

非円形歯車の作成

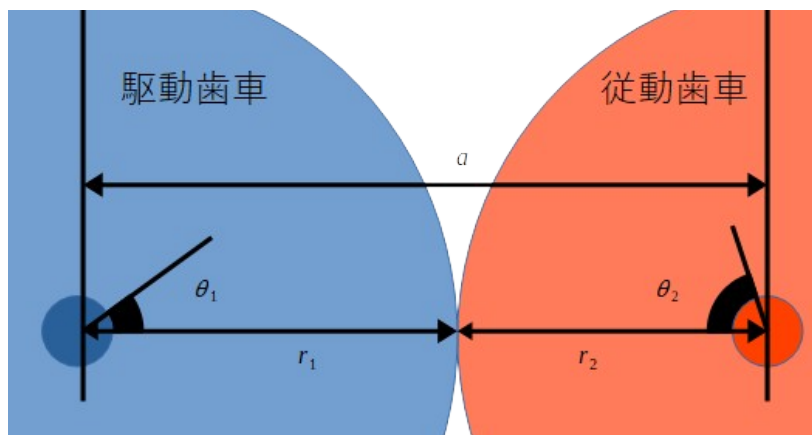
2020.07.23 奥田靖夫

非円形歯車の考え方と作成の方法を記録するよ！

摩擦車の作成

摩擦車は下記の2条件を満たす。

- ① 駆動摩擦車と従動摩擦車の中心間距離は一定
 - ② 駆動摩擦車と従動摩擦車の接触点の速度は同じ (注意：角速度は違うよ)
- まあ当たり前だね。



これを式で表すと

$$r_1 + r_2 = a \quad \dots ①$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} \cdot r_1 = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \cdot r_2 \quad \dots ②$$

式①②より

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{\partial \theta_2}{\partial t}}{\frac{\partial \theta_1}{\partial t}} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} = f(\theta) \quad \dots ③$$

なお、 $f(\theta)$ 駆動摩擦車に対する従動摩擦車の各速度比を意味する。

どんな各速度比の歯車を作りたいかによって $f(\theta)$ を設計すればよい。

ちなみに駆動摩擦車と従動摩擦車の周長を一致させるため、 $f(\theta)$ は下記の条件を満たしてね。

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 2\pi \quad \dots ④$$

駆動摩擦車と従動摩擦車は非円形なので軸からの方向によって半径が変わるが、①③から下記のように表現できる。

$$\begin{aligned}
 r_1 + r_2 &= a \\
 \Leftrightarrow r_1 \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) &= a \\
 \Leftrightarrow r_1 \left(1 + \frac{1}{f(\theta)}\right) &= a \\
 \Leftrightarrow r_1 (f(\theta) + 1) &= a \cdot f(\theta) \\
 \Leftrightarrow r_1 &= \frac{f(\theta)}{1 + f(\theta)} a
 \end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{f(\theta)}{1 + f(\theta)} a \quad \dots \textcircled{5}$$

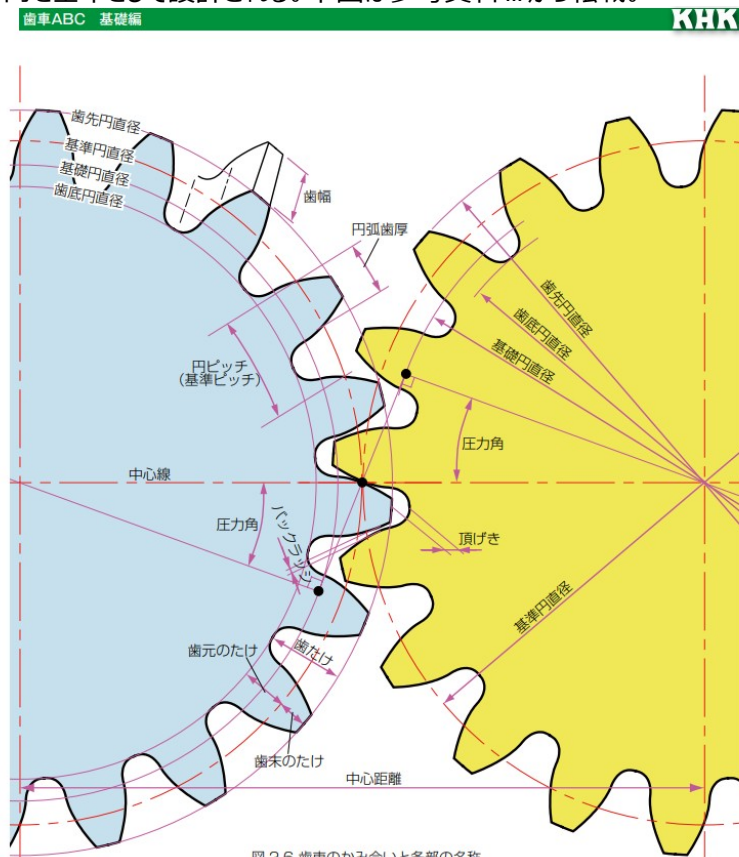
$$\begin{aligned}
 r_1 + r_2 &= a \\
 \Leftrightarrow r_2 \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) &= a \\
 \Leftrightarrow r_2 (f(\theta) + 1) &= a \\
 \Leftrightarrow r_2 &= \frac{1}{1 + f(\theta)} a
 \end{aligned}$$

