

# Simple theory のセミナーノート

YasudaYasutomo

2019 年 12 月 19 日

A Course in Model Theory 7 章のセミナーノートです.

セミナーで無駄な議論などを指摘してくださった先輩方に感謝します.

## 1 Forking and Dividing

この章では断りのない限り  $T$  は可算完全で無限モデルを持つと仮定して議論する.

$T$  の monster model を  $\mathfrak{C}$  を固定する. <sup>\*1</sup>

**補題 1.1** (The Standard lemma).  $A$  を集合,  $I$  を tuple の無限列,  $J$  を全順序集合とする.

このとき  $J$  で順序づけられた  $A$ -indiscernible で  $\text{EM}(I/A)$  を実現するものが存在する.

$\text{EM}(I/A)$  というのは  $L(A)$ -論理式  $\varphi$  で

$$\mathfrak{C} \models \varphi(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \text{ for all } a_{i_1} < \dots < a_{i_n} \in I$$

を満たすもの全体からなるタイプであった.

**定義 1.2** (Dividing).  $b \in \mathfrak{C}$  とする. <sup>\*2</sup>

- 論理式  $\varphi(x, b)$  が  $k \in \omega$  に関して  $A$  上 divide する<sup>\*3</sup>とはある列  $(b_i)_{i \in \omega}$  が存在して次を満たすことをいう.
  1.  $\text{tp}(b_i/A) = \text{tp}(b/A)$  for all  $i \in \omega$
  2.  $(\varphi(x, b_i))_{i \in \omega}$  is  $k$ -inconsistent<sup>\*4</sup>
- 論理式の集合  $\pi(x)$  に対して,  $\pi(x)$  が  $A$  上 divide するとはある  $b \in \mathfrak{C}$  と論理式  $\varphi(x, y)$  が存在して次を満たすことをいう.
  1.  $\pi(x) \models \varphi(x, b)$
  2.  $\varphi(x, b)$  は  $A$  上 divide する

Dividing の基本的な性質を次で示す. <sup>\*5</sup>

**命題 1.3.**  $\varphi(x, a) \models \psi(x, b)$  とし,  $\psi(x, b)$  が  $A$  上 divide すると仮定する.

---

<sup>\*1</sup> 集合論的な細かいことは気にしない.

<sup>\*2</sup>  $b$  は tuple でも問題ない.

<sup>\*3</sup>  $k$  が明示されていないときは for some  $k \in \omega$  とする.

<sup>\*4</sup> 思い出しておくと論理式の集合が  $k$ -inconsistent とは任意に  $k$  個取り出してくると inconsistent になることだった.

<sup>\*5</sup> 本文中ではあっさり書かれているが重要だと思う.

このとき  $\varphi(x, a)$  は  $A$  上 divide する.

証明.  $\psi(x, b)$  は  $A$  上 divide することより,  $(b_i)_{i \in \omega}$  を witness として取る.

各  $i \in \omega$  について,

$$\text{tp}(a/A) \cup \{\forall x(\varphi(x, y) \rightarrow \psi(x, b_i))\} \cup T$$

を考える. \*6 これは有限充足可能である.

実際  $\Delta(y) \subseteq_{\text{fin}} \text{tp}(a/A)$  を取ると,  $\exists y(\bigwedge \Delta(y) \wedge \forall(\varphi(x, y) \rightarrow \psi(x, z))) \in \text{tp}(b/A) = \text{tp}(b_i/A)$  より,  $z = b_i$  に対する witness  $a_i$  をそれぞれ取れば良い.

よって各  $i \in \omega$  での実現  $(a_i)_{i \in \omega}$  を取ると構成より  $\varphi(x, a)$  が  $A$  上 divide することの witness となる.  $\square$

系 1.4.  $\varphi$  が  $A$  上 divide することと  $\{\varphi\}$  が  $A$  上 divide することは同値.

命題 1.5.  $\pi(x)$  を論理式の集合とする.

$\pi(x)$  が  $A$  上 divide するならば, ある  $\Delta \subseteq_{\text{fin}} \pi(x)$  が存在して  $\varphi \equiv \bigwedge \Delta$  は  $A$  上 divide する.

論理式の集合が divide しているとき, そこから有限個取ってきて dividing を考えれば良いことは以降よく使う.

命題 1.6.  $A \subseteq B$  とし,  $\varphi(x, b)$  が  $A$  上 divide すると仮定する. このとき  $B$  の  $A$ -conjugate  $\bar{B}$  が存在して  $\varphi(x, b)$  は  $\bar{B}$  上 divide する.

証明.  $I = (b_i)_{i \in \omega}$  を witness として取る. The Standard lemma で  $B$ -indiscernible  $J = (c_i)_{i \in \omega}$  を  $\text{tp}(J/A) = \text{tp}(I/A)$  となるように取る. 自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ :  $J \mapsto I$  を考えれば良い.  $\square$

例 1.7. DLO において,  $\varphi(x, a, b) \equiv "a < x < b"$  divides over  $\emptyset$  w.r.t. 2.

補題 1.8.  $\pi(x, b)$  を論理式の集合とする. 次は同値.

1.  $\pi(x, b)$  は  $A$  上 divide する.
2. ある  $A$ -indiscernible  $(b_i)_{i \in \omega}$  が存在して次を満たす.
  - $\text{tp}(b_0/A) = \text{tp}(b/A)$
  - $\bigcup_{i \in \omega} \pi(x, b_i)$  is inconsistent
3. ある  $A$ -indiscernible  $(b_i)_{i \in \omega}$  が存在して次を満たす.
  - $b_0 = b$
  - $\bigcup_{i \in \omega} \pi(x, b_i)$  is inconsistent

証明.  $(1 \rightarrow 2)$   $\pi(x, b)$  が  $k \in \omega$  に関して  $A$  上 divide すると仮定する.  $\pi(x, b)$  から有限個取ってきて  $\varphi(x, b)$  が  $k \in \omega$  に関して  $A$  上 divide するとして良い.

