Extender algebra のノート

Yasuda Yasutomo

2020 年 12 月 13 日

このノートでは Woodin の extender algebra の定義を与え，いくつか基本的な性質を証明する．いくつか定義を修正することによってマウス[*1]に対する結果に直せることはすぐにわかる．[*2]

1 無限命題論理

エクステンダー代数は無限命題論理でのある理論によるリンデンバウム代数として定義される．まずはその無限命題論理を定義する．以下，正則基数 $\gamma \leq \delta$ を固定する．無限命題論理 $\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$ を定義する．[*3]

1. 命題変数を γ 個用意する．それらを a_ξ と表す．ここで a_ξ たちは V_δ の元となるようにする．
2. 命題結合子は $\neg$，$\wedge$，$\rightarrow$ に加えて各 $\kappa < \delta$ ごとに $\bigwedge_{\xi<\kappa}$，$\bigvee_{\xi<\kappa}$ を用意する．これらは同様に V_δ の元となるようにする．
3. 命題定数として $\top$，$\perp$ を用意する．これらは同様に V_δ の元となるようにする．

$\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$ の論理式は次のように定義される：

1. $\top$，$\perp$ は論理式である，
2. 各 $\xi < \gamma$ について，a_ξ も論理式である，
3. φ，ψ が論理式のとき，$\neg\varphi$，$\varphi \wedge \psi$，$\varphi \vee \psi$，$\varphi \rightarrow \psi$ も論理式である，
4. $\kappa < \delta$ とする．各 $\xi < \kappa$ について φ_ξ が論理式のとき，$\bigwedge_{\xi<\kappa} \varphi_\xi$，$\bigvee_{\xi<\kappa} \varphi_\xi$ も論理式である．

$\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$ の公理は通常の命題論理に公理に加えて，次からなる：

1. (各 $\kappa < \delta$ ごとに) $\bigvee_{\xi<\kappa} \neg\varphi_\xi \leftrightarrow \neg \bigwedge_{\xi<\kappa} \varphi_\xi$,
2. (各 $\kappa < \delta$ と $\eta < \kappa$ ごとに) $\bigwedge_{\xi<\kappa} \varphi_\xi \rightarrow \varphi_\eta$.

$\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$ の推論規則は通常のモーダスポーネンスに加えて次からなる：

1. 各 $\xi < \kappa$ について $\vdash \varphi_\xi$ ならば $\vdash \bigwedge_{\xi<\kappa} \varphi_\xi$ が成立する．

以上を用いて $\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$ における証明可能関係 $\vdash$ を通常の命題論理の同様に定義する．また充足関係も通常の命題論理と同様に定義する．これにより $x \subseteq \gamma$ に対して，$\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$ のモデルが自然に定義される．次は簡単に示せる．

[*1] この文章においては [2] や [3] にあるように Mitchell–Steel mice を考える．

[*2] マウスに対して使うことがメインだと私は考えるが，今回はそうしない形で進める．

[*3] 私は標準的な命題論理の体系を知らないので以下のような定義になった．公理や推論規則として何を採用するかは大きな問題ではないように思われる．トートロジーを全て入れても良い．

命題 1.1. $\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$ は健全性を満たす．しかし $\delta > 2^\gamma$ ならば完全性を満たさない．

2 Extender algebra

$\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$-理論 T に対して，$\mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T$ を T によるリンデンバウム代数とする．これは自然にブール代数となる．次はブール代数の一般論から従う．

補題 2.1. $\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$-理論 T に対して，$\mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T$ が δ-鎖条件を持つならば $\mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T$ は完備ブール代数となる．

$\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$-理論 T とそのモデル $x \subseteq \gamma$ に対して，

$$G_x = \{[\varphi] \in \mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T \mid x \models \varphi\}$$

と定義する．これは $\mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T$ 上の超フィルターとなる．さらに次が成立する．

補題 2.2. T を $\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$-理論とする．$M$ を推移的な ZFC のモデルとする．さらに M において $\mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T$ は δ-鎖条件を持つとする．このとき T のモデルとなるような任意の $x \subseteq \gamma$ について，G_x は $(M, \mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T)$-ジェネリックフィルターとなる．

Proof. M での極大反鎖 $A = \{[\varphi_\xi] \mid \xi < \nu\}$ を任意に取る．ここで δ-鎖条件より $\nu < \delta$ が成立する．このとき $T \vdash \bigvee_{\xi<\nu} \varphi_\xi$ であることから $x \models \bigvee_{\xi<\nu} \varphi_\xi$ が成立する．よってある $\xi < \nu$ に対して，$x \models \varphi_\xi$ が成立する．□

ここで Woodin 基数の定義の復習をしておく．

定義 2.3. 順序数 δ が Woodin 基数であるとは，任意の関数 $f\colon \delta \to \delta$ に対してある初等埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在して次を満たすことをいう:

1. $\mathrm{cp}\,(j) = \kappa < \delta$,
2. $f"\kappa \subseteq \kappa$,
3. $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$.