$$r_2 = \frac{1}{1 + f(\theta)} a \quad \dots \textcircled{6}$$

オーケー、摩擦車の作り方は分かった。じゃあ、どこに歯をつければ良いんだい？

歯先と歯底 (歯車の作成)

歯車は複数の同心円を基準として設計される。下図は参考資料 iii から転載。



摩擦車は基準円に相当する。

標準的には基準円半径 r を基準として、それぞれの同心円の半径が下記の通り決められる。

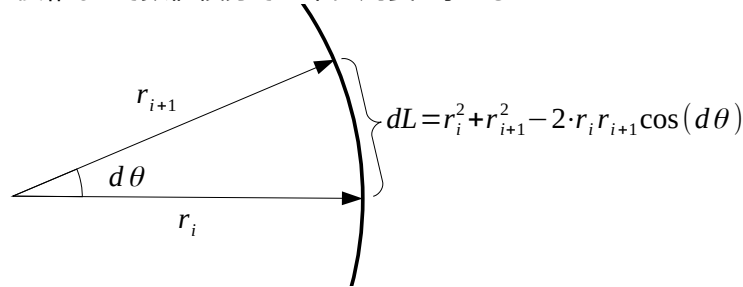
基準円半径	r
歯先円半径	$r+m$
基礎円半径	$r \cos(\theta_p)$
歯底円半径	$r-m-0.25 \cdot m$

なお、 $0.25 \cdot m$ は頂隙(クリアランス)と言って、歯の先端が干渉することを避けるための隙間を意味する。

歯の位置と向きの算出とその誤差

歯の位置は基準円周上に等間隔に配置される。

摩擦車の形状は複雑なので数値積分で基準円周長を求める。

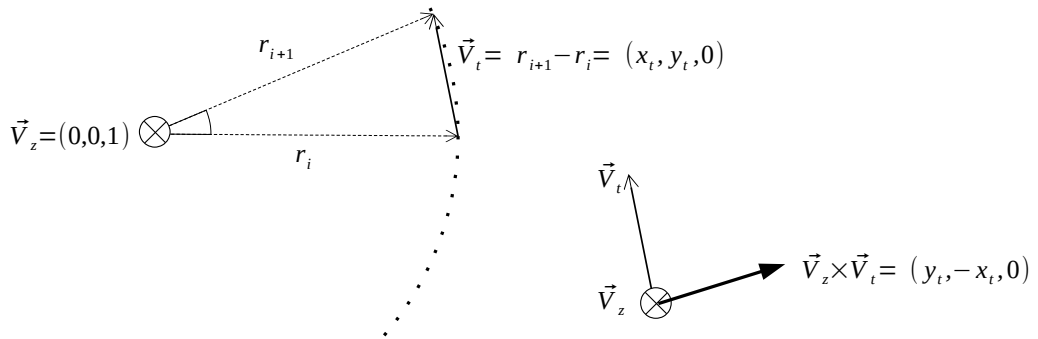


微小区間を累積して周長 L_θ を $L_\theta = \sum_i [r_i^2 + r_{i+1}^2 - 2 \cdot r_i \cdot r_{i+1} \cos(\theta_i)]$ によって求める事が出来る。

