Consistency of projective determinacy

Yasuda Yasutomo

hoge 大学数学科 2 年

2019 年 12 月 7 日 数学基礎論若手の会 in 岡崎

以下 ZFC の下で議論する.

Determinacy

実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R} = \omega^\omega$ に対して, 次の game $G(A)$ を考える.

$$
\begin{array}{lccccccc}
\mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & a_4 & & \cdots\cdots \\
& & \searrow \quad \nearrow & & \searrow \quad \nearrow & & & \\
\mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & & &
\end{array}
$$

上の図のように I と II が交互に自然数を出す. この操作を繰り返し実数 $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ を得る.
$\alpha \in A$ のとき, I の勝利. そうでないとき II の勝利と定義する.

- I の戦略とは関数 $\sigma\colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \to \omega$ のことである. II の戦略とは関数 $\tau\colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \to \omega$ のことである.
- I が戦略 σ で, II が戦略 τ で game をプレイしたときの結果を $\sigma * \tau$ と表す.
- I の戦略 σ が game $G(A)$ の必勝戦略とは, 任意の II の戦略 τ に対して $\sigma * \tau \in A$ となることである.

Determinacy

definition

- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が決定的とは, I か II のどちらかが必ず game $G(A)$ において必勝戦略を持つときのことをいう.
- AD (*Axiom of Determinacy*) とは全ての実数の集合は決定的という公理である.

AD は全ての実数の集合に強い性質をもたらすが AC とは両立しない
$\longrightarrow$ AC は欲しい!!

Question. AC と両立するような決定性でなるべく強いものはないのか？

Determinacy

definition

- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が決定的とは, I か II のどちらかが必ず game $G(A)$ において必勝戦略を持つときのことをいう.
- AD (*Axiom of Determinacy*) とは全ての実数の集合は決定的という公理である.

AD は全ての実数の集合に強い性質をもたらすが AC とは両立しない
$\longrightarrow$ AC は欲しい!!

Question. AC と両立するような決定性でなるべく強いものはないのか？
Answer? 決定性が成立する実数の集合のクラスを制限すれば良さそう....

Determinacy

definition

- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が決定的とは, I か II のどちらかが必ず game $G(A)$ において必勝戦略を持つときのことをいう.
- AD (*Axiom of Determinacy*) とは全ての実数の集合は決定的という公理である.

AD は全ての実数の集合に強い性質をもたらすが AC とは両立しない
$\longrightarrow$ AC は欲しい!!

Question. AC と両立するような決定性でなるべく強いものはないのか？
Answer? 決定性が成立する実数の集合のクラスを制限すれば良さそう....

definition

PD (*Projective Determinacy*) とは全ての射影集合が決定的という言明のことをいう.

Background

- Moschovakis や Kechris などによって, PD の下で古典的な記述集合論の結果が射影階層全体に一般化されることが示されていた.
- Solovay の ω_1 の measurability を始めとして決定性には巨大基数が関係することが知られていた.
- 1980 年前半まで PD や AD の無矛盾性はどの巨大基数よりも強いと考えられていた.

PD の無矛盾なのか?　無矛盾性の強さはどれほどなのか？
という問は重要な未解決問題であった.

Consistency of Determinacy

theorem(Martin-Steel)

n 個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する．このとき $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$ が成立する．

theorem(Martin-Steel)

無限個の Woodin 基数の存在を仮定する．このとき PD が成立する．

theorem(Martin-Steel-Woodin)

無限個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する．
このとき $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成立する．

Woodin cardinal

definition

δ が Woodin 基数であるとは, 任意の $f\colon \delta \to \delta$ に対して, ある $\kappa < \delta$ と $j\colon V \prec M$ が存在して次を満たすことをいう.

- $\mathrm{cp}(j) = \kappa$
- $f"\kappa \subseteq \kappa$
- $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$

定義から明らかに Woodin 基数は

- 到達不能基数
- Mahlo 基数
- 可測基数の極限

である.

本講演では特に断りのない限り X, Y は空でない集合とする.

Recall

1. $T \subseteq {}^{<\omega}X$ が木 (tree) であるとは始切片を取る操作で閉じているときのことをいう.
2. X 上の木 T に対して, $[T]$ を道全体の集合とする.
3. $X \times Y$ 上の木 R と $p \in {}^{<\omega}X$ に対して,
$$R[p] = \{q \in {}^{<\omega}Y \mid (p, q) \in R\}$$
と定義する.
4. $X \times Y$ 上の木 R と $x \in {}^{\omega}X$ に対して, $R(x) = \bigcup_{n\in\omega} R[x \restriction n]$ と定義する.