$(b_i)_{i \in \omega}$  を dividing の条件を満たすように取る. つまり

- $\text{tp}(b_i/A) = \text{tp}(b/A)$
- $\{\varphi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$  is  $k$ -inconsistent

を満たすように取る. The Standard lemma より一般性を損なうことなく  $(b_i)_{i \in \omega}$  は  $A$ -indiscernible として

---

\*6 自由変数は  $y$  で揃えている.

良い.

このとき  $\bigcup_{i \in \omega} \pi(x, b_i)$  は inconsistent.

(2  $\rightarrow$  1)  $A$ -indiscernible  $(b_i)_{i \in \omega}$  を仮定の条件を満たすように取る.  $\bigcup_{i \in \omega} \pi(x, b_i)$  は inconsistent より,  $\pi(x, b)$  からその witness を有限個取りそれを  $\varphi(x, b)$  とする. 取り方から  $\Sigma(x) = \{\varphi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$  は inconsistent. indiscernibility と compactness より  $\Sigma(x) = \{\varphi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$  は  $k$ -inconsistent.

(3  $\rightarrow$  2) 良い.

(2  $\rightarrow$  3) 自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ :  $b_0 \mapsto b$  を考えれば良い.  $\square$

系 1.9. 次は同値.

1.  $\text{tp}(a/Ab)$  は  $A$  上 divide しない.
2. 任意の  $A$ -indiscernible  $I$  で  $b$  を含むものに対して, ある  $Aa$ -indiscernible  $J$  が存在して  $\text{tp}(J/Ab) = \text{tp}(I/Ab)$  を満たす.
3. 任意の  $A$ -indiscernible  $I$  で  $b$  を含むものに対して, ある  $\bar{a}$  が存在して  $\text{tp}(\bar{a}/Ab) = \text{tp}(a/Ab)$  かつ  $I$  は  $A\bar{a}$ -indiscernible となる.
4. 任意の  $A$ -indiscernible  $I$  で  $b$  を含むものに対して, ある  $\bar{a}$  と  $A\bar{a}$ -indiscernible  $J$  が存在して  $\text{tp}(\bar{a}/Ab) = \text{tp}(a/Ab)$  かつ  $\text{tp}(I/Ab) = \text{tp}(J/Ab)$  を満たす.

証明. (2  $\rightarrow$  3)  $A$ -indiscernible  $I$  で  $b$  を含むものを任意に取る. 仮定より  $Aa$ -indiscernible  $J$  で  $\text{tp}(J/Ab) = \text{tp}(I/Ab)$  を満たすものを取る. 自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/Ab)$ :  $J \mapsto I$  を取り,  $\bar{a} = \sigma(a)$  とする. このとき  $I$  は  $A\bar{a}$ -indiscernible かつ  $\text{tp}(\bar{a}/Ab) = \text{tp}(a/Ab)$  を満たす.

(3  $\rightarrow$  2)  $A$ -indiscernible  $I$  で  $b$  を含むものを任意に取る. 仮定より  $\bar{a}$  を  $\text{tp}(\bar{a}/Ab) = \text{tp}(a/Ab)$  かつ  $I$  は  $A\bar{a}$ -indiscernible となるように取る. 自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/Ab)$ :  $\bar{a} \mapsto a$  となるように取り,  $J = \sigma''I$  とする. このとき  $J$  は  $Aa$ -indiscernible かつ  $\text{tp}(I/Ab) = \text{tp}(J/Ab)$  を満たす.

(2, 3  $\rightarrow$  4) はい.

(4  $\rightarrow$  2, 3) 今までのように自己同型で移す.

(1  $\rightarrow$  4)  $A$ -indiscernible  $I$  で  $b$  を含むものを任意に取る.  $b_{i_0} = b$  とする.  $p(x, y) = \text{tp}(ab/A)$  とする.

$\text{tp}(a/Ab)$  は  $A$  上 divide しないことと前補題より  $\bigcup_{i \in I} p(x, b_i)$  は consistent. よって  $\bar{a}$  をその実現とする.

The Standard lemma を用いて  $K = (c_i)_{i \in I}$  を  $A\bar{a}$ -indiscernible かつ  $K$  は  $\text{EM}(I/A\bar{a})$  を実現するように取る.  $\models p(\bar{a}, c_{i_0})$  より, 自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/A\bar{a})$ :  $c_{i_0} \mapsto b$  を取る.  $J = \sigma''K$  とすると  $A\bar{a}$ -indiscernible かつ  $\text{tp}(J/Ab) = \text{tp}(I/Ab)$  を満たす.

(2  $\rightarrow$  1)  $\text{tp}(a/Ab)$  が  $A$  上 divide すると仮定して矛盾を導く.  $\pi(x, y) = \text{tp}(ab/A)$  とする. 前補題より  $A$ -indiscernible  $I = (b_i)_{i \in \omega}$  を  $b_0 = b$  かつ  $\bigcup_{i \in \omega} \pi(x, b_i)$  は inconsistent となるように取る.

仮定よりある  $\bar{a}$  が存在して  $\text{tp}(\bar{a}/Ab) = \text{tp}(a/Ab)$  かつ  $I$  は  $A\bar{a}$ -indiscernible となる.  $\models \text{tp}(ab/A)[\bar{a}, b]$  となり, indiscernibility から  $\bigcup_{i \in \omega} \pi(\bar{a}, b_i)$  は consistent. Contradiction.  $\square$

例 1.10.  $a \notin \text{acl}(A)$  とする. このとき  $\text{tp}(a/Aa)$  は  $A$  上 divide する.