また円形歯車の歯は摩擦車の接線の法線方向に向く。

上記の通り数値微分で求めた歯の位置の法線方向を計算する。

Z 軸を仮定して外積を使うと簡単に求められる。



(参考)

$$\vec{V}_a = (x_a, y_a, z_a)$$

$$\vec{V}_b = (x_b, y_b, z_b)$$

$$\vec{V}_a \times \vec{V}_b = (y_a z_b - y_b z_a, z_a x_b - x_a z_b, x_a y_b - y_a x_b)$$

\vec{V}_z は z 軸方向の単位ベクトル、 \vec{V}_t は摩擦車上の接線ベクトルとして、

上図の様に $\vec{V}_z \times \vec{V}_t = (y_t, -x_t, 0)$ として求めることができる。

歯数 z は周長 L_θ とモジュール m から求める事が出来る。

$$z = \frac{L_\theta}{m\pi}$$

なお、歯数 z は整数でなければならない。したがって、周長 L_θ とモジュール m を調整して歯数

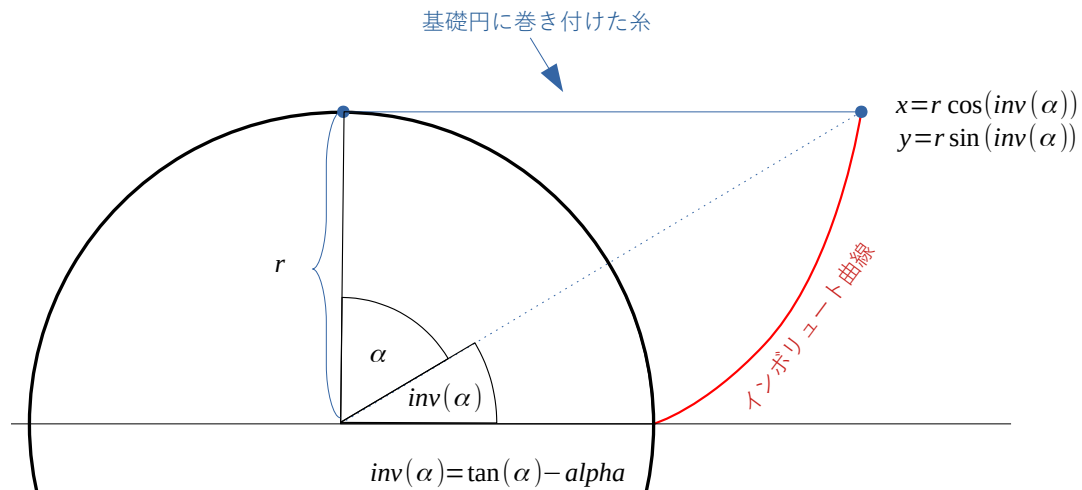
z を整数にしなければならないが、必ずしもそうならない。特に駆動歯車と従動歯車の周長が一致しないためにどうしても歯数 z が整数にならない場合がある。

そのような時は誤差 $E \geq \left| z - \frac{\theta}{m\pi} \right|$ を定め、「仕方がないよね?」と言って許容する。

このとき恐らく、駆動歯車の誤差と従動歯車の誤差は同程度にすべきだと思う。

インボリュート曲線 (歯車の作成)

