決定性公理の無矛盾性

YasudaYasutomo

2020 年 2 月 24 日

決定性公理の無矛盾性証明をする．無限個の Woodin 基数とそれらより大きい可測基数の存在を仮定したとき $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成立することを示す．tree production lemma については [1] を参考にしている．$\mathbb{R}^{\#}$ については [6] を参考にすると良い．

1 Symmetric extension

M を ZFC の内部モデル，$\alpha \in M$ を順序数とする．$(M, \mathrm{Coll}(\omega, <\alpha))$-generic G に対して，

$$\tau = \bigcup\{\mathbb{R} \cap M[G \cap \mathrm{Coll}(\omega, <\beta)] \mid \beta < \alpha\}$$

と定義する．このとき $N_G = M(\tau)$ と表すことにする．内部モデル N が M の $\mathrm{Coll}(\omega, <\alpha)$ による symmetric extension であるとは次を満たすことをいう．

- $M \subseteq N$
- ある M の generic extension において $N \equiv_M N_G$ を満たす．ただし G は $(M, \mathrm{Coll}(\omega, <\alpha))$-generic.

次は symmetric extension の十分条件を与える．

補題 1.1. M を ZFC の内部モデルとし, δ を M において強極限的とする．$\tau \subseteq \mathbb{R}$ が次の条件を満たすと仮定する．

1. 任意の $x \in \tau$ に対してある半順序 $\mathbb{P} \in M_\delta$ と $(M, \mathbb{P})$-generic g が存在して $x \in M[g]$ を満たす．
2. 任意の $x, y \in \tau$ に対して $\mathbb{R} \cap M(x, y) \subseteq \tau$ を満たす．
3. $\delta = \sup\{\omega_1^{M[x]} \mid x \in \tau\}$

このとき $\mathbb{R} \cap M(\tau) = \tau$ かつ $M(\tau)$ は M の $\mathrm{Coll}(\omega, <\delta)$ による symmetric extension となる．

証明. $\mathbb{P}$ をある $\alpha < \delta$ と $x \in \tau$ が存在して $M[x]$ において $(M, \mathrm{Coll}(\omega, <\alpha))$-generic となるような g 全体の集合とする．順序は包含によって定める．このとき $\mathbb{P} \in M(\tau)$ となる．δ は強極限的であり条件 3 より $\mathbb{P}$ は空でない．$G_{\mathbb{P}}$ を $(M(\tau), \mathbb{P})$-generic とし, $H = \bigcup G_{\mathbb{P}}$ とする．

主張. H は $(M, \mathrm{Coll}(\omega, <\delta))$-generic.

$D \in M$ を $\mathrm{Coll}(\omega, <\delta)$-稠密とする．$g \in \mathbb{P}$ を $(M, \mathrm{Coll}(\omega, <\eta))$-generic とする．$\{p \cap \mathrm{Coll}(\omega, <\eta) \mid p \in D\}$ は $\mathrm{Coll}(\omega, <\eta)$-稠密より $\eta' < \delta$ と $p \in D \cap \mathrm{Coll}(\omega, <\eta')$ を $p \cap \mathrm{Coll}(\omega, <\eta) \in g$ となるように取る．$2^{\eta'} < \delta$ より $y \in \tau$ と $(M, \mathrm{Coll}(\omega, <\eta'))$-generic $g' \in M[y]$ を g の拡張で $p \in g'$ を満たすように取る．$G_{\mathbb{P}}$ の

genericity より良い. ⊣ claim.

$\mathbb{R}^{M(\tau)} \subseteq \tau$ と条件 3 より各 $\alpha < \delta$ において $H \cap \mathrm{Coll}\,(\omega, < \alpha) \in M(\tau)$ が成立することから

$$\bigcup\{\mathbb{R} \cap M[H \cap \mathrm{Coll}\,(\omega, < \alpha)] \mid \alpha < \delta\} \subseteq \tau$$

が成立する.

主張. 任意の $x \in \tau$ に対してある $\alpha < \delta$ が存在して $x \in M[H \cap \mathrm{Coll}\,(\omega, < \alpha)]$ が成立する.

