

決定性公理の無矛盾性

YasudaYasutomo

2020 年 2 月 24 日

決定性公理の無矛盾性証明をする．無限個の Woodin 基数とそれらより大きい可測基数の存在を仮定したとき $\text{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成立することを示す．tree production lemma については [1] を参考にしている． $\mathbb{R}^\#$ については [6] を参考にすると良い．

1 Symmetric extension

M を ZFC の内部モデル, $\alpha \in M$ を順序数とする． $(M, \text{Coll}(\omega, < \alpha))$ -generic G に対して,

$$\tau = \bigcup \{ \mathbb{R} \cap M[G \cap \text{Coll}(\omega, < \beta)] \mid \beta < \alpha \}$$

と定義する．このとき $N_G = M(\tau)$ と表すことにする．内部モデル N が M の $\text{Coll}(\omega, < \alpha)$ による symmetric extension であるとは次を満たすことをいう．

- $M \subseteq N$
- ある M の generic extension において $N \equiv_M N_G$ を満たす．ただし G は $(M, \text{Coll}(\omega, < \alpha))$ -generic.

次は symmetric extension の十分条件を与える．

補題 1.1. M を ZFC の内部モデルとし, δ を M において強極限的とする． $\tau \subseteq \mathbb{R}$ が次の条件を満たすと仮定する．

1. 任意の $x \in \tau$ に対してある半順序 $\mathbb{P} \in M_\delta$ と (M, \mathbb{P}) -generic g が存在して $x \in M[g]$ を満たす．
2. 任意の $x, y \in \tau$ に対して $\mathbb{R} \cap M(x, y) \subseteq \tau$ を満たす．
3. $\delta = \sup\{\omega_1^{M[x]} \mid x \in \tau\}$

このとき $\mathbb{R} \cap M(\tau) = \tau$ かつ $M(\tau)$ は M の $\text{Coll}(\omega, < \delta)$ による symmetric extension となる．

証明. \mathbb{P} をある $\alpha < \delta$ と $x \in \tau$ が存在して $M[x]$ において $(M, \text{Coll}(\omega, < \alpha))$ -generic となるような g 全体の集合とする．順序は包含によって定める．このとき $\mathbb{P} \in M(\tau)$ となる． δ は強極限的であり条件 3 より \mathbb{P} は空でない． $G_\mathbb{P}$ を $(M(\tau), \mathbb{P})$ -generic とし, $H = \bigcup G_\mathbb{P}$ とする．

主張. H は $(M, \text{Coll}(\omega, < \delta))$ -generic.

$D \in M$ を $\text{Coll}(\omega, < \delta)$ -稠密とする． $g \in \mathbb{P}$ を $(M, \text{Coll}(\omega, < \eta))$ -generic とする． $\{p \cap \text{Coll}(\omega, < \eta) \mid p \in D\}$ は $\text{Coll}(\omega, < \eta)$ -稠密より $\eta' < \delta$ と $p \in D \cap \text{Coll}(\omega, < \eta')$ を $p \cap \text{Coll}(\omega, < \eta) \in g$ となるように取る． $2^{\eta'} < \delta$ より $y \in \tau$ と $(M, \text{Coll}(\omega, < \eta'))$ -generic $g' \in M[y]$ を g の拡張で $p \in g'$ を満たすように取る． $G_\mathbb{P}$ の

genericity より良い. \dashv claim.

$\mathbb{R}^{M(\tau)} \subseteq \tau$ と条件 3 より各 $\alpha < \delta$ において $H \cap \text{Coll}(\omega, < \alpha) \in M(\tau)$ が成立することから

$$\bigcup \{ \mathbb{R} \cap M[H \cap \text{Coll}(\omega, < \alpha)] \mid \alpha < \delta \} \subseteq \tau$$

が成立する.

主張. 任意の $x \in \tau$ に対してある $\alpha < \delta$ が存在して $x \in M[H \cap \text{Coll}(\omega, < \alpha)]$ が成立する.

$M(\tau)$ で作業する. $x \in \tau$ を任意に取る. $D = \{g \in \mathbb{P} \mid x \in M[g]\}$ が \mathbb{P} -稠密であることを言えば良い. $g \in \mathbb{P} \cap M[y]$ を $(M, \text{Coll}(\omega, < \eta))$ -generic とする. $x \notin M[g]$ として良い. このときある x はある $\mathbb{Q} \in (M[g])_\delta$ での拡大に属す. 条件 3 より $z \in \tau$ を $M[z]$ において $2^{|\mathbb{Q}|}$ が可算かつ $x, y \in M[z]$ を満たすように取る. このとき $M[z]$ において $(M, \text{Coll}(\omega, < 2^{|\mathbb{Q}|}))$ -generic g' を g の拡張で $x \in M[g']$ を満たすように取れる. \dashv claim.

