaps (1904):

$$\boxed{1 = 2}$$

Démonstration. Qui ne connaît la célèbre formule du fameux bi-nôme de l'illustre Newton?

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

(où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (où $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ (où $\prod = 3.14\ldots(!)$))). Lorsque $n = 0$, nous avons $(a+b)^0 = 1$, $a^0 = 1$, $b^0 = 1$ et tous les autres termes disparaissent. Donc:

$$\begin{aligned} 1 &= 1+0+0+\cdots+0+0+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

CQFD

Cinq années s'écoulèrent avant qu'Apfelstrudel ne parvînt à démontrer le théorème réciproque, à savoir, $2 = 1$. Il faut néanmoins avouer que sa démonstration repose en majeure partie sur le *Délicieux Lemme d'Applepie*, que nous avons soigneusement traduit de l'anglais.

DÉLICIEUX LEMME D'APPLEPIE (printemps 1909): Lettons nous consider une function checkant la followante condition:

$$f(2x) = \frac{1}{2} f(x) \qquad \text{pourtoutixe}$$

~~Th~~ Alors:

$$\int_1^2 f(x)\, dx = 0$$

DÉMONSTRATION. Lettons nous evaluate $\int_0^2 f(x)\, dx$. En writant $x = 2y$, nous obtainons successivelyment:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\, dx &= 2\int_0^1 f(2y)\, dy \\
&= 2\int_0^1 f(2x)\, dx \quad \text{en renamant la variable} \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{2} f(x)\, dx \quad \text{by la condition above} \\
&= \int_0^1 f(x)\, dx \qquad \text{car les two two se killent}
\end{aligned}$$

Hence, en substractant le membre de droight à gauche:

$$\int_0^2 f(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

ce qui livre le résultat announcé:

$$\int_1^2 f(x)\, dx = 0$$

CQFD

Nous pouvons à présent démontrer le *Théorème Réciproque d'Apfelstrudel*:

THÉORÈME RÉCIPROQUE D'APFELSTRUDEL (Automne 1909):

$$\boxed{2 = 1}$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

Cette fonction peut s'introduire dans le lemme d'Applepie car

$$f(2x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x} = \frac{1}{2}f(x)$$

Lorsqu'elle en ressort, elle fournit $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0$, c'est-à-dire $\log 2 = 0$. En exponentialisant, il faut bien se rendre à l'évidence: $2 = 1$.

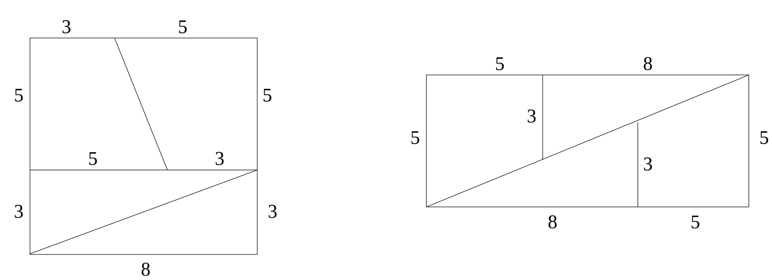
CQFD

Intrigué par les travaux de Wurstbrötchen, Schnaps et Apfelstrudel, un certain Schnuller voulut y ajouter son grain de sel et espérait faire sensation en démontrant géométriquement que 64 était égal à 65 et pas à un schouilla de plus, ni de moins. La force de Schnuller a été de se contenter d'une feuille din A4 blanche, d'un bic bleu et d'une latte millimètrée. Un soir d'été, en quelques traits, il fit surgir une réalité jusqu'alors insoupçonnée:

RÉALITÉ JUSQU'ALORS INSOUPÇONNÉE DE SCHNULLER (été 1916):

$$\boxed{64 = 65}$$

DÉMONSTRATION. Voici une reproduction fidèle des figures originales que Schnuller avait dessinées sur sa feuille din A4:



On y distingue nettement 2 formes très célèbres: d'un côté, 1 carré tout ce qu'il y a de plus carré, de côté 8 et par conséquent, d'aire $8^2 = 64$, et de l'autre, un rectangle tout ce qu'il y a de plus rectangle, de dimensions 13 sur 5, c'est-à-dire d'aire $13.5 = 65$. En prenant une loupe vous apercevrez que Schnuller a partagé chacune des 2 formes en 2 triangles et autant de trapèzes selon les mesures indiquées. Puisque ces 4 pièces sont complètement identiques et qu'elles permettent de construire le puzzle de gauche *as well as* le puzzle de droite, on voit sans ambiguïté que $64 = 65$.