証明.  $a \notin \text{acl}(A)$  より  $a$  の  $A$ -conjugate  $(a_i)_{i \in \omega}$  を取る.

$\varphi(x, a) \equiv "x = a"$  を考えると  $\text{tp}(a/A) = \text{tp}(a_i/A)$  かつ  $(\varphi(x, a_i))_{i \in \omega}$  は 2-inconsistent となる.  $\square$

例 1.11.  $\pi(x)$  を  $\text{acl}(A)$  上で定義された無矛盾な論理式の集合とする. このとき  $\pi(x)$  は  $A$  上 divide しない.

証明.  $\pi(x)$  が  $A$  上 divide すると仮定して矛盾を導く.  $\pi(x)$  から有限個取ってきて  $\varphi(x, b)$  divides over  $A$  として良い. このとき仮定より  $b \in \text{acl}(A)$  となる.

Dividing の witness を  $(b_i)_{i \in \omega}$  を取る. The Standard lemma より  $(b_i)_{i \in \omega}$  は  $A$ -indiscernible として良い.  $b$  は  $A$  上代数的より,  $\psi(x)$  を  $b$  を実現としてもつ  $A$  上の algebraic formula とする. このとき全ての  $i \in \omega$  に対して  $\psi(x) \in \text{tp}(b/A) = \text{tp}(b_i/A)$  が成立する.  $\psi(x)$  の取り方と indiscernibility から  $b = b_i$  for all  $i \in \omega$ . よって  $\varphi(x, b)$  は inconsistent となり,  $\pi(x)$  の取り方に矛盾.  $\square$

命題 1.12.  $A \subseteq B$  とする.  $\text{tp}(a/B)$  が  $A$  上 divide しないと,  $\text{tp}(c/Ba)$  は  $Aa$  上 divide しないと仮定する. このとき  $\text{tp}(ac/B)$  は  $A$  上 divide しない.

証明.  $b$  を  $B$  の元からなる finite tuple とする.  $I$  を infinite  $A$ -indiscernible で  $b$  を含むものとする.

$\text{tp}(a/B)$  doesn't divide over  $A$  より,  $Aa$ -indiscernible  $J$  で  $\text{tp}(J/Ab) = \text{tp}(I/Ab)$  を取る. このとき " $x = b$ "  $\in \text{tp}(I/Ab) = \text{tp}(J/Ab)$  より,  $J$  はまた  $b$  を含む.

また  $\text{tp}(c/Ba)$  doesn't divide over  $Aa$  より  $Aac$ -indiscernible  $K$  で  $\text{tp}(K/Aab) = \text{tp}(J/Aab)$  を満たすものを取る. よって  $\text{tp}(ac/B)$  は  $A$  上 divide しない.  $\square$

Forking を定義する.

定義 1.13 (Forking).  $\pi(x)$  を論理式の集合とする.  $\pi(x)$  が  $A$  上 fork するとはある論理式  $\varphi_l(x)$  ( $l < d \in \omega$ ) が存在して次を満たすことをいう.

- $\pi(x) \models \bigvee_{l < d} \varphi_l(x)$
- $\varphi_l(x)$  は  $A$  上 divide する

明らかに Dividing の方が Forking より強い. 逆は一般には成立しない<sup>\*7</sup>が, あとで定義される simple theory ではこれらが一致する.<sup>\*8</sup>

余談 1.

- Divide は「分かれる」という意味がある.
- Fork は「分岐する」という意味がある.

命題 1.14 (Non-forking is closed).  $p \in S(B)$  が  $A$  上 fork すると仮定する.

このときある  $\varphi \in p$  が存在して, 任意の  $q \in S(B)$  に対して  $\varphi \in q$  ならば  $q$  は  $A$  上 fork する.

証明.  $p \models \bigvee_{l < d} \varphi_l$  とすると compactness よりある  $\pi \subseteq_{\text{fin}} p$  が存在して  $\pi \models \bigvee_{l < d} \varphi_l$  が成立する.  $\varphi = \bigwedge \pi$  とすれば良い.  $\square$

系 1.15.  $p \in S(B)$  が  $A$  上 fork すると仮定する. このときある  $B_0 \subseteq_{\text{fin}} B$  が存在して  $p \upharpoonright AB_0$  は  $A$  上 fork する.  $\square$

補題 1.16. 論理式の集合  $\pi$  は  $A$  で有限充足可能とする. このとき  $\pi$  は  $A$  上 fork しない.

証明. そうではないと仮定して矛盾を導く.  $\pi \models \bigvee_{l < d} \varphi_l(x)$  とする. このときある  $l < d$  存在して  $\varphi_l(x)$  は  $A$

<sup>\*7</sup> 有理数上の cyclic order とか考えるとダメ.

<sup>\*8</sup> いい話.

での実現を持つ. これは  $\varphi_l(x)$  が  $A$  上 divide することに矛盾. □

**補題 1.17.**  $A \subseteq B$  とし,  $\pi$  を  $B$  上の partial type とする. また  $\pi$  は  $A$  上 fork しないと仮定する.

このとき  $\pi$  の拡張  $p \in S(B)$  が存在して  $p$  は  $A$  上 fork しない.

**証明.**  $p$  を  $\pi$  を含む  $L(B)$ -論理式の集合で  $A$  上 fork しないもので極大なものとすれば良い. □

## 2 Simple theory

この章では断りのない限り  $T$  は可算完全で無限モデルを持つと仮定して議論する.