よって示された. \square

補題 1.2. $\xi \in \text{ON}$, δ を Woodin 基数, κ を極限順序数とし, $\xi < \delta < \kappa$ とする. 任意の可算な $Y \prec V_\kappa$ で $\xi, \delta \in Y$ を満たすものに対してある可算な $Y' \prec V_\kappa$ が存在して次を満たす.

- $Y \subseteq Y'$
- $Y' \cap V_\xi = Y \cap V_\xi$
- 任意の $\mathbb{Q}_{<\delta}$ -前稠密な $D \in Y'$ に対して, ある $d \in D \cap Y'$ が存在して $Y' \cap (\cup d) \in d$ を満たす. ^{*1} \square

Woodin 基数の極限でない Woodin 基数を後続 Woodin 基数と呼ぶことにする.

補題 1.3. δ を limit of Woodin とする. a を可算な $X \prec V_{\delta+1}$ で次を満たすものの全体の集合とする.

- ある $\gamma < \delta$ が存在して, 全ての後続 Woodin 基数 $\lambda \in (\gamma, \delta) \cap X$ に対して X は X に属する全ての $\mathbb{Q}_{<\lambda}$ -前稠密集合を capture する.

このとき任意の $Z \in \mathbb{Q}_{<\delta}$ に対して $a_Z = \{X \in a \mid Z \in X \wedge X \cap (\cup Z) \in Z\}$ は stationary.

証明. $Z \in \mathbb{Q}_{<\delta}$ と $F: V_{\delta+1}^{<\omega} \rightarrow V_{\delta+1}$ を任意に取る. 可算な $Y \prec V_{\delta+2}$ を $H, Z \in Y$, $Y \cap (\cup Z) \in Z$, $Y \cap V_{\delta+1} \in a$ を満たすように構成すれば良い. 到達不能基数 $\gamma < \delta$ を $Z \in \mathbb{Q}_{<\gamma}$ を満たすように取る. W を (γ, δ) に属す後続 Woodin 基数全体とする. $V_{\delta+\omega}$ の可算初等部分モデルの族 $\langle Y_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ と $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \omega \rangle \in W^{\omega_1}$ を各 $\alpha < \omega_1$ に対して次を満たすように構成する.

- $\{Z, H, \gamma\} \subseteq Y_0$, $Y_0 \cap (\cup Z) \in Z$
- $Y_0 \subseteq Y_\alpha$, $Y_0 \cap V_\gamma = Y_\alpha \cap V_\gamma$
- η_α は $Y_\alpha \cap W$ の α 番目の元となる.
- 任意の $\beta \in (\alpha, \omega_1)$ に対して, $\xi = \gamma \cup \sup(W \cap \eta_\alpha)$ とすると $Y_\beta \cap V_\xi = Y_\alpha \cap V_\xi$ を満たす.
- λ を $Y_\alpha \cap W$ の最初の α 個の元のうちのひとつとすると, Y_α は Y_α に属する全ての \mathbb{Q}_λ -前稠密部分集合を capture する.

Y_0 は Z の stationarity より取れる. 極限順序数のときは和集合を取る. 後続順序数のときは補題 1.2 を用い

^{*1} 後半部分を Y' captures D という.

て可算な $Y_{\alpha+1} \prec V_{\delta+\omega}$ を次を満たすように取れば良い.

- $Y_\alpha \subseteq Y_{\alpha+1}$
- $Y_\alpha \cap V_{\gamma \cup \sup(W \cap \eta_\alpha)} = Y_{\alpha+1} \cap V_{\gamma \cup \sup(W \cap \eta_\alpha)}$
- $Y_{\alpha+1}$ は $Y_{\alpha+1}$ に属する任意の $\mathbb{Q}_{<\eta_\alpha}$ -前稠密部分集合を capture している.

構成より $\langle Y_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ と $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \omega \rangle$ は条件を満たすことは良い. このときある $\alpha < \omega_1$ が存在して $Y_\alpha \cap V_{\delta+1} \in a$ となることを示す. もし存在すれば $Y = Y_\alpha \cap V_{\delta+2}$ が求める Y となる. このような α が存在しないと仮定して矛盾を導く. このとき $Y^* = \bigcup_{\alpha < \omega_1} Y_\alpha$ とすると後続 Woodin 基数 $\lambda \in (\gamma, \delta) \cap Y^*$ を任意の $\alpha < \omega_1$ に対して λ は $Y_\alpha \cap W$ の最初の α 個に属さないように取れる. λ をこのようなもので最小とする. $\lambda \in Y_{\alpha'}$ とする. このとき構成より $Y^* \cap W \cap \lambda$ の順序型は ω_1 となっている. ω_1 は正則より $\alpha < \alpha'$ を $Y_\alpha \cap W \cap \lambda$ が $Y^* \cap W \cap \lambda$ の最初の α 個からなるように取れる. このとき $\lambda = \eta_\alpha$ となり矛盾. \square

次が重要である.