$M(\tau)$ で作業する. $x \in \tau$ を任意に取る. $D = \{g \in \mathbb{P} \mid x \in M[g]\}$ が $\mathbb{P}$-稠密であることを言えば良い. $g \in \mathbb{P} \cap M[y]$ を $(M, \mathrm{Coll}\,(\omega, < \eta))$-generic とする. $x \notin M[g]$ として良い. このときある x はある $\mathbb{Q} \in (M[g])_\delta$ での拡大に属す. 条件 3 より $z \in \tau$ を $M[z]$ において $2^{|\mathbb{Q}|}$ が可算かつ $x, y \in M[z]$ を満たすように取る. このとき $M[z]$ において $(M, \mathrm{Coll}\left(\omega, < 2^{|\mathbb{Q}|}\right))$-generic g' を g の拡張で $x \in M[g']$ を満たすように取れる. ⊣ claim.

よって示された. □

補題 1.2. $\xi \in \mathrm{ON}$, δ を Woodin 基数, κ を極限順序数とし, $\xi < \delta < \kappa$ とする. 任意の可算な $Y \prec V_\kappa$ で $\xi, \delta \in Y$ を満たすものに対してある可算な $Y' \prec V_\kappa$ が存在して次を満たす.

- $Y \subseteq Y'$
- $Y' \cap V_\xi = Y \cap V_\xi$
- 任意の $\mathbb{Q}_{<\delta}$-前稠密な $D \in Y'$ に対して, ある $d \in D \cap Y'$ が存在して $Y' \cap (\cup d) \in d$ を満たす. [*1] □

Woodin 基数の極限でない Woodin 基数を後続 Woodin 基数と呼ぶことにする.

補題 1.3. δ を limit of Woodin とする. a を可算な $X \prec V_{\delta+1}$ で次を満たすもの全体の集合とする.

- ある $\gamma < \delta$ が存在して, 全ての後続 Woodin 基数 $\lambda \in (\gamma, \delta) \cap X$ に対して X は X に属する全ての $\mathbb{Q}_{<\lambda}$-前稠密集合を capture する.

このとき任意の $Z \in \mathbb{Q}_{<\delta}$ に対して $a_Z = \{X \in a \mid Z \in X \wedge X \cap (\cup Z) \in Z\}$ は stationary.

証明. $Z \in \mathbb{Q}_{<\delta}$ と $F\colon V_{\delta+1}^{<\omega} \to V_{\delta+1}$ を任意に取る. 可算な $Y \prec V_{\delta+2}$ を $H, Z \in Y$, $Y \cap (\cup Z) \in Z$, $Y \cap V_{\delta+1} \in a$ を満たすように構成すれば良い. 到達不能基数 $\gamma < \delta$ を $Z \in \mathbb{Q}_{<\gamma}$ を満たすように取る. W を (γ, δ) に属す後続 Woodin 基数全体とする. $V_{\delta+\omega}$ の可算初等部分モデルの族 $\langle Y_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ と $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \omega\rangle \in W^{\omega_1}$ を各 $\alpha < \omega_1$ に対して次を満たすように構成する.

- $\{Z, H, \gamma\} \subseteq Y_0$, $Y_0 \cap (\cup Z) \in Z$
- $Y_0 \subseteq Y_\alpha$, $Y_0 \cap V_\gamma = Y_\alpha \cap V_\gamma$
- η_α は $Y_\alpha \cap W$ の α 番目の元となる.
- 任意の $\beta \in (\alpha, \omega_1)$ に対して, $\xi = \gamma \cup \sup(W \cap \eta_\alpha)$ とすると $Y_\beta \cap V_\xi = Y_\alpha \cap V_\xi$ を満たす.
- λ を $Y_\alpha \cap W$ の最初の α 個の元のうちの一つとすると, Y_α は Y_α に属する全ての $\mathbb{Q}_\lambda$-前稠密部分集合を capture する.

Y_0 は Z の stationarity より取れる. 極限順序数のときは和集合を取る. 後続順序数のときは補題 1.2 を用い

[*1] 後半部分を Y' captures D という.

て可算な $Y_{\alpha+1} \prec V_{\delta+\omega}$ を次を満たすように取れば良い.

- $Y_\alpha \subseteq Y_{\alpha+1}$
- $Y_\alpha \cap V_{\gamma \cup \sup(W \cap \eta_\alpha)} = Y_{\alpha+1} \cap V_{\gamma \cup \sup(W \cap \eta_\alpha)}$
- $Y_{\alpha+1}$ は $Y_{\alpha+1}$ に属する任意の $\mathbb{Q}_{<\eta_\alpha}$-前稠密部分集合を capture している.