**定義 2.1** (Simple).

- 論理式  $\varphi(x, y)$  が  $k$ -TP<sup>\*9</sup>を持つとはある  $(a_s \mid \emptyset \neq \text{in}^{<\omega}\omega)$  が存在して次を満たすことをいう.
  1. 任意の  $s \in {}^{<\omega}\omega$  について,  $\{\varphi(x, a_s \restriction \langle i \rangle) \mid i \in \omega\}$  は  $k$ -inconsistent
  2. 任意の  $\sigma \in {}^\omega\omega$  について,  $\{\varphi(x, a_s) \mid \emptyset \neq s \sqsubset \sigma\}$  は consistent
- theory  $T$  が simple であるとは TP を持つ論理式が存在しないときのことをいう.

TP を考えるときはパラメタなしの論理式を考えれば十分である. totally transcendental なら simple である.

次の dividing sequence の概念は有用である.

**定義 2.2.**  $\Delta$  をパラメタなし論理式の有限集合とする.  $\delta$  を順序数とする.

このとき  $(\varphi_i(x, a_i) \mid i < \delta)$  が  $A$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence であるとは次を満たすことをいう.

- $\varphi_i(x, y) \in \Delta$
- $\varphi_i(x, a_i)$  は  $k$  に関して  $A \cup \{a_j \mid j < i\}$  上 divide する
- $\{\varphi_i(x, a_i) \mid i < \delta\}$  は consistent

$\delta$  を dividing sequence の長さという.

Dividing sequence を使って TP を特徴付けることができる.

**補題 2.3.**

1.  $\varphi$  が  $k$ -TP を持つと仮定する. このとき任意の  $A$  と  $\delta$  について, 長さ  $\delta$  の  $A$  上の  $\varphi$ - $k$ -dividing sequence が存在する.
2. 長さが無限の  $\emptyset$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence が存在すると仮定する. このときある  $\varphi \in \Delta$  が存在して,  $\varphi$  は  $k$ -TP を持つ.

**証明.** (1)  $\varphi$  が  $k$ -TP を持つとする.  $\delta$  が極限順序数のときのみ考えれば十分である. <sup>\*10</sup>compactness から任意の  $\kappa \in \text{ON}$  について,  $(a_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\delta}\kappa)$  が存在して次を満たす.

---

<sup>\*9</sup> tree property

<sup>\*10</sup> 短くすればいい

- 任意の  $s \in {}^{<\delta}\kappa$  について,  $\{\varphi(x, a_{s \restriction \langle i \rangle}) \mid i < \kappa\}$  は  $k$ -inconsistent
- 任意の  $\sigma \in {}^\delta\kappa$  について,  $\{\varphi(x, a_s) \mid \emptyset \neq s \sqsubset \sigma\}$  は consistent

正則基数  $\kappa$  を  $\kappa > 2^{\max\{|T|, |A|, \delta\}}$  となるように十分大きく取る. infinite path  $\sigma \in {}^\delta\kappa$  を全ての  $s \sqsubset \sigma$  について,  $A \cup \{a_t \mid t \sqsubseteq s\}$  上の  $a_{s \restriction \langle i \rangle}$  のタイプが等しくなるような  $i < \kappa$  が無限個存在するように取る.

これは  $\kappa$  が十分大きいことから帰納的に構成すれば良い.

このような  $\sigma$  に対して, 構成より  $(\varphi(x, a_{\sigma \restriction i+1} \mid i < \delta))$  は  $A$  上の  $\varphi$ - $k$ -dividing sequence となる.\*11

(2)  $(\varphi_i(x, a_i) \mid i \in \omega)$  を  $\emptyset$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence とする.  $\Delta$  は有限より  $(\varphi(x, a_i) \mid i \in \omega)$  を  $\emptyset$  上の  $\varphi$ - $k$ -dividing sequence として良い.  $\varphi$  が  $k$ -TP を持つことを示す.

各  $i \in \omega$  について,  $(a_i^n)_{n \in \omega}$  を  $\varphi(x, a_i)$  が  $k$  に関して  $\{a_j \mid j < i\}$  上 divide することの witness として取り固定する. つまり各  $i \in \omega$  について次が成立している.

- $\text{tp}(a_i^n / \{a_j \mid j < i\}) = \text{tp}(a_i / \{a_j \mid j < i\})$  for all  $n \in \omega$
- $\{\varphi(x, a_i^n) \mid n \in \omega\}$  は  $k$ -inconsistent

$(b_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$  を次のように帰納的に構成する.  $s \in {}^{i+1}\omega$  に対して,  $\bar{b} = (b_{s \restriction 1}, \dots, b_{s \restriction i})$  まで定義したとする. さらに  $\text{tp}(a_0, \dots, a_{i-1}) = \text{tp}(\bar{b})$  を満たすと仮定する. 自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C})$ :  $(a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto \bar{b}$  を取り,  $b_s = \sigma(a_i^{s(i)})$  とする.

構成より  $(b_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$  は求めるものとなっている. □

**命題 2.4.**  $T$  を simple とする.  $\Delta$  を論理式の有限集合,  $k \in \omega$  とする.

このとき  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence の長さは有限の上限を持つ.

**証明.** そうではないと仮定して矛盾を導く. 長さ無限の  $\emptyset$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence を構成する.  $\Delta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$  とする.