定理 1.4. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする. このとき V の generic extension のおいてある $(V, \text{Coll}(\omega, < \delta))$ -generic H が存在して

$$\mathbb{R}^* = \bigcup \{ \mathbb{R} \cap V[H \cap \text{Coll}(\omega, < \alpha)] \mid \alpha < \delta \}$$

としたとき, 初等埋め込み $j: L(\mathbb{R}^V) \rightarrow L(\mathbb{R}^*)$ が存在する.

証明. a を補題 1.3 のものとする. $(V, \mathbb{P}_{<\kappa})$ -generic G を $a \in G$ を満たすように取る. $j: V \rightarrow (M, E) \subseteq V[G]$ を generic embedding とする. ${}^*\kappa$ は可測基数より $j(\kappa) = \kappa$ が成立する. Normality と genericity よりある $\gamma_G < \lambda$ と a' を $X \in a$ で次を満たすものの全体の集合とすると $a' \in G$ となる.

- $\gamma_G \in X$
- 全ての後続 Woodin 基数 $\lambda \in (\gamma_G, \delta) \cap X$ に対して X は X に属する全ての \mathbb{Q}_λ -前稠密集合を capture する.

W を (γ_G, δ) に属す後続 Woodin 基数全体の集合とする. 各 $\xi \in W$ に対して $G_\xi = G \cap \mathbb{Q}_{<\xi}$ とすると $a' \in G$ より G_ξ は $(V, \mathbb{Q}_{<\xi})$ -generic となる. よって各 $\xi \in W$ に対して $j_\xi: V \rightarrow M_\xi \subseteq V[G_\xi]$ を generic embedding とする. これは整礎となる. $k_\xi: M_\xi \rightarrow (M, E)$ を factor map とすると $j = k_\xi \circ j_\xi$ を満たす. また各 $\xi_0 < \xi_1 \in W$ に対して $j_{\xi_0, \xi_1}: M_{\xi_0} \rightarrow M_{\xi_1}$ を $j_{\xi_0, \xi_1}([f]_{G_{\xi_0}}) = [f]_{G_{\xi_1}}$ と定義する. (M^*, E^*) を $\langle M_{\xi_0}, j_{\xi_0}, j_{\xi_0, \xi_1} \mid \xi_0, \xi_1 \in W, \xi_0 < \xi_1 \rangle$ の direct limit とする. 次のような図式となっている.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & (M, E) \\ j_\xi \downarrow & \searrow j_\xi^* & \uparrow k^* \\ M_\xi & \xrightarrow{j^*} & (M^*, E^*) \end{array}$$

*2 このとき (M, E) は整礎とは限らないことに注意.

今 $\mathbb{R}^{M^*} = \bigcup \{\mathbb{R}^{M_\xi} \mid \xi \in W\}$ となっている. また各 $\xi \in W$ について $\mathbb{R}^{M_\xi} = \mathbb{R}^{V[G \cap V_\xi]}$ を満たすことから補題 1.1 より $V(\mathbb{R}^{M^*})$ は V の $\text{Coll}(\omega, < \delta)$ による symmetric extension となる. $(V, \text{Coll}(\omega, < \delta))$ -generic H を $\mathbb{R}^{M^*} = \bigcup \{\mathbb{R} \cap V[H \cap \text{Coll}(\omega, < \alpha)] \mid \alpha < \delta\}$ を満たすように取る. $j^*(\kappa) = \kappa$ より初等埋め込み $j^* \upharpoonright_{L_\kappa(\mathbb{R}^V)}: L_\kappa(\mathbb{R}^V) \rightarrow L_\kappa(\mathbb{R}^{M^*})$ を得る. Lévy-Solovay の定理より κ は $V[H]$ でも可測基数であるから $(\mathbb{R}^{M^*})^\# \in V[H]$ を満たす. また κ は limit of completely Jónsson より κ の下に cofinally many に $j^*(\gamma) = \gamma$ を満たす completely Jónsson が存在する. よって $(\mathbb{R}^V)^\# \subseteq (\mathbb{R}^{M^*})^\#$ が成立する. \square

系 1.5. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする. $\mathbb{P} \in V_\delta$ を半順序とする. (V, \mathbb{P}) -generic G に対して $(\mathbb{R}^\#)^V = (\mathbb{R}^\#)^{V[G]} \cap V$ が成立する.

2 Consistency of Axiom of Determinacy

tree production lemma を用いて十分に巨大基数が存在するとき $\mathbb{R}^\#$ が universally Baireness を持つことを示す. $L(\mathbb{R})$ 内の実数の集合は全て $\mathbb{R}^\#$ に Wadge reducible であることから $L(\mathbb{R})$ 内の実数の集合の tree representation を得る.

