Simple theory のセミナーノート

YasudaYasutomo

2019 年 12 月 19 日

A Course in Model Theory 7 章のセミナーノートです.
セミナーで無駄な議論などを指摘してくださった先輩方に感謝します.

1 Forking and Dividing

この章では断りのない限り T は可算完全で無限モデルを持つと仮定して議論する.
T の monster model を $\mathfrak{C}$ を固定する. [*1]

補題 1.1 (The Standard lemma)**.** A を集合, I を tuple の無限列, J を全順序集合とする.
このとき J で順序づけられた A-indiscernible で $\mathrm{EM}(I/A)$ を実現するものが存在する.

$\mathrm{EM}(I/A)$ というのは $L(A)$-論理式 φ で

$$\mathfrak{C} \models \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \text{ for all } a_{i_1} < \cdots < a_{i_n} \in I$$

を満たすもの全体からなるタイプであった.

定義 1.2 (Dividing)**.** $b \in \mathfrak{C}$ とする. [*2]

- 論理式 $\varphi(x, b)$ divides over A w.r.t. $k \in \omega$[*3]とはある列 $(b_i)_{i\in\omega}$ が存在して次を満たすことをいう.
  1. $\mathrm{tp}(b_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$ for all $i \in \omega$
  2. $(\varphi(x, b_i))_{i\in\omega}$ is k-inconsistent[*4]
- 論理式の集合 $\pi(x)$ に対して, $\pi(x)$ divides over A とはある $b \in \mathfrak{C}$ と論理式 $\varphi(x, y)$ が存在して次を満たすことをいう.
  1. $\pi(x) \models \varphi(x, b)$
  2. $\varphi(x, b)$ divides over A for some $k \in \omega$

Dividing の基本的な性質を次で示す.[*5]

命題 1.3. $\varphi(x, a) \models \psi(x, b)$ とし, $\psi(x, b)$ divides over A とする.
このとき $\varphi(x, a)$ divides over A.

[*1] 集合論的な細かいことは気にしない.
[*2] b は tuple でも問題ない.
[*3] k が明示されてないときは for some $k \in \omega$ とする.
[*4] 思い出しておくと論理式の集合が k-inconsistent とは任意に k 個取り出してくると inconsistent になることだった.
[*5] 本文中ではあっさり書かれているが重要だと思う.

証明. $\psi(x, b)$ divides over A より, $(b_i)_{i\in\omega}$ を witness として取る.

各 $i \in \omega$ について,

$$\mathrm{tp}(a/A) \cup \{\forall x(\varphi(x, y) \to \psi(x, b_i))\} \cup T$$

を考える. [*6]これは有限充足可能である.

実際 $\Delta(y) \subseteq_{\mathrm{fin}} \mathrm{tp}(a/A)$ を取ると, $\exists y(\bigwedge \Delta(y) \wedge \forall(\varphi(x, y) \to \psi(x, z)) \in \mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(b_i/A)$ より, $z = b_i$ に対する witness a_i をそれぞれ取れば良い.

よって各 $i \in \omega$ での実現 $(a_i)_{i\in\omega}$ を取ると構成より $\varphi(x, a)$ divides over A の witness となる. □

系 1.4. φ divides over A と $\{\varphi\}$ divides over A は同値.

命題 1.5. $\pi(x)$ を論理式の集合とする.

$\pi(x)$ divides over A ならば, ある $\Delta \subseteq_{\mathrm{fin}} \pi(x)$ が存在して $\varphi \equiv \bigwedge \Delta$ divides over A が成立する.

論理式の集合が divide しているとき, そこから有限個取ってきて dividing を考えれば良いことは以降よく使う.

命題 1.6. $A \subseteq B$ とし, $\varphi(x, b)$ divides over A とする. このとき B の A-conjugate $\bar{B}$ が存在して $\varphi(x, b)$ divides over $\bar{B}$ を満たす.