CQFD

Avec sa *Réalité Jusqu'alors Insoupçonnée*, Schnuller espérait décrocher la lune, le premier prix de la *Große Königlische Mathematische Gesellschaft*, mais le trio Wurstbrötchen – Schnaps – Apfelstrudel avait frappé bien plus fort que lui. Tandis que le trio remporta le trip lunaire grâce à son essai de généralisation dont il est question cinq lignes plus loin, Schnuller dû se contenter du deuxième prix qui n'était autre qu'une sucette à la framboise. Cependant, il n'était pas trop déçu car la framboise était son parfum préféré. Une fois qu'il eut digéré sa sucette, Schnuller retomba très vite dans l'oubli.

Grand Théorème de Wurstbrötchen, Schnaps et Apfelstrudel (automne 1916):

$$\boxed{\text{pourtoutenne} \in \mathbf{N},\ n = n + 1}$$

Ce théorème maintenant célèbre fut d'abord posé comme conjecture à la fin de l'année 1909 par Apfelstrudel, qui communiqua le problème à Schnaps. Deux ans plus tard, celui-ci téléphona à Wurstbrötchen dans l'espoir d'obtenir quelques conseils pour entamer la démonstration, mais malheureusement, ce fut Frau Wurstbrötchen qui décrocha et expliqua que son mari était sorti promener le chien. Mais Schnaps ne se laissa pas abattre; il en avait vu d'autres et, sous les encouragements d'Apfelstrudel, il téléphona à nouveau en 1913 et cette fois-ci, ce fut Herr Wurstbrötchen en personne qui décrocha. Après maints pourparlers et moultes discussions animées, les trois mathématiciens arrivèrent finalement à se fixer un rendez-vous en mars 1916 à Baden-Baden. C'est alors qu'au prix d'une semaine de dur labeur et d'intensives recherches, ils réussirent à lever la conjecture par une astucieuse démonstration par induction. Nous laissons au lecteur la joie d'essayer de redémontrer ce résultat.

Pendant presque une dizaine d'années, les mathématiciens pensaient avoir tout découvert dans le domaine fascinant des égalités des nombres inégaux. Schnaps conjectura même, au cours d'un dîner bien arosé à la Wahrscheinlichkeitsrechnungstube que seuls les naturels consécutifs pouvaient être égaux. Cette conjecture fut réfutée en 1925 par Zwiebelsuppe qui prouva le résultat suivant, très surprenant, et qui relança le débat:

Résultat Très Surprenant de Zwiebelsuppe (1925):

$$\boxed{14 = 16}$$

Démonstration. Quiconque ayant quelques connaissances pratiques du calcul différentiel et intégral sera familier avec ce qui va suivre. Lorsqu'on dérive un produit de deux fonctions, on obtient généralement deux termes: le premier issu de la dérivée de la première fonction et le second issu de la dérivée de la seconde fonction. Ce mécanisme explique pourquoi la dérivée seconde de ce même produit de deux fonctions livre habituellement quatre termes: le premier terme provenant de la dérivée de la première fonction du premier terme de la dérivée première, le deuxième terme provenant de la dérivée de la seconde fonction du premier terme de la dérivée première, le troisième terme provenant de la dérivée de la première fonction du second terme de la dérivée première et le quatrième terme provenant de la dérivée de la seconde fonction du second terme de la dérivée première. Mais là où se situe le miracle, c'est que si l'on examine de plus près les deuxième et troisième termes, on s'aperçoit que ces deux-ci sont toujours exactement identiquement rigoureusement égaux! Tout-à-fait pareils! Dingue!

