

# 巨大基数について

YasudaYasutomo

2020 年 12 月 25 日

これは Mathematical Logic Advent Calendar 2020 の記事です。元々この記事は私が学部一年の終わり頃に巨大基数を勉強していて面白かったことをまとめたものでした。それをいくつか書き加えたものとなります。この記事は主に 2 部に分かれており前半は巨大基数について「お話」を書きたいと思います。「お話」なので気楽にどんなことをやっているか知る気持ちで読んでもらえると良いと思います。内容は巨大基数とは何か?なぜそのようなものを考えるのか?などをざっくりと書きたいと思います。<sup>\*1</sup>後半は具体的な数学の話をしたいと思います。前半で巨大基数に対するモチベーションが上がった人は目を通してみると良いかもしれません。今回は弱コンパクト基数という小さい巨大基数を例に巨大基数の組み合わせ論的性質とモデル理論的性質を見ていきたいと思います。これらの性質は集合論のロジックの側面と無限組み合わせ論の側面のそれぞれを表現していて、2つの側面が会合場所として弱コンパクト基数は手頃だと私は考えています。

## 1 巨大基数 (large cardinal) とは?

この記事の議論は特に言及のない限り ZFC 上で行う。ZFC の無矛盾性は仮定する。 $V$  は集合全体のクラスを表す。注意としてそもそも「巨大基数 (large cardinal) である」ということは数学的に定義されていない。巨大基数は様々な形で定義されており、それらに共通することとしてその存在を主張する公理 (巨大基数公理) を ZFC に加えることで無矛盾性の意味で強くなることがあげられる。例えば到達不能基数は巨大基数である。基数  $\kappa$  が正則であるとは濃度が  $\kappa$  未満の集合からなる濃度  $\kappa$  未満の集合族の和集合がまた濃度  $\kappa$  未満になることであった。また基数  $\kappa$  が強極限的であるとは任意の  $\lambda < \kappa$  に対して  $2^\lambda < \kappa$  を満たすことであった。

**定義 1.1.** 非可算基数  $\kappa$  が到達不能基数であるとは正則かつ強極限的であるときのことをいう。

到達不能基数が巨大基数であることは次のようにわかる。

**定義 1.2.** 累積階層  $\langle V_\alpha \mid \alpha \in \text{Ord} \rangle$  は次のように定義される:

- $V_0 = \emptyset$ ,
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ ,
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha$ , ただし  $\lambda$  は極限順序数。

$V = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha$  は基礎の公理からの帰結である。次が成立する。

**定理 1.3.** 到達不能基数  $\kappa$  に対して、 $V_\kappa \models \text{ZFC}$  となる。

---

<sup>\*1</sup> 私の偏見も含まれるので、指摘があったらお願いします。

この事実と不完全性定理から到達不能基数が巨大基数であることがわかる。

**定理 1.4.**  $\text{Con}(\text{ZFC})^{*2}$  から  $\text{Con}(\text{ZFC} + \exists \kappa (\kappa \text{ は到達不能基数}))$  を証明することはできない。

多くの巨大基数は到達不能基数になることが知られており、到達不能基数は巨大基数の中では最弱<sup>\*3</sup>である。他にも巨大基数の例を紹介する。超フィルターは集合論において重要な概念の一つである。

**定義 1.5.**

- 集合  $X$  上のフィルター  $F$  とは  $X$  の部分集合からなる族であって次の条件を満たすものをいう：
  1.  $\emptyset \notin F, X \in F$ ,
  2.  $A \subseteq B \subseteq X$  かつ  $A \in F$  ならば  $B \in F$ ,
  3.  $A, B \in F$  ならば  $A \cap B \in F$ .
- $X$  上のフィルター  $F$  が単項フィルターであるとはある  $x \in X$  が存在して  $F = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$  を満たすことをいう。フィルターが単項でないとき非単項であるという。
- $\kappa$  を基数とする。 $X$  上のフィルター  $F$  が  $\kappa$ -完備であるとは任意の  $\lambda < \kappa$  と任意の  $\{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq F$  に対して  $\bigcap_{\alpha < \lambda} A_\alpha \in F$  を満たすことをいう。
- $X$  上のフィルターであって包含に関して極大なものを超フィルターという。

