Метод итерации источников

Распределение плотности потока нейтронов в реакторе в форме пластины размером H описывается в одногрупповом диффузионном приближении уравнением:

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)+\Sigma_a\varphi(x)-\frac{1}{K_{эф}}\nu_f\Sigma_f(x)\varphi(x)=0 \qquad (1)$$

$$\varphi(0)=\varphi(H)=0$$

где: $K_{эф}$ - эффективный коэффициент размножения нейтронов; $\Sigma_f(x)$- макроскопическое сечение деления; $\Sigma_a(x)$ – сечение поглощения; ν_f- среднее число нейтронов деления на один поглощенный нейтрон.

Первое слагаемое в уравнении (1) характеризует скорость убыли нейтронов за счет утечки нейтронов. Второе слагаемое характеризует скорость поглощения нейтронов. Третье слагаемое характеризует скорость генерации нейтронов в результате деления ядер

Перепишем задачу (1) в следующем виде:

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)+\Sigma_a\varphi(x)=\frac{1}{K_{эф}}\nu_f\Sigma_f(x)\varphi(x) \qquad (2)$$

$$\varphi(0)=\varphi(H)=0$$

В такой записи явно видно, задача (2) представляет собой условно критическую задачу на собственные функции и собственные значения. В результате ее решения необходимо найти $\varphi(x)$ и $K_{эф}$.

Для решения задачи используется метод итерации источников, суть которого состоит в следующем.

Задается начальное приближение для плотности потока нейтронов $\varphi^{(0)}(x)$ в правую часть уравнения (2), например, $\varphi^{(0)}(x)=Const$.т.е. задается источник $S^{(0)}(x)=\nu_f\Sigma_f(x)\varphi^{(0)}(x)$.

Затем решается численным методом уравнение (2) с известной правой частью и находится функция $\varphi^{(1)}(x)$. (При этом полагается $K_{эф}=1$)

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}\varphi^{(1)}(x)+\Sigma_a\varphi^{(1)}(x)=\nu_f\Sigma_f(x)\varphi^{(0)}(x)$$

Решение подставляется в функцию источника на следующей итерации $S^{(1)}(x)=\nu_f\Sigma_f(x)\varphi^{(1)}(x)$ и находится плотность потока нейтронов $\varphi^{(2)}$ и т.д.

В процессе итераций находится как распределение плотности потока нейтронов, так и эффективный коэффициент размножения как отношение источников:

$$K_{эф}^{j}=\frac{\int_0^H S^{(j)}(x)dx}{\int_0^H S^{(j-1)}(x)dx} \tag{3}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится соотношение:

$$K_{эф}=\left|\frac{K_{эф}^{(j)}-K_{эф}^{(j-1)}}{K_{эф}^{(j)}}\right|<\varepsilon \tag{4}$$

где ε – заранее известная малая величина. Обычно задается ε порядка 10^{-5}

Блок-схема расчета распределения плотности потока нейтронов методом итерации источников представлена на рис.1.