Nous ne pouvons nous empêcher de vous montrer cela sur un exemple. Dérivons le produit de $\log x$ et $\sin x$:

$$\begin{aligned}(\log x \sin x)' &= (\log x)' \sin x + \log x (\sin x)' \\ &= \frac{1}{x} \sin x + \log x \cos x\end{aligned}$$

Redérivons:

$$\begin{aligned}(\log x \sin x)'' &= \left(\frac{1}{x} \sin x\right)' + (\log x \cos x)' \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)' \sin x + \frac{1}{x}(\sin x)' + (\log x)' \cos x + \log x (\cos x)' \\ &= -\frac{1}{x^2} \sin x + \frac{1}{x} \cos x + \frac{1}{x} \cos x - \log x \sin x\end{aligned}$$

Comme annoncé, les termes centraux sont très précisément identiques. (Parce que c'est vous, nous vous en donnons la démonstration entre parenthèses:

$$(fg)'' = ((fg)')' = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg''$$

Comme vous le voyez, les deuxième et troisième termes se ressemblent comme deux gouttes d'H_2O. (En examinant de près, on voit dans les deux cas qu'il s'agit d'un f suivi d'un $'$ suivi d'un g et encore suivi d'un $'$). Refermons la parenthèse.)

Mais revenons en à la démonstration du résultat très surprenant de Zwiebelsuppe. Dérivons deux fois la fonction $x^7 e^{x^2}$:

$$(x^7 e^{x^2})' = 7x^6 e^{x^2} + 2x^8 e^{x^2}$$

$$(x^7e^{x^2})'' = 42x^5e^{x^2} + 14x^7e^{x^2} + 16x^7e^{x^2} + 4x^9e^{x^2}$$

Par ce qui précède, il succède que les deux termes centraux sont identiques, donc:

$$14x^7e^{x^2} = 16x^7e^{x^2} \qquad \text{pourtoutixe}$$

et fatalement:

$$14 = 16$$

CQFD

Ce *Résultat Très Surprenant* fut couronné du grand prix annuel offert par la *Bayerisches Zahlengesellschaft*, ce qui permit à Zwiebelsuppe de se payer un Giant Choucroute-Burger et l'encouragea à poursuivre ses très surprenantes recherches. En 1936, il présenta au cours d'une conférence mémorable au Congrès des Mathématiciens d'Oberbayern le résultat connu sous le nom du *Grand Théorème de Zwiebelsuppe* (qu'il dédia à sa fille Martha à l'occasion de ses fiançailles). Nous n'en donnons pas la démonstration, fort difficile, et faisant appel à des concepts qui sortent de la portée de notre ouvrage. Toutefois, nous conseillons au lecteur interressé de se reporter à [6].

Grand Théorème de Zwiebelsuppe (1936):

$$\boxed{\text{pourtoutemme, pourtoutenne} \in \mathbf{N},\ m = n}$$

L'égalité de tous les nombres naturels était enfin démontrée! Le monde scientifique qui pensait cette fois avoir épuisé le chapitre des égalités des nombres inégaux n'en était en fait qu'au début de ses surprises! Il allait en effet être fortement ébranlé lorqu'en 1949 entra en scène notre collègue Schinkenspeck, alors au début de sa carrière. Celui-ci publia un résultat qui établissait pour la première fois une relation stupéfiante entre deux entiers de signes opposés.

Relation Stupéfiante de Schinkenspeck (1949):

$$\boxed{1 = -1}$$

Démonstration. Considérons l'équation trigonométrique

$$\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{tg} 3\theta = 0 \tag{1}$$

qui se laisse aussi écrire:

$$\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{tg}(\theta + 2\theta) = 0$$

La tangente d'une somme étant égale au quotient de la somme des tangentes par le produit des tangentes soustrait de l'unité, nous obtenons:

$$\operatorname{cotg}\theta + \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg} 2\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 2\theta} = 0$$