φ を論理式とし a をパラメタとする. ここで a は特に限定しない. $X \prec_n V$ を十分な初等性を持った可算初等部分構造で $\kappa, a \in X$ とする. ${}^*3\pi: X \simeq N$ を推移的崩壊とする. このとき X が (φ, a, κ) -generically correct であると任意の半順序 $\mathbb{P} \in H_{\pi(\kappa)}^N$ と (N, \mathbb{P}) -generic $g \in V$ と任意の $x \in N[g] \cap \mathbb{R}$ に対して次が成立するときのことをいう.

$$N[g] \models \varphi[x, \pi(a)] \Leftrightarrow V \models \varphi[x, a]$$

補題 2.1. $\varphi(v_0, v_1)$ を論理式, a をパラメタ, κ を無限基数とする. 推移的な M と σ は次を満たすとする.

- $H_\kappa \cup \{\kappa\} \subseteq M$
- $\sigma: M \rightarrow V$ は十分な初等性を持ち, $a \in \text{ran}(\sigma)$ かつ $\text{cp}(\sigma) > \kappa$ を満たす.

a を可算な $X \prec M$ で $\sigma''X$ が (φ, a, κ) -generically correct となるもの全体の集合とし, a が $\mathcal{P}_{\omega_1}(M)$ の club を含むと仮定する. このときある木 T, U が存在して任意の $\mathbb{P} \in H_\kappa$ と (V, \mathbb{P}) -generic G に対して,

$$V[G] \models p[T] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \varphi[x, a]\} \wedge p[U] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \neg \varphi[x, a]\}$$

が成立する.

証明. $F: M^{<\omega} \rightarrow M$ を $X \in \mathcal{P}_{\omega_1}(M)$ に対して $F''X^{<\omega} \subseteq X$ ならば $X \prec M$ かつ $\sigma''X$ が (φ, a, κ) -generically correct となるように取る. $\sigma(a^*) = a$ とする. $\omega^{<\omega}$ の標準的な数え上げ $\langle r_n \mid n \in \omega \rangle$ を固定する. $\omega \times M \times H_\kappa$ 上の木 T を次の満たす (s, t, u) 全体の集合とする.

1. $s \in \omega^{<\omega}$
2. $t \in M^{<\omega}$
3. $2m + 2 < \text{lh}(s)$ ならば $t(2m + 2) = F(t \circ r_m)$ を満たす.
4. $\text{lh}(s) > 0$ ならば $t(0) = \mathbb{P} \in H_\kappa$ は半順序となる.
5. $2m + 3 < \text{lh}(s)$ ならば $t(2m + 3) = u(m)$ を満たす.

*3 これは reflection で十分大きい fragment を取ってくれば良い.

6. $\{u(m) \mid u < \text{lh}(s)\}$ は共通の拡大を持つ \mathbb{P} の部分集合となる.
7. $2m+2 < \text{lh}(s)$ かつ $t(m)$ が \mathbb{P} -稠密部分集合ならば $u(2m+2) \in t(m)$ を満たす.
8. $\text{lh}(s) > 1$ ならば $t(1)$ は \mathbb{P} -name で $u(0) \Vdash t(1): \omega \rightarrow \omega$ を満たす.
9. $2m+3 < \text{lh}(s)$ ならば $u(2m+3) \Vdash t(1)(m) = s(m)$ を満たす.
10. $\text{lh}(s) > 1$ ならば $u(1) \Vdash \varphi[t(1), \check{a}^*]$ を満たす.

$\omega \times M \times H_\kappa$ 上の木 U を $\neg\varphi[t(1), \check{a}^*]$ に変えて同様に定義する.

主張. 次が成立する.

1. $p[T] \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi[x, a]\}$
2. $p[U] \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \neg\varphi[x, a]\}$

$x \in p[T]$ を任意に取る. $(x, f, g) \in [T]$ とし $X = \text{ran}(f)$ とする. このとき T の定義の 3 より $F''X^{<\omega} \subseteq X$ を満たす. よって $X \prec M$ かつ $\sigma''X$ が (φ, a, κ) -generically correct となる. 構成より半順序 $\mathbb{P} \in X \cap H_\kappa$ と (X, \mathbb{P}) -generic G と \mathbb{P} -name $\tau \in X$ を次を満たすように取れる.

- ある $p \in G$ が存在して $p \Vdash \dot{\tau}: \omega \rightarrow \omega$ を満たす.
- 全ての $n \in \omega$ に対してある $p_n \in G$ が存在して $p_n \Vdash \dot{\tau}(n) = x(n)$ を満たす.
- ある $p \in G$ が存在して $p \Vdash \varphi[\dot{\tau}, \check{a}^*]$ を満たす.

σ は十分に初等的であるから $\sigma''X$ もこれらを満たす. $\sigma''X$ が (φ, a, κ) -generically correct より $V \models \varphi[x, a]$ となる. U についても同様. \dashv claim.

半順序 $\mathbb{P} \in H_\kappa$ を任意に取る. G を (V, \mathbb{P}) -generic とする.

主張. 次が成立する.

1. 任意の $x \in \mathbb{R}^{V[G]}$ に対して $V[G] \models \varphi[x, a]$ ならば $x \in p[T]^{V[G]}$ が成立する.
2. 任意の $x \in \mathbb{R}^{V[G]}$ に対して $V[G] \models \neg\varphi[x, a]$ ならば $x \in p[U]^{V[G]}$ が成立する.