可測基数は巨大基数の中でも特に重要な基数である。

**定義 1.6.** 非可算基数  $\kappa$  が可測基数であるとは  $\kappa$  上に  $\kappa$ -完備非単項超フィルターが存在することをいう。

次の定理より可測基数は巨大基数であることがわかる。さらに可測基数は到達不能基数よりずっと大きいこともわかる。

**定理 1.7.** 可測基数は到達不能基数である。さらに到達不能基数の極限である。

巨大基数公理は集合論の宇宙により多くの集合の存在を要請する公理である。実際に可測基数の存在は宇宙  $V$  はゲーデルの構成可能宇宙  $L$  にはなり得ないことを導く。ここで  $L$  とは最小の内部モデル (順序数を全て含むような ZF のモデル) であり自然に選択公理や一般連続体仮説のモデルとなる。

**定理 1.8 (スコット).** 可測基数が存在するならば  $V \neq L$  が成立する。<sup>\*4</sup>

他にも巨大基数はいくつか定義がされており、さらに直接の存在証明または相対無矛盾性による比較によって巨大基数達は線形な階層をなすことが経験的に知られている。それが次のページの図<sup>\*5</sup>である。上から大きい順に並んでいると思えば良い。破線が分水嶺となっており、それより上は超フィルターの存在、同じことだが初等埋め込みの存在によって特徴付けられるような巨大基数達であり大きい巨大基数 (large large cardinal) とも呼ばれる。さて集合論においてなぜ巨大基数を考えるのだろうか？ そもそも集合論の一つの目標として数学的命題を分類すること<sup>\*6</sup>があげられる。より具体的に言えば数学的命題  $\varphi$  が与えられたとき、ZFC または

---

<sup>\*2</sup>  $\text{Con}(T)$  で  $T$  が無矛盾という命題を表す。

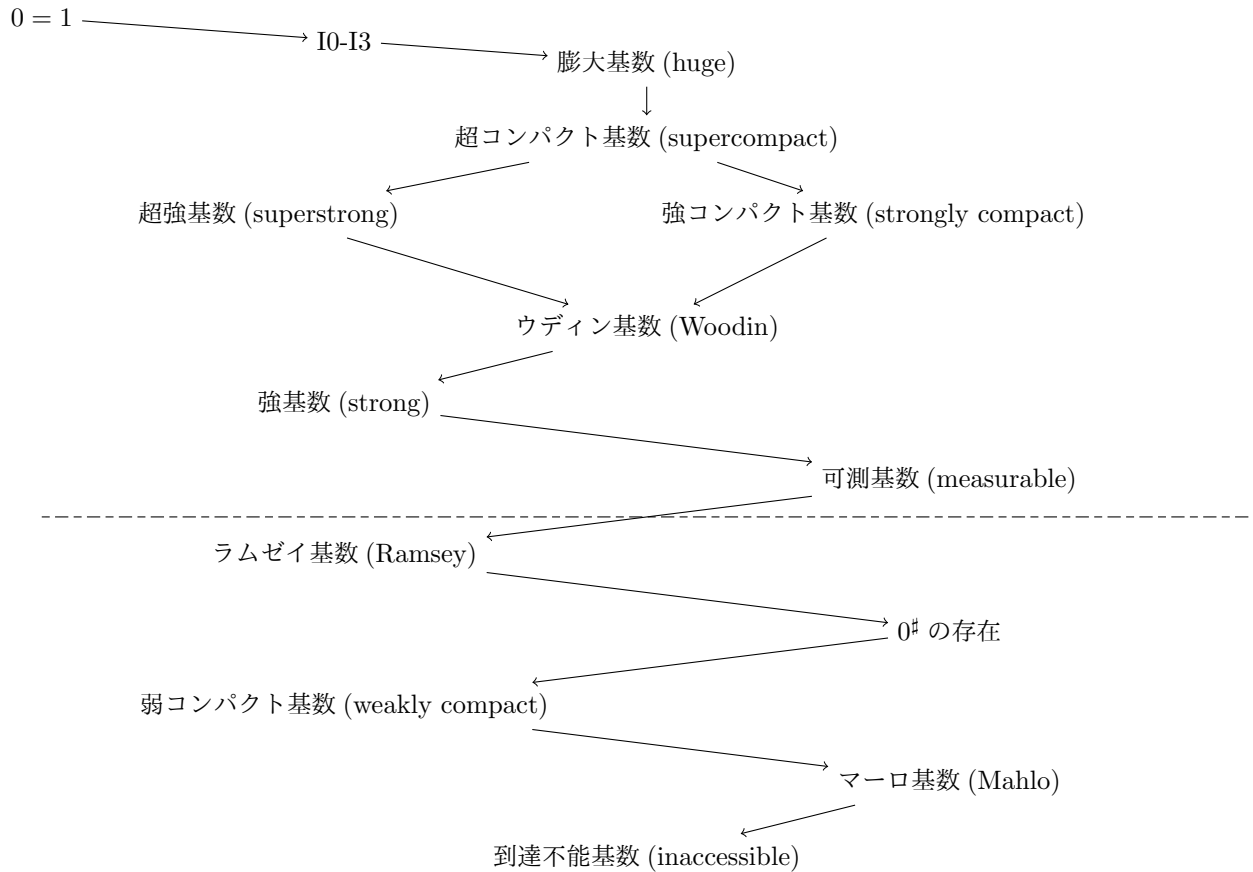
<sup>\*3</sup> 到達不能基数より小さい巨大基数も考えられているがここでは触れない。