Ceci impose:

$$(1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 2\theta)\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg} 2\theta = 0$$

que l'on réarrange comme suit:

$$\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{tg} 2\theta + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg} 2\theta = 0$$

ou mieux:

$$\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{tg}\theta = 0$$

En polypliant par $\operatorname{tg}\theta$:

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = 0$$

et d'où donc:

$$\operatorname{tg}^2\theta = -1 \tag{2}$$

Ainsi, si θ est solution de (1), alors il vérifie (2). Par exemple, prenons $\theta = \frac{\pi}{4}$. On a bien

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = 1 - 1 = 0$$

Donc, par (2), $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} = -1$, c'est-à-dire $1 = -1$. C.Q.F.D.

A partir de ce résultat, la théorie sur l'égalité des nombres inégaux a évolué de façon fulgurante. Cette même année 1949, Schinkenspeck démontra au cours d'une croisière sur le Rhin l'égalité de tous les nombres entiers, positifs et négatifs et Pumpernickel (qui habitait encore au numéro 97 de la Ungeradeprimzahlstraße) prouva quant à lui dans un petit corollaire l'égalité de tous les rationnels, se basant sur le surprenant résultat de Zwiebelsuppe.

Petit Corollaire de Pumpernickel-Zwiebelsuppe (1949):

$$\boxed{\text{pourtoupé, pourtouku} \in \mathbf{Q},\ p = q}$$

Démonstration. Supposons d'abord pour commencer que p et q sont positifs et soient $a, b \in \mathbf{N}$ et $c, d \in \mathbf{N}_0$ des naturels tels que $p = \frac{a}{c}$ et $q = \frac{b}{d}$. Le *Grand Théorème de Zwiebelsuppe* (voir ci-dessus) nous informe que $a = b$ et $c = d$. La multiplication membre à membre opposé de ces deux égalités livre $ad = bc$. En divisant soigneusement par c puis par d, on obtient $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, c'est-à-dire $p = q$. Supposons ensuite pour poursuivre que p et q sont négatifs; comme on vient juste de montrer dans ce cas que $-p = -q$, on est content. Supposons enfin pour terminer que p et q soient de signes différents. En mixant ce qui précède avec la *Relation Stupéfiante de Schinkenspeck* (voir entre ci-dessus et ici), tout est bien qui finit bien. CQFD.

En 1964, Sauerkraut entra dans l'histoire des égalités inégales par un véritable coup de théatre: il montra que tout nombre réel est un multiple entier de π.

VÉRITABLE COUP DE THÉATRE DE SAUERKRAUT (1964):

$$\boxed{\textit{Tout nombre réel est un multiple entier de } \pi}$$

Avant de vous dévoiler la démonstration, nous ne pouvons résister à vous résumer ici brièvement l'histoire émouvante d'Helmut Sauerkraut qui jusqu'en 1964 fut injustement méconnu dans le monde scientifique. Dernier né des dix-sept enfants d'une modeste famille originaire de Thuringe, le petit Helmut était très doué pour les mathématiques. Mais bien qu'il fut toujours premier de classe, personne ne s'intéressait à ses travaux et même pas l'instituteur de l'école du village, Herr Lumpenmann. Celui-ci, homme respecté et proche de l'âge de la retraite, était agacé par l'intérêt profond dont témoignait le petit Helmut pour les théories de Wurstbrötchen dont les finesses échappaient au vieux professeur à l'esprit étroit et conservateur.

Soutenu par le directeur de l'école, Herr Lumpenmann interdit à Helmut de divulguer la théorie des égalités inégales à ses camarades de classe sous peine de renvoi. Malgré cette mise en garde, Helmut ne pouvait contenir son enthousiasme, et continua à parler du Grand Théorème de Wurstbrötchen, Schnaps et Apfelstrudel à qui voulait bien l'entendre, et en particulier à sa petite amie Frida. Mais l'infâme Gunther Kakerlak, éternel deuxième de classe et ennemi juré d'Helmut avait mijoté un plan diabolique.