T と U の構成に沿って path をうまく取れば良い. \dashv claim.

絶対性から T と U は求めるものとなる. よって示された. \square

無限基数 κ について G が V 上の $< \kappa$ -generic であるとはある半順序 \mathbb{P} で $|\mathbb{P}| < \kappa$ であるものが存在して, G は (V, \mathbb{P}) -generic であるときのことをいう.

定理 2.2 (Tree production lemma, Woodin). $\varphi(v_0, v_1)$ を論理式, a をパラメタ, δ を Woodin 基数とする. 次が成立すると仮定する.

1. G を V 上の $< \delta$ -generic, H を $V[G]$ 上の $< \delta^+$ -generic とするとき任意の $x \in \mathbb{R} \cap V[G]$ に対して次が成立する.

$$V[G] \models \varphi[x, a] \Leftrightarrow V[G][H] \models \varphi[x, a]$$

2. G を $(V, \mathbb{Q}_{<\delta})$ -generic, $j: V \rightarrow M \subseteq V[G]$ を generic embedding とする. このとき任意の $x \in \mathbb{R} \cap V[G]$ に対して次が成立する.

$$V[G] \models \varphi[x, a] \Leftrightarrow M \models \varphi[x, j(a)]$$

このときある木 T, U が存在して V 上の $< \delta$ -generic G に対して,

$$V[G] \models p[T] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \varphi[x, a]\} \wedge p[U] = \{x \in \mathbb{R}^{V[G]} \mid \neg \varphi[x, a]\}$$

が成立する. 特に $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi[x, a]\}$ は δ -universally Baire となる.

証明. 各 $\kappa < \delta$ に対して T_κ, U_κ を V 上の $< \kappa$ -generic に対して定理の主張が成立するように構成すれば良い. $\kappa < \delta$ を任意に取る. 推移的な M, σ, a^* を次を満たすように取る.

- $H_{\kappa^+} \subseteq M$
- $|M| < \delta$
- $\sigma: M \rightarrow V$ は十分な初等性を持ち $a = \sigma(a^*)$ かつ $\sigma \upharpoonright_{\kappa^+} = \text{id}$ を満たす.

$a \in \mathcal{P}_{\omega_1}(M)$ を可算な $X \prec M$ で $\sigma''X$ が (φ, a, κ) -generically correct となるような全体の集合とする. 補題 2.1 より a が club を含むことを言えばよい. $(\mathcal{P}_{\omega_1}(M) \setminus a) \in \mathbb{Q}_{<\delta}$ と仮定して矛盾を導く. $(V, \mathbb{Q}_{<\delta})$ -generic G を $(\mathcal{P}_{\omega_1}(M) \setminus a) \in G$ となるように取る. $j: V \rightarrow N \subseteq V[G]$ を generic embedding とする. $j''M \in j(\mathcal{P}_{\omega_1}(M) \setminus a)$ かつ $j''M \prec j(M)$ より $j(\sigma)''j''M$ は N において $(\varphi, j(a), j(\kappa))$ -generically correct でない. $j(\sigma)''j''M$ の推移的崩壊は M であるから, M 上の $< \kappa$ -generic $g \in N$ を任意にとり $x \in \mathbb{R} \cap M[g]$ としたとき,

$$\begin{aligned} M[g] \models \varphi[x, a^*] &\Leftrightarrow V[g] \models \varphi[x, a] \\ &\Leftrightarrow V[G] \models \varphi[x, a] \\ &\Leftrightarrow N \models \varphi[x, j(a)] \end{aligned}$$

が成立する. よって $j(\sigma)''j''M$ は N において $(\varphi, j(a), j(\kappa))$ -generically correct となりこれは矛盾. \square

定理 2.3. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする. このとき $\mathbb{R}^\#$ は δ -universally Baire となる.

証明. Tree production lemma を用いる. $\varphi(v_0) \equiv v_0 \in \mathbb{R}^\#$ を考える. これは系 1.5 から Woodin 基数 $\delta' < \delta$ に対して Tree production lemma の条件を満たす. よって $\mathbb{R}^\#$ は δ -universally Baire となる. \square

系 2.4. δ を limit of Woodin, κ を可測基数, $\delta < \kappa$ とする. このとき $L(\mathbb{R})$ 内の全ての実数の集合は $< \delta$ -weakly homogeneously Suslin となる.

よって次を得る.

定理 2.5 (Martin-Steel-Woodin). 無限個の Woodin 基数とそれらより大きい可測基数の存在を仮定する. このとき $L(\mathbb{R})$ において AD が成立する. \square

この巨大基数の仮定は弱めることができる. Woodin によって次の無矛盾等価性が示されている.

定理 2.6 (Woodin). 次は無矛盾等価.

1. ZF + AD
2. ZFC + ω 個の Woodin 基数の存在

3 Appendix: tree representation

Tree representation について補足.

