Consistency of projective determinacy

Yasuda Yasutomo

hoge 大学数学科 2 年

December 7, 2019

以下 ZFC の下で議論する.

Determinacy

実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R} = \omega^\omega$ に対して, 次の game $G(A)$ を考える.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} & a_0 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dr] & & a_4 & \cdots\cdots \\
\mathrm{II} & & a_1 \arrow[ur] & & a_3 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

上の図のように I と II が交互に自然数を出す. この操作を繰り返し実数 $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ を得る.
$\alpha \in A$ のとき, I の勝利. そうでないとき II の勝利と定義する.

- I の戦略とは関数 $\sigma \colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \to \omega$ のことである. II の戦略とは関数 $\tau \colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \to \omega$ のことである.
- I が戦略 σ で, II が戦略 τ で game をプレイしたときの結果を $\sigma * \tau$ と表す.
- I の戦略 σ が game $G(A)$ の必勝戦略とは, 任意の II の戦略 τ に対して $\sigma * \tau \in A$ となることである.

Determinacy

definition

- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が決定的とは, I か II のどちらかが必ず game $G(A)$ において必勝戦略を持つときのことをいう.
- AD (*Axiom of Determinacy*) とは全ての実数の集合は決定的という公理である.

AD は全ての実数の集合に強い性質をもたらすが AC とは両立しない
$\longrightarrow$ AC は欲しい!!

Question. AC と両立するような決定性でなるべく強いものはないのか？
Answer? 決定性が成立する実数の集合のクラスを制限すれば良さそう....

definition

PD (*Projective Determinacy*) とは全ての射影集合が決定的という言明のことをいう.

Background

- Moschovakis や Kechris などによって, PD の下で古典的な記述集合論の結果が射影階層全体に一般化されることが示されていた.
- Solovay の ω_1 の measurability などから決定性には巨大基数が関係することが知られていた.
- 1980 年前半まで PD や AD の無矛盾性は考えられているどの巨大基数よりも強いと考えられていた.

PD の無矛盾なのか?　無矛盾性の強さはどれほどなのか？
という問は重要な未解決問題であった.

Consistency of PD

theorem(Martin-Steel)

n 個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する．このとき $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Pi}^1_{n+1})$ が成立する．

theorem(Martin-Steel)

無限個の Woodin 基数の存在を仮定する．このとき PD が成立する．

Woodin cardinal

definition

δ が Woodin 基数であるとは, 任意の $f\colon \delta \to \delta$ に対して, ある $\kappa < \delta$ と $j\colon V \prec M$ が存在して次を満たすことをいう.

- $\mathrm{cp}(j) = \kappa$
- $f''\kappa \subseteq \kappa$
- $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$

定義から明らかに Woodin 基数は到達不能基数であり, さらに Mahlo 基数である. また Woodin 基数は可測基数の極限になっている.

本講演では特に断りのない限り X, Y は空でない集合とする．

Recall

1. $T \subseteq {}^{<\omega}X$ が木 (tree) であるとは始切片を取る操作で閉じているときのことをいう．
2. X 上の木 T に対して, $[T]$ を道全体の集合とする．
3. $X \times Y$ 上の木 R と $p \in {}^{<\omega}X$ に対して,
$$R[p] = \{q \in {}^{<\omega}Y \mid (p, q) \in R\}$$
と定義する．
4. $X \times Y$ 上の木 R と $x \in {}^{\omega}X$ に対して, $R(x) = \bigcup_{n\in\omega} R[x \restriction n]$ と定義する．
5. $A \subseteq {}^{\omega}X$ が $\mathbf{\Sigma}^1_1$ であるとは, ある $X \times \omega$ 上の木 T が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう．
6. $A \subseteq {}^{\omega}X$ が $\mathbf{\Pi}^1_1$ であるとは, 補集合が $\mathbf{\Sigma}^1_1$ であるときのことをいう．
7. ${}^{\omega}X$ 上の射影階層をあとは通常の射影階層と同様に定義する．

Homogeneous tree

definition

$X \times Y$ 上の木 T が κ-homogeneous tree であるとはある $\langle U_p \mid p \in {}^{<\omega}X \rangle$ が存在して次を満たすときのことをいう.