Profitant d'une brouille survenue entre Helmut et Frida, Gunther promit à celle-ci de l'aider à faire son devoir de théorie des groupes à condition qu'elle aille dénoncer Helmut. Esprit immature, et peu douée pour la théorie des groupes, Frida s'exécuta et le pauvre Helmut fut ainsi renvoyé de l'école. Bien entendu, Gunther (qui préférait Gerda) ne tint pas sa promesse et Frida ne parvint pas à terminer son devoir dans les délais, ce qui lui valu une retenue au cours de laquelle il lui fallut fournir deux applications géométriques et topologiques de l'effacement des classes de cohomologie semi-simples des groupes de Lie nilpotents, ainsi que copier cent fois "Je dois toujours remettre mon devoir à la date prévue".

Sans diplômes, Helmut survécut grâce à des petits boulots de fortune et réussit à se faire engager finalement comme garçon de courses dans la grande usine de Gunther Kakerlak.

Les années passèrent et Helmut se consolait de sa condition en animant en soirée "le quart-d'heure mathématique" sur une sombre radio locale de Basse-Saxe. Pumpernickel, qui par le plus grand des hasards passait par là, tomba par un hasard encore plus grand sur l'émission d'Helmut tandis qu'il recherchait la fréquence de Radio Topologie[1] sur son auto-

[1] 97.2 MHz à l'époque dans la région de Neuburg-an-der-Brummelbach

radio. Il fut frappé par l'intérêt des propos d'Helmut, et par une voiture qui arrivait en sens inverse. Heureusement, Pumpernickel s'en sorti avec quelques égratignures et parvint à rencontrer Helmut pour le faire connaître quelques semaines plus tard au Grand Colloque Annuel des Arithméticiens du Baden-Württemberg où il présenta sa démonstration.

Sa conférence fut brillante et agrémentée de son savoureux accent saxon qui ravit les dames de l'assemblée. Quelques jours plus tard, le nom d'Helmut Sauerkraut était sur toutes les lèvres, et ce fut le début d'une carrière internationale qui le mena à exposer sa démonstration sur les plus grandes scènes du monde, dont Carnegie Hall et la Scala de Milan. Enfin, sans plus attendre, voici la démonstration du Véritable Coup de Théatre de Sauerkraut:

Démonstration (du Véritable Coup de Théatre de Sauerkraut). Imaginons un angle θ (complexe) tel que $\operatorname{tg}\theta = i$. Attrapons un nombre réel r quelconque, hop-là! Alors, par la formule de la tangente de la somme déja mentionnée:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\theta + r) &= \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg} r}{1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} r} \\
&= \frac{i + \operatorname{tg} r}{1 - i\operatorname{tg} r} \\
&= \frac{i(1 - i\operatorname{tg} r)}{1 - i\operatorname{tg} r}
\end{aligned}$$

Comme r est réel, $1 - i\operatorname{tg} r$ ne peut être nul, donc:

$$\operatorname{tg}(\theta + r) = i = \operatorname{tg}\theta$$

Ceci nous pousse à affirmer que les valeurs dans les deux tangentes diffèrent d'un multiple entier de π et donc:

$$\theta + r = n\pi + \theta$$

(pour un certain entier $n \in \mathbf{Z}$) et en finale:

$$r = n\pi$$

(pour un entier $n \in \mathbf{Z}$ tout aussi certain).

CQFD

L'innovation suivante apparut en 1981, par un extraordinaire tour de force, dû à Schpotzermann: ce dernier parvint à établir un lien inattendu entre un nombre réel et l'infini, ce à quoi personne n'avait osé croire jusque là. L'idée de sa démonstration, très simple, lui vint au cours d'une promenade avec sa femme autour du Quadratwurzelwaldsee.

Extraordinaire Tour de Force de Schpotzermann (1981):

$$\boxed{\infty = -1}$$

Démonstration. Considérons la série des puissances de 2:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$$

Multiplions par 2. Alors:

$$\begin{aligned} 2S &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots \\ &= S - 1 \end{aligned}$$

d'où $S = -1$. Or, tout le monde sait depuis la deuxième maternelle que la série considérée diverge vers ∞ et donc $\infty = -1$.