証明. $I = (b_i)_{i\in\omega}$ を witness として取る. The Standard lemma で B-indiscernible $J = (c_i)_{i\in\omega}$ を $\mathrm{tp}(J/A) = \mathrm{tp}(I/A)$ となるように取る. 自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)\colon J \mapsto I$ を考えれば良い. □

例 1.7. DLO において, $\varphi(x, a, b) \equiv$ "$a < x < b$" divides over $\emptyset$ w.r.t. 2.

補題 1.8. $\pi(x, b)$ を論理式の集合とする. 次は同値.

1. $\pi(x, b)$ divides over A.
2. ある A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ が存在して次を満たす.
   - $\mathrm{tp}(b_0/A) = \mathrm{tp}(b/A)$
   - $\bigcup_{i\in\omega} \pi(x, b_i)$ is inconsistent
3. ある A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ が存在して次を満たす.
   - $b_0 = b$
   - $\bigcup_{i\in\omega} \pi(x, b_i)$ is inconsistent

証明. $(1 \to 2)$ $\pi(x, b)$ divides over A w.r.t. $k \in \omega$ と仮定する. $\pi(x, b)$ から有限個取ってきて $\varphi(x, b)$ divides over A w.r.t. $k \in \omega$ として良い.

$(b_i)_{i\in\omega}$ を dividing の条件を満たすように取る. つまり

- $\mathrm{tp}(b_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$
- $\{\varphi(x, b_i) \mid i \in \omega\}$ is k-inconsistent

を満たすように取る. The Standard lemma より一般性を損なうことなく $(b_i)_{i\in\omega}$ は A-indiscernible として良い.

[*6] 自由変数は y で揃えている.

このとき $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ は inconsistent.

(2 → 1) A-indiscernible $(b_i)_{i\in\omega}$ を仮定の条件を満たすように取る. $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ は inconsistent より, $\pi(x,b)$ からその witness を有限個取りそれを $\varphi(x,b)$ とする. 取り方から $\Sigma(x)=\{\varphi(x,b_i)\mid i\in\omega\}$ は inconsitent. indiscernibility と compactness より $\Sigma(x)=\{\varphi(x,b_i)\mid i\in\omega\}$ は k-inconsistent.

(3 → 2) 良い.

(2 → 3) 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)\colon b_0\mapsto b$ を考えれば良い. □

系 1.9. 次は同値.

1. $\mathrm{tp}(a/Ab)$ doesn't divide over A.
2. 任意の A-indiscernible I で b を含むものに対して, ある Aa-indiscernible J が存在して $\mathrm{tp}(J/Ab)=\mathrm{tp}(I/Ab)$ を満たす.
3. 任意の A-indiscernible I で b を含むものに対して, ある $\bar{a}$ が存在して $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ I は $A\bar{a}$-indiscernible となる.
4. 任意の A-indiscernible I で b を含むものに対して, ある $\bar{a}$ と $A\bar{a}$-indiscernible J が存在して $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ $\mathrm{tp}(I/Ab)=\mathrm{tp}(J/Ab)$ を満たす.

証明. (2 → 3) A-indiscernible I で b を含むものを任意に取る. 仮定より Aa-indiscernible J で $\mathrm{tp}(J/Ab)=\mathrm{tp}(I/Ab)$ を満たすものを取る. 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/Ab)\colon J\mapsto I$ を取り, $\bar{a}=\sigma(a)$ とする. このとき I は $A\bar{a}$-indiscernible かつ $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ を満たす.

(3 → 2) A-indiscernible I で b を含むものを任意に取る. 仮定より $\bar{a}$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ I は $A\bar{a}$-indiscernible となるように取る. 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/Ab)\colon\bar{a}\mapsto a$ となるように取り, $J=\sigma"I$ とする. このとき J は Aa-indiscernible かつ $\mathrm{tp}(I/Ab)=\mathrm{tp}(J/Ab)$ を満たす.

