

Moschovakis' scale construction

YasudaYasutomo

2020 年 2 月 27 日

Moschovakis' scale construction についての簡単なまとめ.

1 Periodicity

定義 1.1.

- pointset P に対して, P 上の norm の列 $\vec{\varphi} = \langle \varphi_n \mid n \in \omega \rangle$ を P 上の putative scale という.
- P 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ に対して,

$$x_n \rightarrow x \pmod{\vec{\varphi}}$$

とは $\lim x_n = x$ かつ各 $n \in \omega$ に対して $\varphi_n(x_0), \varphi_n(x_1), \dots$ が収束するときのことをいう.

- P 上の putative scale $\vec{\varphi}$ が semi-scale であるとは次が成立するときのことをいう.

$$x_n \rightarrow x \pmod{\vec{\varphi}} \Rightarrow x \in P$$

- P 上の putative scale $\vec{\varphi}$ が scale であるとは $\vec{\varphi}$ は semi-scale かつ任意の $i \in \omega$ に対して次が成立するときのことをいう.*1

$$x_n \rightarrow x \pmod{\vec{\varphi}} \Rightarrow \varphi_i(x) \leq \lim_n \varphi_i(x_n)$$

Moschovakis の Periodicity theorem においては次の 2 種類の scale construction が重要であった. 証明はしないが概要だけ述べておく. pointset $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して次のように定める.

$$Q(x) \Leftrightarrow \exists \alpha P(x, \alpha)$$

$\varphi_0, \dots, \varphi_n$ を P 上の norm とする. Q 上の norm $\psi_n = \inf\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ を次のように定義する.

$$\psi_n(x) = \inf\{\langle \varphi_0(x, \alpha), \alpha(0), \dots, \varphi_n(x, \alpha), \alpha(n) \rangle \mid P(x, \alpha)\}$$

このようにして P 上の putative scale $\vec{\varphi} = \langle \varphi_n \mid n \in \omega \rangle$ に対して, Q 上の putative scale $\vec{\psi} = \inf \vec{\varphi}$ が定義できる.

補題 1.2. $P, Q, \vec{\varphi}, \vec{\psi}$ を上と同じとする. このとき次が成立する.

1. Q 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ が

$$x_n \rightarrow x \pmod{\vec{\psi}}$$

*1 この条件を φ_n は $\vec{\varphi}$ に対して lower semi-continuous という.

を満たすと仮定する. このとき部分列 $x_k^* = x_{n_k}$ と $\alpha, \langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ が存在して任意の $k \in \omega$ に対して $P(x_k^*, \alpha_k)$ かつ次が成立する.

$$\langle x_k^*, \alpha_k \rangle \rightarrow \langle x, \alpha \rangle \quad \text{mod } \vec{\varphi}$$

2. $\vec{\varphi}$ が semi-scale かつ $i = 0, \dots, m$ に対して φ_i が $\vec{\varphi}$ に対して lower semi-continuous とする. このとき ψ_n は $\vec{\psi}$ に対して lower semi-continuous. 特に $\vec{\varphi}$ が scale ならば $\vec{\psi}$ は scale. \square

また今度は pointset $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して次のように定める.

$$Q(x) \Leftrightarrow \forall \alpha P(x, \alpha)$$

$\vec{\varphi}$ を P 上の putative scale とする. $\omega^{<\omega}$ の標準的な数え上げ $\langle r_n \mid n \in \omega \rangle$ を固定する. $n \in \omega$ と $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $G_n(x, y)$ を I が α' , II が β' を play したとき, $\alpha = r_n \hat{\alpha}'$, $\beta = r_n \hat{\beta}'$ に対して次のように定義する.

$$\text{II wins} \Leftrightarrow \langle \varphi_0(x, \alpha), \dots, \varphi_n(x, \alpha) \rangle \leq \langle \varphi_0(y, \beta), \dots, \varphi_n(y, \beta) \rangle$$

十分な決定性を仮定する. このとき

$$x \leq_n y \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R} \wedge \text{II wins } G_n(x, y)$$

と定義するとこれは pwo となる. 各 $n \in \omega$ について Q 上の norm $\psi_n = \sup\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ を \leq_n のランク関数として定義することで Q 上の putative scale $\vec{\psi} = \sup \vec{\varphi}$ を得る.

