Ядерный реактор в форме плоской пластины с отражателем

На рисунке показан схематично ядерный реактор в форме плоской пластины с отражателем


Зона 1 (активная зона)

Одногрупповое модифицированное уравнение в этой зоне имеет вид

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{K_\infty - 1}{M_{\text{аз}}^2}\varphi_1 = 0 \qquad (1)$$

где $К_\infty$ − коэффициент размножения, $М^2$ −квадрат длины миграции

Зона 2 (отражатель)

В этой зоне размножения нет $К_\infty=0$

Уравнение диффузии имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} - \frac{1}{M_{\text{отр}}^2}\varphi_2 = 0 \qquad (2)$$

На границе зон выполняются условия:

$$\varphi_1(h) = \varphi_2(h) \qquad (3)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx}|_{x=h} = \frac{d\varphi_2}{dx}|_{x=h} \qquad (4)$$

На границе реактора с вакуумом:

$$\varphi_2\ (h + d) = 0 \qquad (5)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$\varphi_1 = C_1\cos(\alpha x) + C_2\sin(\alpha x)$$

Где $\alpha^2 = \frac{К_\infty - 1}{М_{\text{аз}}^2}$ $\qquad К_\infty = 1 + \alpha^2 М_{\text{аз}}^2$

Исходя из симметрии задачи:

$$\frac{d\varphi_1}{dx}|_{x=0} = 0$$

Откуда следует $C_2 = 0$

Это значит, что в первой зоне решение имеет вид:

$$\varphi_1 = C_1 \cos(\alpha x) \tag{6}$$

Во второй зоне решение уравнения (2) есть

$$\varphi_2 = C_3 sh(\beta x) + C_4 ch(\beta x) \tag{7}$$

Где $\beta^2 = \frac{1}{M^2_{\text{отр}}}$

*<u>ПРИМЕЧАНИЕ</u> Начало координат находится в центре активной зоны.*

Используя выражения (6) и (7) на границе активной зоны и отражателя получим:

Условие на границе зон:

$$\begin{cases} C_1 cos\alpha h = C_3 sh\beta h + C_4 ch\beta h \\ -C_1 \alpha sin\alpha h = \beta C_3 ch\beta h + \beta C_4 sh\beta h \end{cases} \tag{8}$$

$0 = C_3 sh\beta(h+d) + C_4 ch\beta(h+d)$

Из последнего уравнения получим

$$C_4 = -C_3 th\beta(h+d) \tag{9}$$

Подставим (9) в первые два уравнения системы (8) и получим:

$$\begin{cases} C_1 cos\alpha h = C_3 sh\beta h - C_3 th\beta(h+d) \cdot ch\beta h \\ -C_1 \alpha sin\alpha h = \beta C_3 ch\beta h - \beta C_3 th\beta(h+d) \cdot sh\beta h \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 cos\alpha h + C_3( th\beta(h+d) ch\beta h - sh\beta h) = 0 \\ C_1 \alpha sin\alpha h + C_3(\beta ch\beta h - \beta th\beta(h+d) sh\beta h) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Из первого уравнения системы (10) находим:

$$\begin{cases} C_3 = -C_1 \frac{cos\alpha h}{th\beta(h+d) ch\beta h - sh\beta h} \\ C_4 = C_1 \frac{cos\alpha h \cdot th\beta(h+d)}{th\beta(h+d) ch\beta h - sh\beta h} \end{cases}$$

Подставляя (9) в (7), получим:

$$\varphi_2 = C_3 sh(\beta x) - C_3 th\beta(h+d) ch(\beta x) \tag{11}$$

Выражение (11) преобразуем к виду:

$$\varphi_2 = C_3 sh(\beta x) - C_3 \frac{ch(\beta x) \cdot sh\beta(h+d)}{ch\beta(h+d)}$$

Или

$$\varphi_2 = -C_3 \frac{ch(\beta x) \cdot sh\beta(h+d) - sh(\beta x) \cdot ch\beta(h+d)}{ch\beta(h+d)}$$

*<u>Воспользуемся формулой:</u>*

$$sh(a-b) = sha \cdot chb - cha \cdot shb$$

Тогда:

$$\varphi_2 = -C_3 \frac{sh\beta(h+d-x)}{ch\beta(h+d)}$$

Тогда решение уравнения во второй зоне есть:

$$\varphi_2 = \mathrm{C}_1 \frac{cos\alpha h}{th\beta(h+d)ch\beta h - sh\beta h} \frac{sh\beta(h+d-x)}{ch\beta(h+d)}$$