定理 3.1. λ を limit of Woodin とする. このとき実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に関して次は同値.

1. A は $<\lambda$ -homogeneously Suslin.
2. A は $<\lambda$ -weakly homogeneously Suslin.
3. A は λ -universally Baire.

定義 3.2 (homogeneous tree). κ を無限基数とする. $X \times Y$ 上の木 T が κ -homogeneous であるとはある列 $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}X \rangle$ が存在して次を満たすことをいう.

- 各 $s \in {}^{<\omega}X$ に対して, U_s は $T[s]$ 上の κ -完備な超フィルター.
- 各 $s \subseteq t \in {}^{<\omega}X$ に対して, U_t は U_s の射影.*4
- 任意の $x \in p[T]$ に対して, tower $\langle U_{x \upharpoonright n} \mid n \in \omega \rangle$ は well-founded.*5

T が任意の $\lambda < \kappa$ について λ -homogeneous であるとき $<\kappa$ -homogeneous という.

定義 3.3.

- $A \subseteq {}^\omega X$ が κ -homogeneously Suslin であるとはある κ -homogeneous tree T が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう.
- ${}^\omega X$ の部分集合で κ -homogeneously Suslin であるものの全体を Hom_κ^X と表す.
- $\text{Hom}_{<\kappa}^X = \bigcap_{\lambda < \kappa} \text{Hom}_\lambda^X$ とし, $\text{Hom}_\kappa = \text{Hom}_\kappa^\omega$ とする.

同様に $<\kappa$ -homogeneously Suslin も定義する.

命題 3.4. Hom_κ^X は continuous reducibility に関して閉じている.

証明. κ -Suslin set における証明と同様である. □

また可算共通部分に関して閉じていることも簡単に示せる. Homogeneity は決定性を導く.

定理 3.5 (Martin). $A \subseteq {}^\omega X$ が $|X|^+$ -homogeneously Suslin であると仮定する. このとき A は決定的.

定義 3.6 (weakly homogeneous tree). κ を無限基数とする. $X \times Y$ 上の木 T が κ -weakly homogeneous であるとはある列 $\langle U_{s,t} \mid (s,t) \in {}^{<\omega}X \oplus {}^{<\omega}\omega \rangle$ が存在して次を満たすことをいう.

- 各 $(s,t) \in {}^{<\omega}X \oplus {}^{<\omega}\omega$ に対して, $U_{s,t}$ は $T[s]$ 上の κ -完備な超フィルター.
- 各 $(p,r) \subseteq (q,s) \in {}^{<\omega}X \oplus {}^{<\omega}\omega$ に対して, $U_{q,s}$ は $U_{p,t}$ の射影.
- 任意の $x \in p[T]$ に対してある $y \in \mathbb{R}$ が存在して $\langle U_{x \upharpoonright n, y \upharpoonright n} \mid n \in \omega \rangle$ は well-founded.

T が任意の $\lambda < \kappa$ について λ -weakly homogeneous であるとき $<\kappa$ -weakly homogeneous という.

*4 超冪の間の初等埋め込みを誘導する.

*5 超フィルターの列が誘導する超冪のシステムの direct limit が well-founded ということ.

定義 3.7. $A \subseteq {}^\omega X$ が κ -weakly homogeneously Suslin であるとはある κ -weakly homogeneous tree T が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう。

同様に $<\kappa$ -weakly homogeneously Suslin も定義する。

命題 3.8. $A \subseteq {}^\omega X$ に対して次は同値。

1. A は κ -weakly homogeneously Suslin.
2. A はある κ -homogeneously Suslin set B の射影.

定義から明らかに κ -homogeneously Suslin ならば κ -weakly homogeneously Suslin である。

定義 3.9. κ を無限基数とする。 $X \times Y$ 上の木 T と $X \times Z$ 上の木 U の組 (T, U) が κ -absolute complement pair であるとは、任意のサイズ κ 未満の半順序 \mathbb{P} と (V, \mathbb{P}) -generic G に対して次が成立することをいう。

$$V[G] \models p[T] = {}^\omega X \setminus p[U]$$

V において $p[T] \cap p[U] = \emptyset$ のとき絶対性から任意の generic extension で $p[T] \cap p[U] = \emptyset$ が成立する。また (T, U) , (R, S) を κ -absolute complement pair で V において $p[T] = p[R]$ を満たすものとする。絶対性の議論によりサイズ κ 未満の任意の半順序 \mathbb{P} と (V, \mathbb{P}) -generic G に対して、 $V[G]$ において $p[T] = p[R]$ が成立する。

定義 3.10 (universally Baire). κ を無限基数とする。

- $A \subseteq {}^\omega X$ が κ -universally Baire であるとはある κ -absolute complement pair (T, U) が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう。
- uB_κ^X を ${}^\omega X$ の部分集合で κ -universally Baire であるものの全体とする。
- $\text{uB}_\kappa = \text{uB}_\kappa^\omega$ とする。