1. 各 $p \in {}^{<\omega}X$ について, U_p は $T[p]$ 上の κ-完備な超フィルター.
2. (*projection*) 任意の $p \subseteq q \in {}^{<\omega}X$ と $X \in U_p$ について, $\{s \in T[q] \mid s \restriction \mathrm{lh}(p) \in X\} \in U_q$ が成立する.
3. (*countably completeness*) $x \in {}^{\omega}X$ と $\langle Z_n \mid n \in \omega \rangle$ で $Z_n \in U_{x \restriction n}$ となるものを任意に取る. $[T(x)]$ が空でないならば, ある $f \in {}^{\omega}Y$ が存在して, 全ての $n \in \omega$ に対して, $f \restriction n \in Z_n$ が成立する.

definition

$A \subseteq {}^{\omega}X$ が κ-homogeneously Suslin であるとは, ある $X \times Y$ 上の κ-homogeneous tree T が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう.

Homogeneous tree

homogeneous tree の定義より, 各 $p \subseteq q \in {}^{<\omega}X$ について次の超冪の間の初等埋め込みが誘導される.

$$i_{p,q} \colon \mathrm{Ult}(V, U_p) \prec \mathrm{Ult}(V, U_q)$$

$x \in {}^{\omega}X$ について, $(\langle \mathrm{Ult}(V, U_{x \restriction n}) \mid n \in \omega \rangle, \langle i_{x \restriction n, x \restriction m} \mid n \leq m \in \omega \rangle)$ の direct limit を $\mathcal{M}_x$ と表す. 次の条件 (†) を考える.

$$(\dagger)\ \ \forall x \in {}^{\omega}X([T(x)] \neq \emptyset \to \mathcal{M}_x : \text{well-founded})$$

このとき homogeneous tree に関して, countably completeness と (†) は同値となる.

Homogeneous tree

Homogeneous tree の具体例としては次の Martin の結果がある.

theorem(Martin)

κ を可測基数とし, $X \in V_\kappa$ とする. このとき ${}^\omega X$ の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 部分集合は κ-homogeneously Suslin.

十分大きな homogeneity は決定性を導く

lemma

$A \subseteq {}^\omega X$ が $|X|^+$-homogeneously Suslin ならば A は決定的.

このことから Martin による $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の決定性の無矛盾性が得られる.

corollary(Martin)

可測基数が存在すると仮定する. このとき $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ が成立する.

$\mathbf{\Pi}^1_1$ の homogeneity を射影階層全体に持ち上げたい.
それではどのようにして持ち上げれば良いのか？
例えば $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の homogeneity から $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の homogeneity をどのようにして得るのか？ (況んや射影はもっと難しい.)

Consistency proof

次の定理が無矛盾性証明の鍵となる.

main theorem 1

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $A \subseteq {}^\omega X$ とする.
このとき ${}^\omega X \setminus A$ が δ^+-homogeneously Suslin ならば A は
$<\delta$-homogeneously Suslin である.

main theorem 2

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $B \subseteq {}^\omega X \times \mathbb{R}$ とする.
このとき B が δ^+-homogeneously Suslin ならば ${}^\omega X \setminus pB$ は
$<\delta$-homogeneously Suslin である.

Consistency proof

main theorem から射影集合の決定性の無矛盾性が従うことをみる.

proposition

$n \geq 1$ とする. n 個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する.
それらを $\delta_0 < \delta_1 < \cdots < \delta_{n-1} < \kappa$ とする. また $X \in V_{\delta_0}$ とする.
このとき任意の ${}^{\omega}X$ の $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 部分集合は $<\delta_0$-homogeneously Suslin.