補題 1.3. $P, Q, \vec{\varphi}, \vec{\psi}$ を上と同じとする. Γ を adequate pointclass とし $\text{Det}(\Delta)$ を仮定する. 各 $i \in \omega$ について φ_i が Γ -norm であるとき次が成立する.

1. Q 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ が

$$x_n \rightarrow x \quad \text{mod } \vec{\psi}$$

を満たすと仮定する. このとき任意の α に対して部分列 $x_k^* = x_{n_k}$ と $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ が存在して任意の $k \in \omega$ に対して $P(x_k^*, \alpha_k)$ かつ次が成立する.

$$\langle x_k^*, \alpha_k \rangle \rightarrow \langle x, \alpha \rangle \quad \text{mod } \vec{\varphi}$$

2. $\vec{\varphi}$ が semi-scale かつ $i = 0, \dots, m$ に対して φ_i が $\vec{\varphi}$ に対して lower semi-continuous とする. このとき ψ_n は $\vec{\psi}$ に対して lower semi-continuous. 特に $\vec{\varphi}$ が scale ならば $\vec{\psi}$ は scale. \square

2 Scales on coinductive sets

$Q \subseteq \mathbb{R}$ を coinductive set とする. このとき算術的な関係 R が存在して次を満たす.

$$Q(x) \Leftrightarrow ((\exists \alpha_0)(\forall \alpha_1)(\exists \alpha_2) \dots)(\forall t) R(\bar{x}(t), \langle \bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t) \rangle)$$

ただし $\bar{\alpha}(n) = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ とする. Σ_0^* を inductive set と coinductive set のブール結合からなる pointclass とする. $n \geq 1$ の対して Σ_n^* を射影階層と同様に定義する.

定理 2.1 (Moschovakis). $\text{Det}(\bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n^*)$ を仮定する. このとき任意の coinductive set Q に対してある Q 上の scale $\vec{\psi} = \langle \psi_n \mid n \in \omega \rangle$ で各 ψ_n が Σ_n^* -norm となるものが存在する.

証明が不完全, definability の計算ができていない.

Proof.

$$Q(x) \Leftrightarrow ((\exists \alpha_0)(\forall \alpha_1)(\exists \alpha_2) \dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle \bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t) \rangle)$$

となるような R を取る. n が偶数のとき,

$$Q_n(x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \Leftrightarrow ((\exists \alpha_n)(\forall \alpha_{n+1})(\exists \alpha_{n+2}) \dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle \bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t) \rangle)$$

と定義する. これは coinductive となる. n が奇数のとき,

$$Q_n(x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \Leftrightarrow \forall \alpha_n Q_{n+1}(x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

と定義する. 各 $n \in \omega$ に対して Q_n 上の putative scale $\vec{\psi}^n = \langle \psi_i^n \mid i \in \omega \rangle$ を次のように定義する.

n が偶数かつ $i = 0$ の場合, $Q_n(x, \vec{\alpha})$ のとき $\psi_0^n(x, \vec{\alpha}) = 0$ と定義する. これは Σ_0^* -norm となる. n が奇数の場合, $Q_n = \forall^{\mathbb{R}} Q_{n+1}$ が成立している. $\langle \psi_j^{n+1} \mid j \leq i \rangle$ まで構成したとき $\psi_i^n = \sup\{\psi_0^{n+1}, \dots, \psi_i^{n+1}\}$ と定義する. n が偶数かつ $i > 0$ の場合, $Q_n = \exists^{\mathbb{R}} Q_{n+1}$ が成立している. $\langle \psi_j^{n+1} \mid j < i \rangle$ まで構成したとき $\psi_i^n = \inf\{\psi_0^{n+1}, \dots, \psi_{i-1}^{n+1}\}$ と定義する.