構成より $\langle Y_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ と $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \omega \rangle$ は条件を満たすことは良い. このときある $\alpha < \omega_1$ が存在して $Y_\alpha \cap V_{\delta+1} \in a$ となることを示す. もし存在すれば $Y = Y_\alpha \cap V_{\delta+2}$ が求める Y となる. このような α が存在しないと仮定して矛盾を導く. このとき $Y^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$ とすると後続 Woodin 基数 $\lambda \in (\gamma, \delta) \cap Y^*$ を任意の $\alpha < \omega_1$ に対して λ は $Y_\alpha \cap W$ の最初の α 個に属さないように取れる. λ をこのようなもので最小とする. $\lambda \in Y_{\alpha'}$ とする. このとき構成より $Y^* \cap W \cap \lambda$ の順序型は ω_1 となっている. ω_1 は正則より $\alpha < \alpha'$ を $Y_\alpha \cap W \cap \lambda$ が $Y^* \cap W \cap \lambda$ の最初の α 個からなるように取れる. このとき $\lambda = \eta_\alpha$ となり矛盾. □

次が重要である.

定理 1.4. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする. このとき V の generic extension のおいてある $(V, \mathrm{Coll}(\omega, <\delta))$-generic H が存在して

$$\mathbb{R}^* = \bigcup \{\mathbb{R} \cap V[H \cap \mathrm{Coll}(\omega, <\alpha)] \mid \alpha < \delta\}$$

としたとき, 初等埋め込み $j \colon L(\mathbb{R}^V) \to L(\mathbb{R}^*)$ が存在する.

証明. a を補題 1.3 のものとする. $(V, \mathbb{P}_{<\kappa})$-generic G を $a \in G$ を満たすように取る. $j \colon V \to (M, E) \subseteq V[G]$ を generic embedding とする. [*2]κ は可測基数より $j(\kappa) = \kappa$ が成立する. Normality と genericity よりある $\gamma_G < \lambda$ と a' を $X \in a$ で次を満たすもの全体の集合とすると $a' \in G$ となる.

- $\gamma_G \in X$
- 全ての後続 Woodin 基数 $\lambda \in (\gamma_G, \delta) \cap X$ に対して X は X に属する全ての $\mathbb{Q}_\lambda$-前稠密集合を capture する.

W を (γ_G, δ) に属す後続 Woodin 基数全体の集合とする. 各 $\xi \in W$ に対して $G_\xi = G \cap \mathbb{Q}_{<\xi}$ とすると $a' \in G$ より G_ξ は $(V, \mathbb{Q}_{<\xi})$-generic となる. よって各 $\xi \in W$ に対して $j_\xi \colon V \to M_\xi \subseteq V[G_\xi]$ を generic embedding とする. これは整礎となる. $k_\xi \colon M_\xi \to (M, E)$ を factor map とすると $j = k_\xi \circ j_\xi$ を満たす. また各 $\xi_0 < \xi_1 \in W$ に対して $j_{\xi_0,\xi_1} \colon M_{\xi_0} \to M_{\xi_1}$ を $j_{\xi_0,\xi_1}([f]_{G_{\xi_0}}) = [f]_{G_{\xi_1}}$ と定義する. (M^*, E^*) を $\langle M_{\xi_0}, j_{\xi_0}, j_{\xi_0,\xi_1} \mid \xi_0, \xi_1 \in W, \xi_0 < \xi_1 \rangle$ の direct limit とする. 次のような図式となっている.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "j"] \arrow[d, "j_\xi"'] \arrow[drr, "j^*_\xi"] & & (M, E) \\
M_\xi \arrow[rr, "j^*"'] & & (M^*, E^*) \arrow[u, "k^*"']
\end{tikzcd}$$

[*2] このとき (M, E) は整礎とは限らないことに注意.