CQFD

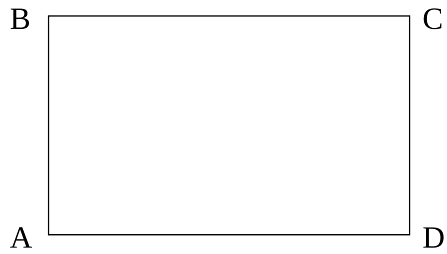
La même année, Wienerschnitzel découvrit un manuscript mystérieux contenant un résul-tat anonyme et non daté attribué à un certain Fröschschenkel. Certes, il n'est pas certain que Fröschschenkel eut été un disciple de Schnuller, mais plusieurs indices portent à le croire. D'abord, on peut remarquer en effet d'étonnantes similitudes entre les figures à quatre côtés que tout deux utilisaient dans leurs démonstrations et de plus, on a repéré des traces de framboise sur le manuscript, lui aussi en format din A4. Ce dernier contenait un apport considérable aux théories de l'égalité des nombres inégaux puisqu'il s'agissait de la généralisation de l'égalité des nombres inégaux aux angles inégaux.

Résultat anonyme et non daté:

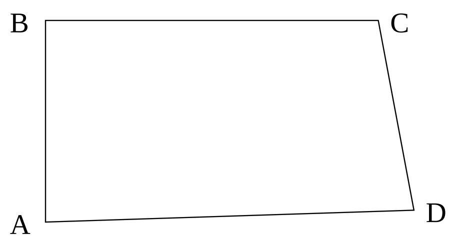
$$\boxed{\textit{Un angle droit} = \textit{un angle obtus}}$$

Démonstration. Mise en place du décor en 3 étapes:

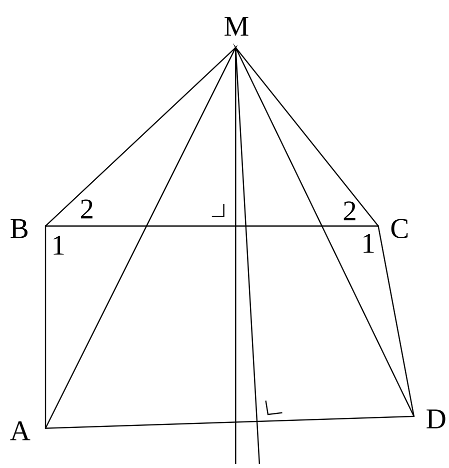
Etape 1: Dessinons un rectangle ABCD tel que $AB = DC$ et $BC = AD$:



Etape 2: Rotons un peu vers la droite le coté CD autour de C sans le dilater. D atterrit alors en D' et l'angle BCD' est donc un peu obtus. Si on joint ensuite A à D', on obtient un nouveau quadrilatère $ABCD'$ dont seul l'angle en B est droit. Pour la commodité de la démonstration, déprimons D' pour le renommer D (sans déprime):



Et... tap 3: Traçons la médiatrice de BC et celle de AD. Rappelons que la médiatrice d'un segment est la perpendiculaire élevée au milieu de ce segment et que tout point de cette médiatrice se trouve par conséquent à égale distance des 2 extrémités du segment. Soit M, l'intersection des deux médiatrices, on attrape directement $MB = MC$, $MA = MD$:



Action!

Les triangles ABM et DCM ont donc leurs 3 côtés égaux 2 à 2, et, de ce fait, ils sont égaux. Leurs 3 angles le sont aussi 2 à 2: les angles ABM et DCM, opposés aux côtés égaux MA et MD sont donc égaux: $ABM = DCM$.

Or, l'angle ABM est la somme de l'angle ABC, qui est un angle droit, et de l'angle CBM: pour simplifier, on écrira $ABM = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$. De même, l'angle DCM est la somme de l'angle DCB, et de l'angle $BCM = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$. Comme $ABM = DCM$, on peut écrire $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$.