サイズの議論により  $f \in {}^\omega\Delta$  を任意の  $m \in \omega$  について  $f \restriction m$  の順で  $\emptyset$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence が存在するように取る.\*12 定数記号  $c, a_0, \dots, a_n, \dots$  ( $n \in \omega$ ),  $a_n^0, \dots, a_n^i, \dots$  ( $n \in \omega, i \in \omega$ ) を用意する. 次の theory を考える.\*13

- $T$
- $\{\varphi_{f(n)}(c, a_n) \mid n \in \omega\}$
- $\text{tp}(a_n^i / \{a_0, \dots, a_{n-1}\}) = \text{tp}(a_n / \{a_0, \dots, a_{n-1}\})$  for each  $n \in \omega, i \in \omega$
- $\{\varphi(x, a_n^i) \mid i \in \omega\}$  is  $k$ -inconsistent for each  $n \in \omega$

これは仮定より有限充足可能. 実際有限個取ってきたとき十分長い  $f \restriction m$  の順に論理式が並んだ  $\emptyset$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence を取り解釈をそれに当てれば良い.\*14

よって compactness より欲しいものが得られる. □

**命題 2.5.**  $T$  は無限完全で無限モデルを持つ theory とする. 次は同値.

\*11  $i+1$  で切っているところが効いている

\*12 compactness を使いたいで dividing sequence に出てくる論理式をあらかじめ決めておく

\*13 長いので箇条書きで書いている

\*14 このために  $f$  を取った

1.  $T$  は simple.
2. 任意の  $B$  と任意の  $p \in S_n(B)$  についてある  $A \subseteq B$  が存在して,  $|A| \leq |T|$  かつ  $p$  は  $A$  上 divide しない.
3. ある順序数  $\kappa$  が存在して, 任意の  $M \models T$  と任意の  $p \in S_n(M)$  に対してある  $A \in [M]^{\leq \kappa}$  が存在して,  $p$  は  $A$  上 divide しない.

証明. (2  $\rightarrow$  3) 良い.

(1  $\rightarrow$  2) まず  $p \in S_n(B)$  は  $B$  上 divide しないことより  $|B| > |T|$  のときを考えれば十分である.

そうではないと仮定して矛盾を導く. 仮定より  $B$  と  $p \in S_n(B)$  を取る. 帰納的に列  $(\varphi_i(x, b_i))_{i < |T|+}$  を次のように構成する.

- 各  $\varphi_i$  は  $p$  に属す論理式
- $\varphi_i(x, b_i)$  は  $k$  に関して  $\{b_j \mid j < i\}$  上 divide する
- $b_i \in B$

$\varphi_i(x, y)$  全体のサイズは  $|T|$  以下より,  $\varphi$ - $k$ -dividing sequence  $(\varphi(x, b_i))_{i < |T|+}$  が取れる. これは  $T$  が simple であることに矛盾.

(3  $\rightarrow$  1) 対偶を示す. 任意に順序数  $\kappa$  を取る.  $T$  は simple でないから長さ  $\kappa^+$  の  $\varphi$ - $k$ -dividing sequence  $(\varphi(x, b_i))_{i < \kappa^+}$  を取る.

次を満たすような  $T$  のモデルの列を取る.

- $M_0 \prec M_1 \prec \dots$
- 任意の  $j < i$  について,  $b_j \in M_i$
- $\phi(x, b_i)$  は  $M_i$  上 divide する

これは命題 1.6. を使うことで取れる.  $M = \lim M_i \models T$  とする. サイズ  $\kappa$  の部分集合はどこかの  $M_i$  で含まれているのでこれは 3 を満たさない.  $\square$

**命題 2.6.**  $T$  を simple とし,  $p \in S(A)$  とする. このとき  $p$  は  $A$  上 fork しない.

証明.  $p$  は  $A$  上 fork すると仮定する.  $p \models \bigvee_{l < d} \varphi_l(x, b)$  とする.  $\Delta = \{\varphi_l(x, y) \mid l < d\}$  とおく.

$n \in \omega$  の帰納法で長さ  $n$  の  $A$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence を構成する. さらに dividing sequence は  $p$  と consistent となるように構成する.

$(\psi_i(x, a_i))_{i < n}$  まで構成したとする.  $\bar{b}$  を  $b$  の  $A$ -conjugate で  $(\psi_i(x, a_i))_{i < n}$  が  $A\bar{b}$  上の dividing sequence となるように取る. このとき  $p \models \bigvee_{l < d} \varphi_l(x, \bar{b})$  より,  $\varphi_l(x, \bar{b})$  を  $p \cup \{\psi_i(x, a_i) \mid i < n\}$  となるように取る.

$\varphi_l(x, \bar{b}), \psi_0(x, a_0), \dots, \psi_{n-1}(x, a_{n-1})$  は  $A$  上の  $\Delta$ - $k$ -dividing sequence で  $p$  と consistent となる. <sup>\*15</sup>

これは  $T$  が simple であることに矛盾.  $\square$

**定義 2.7.**  $p$  を  $A$  上のタイプとする.  $p$  の拡大  $q$  が  $A$  上 fork しているとき forking extension という.

**系 2.8.**  $A \subseteq B$  とし,  $T$  を simple とする. 任意の  $A$  上のタイプは  $B$  上のタイプへの non-forking extension を持つ.  $\square$

---

<sup>\*15</sup> 先頭にくっつけるのが大事

**定義 2.9.**  $A \perp_C B^{*16}$  とは, 任意の  $\bar{a} \in [A]^{<\omega}$  について  $\text{tp}(\bar{a}/BC)$  は  $C$  上 fork しないことをいう.

**定義 2.10.**  $I$  を全順序,  $\bar{a} = (a_i)_{i \in I}$  を列とする.

- $\bar{a}$  が  $A$  上 independent とは, 全ての  $i \in I$  について  $a_i \perp_A \{a_j \mid j < i\}$  を満たすことをいう.
- $\bar{a}$  が  $A$  上の Morley sequence とは,  $\bar{a}$  が  $A$  上 independent かつ  $A$ -indiscernible であることをいう.
- $\bar{a}$  が  $A$  上の Morley sequence in  $p$  とは,  $\bar{a}$  が  $A$  上の Morley sequence かつ  $p$  の実現からなる列であるときをいう.