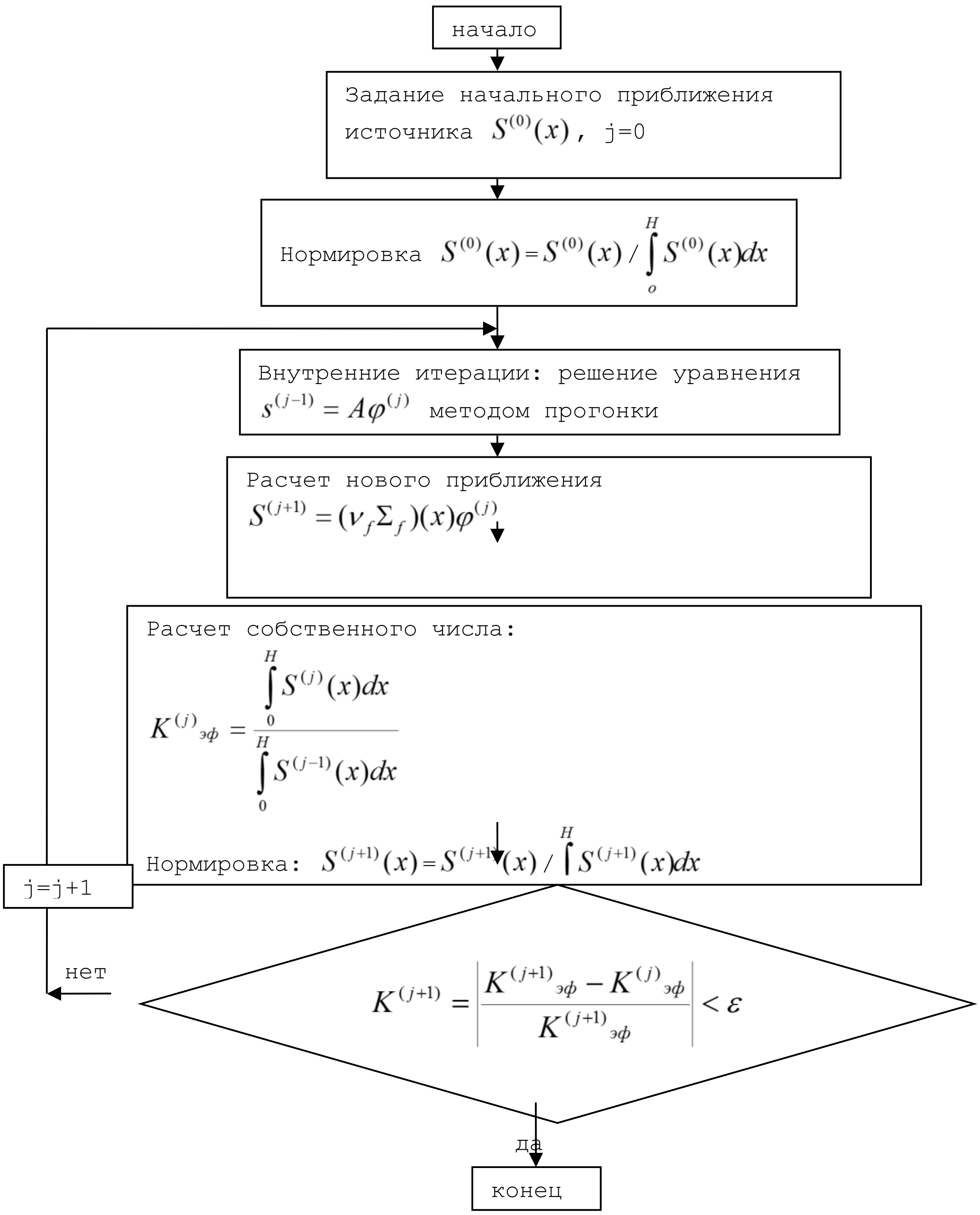

рис.1. Блок-схема алгоритма расчета распределения потока нейтронов методом итерации источников

Решение уравнения (1) на каждой i –ой итерации источника находится численно методом конечных разностей. Для этого вводится сетка, разбивающая все область изменения аргумента на N интервалов шириной h.

На рис.2 показан фрагмент введенной сетки.

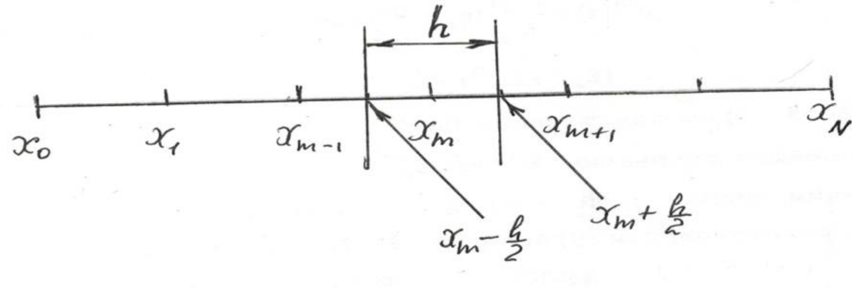

Рис.2. Фрагмент сетки.