definability の計算

n が偶数かつ $i > 0$ の場合.

$$x \leq_{\psi_i^n} y$$

$$\Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \forall \alpha \exists \beta \langle \psi_0^{n+1}(x, \beta), \beta(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(x, \beta), \beta(i-1) \rangle \leq \langle \psi_0^{n+1}(y, \alpha), \alpha(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(y, \alpha), \alpha(i-1) \rangle$$

$$\Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \exists \beta \forall \alpha \neg \left(\langle \psi_0^{n+1}(y, \alpha), \alpha(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(y, \alpha), \alpha(i-1) \rangle < \langle \psi_0^{n+1}(x, \beta), \beta(0), \dots, \psi_{i-1}^{n+1}(x, \beta), \beta(i-1) \rangle \right)$$

n が奇数かつ $i > 0$ の場合.

$$x \leq_{\psi_i^n} y$$

$$\Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \forall \sigma \exists \beta \langle \psi_0^{n+1}(x, r_i \hat{\sigma} * [\beta]), \dots, \psi_i^{n+1}(x, r_i \hat{\sigma} * [\beta]) \rangle \leq \langle \psi_0^{n+1}(y, r_i \hat{\beta}), \dots, \psi_i^{n+1}(y, r_i \hat{\beta}) \rangle$$

$$\Leftrightarrow x \in Q_n \wedge \exists \tau \forall \beta \langle \psi_0^{n+1}(y, r_i \hat{\tau} * [\beta]), \dots, \psi_i^{n+1}(y, r_i \hat{\tau} * [\beta]) \rangle \leq \langle \psi_0^{n+1}(x, r_i \hat{\beta}), \dots, \psi_i^{n+1}(x, r_i \hat{\beta}) \rangle$$

普通に計算すると ψ_1^0 の definability って Σ_1^* になる?

次に $\vec{\psi}^0$ が Q 上の scale となっていることを示す. lower semi-continuity は補題 1.2 と補題 1.3 から帰納的にすぐ示せるので semiscale であることを示せば十分. Q 内の列 $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ を

$$x_n \rightarrow x \quad \text{mod } \vec{\psi}^0$$

を満たすように取る. $((\exists \alpha_0)(\forall \alpha_1)(\exists \alpha_2) \dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle \bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t) \rangle)$ であることを示せばよい. 補題 1.2 より $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ の部分列 $\langle x_n^0 \mid n \in \omega \rangle$ と $\alpha_0, \langle \alpha_{0,n}^0 \mid n \in \omega \rangle$ を次を満たすように取る. ^{*2}

$$\langle x_n^0, \alpha_{0,n}^0 \rangle \rightarrow \langle x, \alpha_0 \rangle \quad \text{mod } \vec{\psi}^1$$

α_1 が任意に与えられたとする. 補題 1.3 より $\langle \langle x_n^0, \alpha_{0,n}^0 \rangle \mid n \in \omega \rangle$ の部分列 $\langle \langle x_n^1, \alpha_{0,n}^1 \rangle \mid n \in \omega \rangle$ と $\langle \alpha_{1,n}^1 \mid n \in \omega \rangle$ を次を満たすように取る.

$$\langle x_n^1, \alpha_{0,n}^1, \alpha_{1,n}^1 \rangle \rightarrow \langle x, \alpha_0, \alpha_1 \rangle \quad \text{mod } \vec{\psi}^2$$

^{*2} 正確には $\inf \vec{\psi}^1$ と $\vec{\psi}^0$ は異なるが, $\text{mod } \vec{\psi}^0$ で収束しているならば $\text{mod } \inf \vec{\psi}^1$ でも収束が言えるので補題 1.2 と同様のことができる.