**命題 2.11.**  $M$  をモデルとし,  $A \subseteq M$  とする.  $p$  を  $M$  上のタイプとする. また  $M$  は  $|A|^+$ -saturated と仮定する. このとき  $p$  が  $A$  上 fork することと  $A$  上 divide することは同値.

**証明.**  $p$  が  $A$  上 fork すると仮定する. このときある  $\varphi(x, m) \in p$  が存在して,  $\varphi(x, m) \models \bigvee_{l < d} \varphi_l(x, b)$  となる.

$\text{tp}(b/Am)$  の解を  $\bar{b} \in M$  とする. このときある  $\varphi_l(x, \bar{b}) \in p$  となり,  $p$  は  $A$  上 divide する.  $\square$

**命題 2.12.**  $q$  を  $A$ -invariant global type<sup>\*17</sup> とする. このとき  $q$  は  $A$  上 fork しない.

**証明.**  $q$  が  $A$  上 fork しないことを示せば良い.  $\varphi(x, b) \in q$  を dividing formula とする.  $(b_i)_{i \in \omega}$  をその witness とする.  $q$  は  $A$ -invariant より, 各  $i \in \omega$  について  $\varphi(x, b_i) \in q$  となり矛盾. よって  $q$  は  $A$  上 divide しない.  $\square$

**例 2.13.**  $q$  を  $A$ -invariant global type とする. 列  $(b_i)_{i \in \omega}$  を各  $b_i$  が  $q \upharpoonright A \cup \{b_j \mid j < i\}$  を実現するように取る. このとき  $(b_i)_{i \in \omega}$  は  $A$  上の Morley sequence.

**証明.** 仮定の条件を満たす列を good ということにする. good な列の部分列はまた good となる.

まず indiscernibility を示す. good な列  $(a_0, \dots, a_n)$  と  $(b_0, \dots, b_n)$  に対して  $\text{tp}(a_0, \dots, a_n/A) = \text{tp}(b_0, \dots, b_n/A)$  を示せば良い.  $n \in \omega$  についての帰納法で示す.

$\text{tp}(a_0, \dots, a_{n-1}/A) = \text{tp}(b_0, \dots, b_{n-1}/A)$  を仮定する. 自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/A): (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (b_0, \dots, b_{n-1})$  を取る. このとき  $\sigma(\text{tp}(a_n/A \cup \{a_0, \dots, a_{n-1}\})) = \text{tp}(b_n/A \cup \{b_0, \dots, b_{n-1}\})$  が成立することから良い.

次に independence を示す. これは  $q$  が  $A$  上 fork しないことから良い.  $\square$

**命題 2.14.**  $(a_i)_{i \in I}$  を  $A$  上 independent な列とする.  $J, K \subseteq I$  を  $J < K$  を満たすとする. <sup>\*18</sup>このとき  $\text{tp}((a_k)_{k \in K}/A \cup \{a_j \mid j \in J\})$  は  $A$  上 divide しない.

**証明.**  $K$  が有限のときに示せば十分である.  $K$  のサイズの帰納法で示す.

$K = \{k_0 < \dots < k_n\}$  とする.  $a_{k_0} \perp_A \{a_i \mid i < k_0\}$  より,  $\text{tp}(a_{k_0}/A \cup \{a_j \mid j \in J\})$  は  $A$  上 fork しない, よって  $A$  上 divide しない. また帰納法の仮定より,  $\text{tp}((a_{k_1}, \dots, a_{k_n})/A \cup \{a_j \mid j \in J\} \cup \{a_{k_0}\})$  は  $A$  上 divide しない.

よって命題 2.12 より  $\text{tp}((a_{k_0}, \dots, a_{k_n})/A \cup \{a_j \mid j \in J\})$  は  $A$  上 divide しない.  $\square$

<sup>\*16</sup>  $A$  is independent from  $B$  over  $C$  という

<sup>\*17</sup>  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$  で不変なもの

<sup>\*18</sup>  $\forall a \in J \forall b \in K (a < b)$  のこと



定義 2.15.  $\mu$  を無限基数とする.

$$\beth_\alpha(\mu) = \begin{cases} \mu & (\alpha = 0) \\ 2^{\beth_\beta(\mu)} & (\alpha = \beta + 1) \\ \sup_{\beta < \alpha} \beth_\beta(\mu) & (\alpha: \text{limit}) \end{cases}$$

と定義する.

定理 2.16 (Erdős-Rado).  $\beth_n^+(\mu) \rightarrow (\mu^+)_\mu^{n+1}$

証明.  $n \in \omega$  についての帰納法で示す.  $n = 0$  の時は明らかなので良い.

$n + 1$  のときを示す. 分割  $f: [\beth_{n+1}^+(\mu)]^{n+2} \rightarrow \mu$  を任意に取る. 十分大きな正則基数  $\Xi$  を

$$\{f, \beth_{n+1}^+(\mu)\} \cup \mu \subseteq H_\Xi$$

となるように取る.  $M \prec H_\Xi$  を次を満たすように取る.

- $\{f, \beth_{n+1}^+(\mu)\} \cup \mu \subseteq M$
- $[M]^{<\beth_n^+(\mu)} \subseteq M$
- $|M| = \beth_{n+1}(\mu)$

$\alpha = \sup(\beth_{n+1}^+(\mu) \cap M) < \beth_{n+1}^+(\mu)$  とする.

列  $\langle \beta_\xi \in \beth_{n+1}^+(\mu) \cap M \mid \xi < \beth_n^+(\mu) \rangle$  を各  $\xi < \beth_n^+$  に対して次を満たすように帰納的に構成する.