今 $\mathbb{R}^{M^*} = \bigcup\{\mathbb{R}^{M_\xi} \mid \xi \in W\}$ となっている．また各 $\xi \in W$ について $\mathbb{R}^{M_\xi} = \mathbb{R}^{V[G\cap V_\xi]}$ を満たすことから補題 1.1 より $V(\mathbb{R}^{M^*})$ は V の $\mathrm{Coll}\,(\omega, <\delta)$ による symmetric extension となる．$(V, \mathrm{Coll}\,(\omega, <\delta))$-generic H を $\mathbb{R}^{M^*} = \bigcup\{\mathbb{R} \cap V[H \cap \mathrm{Coll}\,(\omega, <\alpha)] \mid \alpha < \delta\}$ を満たすように取る．$j^*(\kappa) = \kappa$ より初等埋め込み $j^* \restriction_{L_\kappa(\mathbb{R}^V)} \colon L_\kappa(\mathbb{R}^V) \to L_\kappa(\mathbb{R}^{M^*})$ を得る．Lévy-Solovay の定理より κ は $V[H]$ でも可測基数であるから $(\mathbb{R}^{M^*})^\# \in V[H]$ を満たす．また κ は limit of comletely Jónsson より κ の下に cofinaly many に $j^*(\gamma) = \gamma$ を満たす comletely Jónsson が存在する．よって $(\mathbb{R}^V)^\# \subseteq (\mathbb{R}^{M^*})^\#$ が成立する． □

系 1.5. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする．$\mathbb{P} \in V_\delta$ を半順序とする．$(V, \mathbb{P})$-generic G に対して $(\mathbb{R}^\#)^V = (\mathbb{R}^\#)^{V[G]} \cap V$ が成立する．

2 Consistency of Axiom of Determinacy

tree production lemma を用いて十分に巨大基数が存在するとき $\mathbb{R}^\#$ が universally Baireness を持つことを示す．$L(\mathbb{R})$ 内の実数の集合は全て $\mathbb{R}^\#$ に Wadge reducible であることから $L(\mathbb{R})$ 内の実数の集合の tree representation を得る．

φ を論理式とし a をパラメタとする．ここで a は特に限定しない．$X \prec_n V$ を十分な初等性を持った可算初等部分構造で $\kappa, a \in X$ とする．*3 $\pi\colon X \simeq N$ を推移的崩壊とする．このとき X が (φ, a, κ)-generically correct であると任意の半順序 $\mathbb{P} \in H^N_{\pi(\kappa)}$ と $(N, \mathbb{P})$-generic $g \in V$ と任意の $x \in N[g] \cap \mathbb{R}$ に対して次が成立するときのことをいう．

$$N[g] \models \varphi[x, \pi(a)] \Leftrightarrow V \models \varphi[x, a]$$

補題 2.1. $\varphi(v_0, v_1)$ を論理式, a をパラメタ, κ を無限基数とする．推移的な M と σ は次を満たすとする．

- $H_\kappa \cup \{\kappa\} \subseteq M$
- $\sigma\colon M \to V$ は十分な初等性を持ち, $a \in \mathrm{ran}(\sigma)$ かつ $\mathrm{cp}\,(\sigma) > \kappa$ を満たす．

a を可算な $X \prec M$ で σ"X が (φ, a, κ)-generically correct となるもの全体の集合とし, a が $\mathcal{P}_{\omega_1}(M)$ の club を含むと仮定する．このときある木 T, U が存在して任意の $\mathbb{P} \in H_\kappa$ と $(V, \mathbb{P})$-generic G に対して,

$$V[G] \models p[T] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \varphi[x, a]\} \wedge p[U] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \neg\varphi[x, a]\}$$

が成立する．

証明. $F\colon M^{<\omega} \to M$ を $X \in \mathcal{P}_{\omega_1}(M)$ に対して F"$X^{<\omega} \subseteq X$ ならば $X \prec M$ かつ σ"X が (φ, a, κ)-generically correct となるように取る．$\sigma(a^*) = a$ とする．$\omega^{<\omega}$ の標準的な数え上げ $\langle r_n \mid n \in \omega\rangle$ を固定する．$\omega \times M \times H_\kappa$ 上の木 T を次の満たす (s, t, u) 全体の集合とする．

1. $s \in \omega^{<\omega}$
2. $t \in M^{<\omega}$
3. $2m + 2 < \mathrm{lh}\,(s)$ ならば $t(2m + 2) = F(t \circ r_m)$ を満たす．
4. $\mathrm{lh}\,(s) > 0$ ならば $t(0) = \mathbb{P} \in H_\kappa$ は半順序となる．
5. $2m + 3 < \mathrm{lh}\,(s)$ ならば $t(2m + 3) = u(m)$ を満たす．