Regardons maintenant le triangle BMC: on a vu plus haut que $MB = MC$, donc ce triangle est isocèle et les angles $\hat{B}_2$ et $\hat{C}_2$ sont égaux: $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$. Mais puisque $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$, on a $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$. Autrement dit, en termes clairs, l'angle droit ABC est égal à l'angle obtus DCB.

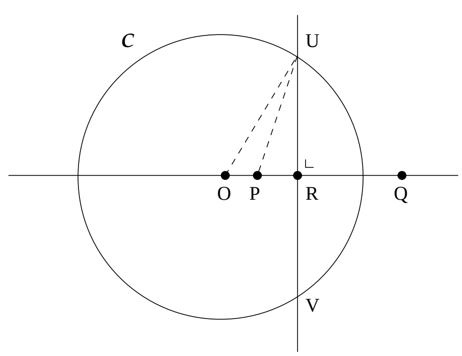
CQFD

En vue de démontrer le *Grand Théorème Fondamental, Final et Définitif de Schpotzermann & Wienerschnitzel*, qui constitue le point culminant et insurpassable de la théorie des égalités des nombres inégaux, nous allons d'abord énoncer et démontrer le *Spectaculaire Lemme de Zuckerkringel*, qui nous fut communiqué lors d'une communication téléphonique interzonale.

Spectaculaire Lemme de Zuckerkringel (1981):

$\boxed{\textit{Tout point intérieur à un cercle est sur sa circonférence}}$

Hippopotaize. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, et P un point intérieur à $\mathcal{C}$.



Taize. P est sur le cercle $\mathcal{C}$.

DAIMONSTRASSION. Prenons en considération le point Q extérieur à $\mathcal{C}$ sur la droite OP (et donc aligné avec O et P) tel que $|OP|.|OQ| = r^2$. (Le lecteur soupe-sonneux qui essaye de trouver où c'qu'est l'erreur va immédiatement se demander: "Est-ce que Q est vraiment hors du cercle?" Mais bien sûr! Comme $|OP| < r$, il faut que $|OQ| > r$ pour avoir légalité.) Soit à présent R le milieu de PQ et U, V les points où la perpendiculaire à PQ passant par R coupe $\mathcal{C}$. Nous avons alors:

$$\begin{aligned} |OP| &= |OR| - |PR| \\ |OQ| &= |OR| + |RQ| \\ &= |OR| + |PR| \end{aligned}$$

(car $|RQ| = |PR|$ puisque R est le milieu de PQ et que le milieu de PQ coupe PQ en son milieu).

Allons-y:

$$\begin{aligned} r^2 &= |OP|.|OQ| && \text{par définition de } Q \\ &= (|OR| - |PR|)(|OR| + |PR|) && \text{par ci-dessus} \\ &= |OR|^2 - |PR|^2 && \text{par une formule bien connue} \end{aligned}$$

Pythagorons[2]:

$$\begin{aligned} |OR|^2 &= |OU|^2 - |UR|^2 \\ |PR|^2 &= |PU|^2 - |UR|^2 \end{aligned}$$

En incrustant dans (3),

$$\begin{aligned} r^2 &= (|OU|^2 - |UR|^2) - (|PU|^2 - |UR|^2) \\ &= |OU|^2 - |PU|^2 \\ &= r^2 - |PU|^2 && \text{(car } U \text{ est sur le bord)} \end{aligned}$$

Ceci force $|PU|^2 = 0$, c'est-à-dire $|PU| = 0$. Ainsi $P = U$, et donc P est sur le cercle $\mathcal{C}$. Nà.

CQFD

[2] voir à ce propos le très intéressant ouvrage des mêmes auteurs, *Du Théorème de Pythagore*, à paraître très prochainement sans doute.