これは次と同値になるのであった：

- 任意の $A \subseteq V_\delta$ に対して $(<\!\delta, A)$-強基数[*4]$\kappa < \delta$ が存在する．

さらにそのような κ は δ の下で定常集合をなすことがわかる．この条件をエクステンダーを用いて表すと次の同値な条件を得る：

- 任意の $A \subseteq V_\delta$ に対してある $\kappa < \delta$ が存在して，非有界な $\lambda \in [\kappa, \delta)$ に対してある (λ, A)-強エクステンダー[*5]$E \in V_\delta$ が存在して次を満たす：
  1. $\mathrm{lh}\,(E) = \mathrm{strength}(E)$ が成立し，$\mathrm{lh}\,(E)$ は到達不能基数となる，
  2. $\mathrm{cp}\,(E) = \kappa$.

[*4] 任意の $\lambda \in [\kappa, \delta)$ に対して，臨界点が κ となるような (λ, A)-強初等埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在することをいう．ここで j が (λ, A)-強初等埋め込みとは λ-強初等埋め込みであって，$j(A) \cap V_\lambda = A \cap V_\lambda$ を満たすことをいう．

[*5] 超冪から誘導される初等埋め込みが (λ, A)-強初等埋め込みであるようなエクステンダーのことをいう．

δ を Woodin 基数とする．$\mathbb{E} \subseteq V_\delta$ を上の条件を満たすようなエクステンダーを全て集めた集合とする．以降，Woodin 基数 δ に対して断り無しに $\mathbb{E}$ と書いたら，このように定義されるエクステンダーの集合とする．注意だがこの $\mathbb{E}$ は [2] や [3] において定義されているエクステンダーの列とは異なる．

定義 2.4. δ を Woodin 基数とし，δ に対して $\mathbb{E}$ を固定する．このとき $\mathcal{L}_{\delta,\gamma}$-理論 $T_{\delta,\gamma}(\mathbb{E})$ を次の論理式の演繹的閉包と定義する：

$$\Psi(\overrightarrow{\varphi}, \kappa, \lambda) : \bigwedge_{\xi<\kappa} \overrightarrow{\varphi}_\xi \leftrightarrow \bigwedge_{\xi<\lambda} i_E(\overrightarrow{\varphi})_\xi,$$

ただし $\overrightarrow{\varphi}$，κ，λ は次の条件を満たす：

- $\overrightarrow{\varphi} \in (\mathcal{L}_{\delta,\gamma})^\kappa$,
- $\forall \xi < \kappa(\overrightarrow{\varphi}_\xi \in V_\kappa)$,
- $\kappa < \lambda$,
- ある $(\lambda, \overrightarrow{\varphi})$-強エクステンダー $E \in \mathbb{E}$ が存在して $\mathrm{cp}\,(E) = \kappa$ かつ任意の $\xi < \lambda$ に対して $i_E(\overrightarrow{\varphi})_\xi \in V_\lambda$ を満たす．

定義 2.5. δ を Woodin 基数とし，δ に対して $\mathbb{E}$ を固定する．extender algebra $\mathcal{W}_{\delta,\gamma}(\mathbb{E})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{W}_{\delta,\gamma}(\mathbb{E}) = \mathbb{B}_{\delta,\gamma}/T_{\delta,\gamma}(\mathbb{E}).$$

次の命題から extender algebra $\mathcal{W}_{\delta,\gamma}(\mathbb{E})$ はアトムを持つような半順序であることがわかる．[*6]

命題 2.6. M を推移的な ZFC のモデルとする．M において δ は Woodin 基数であり，δ に対して $\mathbb{E}$ を固定する．このとき任意の $x \in \mathcal{P}(\omega)^M$ に対して，

$$x \models (T_{\delta,\omega}(\mathbb{E}))^M$$

が成立する．特に M の実数 x に対して，x は $(\mathcal{W}_{\delta,\omega}(\mathbb{E}))^M$ のアトムを定める．