<sup>\*4</sup> 内部モデル理論においてはより大きい巨大基数を含むような  $L$  に似たモデルを構成し、それを解析することで巨大基数や集合論のモデルが調べられている。

<sup>\*5</sup> この図に描かれていない巨大基数もある。

<sup>\*6</sup> 数学的対象を分類することはそもそも数学の根源的な営みの一つと言えるだろう。

ZF で証明または反証可能かを調べ、そうでないならその無矛盾性の強さを調べるということである。この無矛盾性の強さを調べる「物差し」として巨大基数を用いることができるのである。具体例を用いてこのことを説明する。

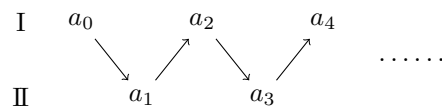


いくつか復習と定義をする。  $\omega^\omega$  は次の距離によってポーランド空間<sup>\*7</sup>となるのだった。

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & (\alpha = \beta) \\ \frac{1}{\min\{n \mid \alpha(n) \neq \beta(n)\}} & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

**定義 1.9 (ゲーム).**  $A \subseteq \omega^\omega$  に対してゲーム  $G(A)$  は次のように定義される:

1. プレイヤーは I と II の 2 人からなる。
2. 下の図のように I と II が交互に自然数を与える。I と II はこの操作を繰り返し  $\omega^\omega$  の元  $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  を定義する。
3. I が  $G(A)$  に勝利するのは  $\alpha \in A$  となるとき、そうでないときは II の勝利とする。



<sup>\*7</sup> 完備可分距離空間のこと

ゲーム  $G(A)$  においてプレイヤー I と II それぞれの戦略<sup>\*8</sup>は関数として定義することができる。このとき必勝戦略の存在が重要である。

**定義 1.10.**  $A \subseteq \omega^\omega$  が決定的 (determined) であるとはゲーム  $G(A)$  においてプレイヤー I または II が必勝戦略を持つときのことをいう。決定性公理 (AD) とは任意の  $A \subseteq \omega^\omega$  が決定的であるという公理である。

決定性公理は選択公理と矛盾することが知られている。

**定理 1.11.** 選択公理を仮定する。このとき決定的でない  $A \subseteq \omega^\omega$  が存在する。

決定性公理を考える上では必然的に ZF 上で考える事になる。決定性公理は実数の集合に良い性質をもたらすことが知られている。ルベーグ可測性はその一つである。

**定理 1.12.** ZF + AD を仮定する。このとき全ての実数の集合はルベーグ可測である。

決定性公理をある  $\omega^\omega$  の部分集合のクラスに制限した公理も考えられており、例えば射影集合に制限した決定性公理 (PD) などが代表的である。決定性は記述集合論の文脈においてよく調べられており、例えば射影集合の決定性のもとで解析的集合や補解析的集合の古典的な結果がより複雑な実数の集合に対する結果に拡張できることなどが知られている。そうするとそもそも決定性公理は無矛盾なのか?という疑問が自然に湧いてくるであろう。第一にボレル集合に制限した形であれば ZFC で証明することができる。

**定理 1.13** (マーティン). 全てのボレル集合は決定的である。

しかし解析的集合の決定性は巨大基数の存在を導くことが知られている。

**定理 1.14.** 解析的集合の決定性を仮定する。このとき  $0^\sharp$  が存在する。<sup>\*9</sup>

そしてマーティンとスティールによって射影集合の決定性の無矛盾性が示された。

**定理 1.15** (マーティン・スティール). 無限個のウディン基数の存在を仮定する。このとき全ての射影集合は決定的である。

そしてウディンの定理と合わせて決定性公理の無矛盾性が示された。

**定理 1.16** (マーティン・スティール・ウディン). 無限個のウィゲン基数とそれより大きい可測基数の存在を仮定する。このとき実数を全て含む最小の内部モデル  $L(\mathbb{R})$  において決定性公理が成立する。

さらにウディンによって決定性公理の無矛盾性の強さが決定されている。

**定理 1.17** (ウディン). 次は同じ無矛盾性の強さを持つ。

1. ZF + AD,
2. ZFC + 無限個のウディン基数の存在.

このように巨大基数を用いて無矛盾性の強さを測ることができる。ここでは具体的に触れないが  $\omega_1$  のような小さい無限は到達不能基数になることはないが、 $\omega_1$  に関する命題が ZFC では決定不能で巨大基数公理を用

