Square in L

YasudaYasutomo

2019 年 12 月 19 日

L で $\square_\kappa$ が成り立つことを示す. $\Diamond_{\kappa^+}$ と合わせて κ^+-Suslin tree が存在することを導く.
最後に $0^\sharp$ と L の関係などを簡単にみる.

1 Square in L

定理の証明では fine structure を使うが, 今回はあまり深くは立ち入らない.
この記事では主定理の証明以外は fine structure を使わない.

定義 1.1. 集合 A に対して, A の rudimentary function による閉包を $\mathrm{rud}(A)$ と表す.

定義 1.2 (J-階層)**.** J-階層を次のように定義する.

- $J_0 = \emptyset$
- $J_{\alpha+\omega} = \mathrm{rud}(J_\alpha \cup \{J_\alpha\})$
- 極限順序数 λ に対して, $J_{\omega\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} J_{\omega\alpha}$
- $L = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{ON}} J_{\omega\alpha}$

定理 1.3 (Gödel)**.** $L \models \mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$

定義 1.4. J-structure とは amenable structure $\langle J_\alpha, B\rangle$ と定義する. ただし α は極限順序数.

J-structure M に対して, 整列順序 $<_M$ や Σ_1-充足関係, Σ_1-Skolem 関数 h_M が一様に Σ_1 で定義可能である.

定義 1.5. κ を非可算正則基数とする. $S \subseteq \kappa$ とする.

- $\Diamond_\kappa(S)$-列 $\langle A_\xi \mid \xi \in S\rangle$ とは次を満たす列のことである.
  1. 全ての $\xi \in S$ に対して, $A_\xi \subseteq \xi$ が成立する.
  2. 全ての $A \subseteq \kappa$ について, $\{\xi \in S \mid A \cap \xi = A_\xi\}$ は stationary in κ.
- $\Diamond_\kappa(S)$ とは $\Diamond_\kappa(S)$-列が存在するという主張である.
- $\Diamond_\kappa$ とは $\Diamond_\kappa(\kappa)$ のことである.

例えば $\Diamond_{\omega_1}$ は CH を導くことはとても簡単に示せる.
S が stationary のとき $\Diamond_\kappa(S)$ が L において成立する.

定理 1.6 (Jensen)**.** $V = L$ を仮定する. 任意の非可算正則基数 κ とその stationary $S \subseteq \kappa$ について $\Diamond_\kappa(S)$

が成立する.

アイデアとしては L の整列順序を使って最小の反例を取り続ける, それが $\diamondsuit_\kappa$-列となっていることは Condensation から従う.

証明. $S \subseteq \kappa$ を stationary とする.

$\langle (B_\xi, C_\xi) \mid \xi \in S \rangle$ を次のように帰納的に構成する. $\xi \in S$ において (B_ξ, C_ξ) を次を満たすもので $<_{L_\kappa}$ において最小を取る.

1. $(B, C) \in J_\kappa$
2. $B \subseteq \xi$
3. C は club in ξ
4. $\{\bar{\xi} \in S \cap \xi \mid B_{\bar{\xi}} = b \cap \bar{\xi}\} \cap C = \emptyset$

存在しないときは $(\emptyset, \emptyset)$ とする.

$\langle B_\xi \mid \xi \in S \rangle$ が $\diamondsuit_\kappa$-列となっていることを示す. そうではないとして, 次を満たす $<_L$-least な反例 (B, C) を取る.

- $B \subseteq \kappa$
- C は club in κ
- $\{\xi \in S \mid B_\xi = B \cap \xi\} \cap C = \emptyset$

$(B, C) \in J_\alpha$ とする. 初等埋め込み $\pi \colon J_{\bar{\alpha}} \to J_\alpha$ を次を満たすように取る.

- $\lambda = (\pi^{-1})(\kappa)$ は π の crtical point.
- $\{S, B, C\} \subseteq \mathrm{ran}(\pi)$
- $|J_{\bar{\alpha}}| < \kappa$
- $\xi \in S \cap C$

また $\bar{S} = \pi^{-1}(S) = S \cap \xi$, $\bar{B} = \pi^{-1}(B) = B \cap \xi$, $\bar{C} = \pi^{-1}(C) = C \cap \xi$ とする.

初等性より, $(B \cap \xi, C \cap \xi)$ は次を満たす $<_{J_{\bar{\alpha}}}$-least なものとなっている.

- $B \cap \xi \subseteq \xi$
- $C \cap \xi$ は club in ξ
- $\{\bar{\xi} \in S \cap \xi \mid B_{\bar{\xi}} = b \cap \bar{\xi}\} \cap C \cap \xi = \emptyset$

構成より $(B_\xi, C_\xi) = (B \cap \xi, C \cap \xi)$ となり矛盾. $\square$

定義 1.7. κ を無限基数とする. $S \subseteq \kappa^+$ とする.