$(2,3\to 4)$ はい.

$(4\to 2,3)$ 今までのように自己同型で移す.

(1 → 4) A-indiscernible I で b を含むものを任意に取る. $b_{i_0}=b$ とする. $p(x,y)=\mathrm{tp}(ab/A)$ とする.

$\mathrm{tp}(a/Ab)$ doesn't divide over A かつ前補題より $\bigcup_{i\in I}p(x,b_i)$ は consistent. よって $\bar{a}$ をその実現とする.

The Standard lemma を用いて $K=(c_i)_{i\in I}$ を $A\bar{a}$-indiscernible かつ K は $\mathrm{EM}(I/A\bar{a})$ を実現するように取る. $\models p(\bar{a},c_{i_0})$ より, 自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A\bar{a})\colon c_{i_0}\mapsto b$ を取る. $J=\sigma"K$ とすると $A\bar{a}$-indiscernible かつ $\mathrm{tp}(J/Ab)=\mathrm{tp}(I/Ab)$ を満たす.

(2 → 1) $\mathrm{tp}(a/Ab)$ divides over A と仮定して矛盾を導く. $\pi(x,y)=\mathrm{tp}(ab/A)$ とする. 前補題より A-indiscernible $I=(b_i)_{i\in\omega}$ を $b_0=b$ かつ $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ は inconsistent となるように取る.

仮定よりある $\bar{a}$ が存在して $\mathrm{tp}(\bar{a}/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ かつ I は $A\bar{a}$-indiscernible となる. $\models\mathrm{tp}(ab/A)[\bar{a},b]$ となり, indiscernibility から $\bigcup_{i\in\omega}\pi(\bar{a},b_i)$ は consistent. Contradiction. □

例 1.10. $a\notin\mathrm{acl}(A)$ とする. このとき $\mathrm{tp}(a/Aa)$ divides over A.

証明. $a\notin\mathrm{acl}(A)$ より a の A-conjugate $(a_i)_{i\in\omega}$ を取る.

$\varphi(x,a)\equiv$ "$x=a$" を考えると $\mathrm{tp}(a/A)=\mathrm{tp}(a_i/A)$ かつ $(\varphi(x,a_i))_{i\in\omega}$ は 2-inconsitent となる. □

例 1.11. $\pi(x)$ を $\mathrm{acl}(A)$ 上で定義された無矛盾な論理式の集合とする. このとき $\pi(x)$ doesn't divide over A.

証明. $\pi(x)$ divides over A と仮定して矛盾を導く. $\pi(x)$ から有限個取ってきて $\varphi(x,b)$ divides over A とし

て良い．このとき仮定より $b \in \mathrm{acl}(A)$ となる．

Dividing の witness を $(b_i)_{i\in\omega}$ を取る．The Standard lemma より $(b_i)_{i\in\omega}$ は A-indiscernible として良い．b は A 上代数的より, $\psi(x)$ を b を実現としてもつ A 上の algebraic formula とする．このとき全ての $i \in \omega$ に対して $\psi(x) \in \mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(b_i/A)$ が成立する．$\psi(x)$ の取り方と indiscernibility から $b = b_i$ for all $i \in \omega$. よって $\varphi(x, b)$ は inconsistent となり, $\pi(x)$ の取り方に矛盾． □

命題 1.12. $A \subseteq B$ とする．$\mathrm{tp}(a/B)$ doesn't divide over A かつ $\mathrm{tp}(c/Ba)$ doesn't divide over Aa とする．

このとき $\mathrm{tp}(ac/B)$ doesn't divide over A

証明. b を B の元からなる finite tuple とする．I を infinite A-indiscernible で b を含むものとする．

$\mathrm{tp}(a/B)$ doesn't divide over A より, Aa-indiscernible J で $\mathrm{tp}(J/Ab) = \mathrm{tp}(I/Ab)$ を取る．このとき "$x = b$" $\in \mathrm{tp}(I/Ab) = \mathrm{tp}(J/Ab)$ より, J はまた b を含む．