今度は補題 1.2 を使って部分列と α_2 を取る. この操作を繰り返す. このとき構成より各 $n, m \in \omega$ に対して $Q_n(x_m^{n-1}, \alpha_{0,m}^{n-1}, \dots, \alpha_{n-1,m}^{n-1})$ が成立する. $t = n$ を考えると $R(\bar{x}_m^{n-1}(n), \langle \bar{\alpha}_{0,m}^{n-1}(n), \dots, \bar{\alpha}_{n-1,m}^{n-1}(n) \rangle)$ が成立する.

$$\langle x_m^{n-1}, \alpha_{0,m}^{n-1}, \dots, \alpha_{n-1,m}^{n-1} \rangle \rightarrow \langle x, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$$

であることから各 $n \in \omega$ について $R(\bar{x}(n), \langle \bar{\alpha}_0(n), \dots, \bar{\alpha}_{n-1}(n) \rangle)$ が成立する. よって示された. \square

上の構成を Moschovakis' scale construction と呼ぶ. Scale となることの証明はややこしいが要するに十分な決定性の元で

$$Q(x) \Leftrightarrow ((\exists \alpha_0)(\forall \alpha_1)(\exists \alpha_2) \dots)(\forall t)R(\bar{x}(t), \langle \bar{\alpha}_0(t), \dots, \bar{\alpha}_{t-1}(t) \rangle)$$

のような表示を持つ pointset は補題 1.2 と補題 1.3 を用いることで scale を乗せることができるという話である. この表示が次の closed game representation のアイデアの 1 つになっている.

3 Scales in $L(\mathbb{R})$

\mathbb{R}^ω と \mathbb{R} の recursive homeomorphism を 1 つ固定しておく. 順序数 α を固定する. 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して player I は実数と α 未満の順序数をプレイし, player II は実数をプレイするゲーム G_x を考える.

定義 3.1. α を順序数とする. 写像 $(x \mapsto G_x)$ が closed and continuous であるとはある $\omega \times \omega \times \alpha$ 上の木 T が存在して, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して G_x を player I の payoff が $[T(x)]$ であるときのことをいう.

定義 3.2. $P \subseteq \mathbb{R}$ に対して写像 $(x \mapsto G_x)$ が P の closed game representation であるとは $(x \mapsto G_x)$ が closed and continuous かつ

$$P(x) \Leftrightarrow \text{I has a winning quasi-strategy in } G_x$$

を満たすときのことをいう.

十分な決定性を仮定する. P が closed game representation $(x \mapsto G_x)$ を持つとする. このとき Moschovakis' scale construction によって P に scale が乗ることを示す. 実際 P は次を満たしている.

$$\begin{aligned} P(x) &\Leftrightarrow ((\exists x_0)(\beta_0)(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists \beta_1)(\forall x_3) \dots)(x, \langle x_n \mid n \in \omega \rangle^*, \langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle) \in [T] \\ &\Leftrightarrow ((\exists x_0)(\beta_0)(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists \beta_1)(\forall x_3) \dots)(\forall n \in \omega)(x \upharpoonright_n, \langle x_n \mid n \in \omega \rangle^* \upharpoonright_n, \langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle \upharpoonright_n) \in T \end{aligned}$$

各 $k \in \omega$ について $P_k(x, u)$ であるとは u は player I が G_x での winning quasi-strategy 従ったときの長さ k の position であるときと定義する. このとき $P = P_0$ である. 各 $k \in \omega$ に対して $P_k(x, u)$ ならば $\varphi_0^k(x, u) = 0$ と定義する.

$$\varphi_{i+1}^k = \begin{cases} \sup\{\varphi_0^{k+1}, \dots, \varphi_i^{k+1}\} & \text{if } P_k(x, u) \Leftrightarrow \forall y P_{k+1}(x, u \hat{\ } \langle y \rangle) \\ \inf\{\varphi_0^{k+1}, \dots, \varphi_i^{k+1}\} & \text{if } P_k(x, u) \Leftrightarrow \exists y P_{k+1}(x, u \hat{\ } \langle y \rangle) \\ \langle \beta, \varphi_0^{k+1}(x, u \hat{\ } \langle \beta \rangle), \dots, \varphi_i^{k+1}(x, u \hat{\ } \langle \beta \rangle) \rangle & \text{if } P_k(x, u) \Leftrightarrow \exists \beta P_{k+1}(x, u \hat{\ } \langle \beta \rangle) \\ & \text{and } \beta \text{ is the least such one} \end{cases}$$

このとき φ^k は P_k 上の scale である. **補題 1.2, 補題 1.3 がほぼ同様に成り立つ.**

補題 3.3. $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}\Pi_1^1$ 集合は closed game representation を持つ.