インボリュート曲線とは基礎円に巻き付けた糸を解くときに糸の先端が描く曲線。
理由はよくわからないけど、多少加工精度が低くてもうまく回るらしい。



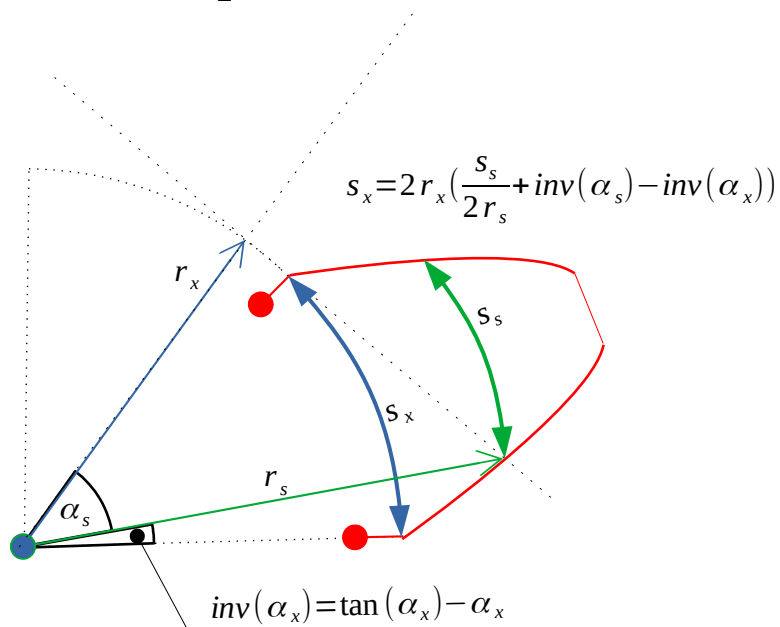
オーケー。じゃあどこからこのインボリュート曲線を描けば良いんだい？

歯厚の計算 (歯車の作成)

基準円上の標準の歯厚は $\frac{\pi m}{2}$ である。

インボリュート曲線は基準円上から描くらしいので、基礎円のどこからインボリュート歯車を描き始めるかを知る必要がある。

歯厚は基準円上の歯厚 $S_s = \frac{\pi m}{2}$ を基準として下記の式から求められる。



したがって、

圧力角： $\theta_p = 20[\text{deg}]$

基準円半径： r_s

基礎円半径： $r_s \cos(\theta_p)$

基礎円から基準円に達した場合のインボリュート角： $\alpha_s = \arccos\left(\frac{r_x}{r_s}\right) = \arccos\left(\frac{r_s \cos(\theta_p)}{r_s}\right) = \theta_p$

基礎円から基礎円に達した場合のインボリュート角： $\alpha_g = 0$

として、基礎円上の歯厚 s_g は、

$$s_g = 2r_g \left(\frac{s_s}{2r_s} + \text{inv}(\alpha_s) - \text{inv}(\alpha_x) \right)$$

$$\rightarrow 2r_s \cos(\theta_p) \left(\frac{\pi m}{2 \cdot 2r_s} + \tan(\theta_p) - \theta_p - 0 \right)$$

ここで求めた歯厚 s_g を使って $-\frac{1}{2} \cdot \frac{s_g}{r_g}$ [rad]だけずれた角度から描き始めればよい。

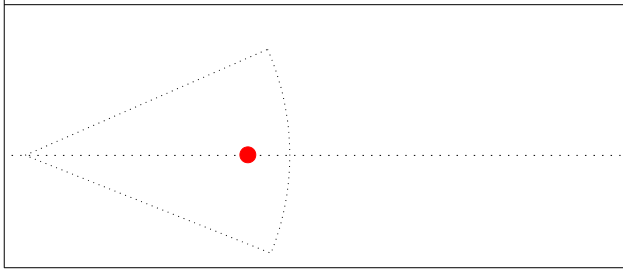
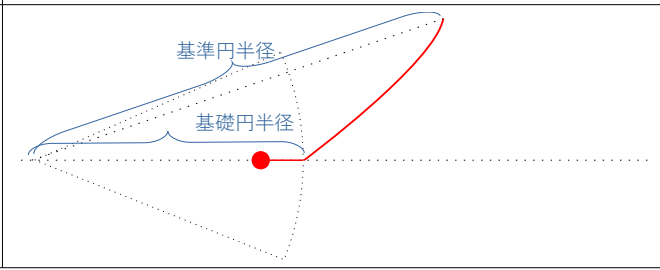
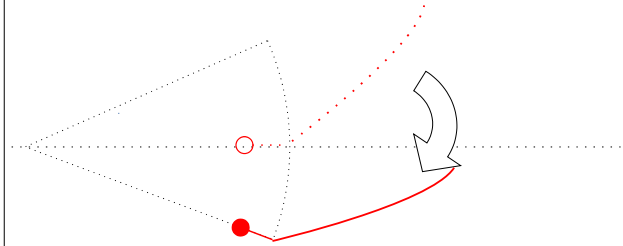
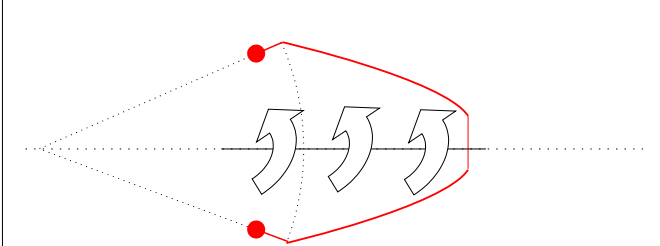
メモ：