Martin-Solovay の結果から κ -weakly homogeneously Suslin ならば κ -universally Baire であることがわかる。 $\langle r_i \mid i \in \omega \rangle$ を ${}^\omega <^\omega$ の標準的な数え上げとし固定しておく。 T を κ -weakly homogeneous tree とする。 $(p, r) \subseteq (q, s) \in {}^\omega X \oplus {}^\omega \omega$ に対して、超冪 $\text{Ult}(V, U_{p,r})$ と $\text{Ult}(V, U_{q,s})$ の間に誘導される初等埋め込みを $i_{(p,r),(q,s)}: \text{Ult}(V, U_{p,r}) \rightarrow \text{Ult}(V, U_{q,s})$ で表す。

定義 3.11 (Martin-Solovay tree). T を $X \times Y$ 上の κ -weakly homogeneous tree とする。 α を順序数とする。 Martin-Solovay tree $\text{ms}(T, \alpha)$ とは次を満たす組 (p, t) から成る $X \times \alpha$ 上の木である。

- $p \in {}^\omega X$.
- $t \in {}^{\text{lh}(p)}\text{ON}$
- $t(0) < \alpha$
- 任意の $i, j < \text{lh}(p)$ に対して、 $r_i \subsetneq r_j$ ならば $t(j) < i_{(p \restriction \text{lh}(r_i), r_i), (p \restriction \text{lh}(r_j), r_j)}(t(i))$ が成立する。

アイデアとしては κ -weakly homogeneous tree T から誘導される V の超冪からなるシステムにおいて、direct limit が ill-founded となるような path を集めている。このアイデアをそのまま形にすると次の定理の証明となる。

定理 3.12. T を $X \times Y$ 上の κ -weakly homogeneous tree とする。 $\alpha \geq |Y|^+$ に対して $p[\text{ms}(T, \alpha)] = {}^\omega X \setminus p[T]$

が成立する.

κ -weakly homogeneously Suslin ならば κ -universally Baire である.

定理 3.13. T を $X \times Y$ 上の κ -weakly homogeneous tree とする. 十分大きい θ に対して, $(T, \text{ms}(T, \theta))$ は κ -absolute complement pair となる.

証明. 絶対性と Lévy-Solovay の定理より良い. □

系 3.14. $A \subseteq \mathbb{R}$ が κ -weakly homogeneously Suslin ならば κ -universally Baire.

ここまで一般の κ について成り立つ方向を示した. 二つの逆向きの成立は Woodin 基数を用いていくつかの結果が示されている. Projective determinacy の無矛盾性証明において次を示すことが鍵であった. ここでは Woodin 基数の存在のもとで適切な alternating chain を構成して超フィルターの列を得ていた.

定理 3.15 (Martin-Steel). δ を Woodin 基数とし, $X \in V_\delta$ とする. また T を δ^+ -weakly homogeneous tree とする. このとき十分大きい θ に対して $\text{ms}(T, \theta)$ は $<\delta$ -homogeneous tree となる.

証明は非常に大変であるので省略する.

系 3.16. δ を Woodin 基数とする. $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を δ^+ -homogeneously Suslin とする. このとき $\neg \exists^{\mathbb{R}} A$ は $<\delta$ -homogeneously Suslin となる.

系 3.17. λ を limit of Woodin とする. このとき $\text{Hom}_{<\lambda}$ は $\exists^{\mathbb{R}}$, 補集合と取る操作, continuous reducibility に関して閉じている.

系 3.17 と Martin の Π_1^1 -determinacy から無限個の Woodin 基数の存在を仮定すると projective determinacy が成立することがわかる. また $\text{Hom}_{<\lambda}$ に関して Wadge order の議論により次が成立する.

定理 3.18. λ を limit of Woodin とする. このときある $\kappa < \lambda$ が存在して $\text{Hom}_\kappa = \text{Hom}_{<\lambda}$ が成立する.

証明. 任意の $\kappa < \lambda$ に対して $\text{Hom}_\kappa = \text{Hom}_{<\lambda}$ であると仮定する. このとき Wadge order の無限降下列 $A_0 >_w A_1 >_w \dots$ が存在する. しかし十分な決定性があるため, Martin-Monk による $<_w$ の well-foundedness の証明と同様にして矛盾. □

次に universally Baireness から weak homogeneity を得る. 次の補題 3.19 は便利な特徴付けである.

補題 3.19. $\omega \times Z$ 上の木 T に対して次は同値.

1. T は κ -weakly homogeneous.
2. ある $<^\omega Z$ 上の κ -完備な超フィルターの可算族 Σ が存在して, $x \in p[T]$ とある countably complete な $\langle \mu_n \mid n \in \omega \rangle \in {}^\omega \Sigma$ が存在して任意の $n \in \omega$ に対して $T[x \upharpoonright n] \in \mu_n$ が成立することが同値となる.

定理 3.20 (Woodin). δ を Woodin 基数とする. T, U を $\omega \times Z$ 上の木で (T, U) は δ^+ -absolutely complement pair とする. このとき T は $<\delta$ -weakly homogeneous となる.