- 全ての  $\zeta < \xi$  に対して,  $\beta_\zeta < \beta_\xi$
- 全ての  $\zeta_0, \dots, \zeta_n < \xi$  に対して,  $f(\beta_{\zeta_0}, \dots, \beta_{\zeta_n}, \beta_\xi) = f(\beta_{\zeta_0}, \dots, \beta_{\zeta_n}, \alpha)$

$\xi$  まで構成したとする.  $E = \{\beta_\zeta \mid \zeta < \xi\} \subseteq \beth_{n+1}^+(\mu) \cap M$  とする.  $g: [E]^{n+1} \rightarrow \mu$  を  $g(x) = f(x \cup \{\alpha\})$  と定義する. このとき  $g \in M$  となる. <sup>\*19</sup>

$\alpha$  の取り方より,

$$H_\Xi \models \exists x < \beth_{n+1}^+(\mu) [\forall y \in E (y < x) \wedge \forall z \in [E]^{n+1} (g(z) = f(z \cup \{x\}))]$$

が成立するので初等性から  $M$  での witness を  $\beta_\xi$  とすれば良い.

$Z = \{\beta_\xi \mid \xi < \beth_n^+(\mu)\}$  とおく.  $h: [Z]^{n+1} \rightarrow \mu$  を  $h(x) = f(x \cup \{\alpha\})$  と定義する. 帰納法の仮定より  $H \in [Z]^{\mu^+}$  を  $|h''[H]^{n+1}| = 1$  を満たすようにとる. 構成より  $H$  は分割  $f$  に対して homogeneous となる.  $\square$

命題 2.17. 任意の  $A$  に対してある無限基数  $\lambda$  が存在して, 任意のサイズ  $\lambda$  の全順序集合で添字づけられた列  $(a_i)_{i \in I}$  に対して, ある  $A$ -indiscernible  $(b_i)_{i \in \omega}$  が存在して次を満たす.

任意の  $j_1 < \dots < j_n \in \omega$  に対して, ある  $i_1 < \dots < i_n \in I$  が存在して,

$$\text{tp}((a_{i_1}, \dots, a_{i_n})/A) = \text{tp}((b_{j_1}, \dots, b_{j_n})/A)$$

が成立する.

証明.  $\tau = \sup_{n \in \omega} |S_n(A)|$  とする.  $\lambda = \beth_{\tau^+}(\aleph_0)$  とすると Erdős-Rado より次が成立する.

---

<sup>\*19</sup>  $M$  の closure から明らか

- $\text{cf}(\lambda) > \tau$
- 任意の  $\kappa < \lambda$  と任意の  $n \in \omega$  に対してある  $\delta < \lambda$  が存在して,  $\delta \rightarrow (\kappa)_\tau^n$  が成立する

タイプの列  $p_1(x_1) \subseteq p_2(x_1, x_2) \subseteq \dots$  で次を満たすものを  $n$  に関する帰納法で構成する.

- $p_n \in S_n(A)$
- 任意の  $\kappa < \lambda$  に対してある  $J \in [I]^\kappa$  が存在して, 任意の  $i_1 < \dots < i_n \in J$  に対して  $\text{tp}((a_{i_1}, \dots, a_{i_n})/A) = p_n$  が成立する

$(b_i)_{i \in \omega}$  を  $\bigcup_{n \in \omega} p_n$  の実現として取れば  $A$ -indiscernible となり欲しいものとなっている.

$p_{n-1}$  まで構成したとする.  $\kappa < \lambda$  を任意に取る.  $\delta < \lambda$  を  $\delta \rightarrow (\kappa)_\tau^n$  を満たすように取る. また構成より  $J \in [I]^\delta$  を任意の  $i_1 < \dots < i_{n-1} \in J$  に対して  $\text{tp}((a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}})/A) = p_{n-1}$  が成立するように取る.  $\delta \rightarrow (\kappa)_\tau^n$  を用いて,  $K \in [J]^\kappa$  と  $p_n^\kappa$  を任意の  $i_1 < \dots < i_n \in K$  に対して  $\text{tp}((a_{i_1}, \dots, a_{i_n})/A) = p_n^\kappa$  が成立するように取る. このとき  $\tau < \text{cf}(\lambda)$  より, ある  $p$  が存在して cofinally many な  $\kappa$  について  $p = p_n^\kappa$  が成立する. この  $p$  を  $p_n$  として取れば良い.  $\square$

**補題 2.18.**  $p \in S(B)$  は  $A$  上 fork しないと仮定する. このとき長さが無限の  $A$  上の Morley sequence in  $p$  で  $B$ -indiscernible となるものが存在する.

特に  $T$  が simple のとき任意の  $p \in S(A)$  に対して, 長さが無限の  $A$  上の Morley sequence in  $p$  が存在する.

**証明.** non-forking extension を取ることによって一般性を損なうことなく  $A \subseteq B$  と仮定して良い.

$a_0$  を  $p_0 = p$  の実現として取る,  $p_1 \in S(Ba_0)$  を  $p_0$  の non-forking extension とし,  $p_1$  を  $p_1$  の実現として取る. この操作を繰り返すことによって任意の  $\lambda \in \text{ON}$  に対して  $(a_i)_{i < \lambda}$  を  $a_i \downarrow_A B\{a_j \mid j < i\}$  を満たすように取れる. 命題 2.17 より  $B$ -indiscernible  $(b_j)_{j \in \omega}$  を取る. これは条件を満たすものになっている.  $\square$

**補題 2.19.**  $T$  を simple とする.  $\pi(x, y)$  を  $A$  上のタイプとする.  $(b_i)_{i \in \omega}$  を  $A$  上の Morley sequence とし,  $\bigcup_{i \in \omega} \pi(x, b_i)$  は consistent と仮定する.