Вместо уравнения (1) формируется его разностный аналог, т.е. вместо производных вводятся их разностная аппроксимация. Чтобы при переходе на разностный аналог обеспечить выполнение законов сохранения коэффициенты аппроксимации определяют следующим образом.

Интегрируется уравнение (1) в пределах интервала ($x_{\mathrm{m}} - 0.5h, x_{\mathrm{m}} + 0.5h$)

$$-\int_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} \frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx} \varphi(x)\, dx + \int_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} \Sigma_a \varphi(x)\, dx = \int_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} \nu_f \Sigma_f(x) \varphi(x) dx \tag{5}$$

Считая, что на интервале интегрирования величины $\varphi(x), \Sigma_a(x), \Sigma_f(x), D(x)$ постоянны, получим:

$$\int_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} \Sigma_a \varphi(x)\, dx = \Sigma_{am} \varphi_m h \tag{6}$$

$$\int_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} \nu_f \Sigma_f(x) \varphi(x) = \nu_f \Sigma_{fm} \varphi_m h \tag{7}$$

$$-\int_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} \frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx} \varphi(x)\, dx = -D(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) \Big|_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} \tag{8}$$

Воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных, представив производные в виде:

$$-D(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) \Big|_{x_m+\frac{h}{2}} = -D\left(x_m + \frac{h}{2}\right) \frac{\varphi_{m+1} - \varphi_m}{h} \tag{9}$$

$$-D(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)\Big|_{x_m-\frac{h}{2}} = -D\left(x_m-\frac{h}{2}\right)\frac{\varphi_m-\varphi_{m-1}}{h} \qquad (10)$$

Усредним коэффициенты диффузии:

$$D\left(x_m+\frac{h}{2}\right) = \frac{D_{m+1}+D_m}{2} \qquad (11)$$

$$D\left(x_m-\frac{h}{2}\right) = \frac{D_m+D_{m-1}}{2} \qquad (12)$$

Тогда

$$-D(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)\Big|_{x_m-\frac{h}{2}}^{x_m+\frac{h}{2}} = -\left(\frac{D_{m+1}+D_m}{2}\right)\frac{\varphi_{m+1}-\varphi_m}{h} + D\left(\frac{D_m+D_{m-1}}{2}\right)\frac{\varphi_m-\varphi_{m-1}}{h} \qquad (13)$$

Используя выражения (6), (7)и (13), получим:

$$-\left(\frac{D_m+D_{m-1}}{2h^2}\right)\varphi_{m-1} + \left(\frac{D_{m+1}+2D_m+D_{m-1}}{2h^2}+\Sigma_{am}\right)\varphi_m - \left(\frac{D_{m+1}+D_m}{2h^2}\right)\varphi_{m+1} =$$
$$= \nu_f\Sigma_{fm}\varphi_m \qquad (14)$$

Введем обозначения:

$$A_m = \left(\frac{D_m+D_{m-1}}{2h^2}\right) \qquad (15)$$

$$B_m = \left(\frac{D_{m+1}+2D_m+D_{m-1}}{2h^2}+\Sigma_{am}\right) \qquad (16)$$

$$C_m = \left(\frac{D_{m+1}+D_m}{2h^2}\right) \qquad (17)$$

$$S_m = \nu_f\Sigma_{fm}\varphi_m \qquad (18)$$

Получим систему конечно-разностных уравнений для внутренних точек сетки:

$$-A_m\varphi_{m-1} + B_m\varphi_m - C_m\varphi_{m+1} = S_m \qquad (19)$$

Дополним выражение (19) рекуррентными соотношениями

$$\varphi_0 - \alpha_1\varphi_1 = \beta_1 \qquad m = 0$$

$$-A_m\varphi_{m-1} + B_m\varphi_m - C_m\varphi_{m+1} = S_m \quad 1 \le m \le N$$