Homogeneous tree

definition

$X \times Y$ 上の木 T が κ-homogeneous tree であるとはある $\langle U_p \mid p \in {}^{<\omega}X\rangle$ が存在して次を満たすときのことをいう.

1. 各 $p \in {}^{<\omega}X$ について, U_p は $T[p]$ 上の κ-完備な超フィルター.
2. (*projection*) 任意の $p \subseteq q \in {}^{<\omega}X$ と $X \in U_p$ について, $\{s \in T[q] \mid s \upharpoonright \mathrm{lh}(p) \in X\} \in U_q$ が成立する.
3. (*countably completeness*) $x \in {}^{\omega}X$ と $\langle Z_n \mid n \in \omega\rangle$ で $Z_n \in U_{x\upharpoonright n}$ となるものを任意に取る. このとき次が成立する.

$$[T(x)] \neq \emptyset \to \exists f \in {}^{\omega}Y \forall n \in \omega (f \upharpoonright n \in Z_n)$$

definition

$A \subseteq {}^{\omega}X$ が κ-homogeneously Suslin であるとは, ある $X \times Y$ 上の κ-homogeneous tree T が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう.

Homogeneous tree

Homogeneous tree の具体例としては次の Martin の結果がある.

theorem(Martin)

κ を可測基数とし, $X \in V_\kappa$ とする. このとき ${}^\omega X$ の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 部分集合は κ-homogeneously Suslin.

十分大きな homogeneity は決定性を導く

lemma

$A \subseteq \mathbb{R}$ が $\aleph_1$-homogeneously Suslin ならば A は決定的.

このことから Martin による $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の決定性の無矛盾性が得られる.

corollary(Martin)

可測基数が存在すると仮定する. このとき $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ が成立する.

Consistency proof

次の定理が無矛盾性証明の鍵となる.

main theorem 1

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $A \subseteq {}^\omega X$ とする. このとき ${}^\omega X \setminus A$ が δ^+-homogeneously Suslin ならば A は $<\delta$-homogeneously Suslin である.

main theorem 2

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $B \subseteq {}^\omega X \times \mathbb{R}$ とする.
このとき B が δ^+-homogeneously Suslin ならば ${}^\omega X \setminus pB$ は $<\delta$-homogeneously Suslin である.

Consistency proof

main theorem から射影集合の決定性の無矛盾性が従うことをみる.

proposition

$n \geq 1$ とする. n 個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する.
それらを $\delta_0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{n-1} < \kappa$ とする. また $X \in V_{\delta_0}$ とする.
このとき任意の ${}^{\omega}X$ の $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 部分集合は $<\delta_0$-homogeneously Suslin.

n についての帰納法で示す.
まず任意の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は $<\kappa$-homogeneously Suslin である.
今 $A \subseteq {}^{\omega}X$ を $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 集合とする. $B \subseteq {}^{\omega}X \times \mathbb{R}$ を $A = {}^{\omega}X \setminus pB$ となるように取る. 帰納法の仮定より, B は $<\delta_1$-homogeneously Suslin, 特に δ_0^+-homogeneously Suslin.
main theorem 2 より $A = {}^{\omega}X \setminus pB$ は $<\delta_0$-homogeneously Suslin. $\square$

Consistency proof

よって以上のことから射影集合の決定性の無矛盾性が得られる.

corollary(Martin-Steel)

n 個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する. このとき $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{\mathrm{n+1}})$ が成立する.

corollary(Martin-Steel)

無限個の Woodin 基数の存在を仮定する. このとき PD が成立する.

次を証明すれば良いことがわかった.

main theorem 1

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $A \subseteq {}^\omega X$ とする. このとき ${}^\omega X \setminus A$ が δ^+-homogeneous Suslin ならば A は $<\delta$-homogeneous Suslin である.

main theorem 2

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $B \subseteq {}^\omega X \times \mathbb{R}$ とする.
このとき B が δ^+-homogeneously Suslin ならば ${}^\omega X \setminus pB$ は $<\delta$-homogeneously Suslin である.

Martin-Steel の結果の本質的な部分は内部モデル理論の議論となる.

次を証明すれば良いことがわかった.

main theorem 1

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $A \subseteq {}^\omega X$ とする. このとき ${}^\omega X \setminus A$ が δ^+-homogeneous Suslin ならば A は $<\delta$-homogeneous Suslin である.

main theorem 2

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $B \subseteq {}^\omega X \times \mathbb{R}$ とする.
このとき B が δ^+-homogeneously Suslin ならば ${}^\omega X \setminus pB$ は $<\delta$-homogeneously Suslin である.