---

<sup>\*8</sup>  $G(A)$  での手の出し方のこと

<sup>\*9</sup> 実はもう少し強いことが言える。これはマーティンとハーリントンの定理である。

いて初めて決定可能であったり、モデルが構成できる場合もある。また小さい無限に対しても巨大基数的な性質が考えられている。これに関しては Mathematical Logic Advent Calendar 2020 の 12 月 16 日のはかりさんの記事 [4] を読むと良い。このように小さい無限を扱う場合でも巨大基数は考えるべき対象となるのである。最後に今回は巨大基数の応用例として決定性公理に関する例を紹介したが、他にも巨大基数を用いた数学的命題の解析、分類は非常に多くの場面でなされており、巨大基数は集合論において必要不可欠な存在となっている。また巨大基数は無矛盾性の強さを測る道具としてだけでなく、その無限組み合わせ論的性質やモデル理論的性質も調べられている。次はこの 2 つの性質を弱コンパクト基数を例にして見ていきたい。

## 2 弱コンパクト基数 その 1

この章では巨大基数の無限組み合わせ論的性質とモデル理論的性質を具体的に見ていく。弱コンパクト基数のいくつかの特徴づけを通して巨大基数の様々な側面に触れる。まずいくつか定義をする。通常の一階述語論理を拡張した無限論理を考える。

**定義 2.1.**  $\kappa, \lambda$  を正則基数とする。言語  $\mathcal{L}_{\kappa, \lambda}$  での論理式は以下の条件を満たす。

- 非論理記号は通常の一階述語論理と同じ。
- 変数は  $\max(\{\kappa, \lambda\})$  個用意する。
- 任意の  $\alpha < \kappa$  において、 $\alpha$  個の選言  $\bigvee_{\xi < \alpha}$  や連言  $\bigwedge_{\xi < \alpha}$  を許す。
- 任意の  $\beta < \lambda$  において、 $\beta$  個の量化  $\forall_{\xi < \beta}$  や  $\exists_{\xi < \beta}$  を許す。
- 自由変数は  $\lambda$  個未満個許す。

$\mathcal{L}_{\kappa, \lambda}$  におけるモデルの定義は通常の一階述語論理と同様にする。

**定義 2.2.**  $\mathcal{L}_{\kappa, \lambda}$ -論理式の集合  $\Sigma$  が  $\kappa$ -充足可能であるとは  $\Sigma$  の任意の濃度  $\kappa$  未満の部分集合がモデルを持つことをいう。

**定義 2.3** (分割の性質).  $\kappa \rightarrow (\lambda)_m^n$  とは任意の分割  $F : [\kappa]^n \rightarrow m$  に対して、ある  $H \in [\kappa]^\lambda$  が存在して  $|F''[H]^n| \leq 1$  を満たすときのことをいう。このような  $H$  を分割  $F$  に対する均質集合という。

次の二つは  $\omega$  で成り立つ性質である。

- $\omega \rightarrow (\omega)_2^2$ . (ラムゼイの定理)
- 任意の  $L_{\omega, \omega}$ -文の集合において、 $\omega$ -充足可能 (有限充足可能) ならば充足可能. (コンパクト性定理)

同様のことが非可算無限基数  $\kappa$  でも言えるだろうか? またそのような  $\kappa$  はどのような性質を持つだろうか?

**定義 2.4** (弱コンパクト基数).  $\kappa$  が弱コンパクト基数であるとは、非可算かつ  $\kappa \rightarrow (\kappa)_2^2$  を満たすことをいう。

**定義 2.5** (弱コンパクト基数).  $\kappa$  が弱コンパクト基数であるとは、非可算かつ任意の  $L_{\kappa, \kappa}$ -文の集合  $\Sigma$  で非論理記号を高々  $\kappa$  個しか使っていないものに対して、 $\kappa$ -充足可能ならばモデルを持つことが成立することをいう。後者の条件を弱コンパクト性という。