Et enfin, voici le grand moment que vous attendez tous (avant de pousuivre, il est vivement conseillé de bien s'asseoir, et d'envelopper votre lecture d'un fond sonore adéquat, par exemple l'ouverture de *Tannhaüser* ou la *Chevauchée des Walkyries* de Wagner):

GRAND THÉORÈME FONDAMENTAL, FINAL ET DÉFINITIF DE SCHPOTZERMANN & WIENERSCHNITZEL (1^{er} avril 1990):

$$\boxed{\text{pourtoutabé} \in \mathbf{R},\ a = b}$$

DÉMONSTRATION. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer petit a et petit b positifs et petit $a <$ petit b. Les autres cas se déduisent en faisant appel à la relation stupéfiante de Schinkenspeck (voir page 7). Soit grand A un point du plan euclidien à distance petit a de l'origine et grand B un point du plan euclidien à distance petit b de l'origine. Soit $\mathcal{C}$ le cercle centré à l'origine et de rayon petit b. Grand A étant intérieur à $\mathcal{C}$, il s'ensuit par le spectaculaire lemme de Zuckerkringel (voir page 13) que grand A appartient à $\mathcal{C}$. Comme grand B est aussi sur $\mathcal{C}$, $|OA| = |OB|$ et finalement petit $a =$ petit b (les braves petits!).

CQFD

Pour la plus grande joie du lecteur, nous donnons ci-après une autre preuve du *Grand Théorème Fondamental*. Cette nouvelle démonstration toute fraîche, due à Kartoffel (né en 1996), si elle n'est pas dénuée d'intérêt, elle ne peut évidemment rivaliser en élégance avec la splendide démonstration de Schpotzermann & Wienerschnitzel! (Vous pouvez donc enlever le disque de Wagner.)

REDÉMONSTRATION. Nous considérons l'ellipse elliptique d'équations paramétriques:

$$\begin{cases} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{cases}$$

Nous allons en calculer son aire aréolaire. Pour une valeur de θ donnée, le rayon polaire (c'est-à-dire la distance qui joint l'origine $(0,0)$ au point $(a\cos\theta, b\sin\theta)$) vaut:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

Un petit calcul d'intégrale double va dès lors nous donner l'aire aréolaire:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} r\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta + b^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right) \\
&= \frac{\pi}{2}(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

Une autre façon (quoique plus douteuse) de calculer l'aire aréolaire est déduite de la célèbre formule de Green, consistant à troquer l'intégrale de surface contre une intégrale sur le contour de l'ellipse elliptique, ce qui donne:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int\int_{\mathcal{A}} dx\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int -y\,dx + x\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(-b\sin\theta)(-a\sin\theta) + (a\cos\theta)(b\cos\theta)\right]\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

La suite est facile, il suffit de confronter les deux expressions de l'aire aréolaire de l'ellipse elliptique:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & = & \mathcal{A} \\
& \Updownarrow & \\
\frac{\pi}{2}(a^2+b^2) & = & \pi ab \\
& \Updownarrow & \\
a^2+b^2 & = & 2ab \\
& \Updownarrow & \\
a^2-2ab+b^2 & = & 0 \\
& \Updownarrow & \\
(a-b)^2 & = & 0 \\
& \Updownarrow & \\
a-b & = & 0 \\
& \Updownarrow & \\
a & = & b
\end{array}
$$

Ceci étant bien-sûr valable pourtoutabé. C.Q.F.D.

Et voilà, c'est ici que s'achève la passionnante épopée de l'égalité des nombres inégaux. Nous espérons que vous aurez pris plaisir à en parcourir les lignes et vous donnons rendez-vous dans nos prochaines publications pour de nouvelles aventures.

Bibliographie

1. *L'allemand pour le voyage*, Berlitz (1984)
2. *Dictionnaire des synonymes*, Larousse (1953)
3. N.B. Boyom, *Effacement des classes de cohomologie semi-simples des groupes de Lie nilpotents: deux applications géométriques et topologiques*, Representation theory of Lie groups and Lie algebras, 166–184, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1992)
4. Koch v. Dienst, *Deutsche Hausmannsküche*, Essen (1965)
5. E.A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics*, Cambridge (1958)
6. Schpotzermann & Wienerschnitzel, *De l'Egalité des Nombres Inégaux*, dans *Mathématiques amusantes*, Cahiers de l'IREM de Bruxelles, 2005, no 2, pp. 83-102, Presses Ferrer-Céfal.