$$-A_N\varphi_{N-1} + B_N\varphi_N = S_N \qquad m = N$$

Возьмем первые два уравнения системы

$$\varphi_0 - \alpha_1\varphi_1 = \beta_1 \qquad\qquad m = 0$$

$$-A_1\varphi_0 + B_1\varphi_1 - C_1\varphi_2 = S_2 \quad m = 1$$

Умножив первое уравнение на A_1 и сложив со вторым уравнением, исключаем неизвестное φ_0. Второе уравнение приводится к виду:

$$\varphi_1 - \frac{C_1}{B_1 - A_1\alpha_1}\varphi_2 = \frac{A_1\beta_1 + S_1}{B_1 - A_1\alpha_1}$$

Или после введения переменных:

$$\alpha_2 = \frac{C_1}{B_1 - A_1\alpha_1}$$

$$\beta_2 = \frac{A_1\beta_1 + S_1}{B_1 - A_1\alpha_1}$$

Тогда

$$\varphi_1 = -\alpha_2\varphi_2 + \beta_2$$

Нетрудно видеть, что для $m = 1,2 \ldots$ получаются рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{m+1} = \frac{C_m}{B_m - A_m\alpha_m} \qquad (20)$$

$$\beta_{m+1} = \frac{A_m\beta_m + S_m}{B_m - A_m\alpha_m} \qquad (21)$$

Это так называемый «прямой ход прогонки».

После нахождения коэффициентов прогонки α_m и β_m определяются неизвестные φ_m «обратным ходом прогонки»

$$\varphi_m = \alpha_{m+1}\varphi_{m+1} + \beta_{m+1} \qquad\qquad m = N-1, N-2 \ldots 0$$

Необходимо учесть граничное условие на правом конце $\varphi_N = 0$ тогда

$$\varphi_{N-1} = \alpha_N\varphi_N + \beta_N = \beta_N$$

$$\varphi_{N-2} = \alpha_{N-1}\varphi_{N-1} + \beta_{N-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$\varphi_0 = \alpha_1\varphi_1 + \beta_1 = 0$$

Таким образом находится численное решение уравнения на каждой i –ой итерации

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}\varphi^{(i)}(x)+\Sigma_a\varphi^{(i)}(x)=\nu_f\Sigma_f(x)\varphi^{(i-1)}(x)$$

Отметим, что как следует из выражений (15) и (16) при $m=1$ необходимо знать D_0. Предлагается при $m=1$ положить $D_0=D_1$

Ниже на рис.3. представлена блок-схема алгоритма решения системы методом прогонки.