После применения формулы синуса разности и приведения подобных членов, получим:

$$\varphi_2 = \mathrm{C}_1 \frac{cos\alpha h \cdot sh\beta(h+d-x)}{sh\beta d} \qquad (12)$$

Условием существования единственного решения системы (10) является равенство нулю определителя системы.

$$\cos\alpha h(\beta\, ch\beta h - \beta\, th\beta(h+a) * sh\,\beta h) - \alpha \sin\alpha h\,(th(h+\alpha)\beta * ch\,\beta h - sh\,\beta h) = 0$$

Разделив на $ch\,\beta h$, получим:

$$\beta\cos\alpha h\,(1 - th\,\beta(h+d)\,th\,\beta h) - \alpha\sin\alpha h(th\,(h+d)\beta - th\,\beta h) = 0$$

$$\beta\cos\alpha h\,(1 - th\beta(h+d)th\beta h) = \alpha\sin\alpha h(th(h+d)\beta - th\,\beta h)$$

$$\frac{\beta(1 - th\beta(h+d)th\,\beta h)}{\alpha(th(h+d)\beta - th\,\beta h)} = th\,\alpha h$$

***Замечание*** $th(x \pm y) = \frac{thx \pm th\,y}{1 \pm thx * thy}$

$$\beta cos\alpha h = \alpha\, sin\alpha h * \frac{th\beta(h+d) - th\,\beta h}{1 - \ th\beta(h+d) * th\,\beta h}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} * \frac{\cos\alpha h}{\sin\alpha h} = th\,\beta d$$

$$\boldsymbol{\beta ctg\ \alpha h = \alpha th\ \beta d} \qquad \textbf{\textit{Критическое условие}} \qquad (13)$$

Задание на семинар

1. При заданном размере активной зоны, толщине отражателя и квадрата длины миграции в активной зоне и отражателе найти коэффициент размножения $k_\infty$, обеспечивающий критичность реактора.

При расчетах принять:

Для реактора РБМК $H = 700\text{см}, M^2_{\text{аз}} = 400\text{см}^2,\ M^2_{\text{отр}} = 3721, d = 100\text{см}$

Для реактора ВВЭР $H = 355\text{см}, M^2_{\text{аз}} = 64\text{см}^2,\ M^2_{\text{отр}} = 34{,}22, d = 10\text{см}$

2. Сравнить найденный коэффициент размножения с коэффициентом размножения реактора без отражателя $k_{\infty 0} = 1 + (\frac{\pi}{H})^2 M^2_{\text{аз}}$.

3. Найти распределение плотности потока нейтронов в активной зоне и отражателе.

4. Как зависит коэффициент размножения от толщины отражателя? Построить зависимость. Какова эффективная толщина отражателя?
5. На сколько процентов можно уменьшить размер активной зоны при наличии отражателя (экономия отражателя)?
6. Какой должен быть размер активной зоны реактора с отражателем, если задан коэффициент размножения в активной зоне с запасом на отравление и регулирование, например, $k_\infty = 1{,}01$

<u>Замечание 1</u>

Для определения коэффициента размножения критическое условие представлено в виде:

$$\beta ctg\ \alpha h = \alpha \cdot th\ \beta d$$

Графическим решением этого трансцендентного уравнения относительно α будет точка пересечения функций $\beta ctg\ \alpha h$ и $\alpha \cdot th\ \beta d$. Затем графическое решение уточняется итерационным методом подбора параметра в Excel.

Коэффициент размножения реактора с отражателем $k_\infty$ определяется из соотношения $k_\infty = 1 + \alpha^2 M^2$

Распределение плотности потока нейтронов будет описываться функциями:

В активной зоне:

$$\varphi_1(x) = C_1 \cos(\alpha x)$$

В отражателе:

$$\varphi_2(x) = C_1 \frac{cos\alpha h}{sh\beta d} \cdot sh\beta(h + d - x)$$

<u>Замечание 2</u>

Пусть $H_{гол}$ – размер «голого» реактора, имеющего найденный коэффициент размножения реактора с отражателем. Тогда $\alpha^2 = (\frac{\pi}{H_{гол}})^2$ , Откуда $H_{гол} = \frac{\pi}{\alpha}$ Экономия отражателя есть $\Delta H = H_{гол} - H$