*3 これは reflection で十分大きい fragment を取ってくれば良い．

6. $\{u(m) \mid u < \mathrm{lh}\,(s)\}$ は共通の拡大を持つ $\mathbb{P}$ の部分集合となる.
7. $2m+2 < \mathrm{lh}\,(s)$ かつ $t(m)$ が $\mathbb{P}$-稠密部分集合ならば $u(2m+2) \in t(m)$ を満たす.
8. $\mathrm{lh}\,(s) > 1$ ならば $t(1)$ は $\mathbb{P}$-name で $u(0) \Vdash t(1)\colon \omega \to \omega$ を満たす.
9. $2m+3 < \mathrm{lh}\,(s)$ ならば $u(2m+3) \Vdash t(1)(m) = s(m)$ を満たす.
10. $\mathrm{lh}\,(s) > 1$ ならば $u(1) \Vdash \varphi[t(1), \check{a^*}]$ を満たす.

$\omega \times M \times H_\kappa$ 上の木 U を $\neg\varphi[t(1), \check{a^*}]$ に変えて同様に定義する.

主張. 次が成立する.

1. $p[T] \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi[x,a]\}$
2. $p[U] \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \neg\varphi[x,a]\}$

$x \in p[T]$ を任意に取る. $(x,f,g) \in [T]$ とし $X = \mathrm{ran}(f)$ とする. このとき T の定義の 3 より $F\text{''}X^{<\omega} \subseteq X$ を満たす. よって $X \prec M$ かつ $\sigma\text{''}X$ が (φ,a,κ)-generically correct となる. 構成より半順序 $\mathbb{P} \in X \cap H_\kappa$ と $(X,\mathbb{P})$-generic G と $\mathbb{P}$-name $\tau \in X$ を次を満たすように取れる.

- ある $p \in G$ が存在して $p \Vdash \dot{\tau}\colon \omega \to \omega$ を満たす.
- 全ての $n \in \omega$ に対してある $p_n \in G$ が存在して $p_n \Vdash \dot{\tau}(n) = x(n)$ を満たす.
- ある $p \in G$ が存在して $p \Vdash \varphi[\dot{\tau}, \check{a^*}]$ を満たす.

σ は十分に初等的であるから $\sigma\text{''}X$ もこれらを満たす. $\sigma\text{''}X$ が (φ,a,κ)-generically correct より $V \models \varphi[x,a]$ となる. U に関しても同様. $\dashv$ claim.

半順序 $\mathbb{P} \in H_\kappa$ を任意に取る. G を $(V,\mathbb{P})$-generic とする.

主張. 次が成立する.

1. 任意の $x \in \mathbb{R}^{V[G]}$ に対して $V[G] \models \varphi[x,a]$ ならば $x \in p[T]^{V[G]}$ が成立する.
2. 任意の $x \in \mathbb{R}^{V[G]}$ に対して $V[G] \models \neg\varphi[x,a]$ ならば $x \in p[U]^{V[G]}$ が成立する.

T と U の構成に沿って path をうまく取れば良い. $\dashv$ claim.

絶対性から T と U は求めるものとなる. よって示された. $\square$

無限基数 κ について G が V 上の $<\kappa$-generic であるとはある半順序 $\mathbb{P}$ で $|\mathbb{P}| < \kappa$ であるものが存在して, G は $(V,\mathbb{P})$-generic であるときのことをいう.

定理 2.2 (Tree production lemma, Woodin)**.** $\varphi(v_0,v_1)$ を論理式, a をパラメタ, δ を Woodin 基数とする. 次が成立すると仮定する.

1. G を V 上の $<\delta$-generic, H を $V[G]$ 上の $<\delta^+$-generic とするとき任意の $x \in \mathbb{R} \cap V[G]$ に対して次が成立する.
$$V[G] \models \varphi[x,a] \Leftrightarrow V[G][H] \models \varphi[x,a]$$
2. G を $(V,\mathbb{Q}_{<\delta})$-generic, $j\colon V \to M \subseteq V[G]$ を generic embedding とする. このとき任意の $x \in \mathbb{R} \cap V[G]$ に対して次が成立する.
$$V[G] \models \varphi[x,a] \Leftrightarrow M \models \varphi[x,j(a)]$$

このときある木 T, U が存在して V 上の $<\delta$-generic G に対して,

$$V[G] \models p[T] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \varphi[x,a]\} \wedge p[U] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \neg\varphi[x,a]\}$$

が成立する. 特に $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi[x,a]\}$ は δ-universally Baire となる.