また $\mathrm{tp}(c/Ba)$ doesn't divide over Aa より Aac-indiscernible K で $\mathrm{tp}(K/Aab) = \mathrm{tp}(J/Aab)$ を満たすものを取る．よって $\mathrm{tp}(ac/B)$ doesn't divide over A. □

Forking を定義する．

定義 1.13 (Forking)**.** $\pi(x)$ を論理式の集合とする．$\pi(x)$ forks over A とはある論理式 $\varphi_l(x)$ ($l < d \in \omega$) が存在して次を満たすことをいう．

- $\pi(x) \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x)$
- $\varphi_l(x)$ divides over A

明らかに Dividing の方が Forking より強い．逆は一般には成立しない*7が, あとで定義される simple theory ではこれらが一致する．*8

余談 1.

- Divide は「分かれる」という意味がある．
- Fork は「分岐する」という意味がある．

命題 1.14 (Non-forking is closed)**.** $p \in S(B)$ forks over A とする．

このときある $\varphi \in p$ が存在して, 任意の $q \in S(B)$ に対して $\varphi \in q$ ならば q forks over A が成立する．

証明. $p \models \bigvee_{l<d} \varphi_l$ とすると compactness よりある $\pi \subseteq_{\mathrm{fin}} p$ が存在して $\pi \models \bigvee_{l<d} \varphi_l$ が成立する．$\varphi = \bigwedge \pi$ とすれば良い． □

系 1.15. $p \in S(B)$ forks over A と仮定する．このときある $B_0 \subseteq_{\mathrm{fin}} B$ が存在して $p \restriction AB_0$ forks over A. □

補題 1.16. 論理式の集合 π は A で有限充足可能とする．このとき π doesn't fork over A.

証明. そうではないと仮定して矛盾を導く．$\pi \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x)$ とする．このときある $l < d$ 存在して $\varphi_l(x)$ は A での実現を持つ．これは $\varphi_l(x)$ divides over A であることに矛盾． □

*7 有理数上の cyclic order とか考えるとダメ．

*8 いい話．

補題 1.17. $A \subseteq B$ とし, π を B 上の partial type とする．また π doesn't fork over A と仮定する．
このとき π の拡張 $p \in S(B)$ が存在して p doesn't fork over A.

証明. p を π を含む $L(B)$-論理式の集合で A 上 fork しないもので極大なものとすれば良い． $\square$

2 Simple theory

この章では断りのない限り T は可算完全で無限モデルを持つと仮定して議論する．

定義 2.1 (Simple)**.**

- 論理式 $\varphi(x, y)$ が k-TP[*9]を持つとはある $(a_s \mid \emptyset \neq in^{<\omega}\omega)$ が存在して次を満たすことをいう．
  1. 任意の $s \in {}^{<\omega}\omega$ について, $\{\varphi(x, a_{s^\frown\langle i\rangle}) \mid i \in \omega\}$ は k-inconsitent
  2. 任意の $\sigma \in {}^{\omega}\omega$ について, $\{\varphi(x, a_s) \mid \emptyset \neq s \sqsubset \sigma\}$ は consitent
- theory T が simple であるとは TP を持つ論理式が存在しないときのことをいう．

TP を考えるときはパラメタなしの論理式を考えれば十分である．totally transcendental なら simple である．

次の dividing sequence の概念は有用である．

定義 2.2. Δ をパラメタなし論理式の有限集合とする．δ を順序数とする．
このとき $(\varphi_i(x, a_i) \mid i < \delta)$ が Δ-k-dividing sequence over A であるとは次を満たすことをいう．

- $\varphi_i(x, y) \in \Delta$
- $\varphi_i(x, a_i)$ divides over $A \cup \{a_j \mid j < i\}$ w.r.t. $k \in \omega$
- $\{\varphi_i(x, a_i) \mid i < \delta\}$ is consistent

δ を dividing sequence の長さという．

Dividing sequence を使って TP を特徴付けることができる．

補題 2.3.