Proof. 初等埋め込みによる反映の議論ですぐにわかる．ここで初等埋め込みによって実数が動かないことを用いる．[*7] □

補題 2.7. δ を Woodin 基数とし，δ に対して $\mathbb{E}$ を固定する．このとき $\mathcal{W}_{\delta,\gamma}(\mathbb{E})$ は δ-鎖条件を持つ．

Proof. そうでないと仮定する．$\overrightarrow{\varphi} = \langle \varphi_\xi \mid \xi < \delta \rangle \in (\mathcal{L}_{\delta,\gamma})^\delta$ を $A = \{[\varphi_\xi] \mid \xi < \delta\}$ が反鎖となるように取る．δ は Woodin 基数であることから定常性を用いて κ を次を満たすように取る：

- $\forall \xi < \kappa(\varphi_\xi \in V_\delta)$,
- κ は $< \delta$-$\overrightarrow{\varphi}$-強基数．

$\lambda > \kappa$ を十分大きく取る．$E \in \mathbb{E}$ を λ-$\overrightarrow{\varphi}$-強エクステンダーを取る．このとき $\Psi(\overrightarrow{\varphi}, \kappa, \lambda)$ より，

$$T_{\delta,\gamma}(\mathbb{E}) \vdash \varphi_\kappa \to \bigvee_{\xi<\kappa} \varphi_\xi$$

[*6] アトムを持ちながら非自明な性質を持つ半順序の例を考えたことがなかったので，私にとってエクステンダー代数は面白い例だと思える．同様の理由で Vopenka algebra もアトムを持つ半順序であることがわかる．

[*7] 同様の議論が ω ではなく $\mathbb{E}$ に入っているエクステンダーの臨界点の最小値より小さい γ に対して通ることがわかる．

が成立する．これは矛盾である． □

また extender alegebra の鎖条件は δ 未満個の直積によって閉じることが示せる．[*8]

補題 2.8 (Hjorth)**.** δ を Woodin 基数とし，δ に対して $\mathbb{E}$ を固定する．このとき任意の $\lambda < \delta$ に対して $(\mathcal{W}_{\delta,\gamma}(\mathbb{E}))^{\lambda}$ は δ-鎖条件を持つ．

証明は省略する．Rowbottom の定理を使えば良い．

3 Iteration tree

この章では反復可能性 (iterability) を導入する．Kunen の $L[U]$ の理論では超フィルターによる超冪を反復すること，つまり反復超冪 (iterated ultrapower) を考えるによって解析したいモデルたちがある意味で比較可能なことが重要であった．この反復超冪は常に最終モデルが持っている超フィルターを自分自身に適用するため線形の構造となっていた．Woodin 基数の内部モデルの理論において，エクステンダーによる超冪を反復することで同様にモデルたちを比較 (comparison) するためにはもはや線形な反復超冪ではうまくいかず，木の構造を持った反復超冪，つまり iteration tree を考える必要が出てくる．このような背景で iteration tree を考えるのである．

定義 3.1. λ を順序数とする．λ 上の半順序 $<_T$ が tree order であるとは次を満たすことをいう：

- 任意の $\xi < \lambda$ に対して，$0 <_T \xi$ が成立する，
- 任意の $\xi, \zeta < \lambda$ に対して，$\xi <_T \zeta$ ならば $\xi < \zeta$ が成立する，
- 任意の $\xi < \lambda$ に対して，ξ が後続順序数であることと $<_T$ の意味である元の後続であることは同値である，
- 任意の $\xi < \lambda$ に対して，$\{\zeta < \lambda \mid \zeta <_T \xi\}$ は $<_T$ によって整列されている，
- 任意の極限順序数 $\gamma < \lambda$ に対して，$\{\zeta < \lambda \mid \zeta <_T \gamma\}$ は γ において $\in$-共終である．

λ 上の tree order $<_T$ に対して，記法として $\alpha+1$ の $<_T$ での後続を $\mathrm{pred}^T(\alpha+1)$ と表す．

定義 3.2. M を推移的なモデルとする．[*9] $\mathbb{E}$ を M のエクステンダーからなる集合とする．$\mathcal{M} = (M, \mathbb{E})$ 上の長さ λ の iteration tree $\mathcal{T} = (<_T, \langle \mathcal{M}^T_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle, \langle E^T_\alpha \mid \alpha+1 < \lambda \rangle, \langle j_{\xi,\zeta} \mid \xi <_T \zeta < \lambda \rangle)$ とは次の条件を満たすことをいう：