証明. (T, U) を δ^+ -absolutely complement pair とする. 正則基数 η を $T, U \in V_\eta$ となるように十分大きく取る. T' と U' をそれぞれ T と U の部分木で V_η 上で V_δ の元と T, U, δ をパラメタに用いて定義可能な node

全体とする. このとき $|T'| = |U'| = \delta$ となる. $\mathbb{Q}_{<\delta}$ を countable stationary tower とする. 実数の $\mathbb{Q}_{<\delta}$ -name はある到達不能基数 $\kappa < \delta$ が存在して $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ -name として実現できるので V_δ の元として取れる. このことから $\mathbb{Q}_{<\delta} \vdash p[\check{T}'] = \mathbb{R} \setminus p[\check{U}']$ が成立する. よって $p[T] = p[T']$ が成立する. また T' が $<\delta$ -weakly homogeneous のとき, T も $<\delta$ -weakly homogeneous であることから一般性を損なうことなく T と U は $\omega \times \delta$ 上の木だと仮定して良い. κ を任意に取る. T が κ -weakly homogeneous であることを示す. δ は Woodin より κ を $<\delta$ - T -strong だと仮定して良い. 各 $\kappa < \lambda < \delta$ に対して $j_\lambda: V \rightarrow M_\lambda$ を λ - T -strong embedding とする. Σ_λ を各 $(s, u) \in T \cap V_\lambda$ と $X \subseteq \kappa^{<\omega}$ に対して,

$$X \in \Sigma_\lambda(s, u) \leftrightarrow u \in j_\lambda(X)$$

と定義する.

主張. 各 $\kappa < \lambda < \delta$ に対して次が成立する.

1. $\Sigma_\lambda(s, u)$ は κ -完備な超フィルターで $T[s] \cap V_\kappa \in \Sigma_\lambda(s, u)$ が成立する.
2. 各 $(s, u) \subseteq (t, v) \in T \cap V_\lambda$ に対して, $\Sigma_\lambda(t, v)$ は $\Sigma_\lambda(s, u)$ の射影.
3. 各 $(x, f) \in [T \cap V_\lambda]$ に対して, $\langle \Sigma_\lambda(x \restriction n, f \restriction n) \mid n \in \omega \rangle$ は well-founded.

1, 2 は良い. $(x, f) \in [T \cap V_\lambda]$ に対して, direct limit は M_λ の初等部分モデルとなることから良い. \dashv
 G を $(V, \mathbb{Q}_{<\delta})$ -generic とし, $i: V \rightarrow N \subseteq V[G]$ を generic ultrapower embedding とする.

主張. $i(T)$ は N において $i(\kappa)$ -weakly homogeneous.

$\kappa^{<\omega}$ 上の κ -完備な超フィルター全体を $m_\kappa(\kappa)$ で表す. $\sigma = i''m_\kappa(\kappa)$ が $i(T)$ の κ -weak homogeneity の witness となっていることを示す. N は $V[G]$ において可算列で閉じているから $\sigma \in N$ となる. $x \in p[i(T)] \cap N$ を任意に取る. (T, U) は δ^+ -absolutely complement pair より $x \in p[T]$ が成立する. $\lambda < \delta = \omega_1^{V[G]}$ を十分大きく取ることによって $x \in p[T \cap V_\lambda]$ とする. f を $(x, f) \in [T \cap V_\lambda]$ となるように取る. 初等性より $\langle i(\Sigma_\lambda)(x \restriction n, i(f) \restriction n) \mid n \in \omega \rangle$ は N において well-founded となる. よって $i(T)$ は N において $i(\kappa)$ -weakly homogeneous. \dashv

初等性から T は κ -weakly homogeneous となる. □

よって以上のことから次が示された.

定理 3.21. λ を limit of Woodin とする. このとき実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に関して次は同値.

1. A は $<\lambda$ -homogeneously Suslin.
2. A は $<\lambda$ -weakly homogeneously Suslin.
3. A は λ -universally Baire.

参考文献

- [1] John R. Steel, The Derived Model Theorem, 2008.
- [2] P. Larson, The stationary tower, University Lecture Series, American Mathematical Society, 2004.
- [3] Akihiro Kanamori, The higher infinite, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

- [4] W. Hugh Woodin, Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 85, 6587-6591.
- [5] D.A. Martin and J.R. Steel, A Proof of Projective Determinacy, *Journal of the American Mathematical Society* 2 (1989), 71-125.
- [6] Solovay R.M. The independence of DC from AD. In: Kechris A.S., Moschovakis Y.N. (eds) *Cabal Seminar 76 - 77. Lecture Notes in Mathematics*, vol 689. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978.
- [7] van Wesep R. Wadge degrees and descriptive set theory. In: Kechris A.S., Moschovakis Y.N. (eds) *Cabal Seminar 76-77. Lecture Notes in Mathematics*, vol 689. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978.