1. φ が k-TP を持つと仮定する．このとき任意の A と δ について, 長さ δ の φ-k-dividing sequence over A が存在する．
2. 長さが無限の Δ-k-dividing sequence over $\emptyset$ が存在すると仮定する．このときある $\varphi \in \Delta$ が存在して, φ は k-TP を持つ．

証明. (1) φ が k-TP を持つとする．δ が極限順序数のときのみ考えれば十分である．[*10]compactness から任意の $\kappa \in \mathrm{ON}$ について, $(a_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\delta}\kappa)$ が存在して次を満たす．

- 任意の $s \in {}^{<\delta}\kappa$ について, $\{\varphi(x, a_{s^\frown\langle i\rangle}) \mid i < \kappa\}$ は k-inconsistent
- 任意の $\sigma \in {}^{\delta}\kappa$ について, $\{\varphi(x, a_s) \mid \emptyset \neq s \sqsubset \sigma\}$ は consitent

---

[*9] tree property
[*10] 短くすればいい

正則基数 κ を $\kappa > 2^{\max\{|T|,|A|,\delta\}}$ となるように十分大きく取る．infinite path $\sigma \in {}^{\delta}\kappa$ を全ての $s \sqsubset \sigma$ について, $A \cup \{a_t \mid t \sqsubseteq s\}$ 上の $a_{s^\frown\langle i\rangle}$ のタイプが等しくなるような $i < \kappa$ が無限個存在するように取る．

これは κ が十分大きいことから帰納的に構成すれば良い．

このような σ に対して, 構成より $(\varphi(x, a_{\sigma\restriction i+1} \mid i < \delta))$ は φ-k-dividing sequence over A となる.[*11]

(2) $(\varphi_i(x, a_i) \mid i \in \omega)$ を Δ-k-dividing sequence over $\emptyset$ とする．Δ は有限より $(\varphi(x, a_i) \mid i \in \omega)$ を φ-k-dividing sequence over $\emptyset$ として良い．φ が k-TP を持つことを示す．

各 $i \in \omega$ について, $(a_i^n)_{n\in\omega}$ を $\varphi(x, a_i)$ divides over $\{a_j \mid j < i\}$ w.r.t. k の witness として取り固定する．つまり各 $i \in \omega$ について次が成立している．

- $\mathrm{tp}(a_i^n/\{a_j \mid j < i\}) = \mathrm{tp}(a_i/\{a_j \mid j < i\})$ for all $n \in \omega$
- $\{\varphi(x, a_i^n \mid n \in \omega\}$ is k-inconsistent

$(b_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$ を次のように帰納的に構成する．$s \in {}^{i+1}\omega$ に対して, $\bar{b} = (b_{s\restriction 1}, \ldots, b_{s\restriction i})$ まで定義したとする．さらに $\mathrm{tp}(a_0, \ldots, a_{i-1}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$ を満たすと仮定する．自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$: $(a_0, \ldots, a_{i-1}) \mapsto \bar{b}$ を取り, $b_s = \sigma(a_i^{s(i)})$ とする．

構成より $(b_s \mid \emptyset \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$ は求めるものとなっている． □

命題 2.4. T を simple とする．Δ を論理式の有限集合, $k \in \omega$ とする．

このとき Δ-k-dividing sequence の長さは有限の上限を持つ．

証明. そうではないと仮定して矛盾を導く．長さ無限の Δ-k-dividing sequence over $\emptyset$ を構成する．$\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ とする．