- $\square_\kappa(S)$-列 $\langle C_\nu \mid \nu < \kappa^+ \rangle$ とは $\kappa < \nu < \kappa^+$ なる $\nu \in \mathrm{Lim}$ に対して次が成立する列のことである.
  1. C_ν is club in ν of otp $\leq \kappa$.
  2. $\forall \mu \in \mathrm{Lim}(C_\nu)(C_\nu \cap \mu = C_\mu \land \mu \notin S)$
- $\square_\kappa(S)$ とは $\square_\kappa(S)$-列が存在するという主張である.
- $\square_\kappa$ とは $\square_\kappa(\emptyset)$ のことである.

定理 1.8 (Jensen)**.** $V = L$ を仮定する. 任意の無限基数 $\kappa \geq \aleph_1$ に対して $\square_\kappa$ が成立する.

証明. ある club $C \subseteq \kappa^+$ と $\langle C_\nu \mid \nu \in C \wedge \mathrm{cf}(\nu) > \omega \rangle$ が存在して次を満たすことを示す.

- $\kappa < \nu < \kappa^+$ かつ $\nu \in \mathrm{Lim}$ ならば $C_\nu \subseteq \nu$ は club かつ $otp(C_\nu) \leq \kappa$ が成立する.
- $\forall \bar{\nu} \in \mathrm{Lim}(C_\nu)(C_{\bar{\nu}} = C_\nu \cap \bar{\nu})$

$C = \{\kappa < \nu < \kappa^+ \mid J_\nu \prec_{\Sigma_\omega} J_{\kappa^+}\}$ とすると κ^+ の club となる. 定義より $\nu \in C$ に対して, κ は J_ν の最大の基数.

$\nu \in C$ に対して, $\alpha(\nu)$ を ν が J_α において基数となるような最大の α とする, 存在しないとき ν と定義する. このとき acceptability から少し計算すると ultimate projectum は $\rho_\omega(J_{\alpha(\nu)}) = \kappa$ となることがわかる.

また $\nu \in C$ に対して, $n(\nu)$ を $\kappa = \rho_{n+1}(J_{\alpha(\nu)}) < \nu \leq \rho_n(J_{\alpha(\nu)})$ となる $n \in \omega$ と定義する.

$\nu \in C$ に対して, D_ν を次の条件を満たす $\bar{\nu}$ 全体の集合とする.

- $\bar{\nu} \in C \cap \nu$
- $n(\nu) = n(\bar{\nu})$
- ある weakly $r\Sigma_{n(\nu)+1}$-elementary embedding $\sigma_{\bar{\nu},\nu} \colon J_{\alpha(\bar{\nu})} \to J_{\alpha(\nu)}$ が存在して, $\sigma_{\bar{\nu},\nu} \restriction \bar{\nu} = \mathrm{id}$ かつ $\sigma_{\bar{\nu},\nu}(p_{n(\bar{\nu})+1}(J_{\alpha(\bar{\nu})})) = p_{n(\nu)+1}(J_{\alpha(\nu)})$ を満たす.
- $\bar{\nu} \in J_{\alpha(\bar{\nu})}$ ならば, $\nu \in J_{\alpha(\nu)}$ かつ $\sigma_{\bar{\nu},\nu}(\bar{\nu}) = \nu$ が成立する.

条件を満たすような weakly $r\Sigma_{n(\nu)+1}$-elementary embedding は一意であることは容易にわかる.

主張 1. $\nu \in C$ に対して次が成立する.

1. D_ν は閉.
2. $\mathrm{cf}(\nu) > \omega$ のとき, D_ν は非有界.
3. $\bar{\nu} \in D_\nu$ に対して, $D_\nu \cap \bar{\nu} = D_{\bar{\nu}}$ が成立する. □

各 $\nu \in C$ に対して, C_ν を次のように定義する. $\alpha = \alpha(\nu)$, $n = n(\nu)$ とする.

まず $\langle \eta_i \mid i \leq \theta(\nu) \rangle$, $\langle \xi_i \mid i < \theta(\nu) \rangle$ を次のように帰納的に定義する.

1. $\eta_0 = \min(D_\nu)$ とする.
2. $\eta_i < \nu$ まで構成したとする.
   ξ_i をある $j \in \omega$, $x \in [\xi]^{<\omega}$ が存在して, $h_{J_\alpha}^{n+1,p_{n+1}(J_\alpha)}(j,x) \notin \mathrm{ran}(\sigma_{\eta_i,\nu})$ となるような最小の ξ とする.
3. 次に η_{i+1} を全ての $j \in \omega$, $x \in [\xi_i]^{<\omega}$ に対して, $h_{J_\alpha}^{n+1,p_{n+1}(J_\alpha)}(j,x) \in \mathrm{ran}(\sigma_{\bar{\eta},\nu})$ となる最小の $\bar{\eta} \in D_\nu$ で最小のものとして取る.
4. λ が極限順序数のとき, $\eta_\lambda = \sup\{\eta_i \mid i < \lambda\}$ と定義する.
5. θ_ν を $\eta_i = \nu$ となる最小の i と定義する.
6. $C_\nu = \{\eta_i \mid i < \theta(\nu)\}$ と定義する.