n についての帰納法で示す. まず任意の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は $<\kappa$-homogeneously Suslin である. 今 $A \subseteq {}^{\omega}X$ を $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 集合とする. $B \subseteq {}^{\omega}X \times \mathbb{R}$ を $A = {}^{\omega}X \setminus pB$ となるように取る. 帰納法の仮定より, B は $<\delta_1$-homogeneously Suslin, 特に δ_0^+-homogeneously Suslin.
main theorem 2 より $A = {}^{\omega}X \setminus pB$ は $<\delta_0$-homogeneously Suslin. $\square$

Consistency proof

よって以上のことから射影集合の決定性の無矛盾性が得られる．

corollary(Martin-Steel)

n 個の Woodin 基数とその上に可測基数が存在すると仮定する．このとき $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{\mathrm{n}+1})$ が成立する．

corollary(Martin-Steel)

無限個の Woodin 基数の存在を仮定する．このとき PD が成立する．

ここまで記述集合論, ここから内部モデル理論的な話に移る.
(ここから本番)

次を証明すれば良いことがわかった.

main theorem 1

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $A \subseteq {}^\omega X$ とする.
このとき ${}^\omega X \setminus A$ が δ^+-homogeneous Suslin ならば A は $<\delta$-homogeneous Suslin である.

main theorem 2

δ を Woodin 基数とする. $X \in V_\delta$ を空でない集合とし, $B \subseteq {}^\omega X \times \mathbb{R}$ とする.
このとき B が δ^+-homogeneously Suslin ならば ${}^\omega X \setminus pB$ は $<\delta$-homogeneously Suslin である.

これらを証明するには iteration tree と Woodin 基数の性質を用いる.
まず extender を定義する.

notation

$a \subseteq b \in [\lambda]^{<\omega}$ が次を満たすとする.

$$b = \{\xi_1 < \cdots < \xi_m\}$$

$$a = \{\xi_{j_1} < \cdots < \xi_{j_n}\}$$

- $z = \{x_1 < \cdots < x_m\} \in [\kappa]^{|b|}$ に対して, $z_{a,b} = \{x_{j_1} < \cdots < x_{j_n}\}$ と定義する.
- $X \subseteq [\kappa]^{|a|}$ に対して, $X^{a,b} = \{z \in [\kappa]^{|b|} \mid z_{a,b} \in X\}$ と定義する.

Extender

definition

$\kappa < \lambda \in \mathrm{ON}$ とする．$E = \langle E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$ が (κ, λ)-extender であるとは次を満たすことをいう．

1. 各 $a \in [\lambda]^{<\omega}$ について，E_a は $[\kappa]^{|a|}$ 上の κ-完備な超フィルター．ただしある a が存在して，E_a は κ^+-完備でない．
2. 各 $a \subseteq b \in [\lambda]^{<\omega}$ に対して，$X \in E_a \leftrightarrow X^{a,b} \in E_b$.
3. 各 $a \in [\lambda]^{<\omega}$ と $f \colon [\kappa]^{|a|} \to \kappa$ について，ある $i \leq |a|$ について $\{z \in [\kappa]^{|a|} \mid f(z) < z_i\} \in E_a$ が成立するならば，ある $\beta < a_i$ が存在して $\{z \in [\kappa]^{|a \cup \{\beta\}|} \mid f(z_{a, a \cup \{\beta\}}) = z_k\} \in E_{a \cup \{\beta\}}$ が成立する．ただし $\beta = (a \cup \{\beta\})_k$.
4. 各 $\langle a_i \mid i \in \omega \rangle$ と $\langle X_i \mid i \in \omega \rangle$ で $X_i \in E_{a_i}$ を満たすものに対して，ある順序保存写像 $h \colon \bigcup a_i \to \kappa$ が存在して，各 $i \in \omega$ に対して $h"a_i \in X_i$ が成立する．

Extender

extender によって定義される超冪を $\mathrm{Ult}(V, E)$ と表す．超冪から定義される初等埋め込み $i_E \colon V \prec \mathrm{Ult}(V, E)$ は次を満たす．

- $\mathrm{cp}\left(i_E\right) = \kappa$
- $\lambda \leq i_E(\kappa)$

extender は超冪を取るモデルに入ってない場合を基本的に考える．そのとき 2 つのモデルの agreement を要請することでうまくいく．

definition

M, N をクラスとし, $\alpha \in \mathrm{ON}$ とする．
M, N agree through α とは $M \cap V_\alpha = N \cap V_\alpha$ を満たすときのことをいう．

Iteration tree

iteration tree を定義する.

definition

$\theta > 0$ を順序数とする. θ 上の半順序 $<_T$ が tree ordering であるとは次を満たすときのことをいう.