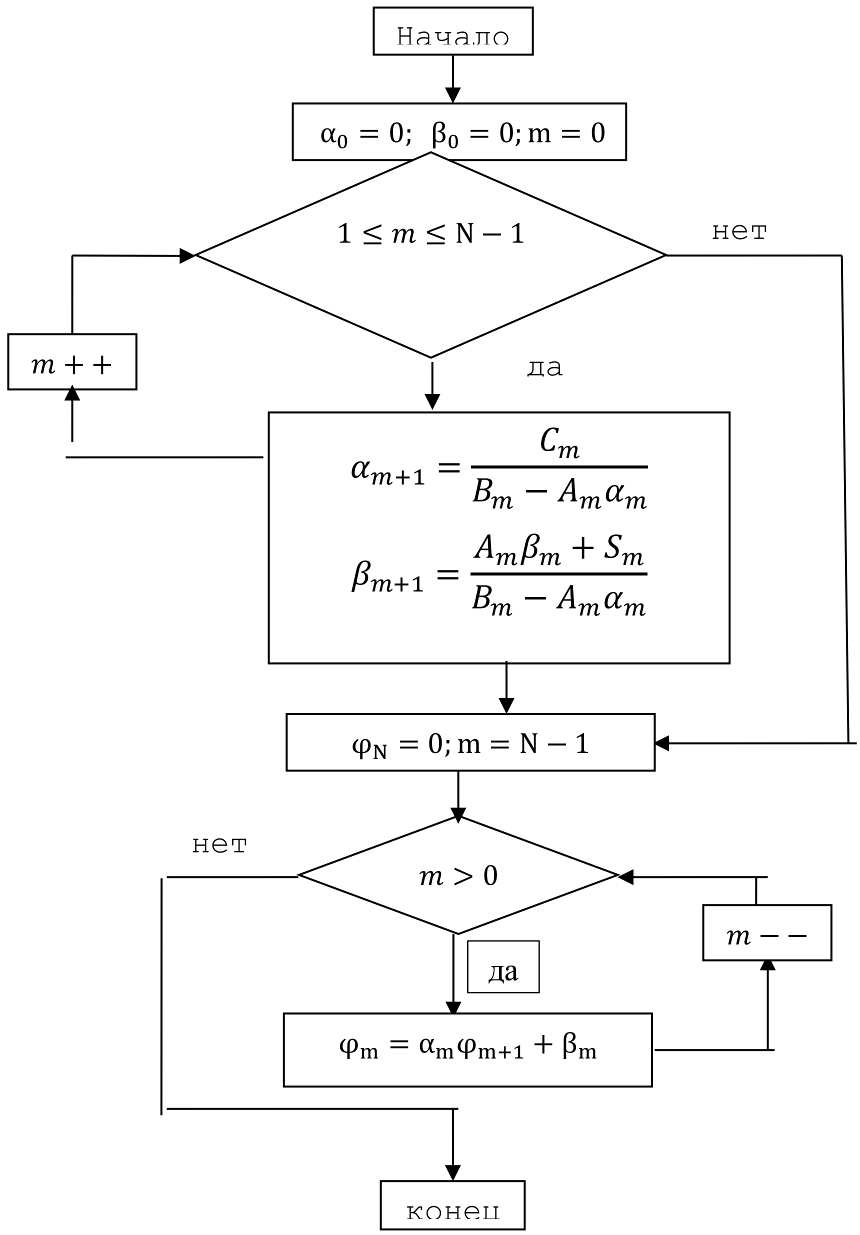

рис.3. Блок-схема алгоритма решения системы разностных уравнений методом прогонки

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретический материал:

   - метод прогонки решения алгебраических линейных уравнения с трехдиагональной матрицей;

   - метод итерации источников;

   - описание программы «Расчет реактора на EXCEL».

2. Провести численные исследования для реакторов типа РБМК и ВВЭР и получить зависимости пространственного распределения плотности потока нейтронов φ и эффективного коэффициента размножения $k_{эф}$ от распределения размножающих и поглощающих свойств активной зоны (от «загрузки» активной зоны):

   2.1. Смоделировать однородную загрузку реактора без отражателя для свежего топлива в начале кампании и выгоревшего в конце кампании;

   2.2. Смоделировать наличие отражателя;

   2.3 Смоделировать двухзонную компоновку активной зоны, содержащей центральную зону плато и периферийную зону подпора;

   2.4. Смоделировать наличие органов регулирования (например, расставить органы регулирования через 2 топливных сборки);

   2.5. Продемонстрировать «эффект интерференции стержней»;

   2.6. Смоделировать активную зону с топливом разной глубины выгорания по размеру реактора;

   2.7. Смоделировать управление «высотным полем».

3. Сформировать отчет о проведенных исследованиях с приведением иллюстративного материала.

Вопросы для самопроверки

1. Написать уравнение для плотности потока нейтронов в одногрупповом диффузионном приближении.
2. Написать разностный аналог уравнения.
3. Написать блок схему метода итерации источников.

Описание программы «Расчет реактора на EXCEL»

Входные данные:

-Тип реактора;

-h -шаг сетки в дискретной модели, см;

Число расчетных точек m =60 предустановлено

- Загрузка активной зоны