補題 3.4. $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}\Pi_1^1 = \Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$.

定理 3.5. $\text{Det}(L(\mathbb{R}))$ を仮定する. このとき $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ と $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\} \cup \mathbb{R})$ は scale property を持つ.

Proof. $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ が scale property を持つことをいえばよい. P を $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ とする. $\Delta_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ な $(\langle x, \alpha \rangle \mapsto G_{x,\alpha}^*)$ を

$$P(x) \Leftrightarrow \exists \alpha (\text{I has a winning quasi-strategy in } G_{x,\alpha}^*)$$

を満たすように取る. P^α を

$$P^\alpha(x) \Leftrightarrow \text{I has a winning quasi-strategy in } G_{x,\alpha}^*$$

と定義する. このとき Moschovakis' scale construction とその定義の一様性から $(\alpha \mapsto \vec{\psi}^\alpha)$ が $\Delta_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ で取れる. ただし $\vec{\psi}^\alpha$ は P^α 上の scale である. $x \in P$ に対して φ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \min\{\alpha \mid P^\alpha(x)\} \\ \varphi_{n+1}(x) &= \langle \varphi_0(x), \psi_n^{\varphi_0(x)}(x) \rangle\end{aligned}$$

これは $\Sigma_1(L(\mathbb{R}), \{\mathbb{R}\})$ -scale となっている.

definability の計算

場合分けを書けばよいので個々のケースの definability の計算をする.

$$\begin{aligned}x \leq_{\varphi_0} y &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \text{ON} (\neg \psi_0^\alpha(y) = 0 \vee \psi_0^\alpha(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \text{ON} (\psi_0^\alpha(x) = 0 \wedge \forall \beta \in \alpha (y \notin \text{dom}(\psi_0^\beta)))\end{aligned}$$

$n > 0$ の場合.

$$\begin{aligned}x \leq_{\varphi_n} y &\Leftrightarrow (\varphi_0(x) = \varphi_0(y) \wedge \psi_{n-1}^{\varphi_0(x)}(x) = \psi_{n-1}^{\varphi_0(y)}(y)) \\ &\vee (\varphi_0(x) < \varphi_0(y)) \vee (\varphi_0(x) = \varphi_0(y) \wedge \psi_{n-1}^{\varphi_0(x)}(x) < \psi_{n-1}^{\varphi_0(y)}(y))\end{aligned}$$

□

参考文献

- [1] Y.N. Moschovakis, Scales on coinductive sets, in Cabal Seminar 79-81, A.S. Kechris, D.A. Martin, and Y.N. Moscovakis eds., Lecture Notes in Math, vol. 1019 (1983), Springer-Verlag, Berlin, 77-85.
- [2] D.A. Martin and J.R. Steel, The extent of scales in $L(\mathbb{R})$, in: A.S. Kechris et. al. (editors), Cabal Seminar 79-81, Lecture Notes in Mathematics 1019, Springer-Verlag, New York (1983), 86-96.
- [3] J.R. Steel, Scales in $L(\mathbb{R})$, in Cabal Seminar 79-81, A.S. Kechris, D.A. Martin, and Y.N. Moscovakis eds., Lecture Notes in Math, vol. 1019 (1983), Springer-Verlag, Berlin, 107-156.
- [4] Moschovakis, Yiannis. (2020). Descriptive set theory / Yiannis N. Moschovakis. SERBIULA (sistema Librum 2.0).