- $<_T$ は λ 上の tree order,
- $\mathcal{M}^T_0 = \mathcal{M}$.
- $\mathcal{M}^T_\alpha = (M^T_\alpha, \mathbb{E}^{M^T_\alpha})$, ただし $\mathbb{E}^{M^T_\alpha}$ は M^T_α のエクステンダーからなる集合,
- 任意の $\xi <_T \zeta < \lambda$ に対して，$j_{\xi,\zeta} : M^T_\xi \to M^T_\zeta$ である，
- 任意の $\alpha+1 < \lambda$ に対して，E^T_α は $\mathbb{E}^{M^T_\alpha}$ に属するエクステンダーである，
- 任意の $\alpha+1 < \lambda$ に対して，$\kappa = \mathrm{cp}\left(E^T_\alpha\right)$ とすると $\mathrm{pred}^T(\alpha+1)$ は $M^T_\beta \cap V_{\kappa+1} = M^T_\alpha \cap V_{\kappa+1}$ を満たす最小の β である，
- 任意の $\alpha+1 < \lambda$ に対して，$\mathcal{M}^T_{\alpha+1} = \mathrm{Ult}\left(\mathcal{M}^T_{\mathrm{pred}^T(\alpha+1)}, E^T_\alpha\right)$，$j_{\beta,\alpha+1} = i_{E^T_\alpha}$ を満たす，

[*8] 当然一般には成立しない．Suslin 木などがそうである．
[*9] 十分強いモデルであれば良い．

- 任意の極限順序数 $\eta < \lambda$ に対して，$\mathcal{M}_\eta^T$ は $(\langle \mathcal{M}_\alpha^T \mid \alpha <_T \eta \rangle, \langle j_{\alpha,\beta} \mid \alpha <_T \beta <_T \eta \rangle)$ の direct limit である，
- 任意の $\alpha < \beta < \lambda$ に対して，$\mathrm{lh}\left(E_\alpha^T\right) \leq \mathrm{lh}\left(E_\beta^T\right)$ を満たす[*10]，
- 任意の $\alpha < \beta < \lambda$ に対して，$M_\alpha^T \cap V_{\mathrm{lh}(E_\alpha^T)} = M_\beta^T \cap V_{E_\alpha^T}$ を満たす，

これで iteration tree の定義ができた．反復可能性 (iterability) は player が 2 人からなるゲームの必勝戦略の存在として記述される．まずはそのゲームを定義する．$\mathcal{M} = (M, \mathbb{E})$ に対して，長さ θ の $\mathcal{M}$ 上の iteration game $G(\mathcal{M}, \theta)$ とは次のように play される：

- player Suc と Lim は協力して長さ θ の $\mathcal{M}$ 上の iteration tree を構成する，
- (successor stage) 長さ $\alpha = \beta + 1$ まで構成したとする．Suc は $\mathbb{E}^{M_\beta^T}$ の中からエクステンダー E_β^T を iteration tree の定義を満たすように任意に取る．次に iteration tree の定義に従って一つ拡張する．このとき非整礎なモデルが現れた場合，Lim の負けとする．そうでない場合次の stage に進む，
- (limit stage)　極限順序数 γ に対して，長さ γ まで構成したとする．Lim は cofinal well-founded branch を取り，それに沿った direct limit を取る．ここで非整礎なモデルが現れた場合，Lim の負け．そうでない場合，その direct limit を $\mathcal{M}_\gamma^T$ とし，次の stage に進む，
- 任意の $\alpha < \lambda$ に対して，$\mathcal{M}_\alpha^T$ が整礎なら Lim の勝ちとする．

定義 3.3. θ を順序数とする．$\mathcal{M}$ が λ-反復可能 (iterable) とは player Lim が $G(\mathcal{M}, \theta)$ において必勝戦略を持つことをいう．この必勝戦略のことを λ-反復戦略 (iteration strategy) という．

4 Genericity iteration

Genericity iteration に関して様々な変種があるが今回は最も基本的なものを示す．他の変種も今から示すものをいくらか弄ることで示すことができる．次の定理は Woodin 基数を持つ反復可能な構造が与えられたとき，任意の実数に対して，何回か超冪を取ることによってその実数をそれ上のジェネリックにすることができるという驚くべき Woodin の定理[*11]である．そこには extender algebra が用いられる．