1. 任意の $\beta < \theta$ について, $<_T$ は $\{\alpha \mid \alpha <_T \beta\}$ 上の整列順序.
2. $\alpha <_T \beta$ ならば $\alpha < \beta$.
3. 任意の $\alpha > 0$ について, $0 <_T \alpha$.
4. 任意の $\alpha > 0$ について, α は $<_T$-successor $\leftrightarrow$ α は succcessor.
5. 極限順序数 $\lambda < \theta$ について, $\{\alpha \mid \alpha <_T \lambda\}$ は $<$ に関して λ の中で非有界.

α の $<_T$ に関する後続者を α_T^- と表す.

Iteration tree

example

次は ω 上の tree ordering.

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 8 \cdots \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & 1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 7 \cdots
\end{tikzcd}
$$

Iteration tree

definition

$\mathcal{T} = (<_T, \langle E_\alpha \mid \alpha + 1 < \theta \rangle)$ が V 上の長さ θ の iteration tree であるとは, ある内部モデル M_α $(\alpha < \theta)$ と初等埋め込み $j^{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}$ $(\alpha <_T \beta < \theta)$ が存在して次を満たすときのことをいう.

1. $<_T$ は θ 上の tree ordering.
2. $M_0 = V$
3. E_α は M_α の exetender.
4. 各 α で $\alpha + 1 < \theta$ なるものについて,
   - M_α, $M_{(\alpha+1)^-}$ agree through $\mathrm{cp}(E_\alpha) + 1$.
   - $M_{\alpha+1} = \mathrm{Ult}\big(M_{(\alpha+1)^-}, E_\alpha\big)$
   - $j^{\mathcal{T}}_{(\alpha+1)^-,\alpha+1} = i^{M_{(\alpha+1)^-}}_{E_\alpha}$
5. 各 $\alpha <_T \beta <_T \gamma < \theta$ について, $j^{\mathcal{T}}_{\alpha,\gamma} = j^{\mathcal{T}}_{\beta,\gamma} \circ j^{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta}$ が成立する.
6. 極限順序数 $\lambda < \theta$ について, $(M_\lambda, \langle j^{\mathcal{T}}_{\alpha,\lambda} \mid \alpha <_T \lambda \rangle)$ は $(\langle M_\alpha \mid \alpha <_T \lambda \rangle, \langle j^{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} \mid \alpha <_T \beta <_T \lambda \vee \alpha = \beta <_T \lambda \rangle)$ の direct limit.

Iteration tree

次のような長さ $\leq \omega$ の V 上の iteration tree $\mathcal{C} = (<_{\mathcal{C}}, \langle E_n \mid n \in \omega \rangle)$ を考えてみる.

$$\begin{array}{lll}
 & & M_1 - M_3 - M_5 - M_7 \cdots \\
 & / & \\
V & & \\
 & \backslash & \\
 & & M_2 - M_4 - M_6 - M_8 \cdots
\end{array}$$

- $E_i \in M_i$
- $M_{i+1} = \mathrm{Ult}(M_{i-1}, E_i)$ $(i \geq 1)$
- $M_1 = \mathrm{Ult}(V, E_0)$

このような tree ordering を持った iteration tree を alternating chain と呼ぶ. 枝 $\mathrm{Even} = \{2n \mid n \in \omega\}$ に沿った direct limit を $M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{Even}}$,
枝 $\mathrm{Odd} = \{0\} \cup \{2n+1 \mid n \in \omega\}$ に沿った direct limit を $M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{Odd}}$ と表す.
主定理の証明では alternating chain を構成することが重要なステップとなる.