主張 2. $\nu \in C$ に対して, 次が成立する.

1. $otp(C_\nu) = \theta(\nu) \leq \kappa$
2. C_ν は閉.
3. D_ν が非有界ならば, C_ν も非有界.

4. $\bar{\nu} \in C_\nu$ ならば, $C_\nu \cap \bar{\nu} = C_{\bar{\nu}}$ が成立する.

$\because$ 1, 2, 3 は $\langle \xi_i \mid i < \theta(\nu) \rangle$ が単調増加であることから従う. 4 は構成に従って帰納法で示す. $\square$

今 $C \subseteq \kappa^+$ と $\langle C_\nu \mid \nu \in C \rangle$ を次を満たすように構成した.

1. C は κ^+ の club.
2. $\mathrm{cf}(\nu) > \omega$, $\nu \in \mathrm{Lim}$, $\kappa < \nu < \kappa^+$ ならば, C_ν は ν の club かつ $otp(C_\nu) \leq \kappa$ が成立する.
3. $\bar{\nu} \in \mathrm{C}_\nu$ ならば, $C_{\bar{\nu}} = C_\nu \cap \nu$ が成立する.

これらから $\square_\kappa$-列を構成する.

$f \colon \kappa^+ \to C$ を数え上げとする. $\nu < \kappa^+$ に対して, $B_\nu = (f^{-1})\text{''}C_{f(\nu)}$ と定義する. さらに $\mathrm{cf}(\nu) = \omega$ かつ C_ν が有界のとき, B_ν を ν の順序型 ω で共終なものに取り換える. このような操作を行っても, Coherent なことは破壊されないことに注意する.

このとき $\langle B_\nu \mid \nu < \kappa^+ \rangle$ は $\square_\kappa$-列となる. $\square$

$\square_\kappa$ が成立するとき, Fodor lemma を使うことである stationary $S \subseteq \kappa^+$ が存在して, $\square_\kappa(S)$ が成立することがわかる. これらを使うと次を示すことができる.

定理 1.9 (Jensen)**.** κ を無限基数とする. ある stationary $S \subseteq \kappa^+$ が存在して, $\Diamond_{\kappa^+}(S)$ と $\square_\kappa(S)$ が成立すると仮定する. このとき κ^+-Suslin tree が存在する.

系 1.10. $V = L$ を仮定する. このとき任意の無限基数 κ について κ^+-Suslin tree が存在する.

$0^\sharp$ が存在しないとき, V と L は近くなっていることを Jensen が示している.

定理 1.11 (Jensen's covering lemma)**.** $0^\sharp$ が存在しないとする. X を順序数の集合とする.
このときある $Y \in L$ が存在して, $X \subseteq Y$ かつ $|Y| \leq |X| + \aleph_1$ を満たす.

$0^\sharp$ が存在しないとき L は successor of singular を正しく計算できる.

系 1.12 (Weak covering)**.** $0^\sharp$ が存在しないと仮定する. $\kappa \geq \aleph_2$ を L の基数とする. このとき V において $\mathrm{cf}(\kappa^+) \geq |\kappa|$ が成立する.
特に特異基数 κ について, $\kappa^{+L} = \kappa^+$ が成立する.

Weak covering から特異基数 κ において $\square_\kappa$ が破れていることは巨大基数的性質であることがわかる.

系 1.13. 特異基数 κ について $\square_\kappa$ が成立しないと仮定する. このとき $0^\sharp$ が存在する.

2　まとめ？

以上のように $0^\sharp$ が存在しないとき, L と V は近いことがわかった.

しかし L に巨大基数は全然ない (とても困る) のでもっと巨大基数を多く含むような L-like なモデルはないのか？その構造はどうなっているのか？

この問に答えるのが内部モデル理論である. 現在はより多くの巨大基数 (measurable, strong, Woodin な

ど) の内部モデルが構成されていて, その解析がなされている. また記述集合論, 特に決定性との深い繋がりも指摘されている.

実数の集合と巨大基数と集合論のモデルの関係, 筆者はそれに興味を持っていて集合論をやっています. 閲覧ありがとうございました.

参考文献

[1] Schindler, Ralf. (2014). Set theory. Exploring independence and truth. 10.1007/978-3-319-06725-4.

[2] Schindler R., Zeman M. (2010). Fine Structure. In: Foreman M., Kanamori A. (eds) Handbook of Set Theory. Springer, Dordrecht