サイズの議論により $f \in {}^{\omega}\Delta$ を任意の $m \in \omega$ について $f \restriction m$ の順で Δ-k-dividing sequence over $\emptyset$ が存在するように取る．[*12]定数記号 c, $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ $(n \in \omega)$, $a_n^0, \ldots, a_n^i, \ldots$ $(n \in \omega, i \in \omega)$ を用意する．次の theory を考える．[*13]

- T
- $\{\varphi_{f(n)}(c, a_n) \mid n \in \omega\}$
- $\mathrm{tp}(a_n^i/\{a_0, \ldots, a_{n-1}) = \mathrm{tp}(a_n/\{a_0, \ldots, a_{n-1})$ for each $n \in \omega$, $i \in \omega$
- $\{\varphi(x, a_n^i) \mid i \in \omega\}$ is k-inconsistent for each $n \in \omega$

これは仮定より有限充足可能. 実際有限個取ってきたとき十分長い $f \restriction m$ の順に論理式が並んだ Δ-k-dividing sequence over $\emptyset$ を取り解釈をそれに当てれば良い.[*14]

よって compactness より欲しいものが得られる． □

命題 2.5. T は無限完全で無限モデルを持つ theory とする．次は同値.

1. T は simple.
2. 任意の B と任意の $p \in S_n(B)$ についてある $A \subseteq B$ が存在して, $|A| \leq |T|$ かつ p doesn't divide over A を満たす.

[*11] $i+1$ で切っているところが効いている

[*12] compactness を使いたいので dividing sequence に出てくる論理式をあらかじめ決めておく

[*13] 長いので箇条書きで書いている

[*14] このために f を取った

3. ある順序数 κ が存在して, 任意の $M \models T$ と任意の $p \in S_n(M)$ に対してある $A \in [M]^{\leq\kappa}$ が存在して, p doesn't divide over A を満たす.

証明. ($2 \to 3$) 良い.

($1 \to 2$) まず $p \in S_n(B)$ doesn't divide over B より $|B| > |T|$ のときを考えれば十分である.

そうではないと仮定して矛盾を導く. 仮定より B と $p \in S_n(B)$ を取る. 帰納的に列 $(\varphi_i(x, b_i))_{i<|T|^+}$ を次のように構成する.

- 各 φ_i は p に属す論理式
- $\varphi_i(x, b_i)$ divides over $\{b_j \mid j < i\}$ w.r.t. $k \in \omega$
- $b_i \in B$

$\varphi_i(x, y)$ 全体のサイズは $|T|$ 以下より, φ-k-dividing sequence $(\varphi(x, b_i))_{i<|T|^+}$ が取れる. これは T が simple であることに矛盾.

($3 \to 1$)　対偶を示す. 任意に順序数 κ を取る. T は simple でないから長さ κ^+ の φ-k-dividing sequence $(\varphi(x, b_i))_{i<\kappa^+}$ を取る.

次を満たすような T のモデルの列を取る.

- $M_0 \prec M_1 \prec \dots$
- 任意の $j < i$ について, $b_j \in M_i$
- $\phi(x, b_i)$ divides over M_i

これは命題 1.6. を使うことで取れる. $M = \lim M_i \models T$ とする. サイズ κ の部分集合はどこかの M_i で捕まっているのでこれは 3 を満たさない. □

命題 2.6. T を simple とし, $p \in S(A)$ とする. このとき p doesn't fork over A.

証明. p forks over A と仮定する. $p \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x, b)$ とする. $\Delta = \{\varphi_l(x, y) \mid l < d\}$ とおく.

$n \in \omega$ の帰納法で長さ n の Δ-k-dividing sequence over A を構成する. さらに dividing sequence は p と consistent となるように構成する.

$(\psi_i(x, a_i))_{i<n}$ まで構成したとする. $\bar{b}$ を b の A-conjugate で $(\psi_i(x, a_i))_{i<n}$ が dividing sequence over $A\bar{b}$ となるように取る. このとき $p \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x, \bar{b})$ より, $\varphi_l(x, \bar{b})$ を $p \cup \{\psi_i(x, a_i) \mid i < n\}$ となるように取る.