定理 4.1 (Woodin)**.** δ を可算順序数とする．$\mathcal{M} = (M, \mathbb{E})$ は $(\omega_1 + 1)$-反復可能であるとする．さらに次を満たすとする：

$$M \models \mathrm{ZFC}^- + \delta : \mathrm{Woodin}.$$

このとき任意の実数 x に対して，ある可算な $\mathcal{M}$ 上の iteration tree $\mathcal{T}$ で最終モデル[*12]が N であるものが存在して，iteration map を $j : M \to N$[*13]としたとき x は N 上 $j(\mathcal{W}_{\delta,\omega}(\mathbb{E}))$-ジェネリックとなる．

Proof. $x \models j(\mathcal{W}_{\delta,\omega}(\mathbb{E}))$ とできることを言えば良い．背理法で示す．$\mathcal{M}$ 上の長さ $\omega_1 + 1$ の iteration tree $\mathcal{T}$ を次のように構成する: Successor stage では $x \models j(\mathcal{W}_{\delta,\omega}(\mathbb{E}))$ ではないので，その witness となるエクステンダーの中で長さが最小となるように取り，それを E_α^T とする．Limit stage では反復可能性を用い

[*10] これから考えるような iteration tree に関してこの等号が外せるかどうか私にはわからない．マウスに対して考えるような場合にはこの等号は外せる．

[*11] 私がこの定理を初めて知ったとき，世の中にはこんな素晴らしい定理があるのだなぁと驚いたものである．実際この定理はとても強力である (超冪を何回か取るだけでそのモデル上のジェネリックにできることが強力でないはずがない!!)．

[*12] Iteration tree の最後のノードに乗っているモデルのこと

[*13] Mitchell–Steel mice の場合でも tree 上のモデルが drop しないことが言える．

て，cofinal well-founded branch を取る．この操作によって iteration tree が定義される[*14]．ここで実はこの操作はある α で止まっていることを言いたい．そこで reflection argument を用いる．以下は概略である．[*15]Ξ を十分大きい正則基数とする．$X \prec H_\Xi$ を可算初等部分モデルであって X は関係あるものを全て含んでいて，$X \cap \omega_1$ が推移的になるように取る．$\pi\colon N \simeq X \prec H_\Xi$ を推移的崩壊の逆とする．このとき $\mathrm{cp}\,(\pi) = \alpha = \omega_1^H$ となることに注意しておく．$pi(\bar{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$ とする．初等性と iteration tree の定義から $\alpha \in (0, \omega_1)_T = \{\xi \mid 0 <_T \xi <_T \omega_1\}$ を満たす．このとき $\delta^* = j^T_{0,\alpha}(\delta) = j^{\bar{T}}_{0,\alpha}(\delta)$ としたとき，$V_{\delta^*}^{M_\alpha^T} = V_{\delta^*}^{M_\alpha^{\bar{T}}}$ が成立する．よって $\pi \restriction V_{\delta^*}^{M_\alpha^T} = j^T_{\alpha,\omega_1} \restriction V_{\delta^*}^{M_\alpha^T}$ が成立する．ここで $(0, \omega_1)_T$ において M_α^T に適用されるエクステンダーを見ると矛盾が生じる． $\square$

Genericity iteration を用いることで generic absoluteness を示すことができる．他にも内部モデル理論においては extender algebra はしばしば使われる重要な道具となっている．

参考文献

[1] Ilijas Farah. The extender algebra and Σ_1^2-absoluteness, to appear in “The Cabal Seminar” Vol. 4 (Kechris, Löwe, Steel, eds.).

[2] William J. Mitchell and John R. Steel. Fine Structure and Iteration Trees, volume 3 of Lecture Notes in Logic. Springer, Berlin, 1994.

[3] John R. Steel. An outline of inner model theory. In Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, editors, Handbook of set theory, volume 3, chapter 19. Springer, first edition, 2010.

[4] Donald A. Martin and John R. Steel. Iteration trees. Journal of the American Mathematical Society, 7(1):1 - 73, 1994.

[5] John R. Steel. Inner models with many Woodin cardinals. Annals of Pure and Applied Logic, 65(2):185 - 209, 1993.

[6] Ernest Schimmerling and John R. Steel. Fine structure for tame inner models. The Journal of Symbolic Logic, 61(2):621 - 639, 1996.

[*14] ここで iteration tree の長さが真に増えることが望ましいが，私は示せていない．

[*15] これはよくやる議論なので概略書いておく．