当たり前だけど、弧度法の角度に半径をかけると円弧の長さになる。
んで、一周分だと $2\pi r$ になる。

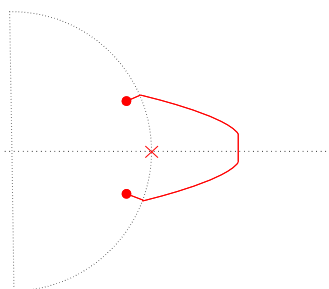
インボリュート歯の作成

インボリュート歯の作成手順は下記の通り。

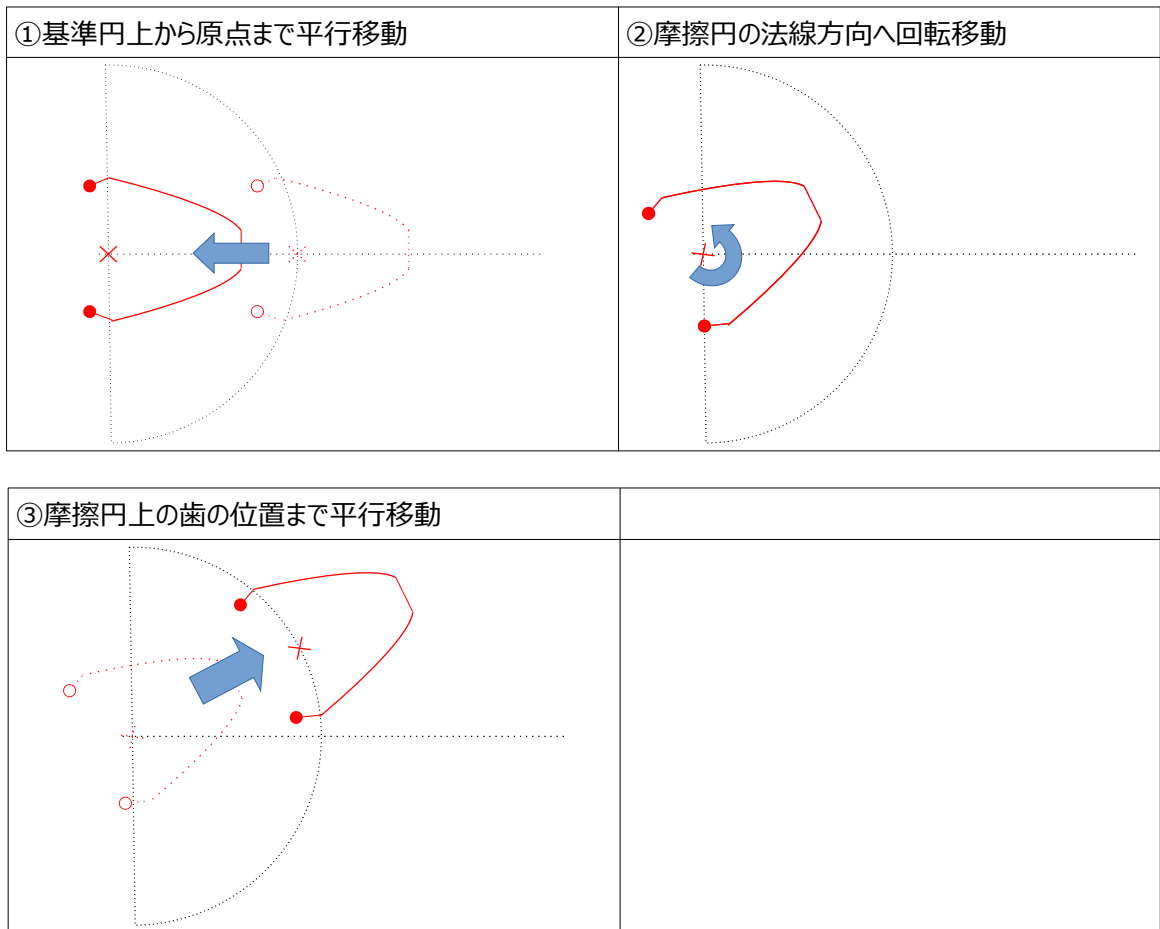
ちなみにこの方法は筆者が「こんなもんかな？」と作ったものなので、間違ってるかもね。