$\varphi_l(x, \bar{b}), \psi_0(x, a_0), \dots, \psi_{n-1}(x, a_{n-1})$ は Δ-k-dividing sequence over A consistent with p となる. [*15]

これは T が simple であることに矛盾. □

定義 2.7. p を A 上のタイプとする. p の拡大 q が A 上 fork しているとき forking extension という.

系 2.8. $A \subseteq B$ とし, T を simple とする. 任意の A 上のタイプは B 上のタイプへの non-forking extension を持つ. □

定義 2.9. $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_C B$[*16]とは, 任意の $\bar{a} \in [A]^{<\omega}$ について $\mathrm{tp}(\bar{a}/BC)$ doesn't fork over C を満たすことをいう.

[*15] 先頭にくっつけるのが大事

[*16] A is independent form B over C という

定義 2.10. I を全順序, $\bar{a} = (a_i)_{i \in I}$ を列とする.

- $\bar{a}$ が independent over A とは, 全ての $i \in I$ について $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \{a_j \mid j < i\}$ を満たすときのことをいう.
- $\bar{a}$ が Morley sequence over A とは, $\bar{a}$ が independent over A かつ A-indiscernible であることをいう.
- $\bar{a}$ が Morley sequence in p over A とは, $\bar{a}$ が Morley sequence over A かつ p の実現からなる列であるときをいう.

命題 2.11. M をモデルとし, $A \subseteq M$ とする. p を M 上のタイプとする. また M は $|A|^+$-saturated と仮定する. このとき p forks over A と p divides over A は同値.

証明. p forks over A とする. このときある $\varphi(x, m) \in p$ が存在して, $\varphi(x, m) \models \bigvee_{l<d} \varphi_l(x, b)$ となる.
tp(b/Am) の解を $\bar{b} \in M$ とする. このときある $\varphi_l(x, \bar{b}) \in p$ となり, p divides over A. □

命題 2.12. q を A-invariant global type[*17]とする. このとき q doesn't fork over A.

証明. q doesn't devide over A を示せば良い. $\varphi(x, b) \in q$ を dividing formula とする. $(b_i)_{i \in \omega}$ をその witness とする. q は A-invariant より, 各 $i \in \omega$ について $\varphi(x, b_i) \in q$ となり矛盾. よって q doesn't devide over A. □

例 2.13. q を A-invariant global type とする. 列 $(b_i)_{i \in \omega}$ を各 b_i が $q \restriction A \cup \{b_j \mid j < i\}$ を実現するように取る. このとき $(b_i)_{i \in \omega}$ は Morley sequence over A.

証明. 仮定の条件を満たす列を good ということにする. good な列の部分列はまた good となる.
まず indiscernibility を示す. good な列 $(a_0, \ldots, a_n)$ と $(b_0, \ldots, b_n)$ に対して $\mathrm{tp}(a_0, \ldots, a_n/A) = \mathrm{tp}(b_0, \ldots, b_n/A)$ を示せば良い. $n \in \omega$ についての帰納法で示す.
$\mathrm{tp}(a_0, \ldots, a_{n-1}/A) = \mathrm{tp}(b_0, \ldots, b_{n-1}/A)$ を仮定する. 自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)\colon (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1})$ を取る. このとき $\sigma(\mathrm{tp}(a_n/A \cup \{a_0, \ldots, a_{n-1}\})) = \mathrm{tp}(b_n/A \cup \{b_0, \ldots, b_{n-1}\})$ が成立することから良い.
次に independence を示す. これは q doesn't fork over A であることから良い. □

参考文献

[1] Tent, K., and Ziegler, M. (2012). A Course in Model Theory (Lecture Notes in Logic). Cambridge: Cambridge University Press.

[*17] $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ で不変なもの