このとき  $\pi(x, b_0)$  は  $A$  上 divide しない.

**証明.** the Standard lemma より任意の全順序  $I$  について,  $A$  上の Morley sequence in  $\text{tp}(b_0/A)$  で  $\Sigma(x) = \bigcup_{i \in I} \pi(x, b_i)$  が consistent となるものが取れる.

$I$  を  $|T|^+$  の逆順序として取る.  $\Sigma(x)$  の実現を  $c$  とする. 命題 2.5 より  $i_0$  を  $\text{tp}(c/A \cup \{b_i \mid i \in I\})$  が  $A \cup \{b_j \mid j > i_0\}$  上 divide しないように取る. 命題 2.14 より,  $\text{tp}(\{b_i \mid i > i_0\}/Ab_{i_0})$  は  $A$  上 divide しない. 命題 1.12 より  $\text{tp}(c \cup \{b_i \mid i > i_0\}/Ab_{i_0})$  は  $A$  上 divide しない. よって  $\pi(x, b_{i_0})$  は  $A$  上 divide しない.  $b_{i_0}$  は  $\text{tp}(b_0/A)$  の実現より,  $\pi(x, b_0)$  は  $A$  上 divide しない.  $\square$

以下, Simple theory において良い性質が成り立つことを示す.

**命題 2.20.**  $T$  を simple とする. このとき  $\pi(x, b)$  が  $A$  上 divide することと  $A$  上 fork することは同値.

**証明.**  $\pi(x, b)$  は  $A$  上 divide しないと仮定する.  $\pi(x, b) \models \bigvee_{l < d} \varphi_l(x, b) = \psi(x, b)$  とする.

Simplicity より  $(b_i)_{i \in \omega}$  を  $A$  上の Morley sequence in  $\text{tp}(b/A)$  とする.  $\pi(x, b)$  は  $A$  上 divide しないことから  $\{\psi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$  は consistent となる. よってある無限部分集合  $I \subseteq \omega$  が存在して  $\{\varphi_l(x, b_i) \mid i \in I\}$  は consistent となる. 補題 2.19 より  $\varphi_l(x, b)$  は  $A$  上 divide しない. よって  $\pi(x, b)$  は  $A$  上 fork しない.  $\square$

**命題 2.21** (Symmetry).  $T$  を simple とする. このとき  $A \downarrow_C B$  と  $B \downarrow_C A$  は同値.

**証明.**  $A \downarrow_C B$  を仮定する. 任意の  $a \in [A]^{<\omega}$  と  $b \in [B]^{<\omega}$  に対して,  $b \downarrow_C a$  を示せば十分である. 仮定より  $a \downarrow_C b$  が成立し, 命題 2.18 より,  $(a_i)_{i \in \omega}$  を  $C$  上の Morley sequence in  $\text{tp}(a/bC)$  かつ  $bC$ -indiscernible を満たすものとしてとる.  $p(x, y) = \text{tp}(ab/C)$  とする. このとき  $\bigcup_{i \in \omega} p(a_i, y)$  は consistent. よって補題 2.19 より,  $p(a, y)$  は  $C$  上 divide しない.  $\square$

**系 2.22.**  $T$  を simple とする.  $B \subseteq C \subseteq D$  とする. このとき

$$A \downarrow_B D \leftrightarrow A \downarrow_B C \wedge A \downarrow_C D$$

が成立する. <sup>\*20</sup>

**証明.**  $(\rightarrow)$  定義より明らか, これは  $T$  を simple でなくても成立する.

$(\leftarrow)$  これは命題 1.12 の言い換えである.  $\square$

**系 2.23.** 列  $(a_i)_{i \in I}$  が  $A$  上 independent であることは  $I$  の順序によらない.

**証明.**  $i \in I$  を任意に取る.  $J, K \subseteq I$  を  $J < K$  となるように任意に取る.

$a_J = \{a_j \mid j \in J\}$ ,  $a_K = \{a_k \mid k \in K\}$  とおく.  $a_i \downarrow_A a_J a_K$  を示す.

命題 2.14 より  $a_K \downarrow_A a_J a_i$  が成立する. 特に  $a_K \downarrow_A A a_J a_i$  が成立し, Monotonicity より  $a_K \downarrow_{A a_J} A a_J a_i$  が成立し  $a_K \downarrow_{A a_J} a_i$  が成立する. Symmetry より  $a_i \downarrow_{A a_J} a_K$  が成立する. また independence より  $a_i \downarrow_A a_J$  が成立し, Transitivity より  $a_i \downarrow_A a_J a_K$  が成立する.  $\square$

**補題 2.24.**  $T$  を simple とする.  $I$  を  $A$  上の長さ無限の Morley sequence とする.

このとき  $I$  が  $Ac$ -indiscernible ならば  $c \downarrow_A I$  が成立する.

**証明.** 一般性を損なうことなく  $I = (a_i)_{i \in \omega}$  として良い.  $\varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1}) \in \text{tp}(c/AI)$  を任意に取る.  $b_i = (a_{ni}, \dots, a_{ni-i+1})$  とすると命題 2.14 から  $(b_i)_{i \in \omega}$  は  $A$  上の Morley sequence となる. また取り方より  $\{\varphi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$  は consistent. よって補題 2.19 より  $\varphi(x, b_0)$  は  $A$  上 divide しない.  $\square$

## 参考文献

- [1] Tent, K., and Ziegler, M. (2012). A Course in Model Theory (Lecture Notes in Logic). Cambridge: Cambridge University Press.

---

<sup>\*20</sup>  $\leftarrow$  を Transitivity,  $\rightarrow$  を Monotonicity という.