Martin-Steel の結果の本質的な部分は内部モデル理論の議論となる.
$\longrightarrow$ Iteration tree と Woodin 基数を用いる.

Extender

$\kappa < \lambda \in \mathrm{ON}$ とする.
(κ, λ)-extender とは $E = \langle E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$ で次を満たすように定義を書き連ねたシステムのことである.

- 各 E_a は $[\kappa]^{|a|}$ 上の κ-完備な超フィルター.
- $a \subseteq b \in [\lambda]^{<\omega}$ のとき, 初等埋め込み $j_{a,b} \colon \mathrm{Ult}(V, E_a) \prec \mathrm{Ult}(V, E_b)$ が存在する.
- $(\langle \mathrm{Ult}(V, E_a) \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \rangle, \langle j_{a,b} \mid a \subseteq b \in [\lambda]^{<\omega} \rangle)$ は directed system をなす.
- その direct limit を $\mathrm{Ult}(V, E)$ と表すと well-founded となる.

Iteration tree

次のような長さ $\leq \omega$ の V 上の iteration tree $\mathcal{C} = (<_{\mathcal{C}}, \langle E_n \mid n \in \omega \rangle)$ を考えてみる.

$$\begin{array}{lll} & & M_1 \to M_3 \to M_5 \to M_7 \cdots \\ & \nearrow & \\ M_0 = V & & \\ & \searrow & \\ & & M_2 \to M_4 \to M_6 \to M_8 \cdots \end{array}$$

- $E_i \in M_i$
- $M_1 = \mathrm{Ult}(V, E_0)$
- $M_{i+1} = \mathrm{Ult}(M_{i-1}, E_i)$ $(i \geq 1)$

このような iteration tree を alternating chain と呼ぶ.
枝 $\mathrm{Even} = \{2n \mid n \in \omega\}$ に沿った direct limit を $M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{Even}}$,
枝 $\mathrm{Odd} = \{0\} \cup \{2n+1 \mid n \in \omega\}$ に沿った direct limit を $M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{Odd}}$ と表す.

Main theorem

main theorem 1

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $A \subseteq {}^\omega X$ とする. このとき ${}^\omega X \setminus A$ が δ^+-homogeneous Suslin ならば A は $<\delta$-homogeneous Suslin である.

アイデアと方針

$x \in {}^\omega X$ ごとに iteration tree $\mathcal{C}_x$ を $x \in A \leftrightarrow M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$:well-founded を満たすように $p \in {}^{<\omega}X$ の帰納法で構成する.

$$
\begin{array}{lllll}
 & & M_1 \to M_3 \to M_5 \to M_7 \cdots & M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}} & \mathrm{Even} \\
 & \nearrow & & & \\
\mathcal{C}_x \quad V & & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & M_2 \to M_4 \to M_6 \to M_8 \cdots & M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Odd}} & \mathrm{Odd}
\end{array}
$$

各ステップで Woodin 基数を用いて"良い"extender を見つける.

$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$

Martin-Steel-Woodin の結果の証明には Woodin の次の結果を使う.

theorem(Woodin)

無限個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する.
このとき $L(\mathbb{R})$ において, 任意の $A \subseteq \mathbb{R}$ に対して, ある Woodin 基数 δ と $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ が存在して次を満たす.

- B は δ^+-homogeneously Suslin
- $A = \mathbb{R} \setminus pB$

このことから main theorem と合わせて次が得られる.

theorem(Martin-Steel-Woodin)

無限個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する. このとき $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成立する.

Thank you for your attention !!

- Martin, D., and J. R. Steel. Iteration Trees. Journal of the American Mathematical Society 7, no. 1 (1994): 1-73. doi:10.2307/2152720
- Martin, D., and Steel, J. (1989). A Proof of Projective Determinacy. Journal of the American Mathematical Society, 2(1), 71-125. doi:10.2307/1990913
- Martin, D. Determinacy of Infinitely Long Games.
- Woodin, W. Hugh. "Supercompact Cardinals, Sets of Reals, and Weakly Homogeneous Trees." Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 85, no. 18, 1988, pp. 6587 - 6591. JSTOR, www.jstor.org/stable/32425.
- Martin, D. A., and J. R. Steel. "Iteration Trees." Journal of the American Mathematical Society 7, no. 1 (1994): 1-73. doi:10.2307/2152720.