Iteration tree

definition

$\mathcal{C}$ を V 上の長さ ω の alternating chain とする.
$\mathcal{C}$ が continuously ill-founded off Even であるとは, ある順序数の列 $\langle \xi_n \mid n \in \omega \rangle$ が存在して次を満たすことをいう.

- $\forall n \in \omega (\xi_n \in M_n)$
- $n < m \in \omega$ に対して, $\xi_{2m} = j^{\mathcal{C}}_{2n,2m}(\xi_{2n})$ が成立する.
- $n < m \in \omega$ に対して, $\xi_{2m+1} < j^{\mathcal{C}}_{2n+1,2m+1}(\xi_{2n+1})$ が成立する.

theorem

$\mathcal{C}$ が continuously ill-founded off Even であると仮定する.
このとき $M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{Even}}$ は well-founded である.

以上のことは Odd に関しても同様のことが成立する. alternating chain に関して, 一方の枝を ill-founded にすると必ずもう一方の枝は well-founded になることは重要な observation である.

Martin-Solovay tree

まず homogeneous system に対して, 射影の補集合をコードするような木を定義する.

definition

T を $X \times Y$ 上の homogeneous tree とする.
$\mathcal{U} = \langle U_p \mid p \in {}^{<\omega}X \rangle$ を homogeneous system とする．また α を順序数とする.
$ms(\mathcal{U}, \alpha)$ とは $X \times \mathrm{ON}$ 上の木で $(p, t) \in ms(\mathcal{U}, \alpha)$ であるとは次を満たすときである.

1. $p \in {}^{<\omega}X$
2. $t \in {}^{\mathrm{lh}(p)}\mathrm{ON}$
3. $t(0) < \alpha$
4. $\forall i, j < \mathrm{lh}\,(p)\,(i < j \to t(j) < i_{p \restriction i, p \restriction j}(t(i)))$

α は木のサイズを制限している．十分大きい α に対して $ms(\mathcal{U}, \alpha)$ は補集合をコードしている.

Martin-Solovay tree

theorem

T を $X \times Y$ 上の homogeneous tree とする．
$\mathcal{U} = \langle U_p \mid p \in {}^{<\omega}X \rangle$ を homogeneous system とする．順序数 α を $\alpha \geq \max\{\omega, |Y|^+\}$ となるように任意に取る．このとき，

$$p[ms(\mathcal{U}, \alpha)] = {}^{\omega}X \setminus p[T]$$

が成立する．

Main theorem

main theorem を証明する．本質的なアイデアは main theorem 1 に現れている．main theorem 2 も同様に示すことができる．

main theorem 1

δ を Woodin 基数とする．$X \in V_\delta$ を空でない集合とし，$A \subseteq {}^\omega X$ とする．このとき ${}^\omega X \setminus A$ が δ^+-homogeneous Suslin ならば A は $<\delta$-homogeneous Suslin である．

アイデアと方針

$x \in {}^\omega X$ ごとに iteration tree $\mathcal{C}_x$ を $x \in A \leftrightarrow M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$:well-founded を満たすように $p \in {}^{<\omega}X$ の帰納法で構成する．

$$
\begin{array}{lllll}
 & & M_1 \to M_3 \to M_5 \to M_7 \cdots & M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}} & \mathrm{Even} \\
 & \nearrow & & & \\
\mathcal{C}_x \quad V & & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & M_2 \to M_4 \to M_6 \to M_8 \cdots & M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Odd}} & \mathrm{Odd}
\end{array}
$$

各ステップで Woodin 基数を用いて帰納法の仮定を満たすような extender を見つける．

Proof of main theorem

$\gamma < \delta$ を ${}^{<\omega}X \in V_\gamma$ となるように取る．T を δ^+-homogeneous tree, $\mathcal{U}$ をその homogeneous system とする．
$p \in {}^{<\omega}X$ の帰納法で κ_p, β_p, $\mathcal{C}_p$, s_p を次のように構成する．