① 歯底の点を描画	② 基礎円上から基準円半径までインボリュート曲線の描画
	
③ 歯厚に合わせて回転移動	④ インボリュート曲線を x 軸に線対称に複製して追加
	

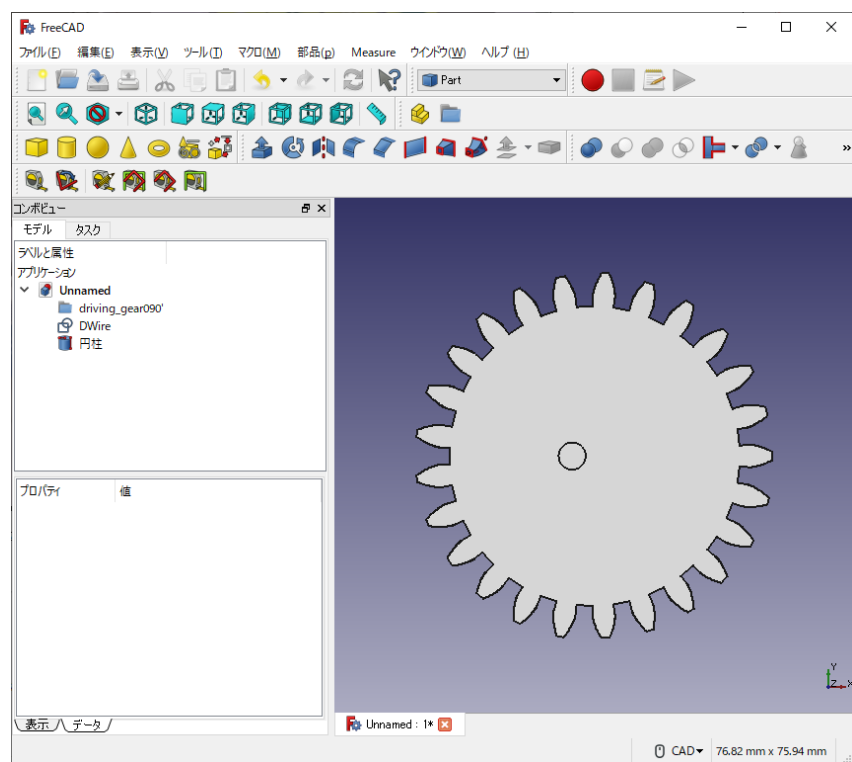
以上の操作で一つの歯ができる。
ヒューー！



歯の移動は以下の通り



これをすべての歯に繰り返す。
ね？簡単でしょ？



参考文献

- i. 東京工業大学 ロボット技術研究会
Matlab で非円形歯車作ってみた その
1 <http://titech-ssr.blog.jp/archives/1063089657.html>
- ii. KHK の歯車 ABC 基礎編 https://www.khkgears.co.jp/gear_technology/pdf/gearabc_b.pdf
- iii. 日本図学会東北支部講演会（2005
年 3 月, いわき市） https://graphicscience.jp/_files/branch_touhoku/2005-3%E5%B5%AF%E5%B3%A8.pdf
非円形歯車の設計について 嵯峨 拓
人 et.al.
- iv. 小原歯車工業株式会社 https://www.khkgears.co.jp/gear_technology/pdf/gijutu.pdf
歯車技術資料 歯車の役割
- v. 大阪電気通信大学 <http://www.osakac.ac.jp/labs/s-jeong/mechakine2/>
機械運動学 2 講義ノート