証明. 各 $\kappa < \delta$ に対して T_κ, U_κ を V 上の $<\kappa$-generic に対して定理の主張が成立するように構成すれば良い. $\kappa < \delta$ を任意に取る. 推移的な M, σ, a^* を次を満たすように取る.

- $H_{\kappa^+} \subseteq M$
- $|M| < \delta$
- $\sigma\colon M \to V$ は十分な初等性を持ち $a = \sigma(a^*)$ かつ $\sigma\restriction_{\kappa^+} = \mathrm{id}$ を満たす.

$a \subseteq \mathcal{P}_{\omega_1}(M)$ を可算な $X \prec M$ で σ"X が (φ, a, κ)-generically correct となるような全体の集合とする. 補題 2.1 より a が club を含むことを言えばよい. $(\mathcal{P}_{\omega_1}(M) \setminus a) \in \mathbb{Q}_{<\delta}$ と仮定して矛盾を導く. $(V, \mathbb{Q}_{<\delta})$-generi G を $(\mathcal{P}_{\omega_1}(M) \setminus a) \in G$ となるように取る. $j\colon V \to N \subseteq V[G]$ を generic embedding とする. j"$M \in j(\mathcal{P}_{\omega_1}(M) \setminus a)$ かつ j"$M \prec j(M)$ より $j(\sigma)$"j"M は N において $(\varphi, j(a), j(\kappa))$-generically correct でない. $j(\sigma)$"j"M の推移的崩壊は M であるから, M 上の $<\kappa$-generic $g \in N$ を任意にとり $x \in \mathbb{R} \cap M[g]$ としたとき,

$$\begin{aligned} M[g] \models \varphi[x, a^*] &\Leftrightarrow V[g] \models \varphi[x,a] \\ &\Leftrightarrow V[G] \models \varphi[x,a] \\ &\Leftrightarrow N \models \varphi[x, j(a)] \end{aligned}$$

が成立する. よって $j(\sigma)$"j"M は N において $(\varphi, j(a), j(\kappa))$-generically correct となりこれは矛盾. □

定理 2.3. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする. このとき $\mathbb{R}^{\#}$ は δ-universally Baire となる.

証明. Tree production lemma を用いる. $\varphi(v_0) \equiv v_0 \in \mathbb{R}^{\#}$ を考える. これは系 1.5 から Woodin 基数 $\delta' < \delta$ に対して Tree production lemma の条件を満たす. よって $\mathbb{R}^{\#}$ は δ-universally Baire となる. □

系 2.4. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする. このとき $L(\mathbb{R})$ 内の全ての実数の集合は $<\delta$-weakly homogeneously Suslin となる.

よって次を得る.

定理 2.5 (Martin-Steel-Woodin)**.** 無限個の Woodin 基数とそれらより大きい可測基数の存在を仮定する. このとき $L(\mathbb{R})$ において AD が成立する. □

この巨大基数の仮定は弱めることができる. Woodin によって次の無矛盾等価性が示されている.

定理 2.6 (Woodin)**.** 次は無矛盾等価.

1. ZF + AD
2. ZFC + ω 個の Woodin 基数の存在

参考文献

[1] John R. Steel, The Derived Model Theorem, 2008.

[2] P. Larson, The stationary tower, University Lecture Series, American Mathematical Society, 2004.

[3] Akihiro Kanamori, The higher infinite, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[4] W. Hugh Woodin, Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees,Proc. Nat. Acad. Sci. USA 85, 6587-6591.

[5] D.A. Martin and J.R. Steel, A Proof of Projective Determinacy, Journal of the American Mathematical Society bf 2 (1989), 71-125.

[6] Solovay R.M. The independence of DC from AD. In: Kechris A.S., Moschovakis Y.N. (eds) Cabal Seminar 76 - 77. Lecture Notes in Mathematics, vol 689. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978.

[7] van Wesep R. Wadge degrees and descriptive set theory. In: Kechris A.S., Moschovakis Y.N. (eds) Cabal Seminar 76-77. Lecture Notes in Mathematics, vol 689. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978.