- κ_p, β_p は順序数．
- $\kappa_p < \delta$
- $\mathcal{C}_p$ は V 上の長さ $2\mathrm{lh}(p) + 1$ の alternating chain.
- s_p は列で $\mathrm{lh}(s_p) = \mathrm{lh}(p)$ を満たす．

$\mathcal{C}_p$ に乗っている extender を E^p_n, 内部モデルを M^p_m, 初等埋め込みを $j^p_{m,n}$ と表す．

notation

次の記法を導入する．$p, q, r \in {}^{<\omega}X$, $q \subseteq r$, $m \leq \mathrm{lh}(p)$ とする．

- $\check{i}^p_{q,r} = j^p_{0,2\mathrm{lh}(p)}(i_{q,r})$
- $\bar{\beta}^p_m = j^p_{2m,2\mathrm{lh}(p)}(\beta_{p\restriction m})$

と定義する．

Proof of main theorem

また各 $p \in {}^{<\omega}X$ について κ_p, β_p, $\mathcal{C}_p$, s_p は次を満たすように構成する.

1. $\forall m < n \leq \mathrm{lh}\,(p)\,(\bar{\beta}^p_n < \check{i}^p_{p\restriction m, p\restriction n}(\bar{\beta}^p_n))$
2. $s_p \in j^p_{0,2\mathrm{lh}(p)-1}(T[p])$
3. $\forall m \leq \mathrm{lh}\,(p)\,(j^p_{2m-1,2\mathrm{lh}(p)-1}(s_{p\restriction m}) \subseteq s_p)$

構成は複雑なので省略する.
$x \in {}^{\omega}X$ について, $\mathcal{C}_x$ を各 n について構成した $\mathcal{C}_{x\restriction n}$ の和とする.
$\mathcal{C}_x$ の枝 Even に対する direct limit を $M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$, 枝 Odd に対する direct limit を $M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Odd}}$ と表す.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 2 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 6 \arrow[r, dash] & 8\ \cdots & \mathrm{Even} \\
\mathcal{C}_x & 0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & & & \\
 & & 1 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & 5 \arrow[r, dash] & 7\ \cdots & \mathrm{Odd}
\end{tikzcd}$$

Proof of main theorem

claim

$x \in p[ms(\mathcal{U},\alpha)] \leftrightarrow M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$: well-founded

$(\rightarrow)$ $x \in p[ms(\mathcal{U},\alpha)]$ と仮定する．このとき $[T(x)] = \emptyset$, つまり $T(x)$ は well-founded.
各 $k \in \omega$ について,

$$\xi_{2k} = j^x_{0,2k}(\|s_\emptyset\|^{T(x)}),\ \xi_{2k+1} = \|s_{x\restriction k+1}\|^{j^x_{0,2k+1}(T(x))}$$

と定義する．このとき,

$$\begin{aligned} j^x_{2m-1,2k-1}(\xi_{2m-1}) &= \|j^x_{2m-1,2k-1}(x\restriction m)\|^{j^x_{0,2k-1}(T(x))} \\ &> \|s_{x\restriction k}\|^{j^c_{0,2k-1}(T(x))} = \xi_{2k-1} \end{aligned}$$

が成立する．よって $\mathcal{C}^x$ は continuously ill-founded off Even.
したがって $M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$ は well-founded.

Proof of main theorem

$(\leftarrow)$ $M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$: well-founded と仮定する.

notation

各 $m \in \omega$ と $p \subseteq_{fin} x$, $q \subseteq r \in {}^{<\omega}X$ について,

- $\bar{\beta}^x_m = j^x_{0,\mathrm{Even}}(\beta_{x\restriction m})$
- $\check{i}^x_{q,r} = j^x_{0,\mathrm{Even}}(i_{q,r})$
- $\check{i}^x_p = j^x_{0,\mathrm{Even}}(i^x_p)$

と定義する.

構成より, 任意の $m < n \leq k \in \omega$ について,

$$\bar{\beta}^{x\restriction k}_n < \check{i}^{x\restriction k}_{x\restriction m, x\restriction n}(\bar{\beta}^{x\restriction k}_m)$$

が成立する. $j^x_{2k,\mathrm{Even}}$ で両辺送ると,

$$\bar{\beta}^x_n < \check{i}^x_{x\restriction m, x\restriction n}(\beta x_m)$$

Proof of main theorem

よって

$$\check{i}^x_{x\restriction n}(\bar{\beta}^x_n) < \check{i}^x_{x\restriction m}(\bar{\beta}^x_m)$$

が成立する．ゆえに $j^x_{0,\mathrm{Even}}(\mathcal{M}_x)$ は ill-founded.
絶対性と初等性から，$\mathcal{M}_x$ は ill-founded，よって $[T(x)] = \emptyset$．したがって $x \in p[ms(\mathcal{U}, \alpha)]$. $\dashv$ proof of claim

次に homogeneous system を定義する．α を $\alpha > \max\{\omega, (2^{|Y|})^+, \sup\{\beta_p \mid p \in {}^{<\omega}X\}\}$ となるように十分大きく取る．
各 $p \in {}^{<\omega}X$ に対して，

$$V_p = \{X \subseteq ms(\mathcal{U}, \alpha)[p] \mid \langle \bar{\beta}^p_m \mid m < \mathrm{lh}\,(p)\rangle \in j^p_{0,2\mathrm{lh}(p)}(X)\}$$

と定義する．
$\langle V_p \mid {}^{<\omega}X\rangle$ が γ-homogeneous system になっていることを示す．

Proof of main theorem

countably completeness 以外は容易に確かめられるので略 (計算).
$p \subseteq q \in {}^{<\omega}X$ に対して, 誘導される初等埋め込みを

$$e_{p,q} \colon \mathrm{Ult}(V, V_p) \prec \mathrm{Ult}(V, V_q)$$

と表す. $x \in p[ms(\mathcal{U}, \alpha)]$ のとき direct limit $\mathcal{N}_x$ が well-founded になることを示せばよい. $x \in p[ms(\mathcal{U}, \alpha)]$ のとき, $M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$ は well-founded より初等埋め込み

$$k \colon \mathcal{N}_x \prec M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$$

が存在することを言えば十分. 各 $n \in \omega$ と $[f]_{V_{x\restriction n}} \in \mathrm{Ult}(V, V_{x\restriction n})$ について,

$$k_n([f]_{x\restriction n}) = j^x_{0,2n}(f)(\langle \bar{\beta}^{x\restriction n}_m \mid m < n \rangle)$$

と定義する. これは well-defined かつ初等埋め込みとなっている.

Proof of main theorem

$m < n \in \omega$ に対して，次の図式が可換となっていることを示せば十分．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ult}(V, V_{x\restriction m}) \arrow[r, "e_{x\restriction m, x\restriction n}"'] \arrow[d, "k_m"'] & \mathrm{Ult}(V, V_{x\restriction n}) \arrow[d, "k_n"] \\
M^x_{2m} \arrow[r, "j^x_{2m,2n}"] & M^x_{2n}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
j^x_{2m,2n}(k_m([f])) &= j^x_{2m,2n}(j^x_{0,2m}(f)(\langle \bar{\beta}^{x\restriction m}_k \mid k < m\rangle)) \\
&= j^x_{0,2n}(f)(\langle \bar{\beta}^{x\restriction n}_k \mid k < n\rangle \restriction m) \\
&= k_m(e_{x\restriction m, x\restriction n}([f]))
\end{aligned}$$

ゆえ $\mathcal{N}_x$ は well-founded となる．よって main theorem 1 の主張が従う． □

Thank you for your attention !!

Martin, D., and J. R. Steel. Iteration Trees. Journal of the American Mathematical Society 7, no. 1 (1994): 1-73. doi:10.2307/2152720

Martin, D., and Steel, J. (1989). A Proof of Projective Determinacy. Journal of the American Mathematical Society, 2(1), 71-125. doi:10.2307/1990913

Martin, D. Determinacy of Infinitely Long Games.