弱コンパクト基数の定義を二つ記した。前者は組み合わせ論的性質で後者はモデル理論的性質である。まず

はこの定義が同値であることを確かめる必要があるが、それは後々行うとして弱コンパクト基数がどのような性質を持つのか二つの立場からみる。便宜上、分けて述べる必要があるときは前者を弱コンパクト基数 ( $C$ ), 後者を弱コンパクト基数 ( $M$ ) と書くことにする。第一に弱コンパクト基数は巨大基数である。このことを見る。

**補題 2.6.**  $\kappa$  を無限基数とする。  $2^\kappa$  に辞書式順序を入れた順序集合において  $(2^\kappa, <_{\text{lex}})$  は単調増加または単調減少な長さ  $\kappa^+$  の列をもたない。

*Proof.* そうでないとする。単調増加な場合に示す。

$$W = \{f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} \subseteq 2^\kappa$$

を  $<_{\text{lex}}$  に関して単調増加な列とする。  $\gamma \leq \kappa$  を  $\{f_\alpha \restriction \gamma \mid \alpha < \kappa^+\}$  が濃度が  $\kappa^+$  となる最小のものとする、  $W$  を取り直して任意の  $f, g \in W$  において  $f \restriction \gamma \neq g \restriction \gamma$  と仮定して良い。

各  $\alpha < \kappa^+$  において、  $\xi_\alpha$  を  $f_\alpha \restriction \xi_\alpha = f_{\alpha+1} \restriction \xi_\alpha$  かつ  $f_\alpha(\xi_\alpha) = 0$ ,  $f_{\alpha+1}(\xi_\alpha) = 1$  となるもの最小とする。  $\xi_\alpha < \gamma$  である。このときある  $\xi < \gamma$  が存在して、  $W$  の  $\kappa^+$  個の  $f_\alpha$  において  $\xi = \xi_\alpha$  が成立する。しかし  $\{f_\alpha \restriction \xi \mid \alpha < \kappa^+\}$  は濃度  $\kappa^+$  であることより  $\gamma$  の最小性に矛盾する。  $\square$

**補題 2.7.**  $\kappa$  を無限基数とする。  $2^\kappa \nrightarrow (\kappa^+)_2^2$

*Proof.*  $2^\kappa = \lambda$  とし、  $2^\kappa$  の数え上げを  $\{f_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$  とする。  $\lambda$  に  $2^\kappa$  の辞書式順序から誘導される順序  $\prec$  を入れる。分割  $F: [\lambda]^2 \rightarrow 2$  を

$$F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \iff \alpha \prec \beta \wedge \alpha < \beta$$

と定義する。  $H \subset \lambda$  を濃度  $\kappa^+$  の均質集合とする。このとき  $\{f_\alpha \mid \alpha \in H\}$  はサ濃度  $\kappa^+$  の  $<_{\text{lex}}$  に関する単調増加または単調減少列となり矛盾。  $\square$

弱コンパクト基数が巨大基数であることの証明を与えよう。

**定理 2.8.** 弱コンパクト基数は到達不能基数である。

まずは無限組み合わせ論的証明を与える。

*Proof.*  $\kappa$  を弱コンパクト基数 ( $C$ ) とする。まず正則基数であることを示す。そうしないと仮定する。つまりある  $\lambda < \kappa$  と  $\kappa$  の濃度  $\kappa$  未満の部分集合からなる族  $\langle A_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$  が存在して  $\kappa = \bigcup_{\xi < \lambda} A_\xi$  を満たすと仮定する。分割  $F: [\kappa]^2 \rightarrow 2$  を

$$F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \iff \exists \gamma (\alpha \in A_\gamma \wedge \beta \in A_\gamma)$$

と定義する。このとき明らかにこの分割は濃度  $\kappa$  の均質集合を持たないので矛盾。ゆえに  $\kappa$  は正則基数である。次に強極限であることを示す。そうしないと仮定する。このときある  $\lambda < \kappa$  が存在して  $\kappa \leq 2^\lambda$  を満たす。  $2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)_2^2$  より  $\kappa \nrightarrow (\lambda^+)_2^2$  ゆえ、  $\kappa \nrightarrow (\kappa)_2^2$  となり  $\kappa$  が弱コンパクト基数であることに矛盾。よって  $\kappa$  は到達不能基数であることが示された。  $\square$

次にモデル理論的証明を与える。

*Proof.*  $\kappa$  を弱コンパクト基数 ( $M$ ) とする。まず正則基数であることを示す。そうしないと仮定する。このとき非有界な部分集合  $X \subset \kappa$  で濃度  $\kappa$  未満のものが存在する。異なる新しい定数  $c, c_\alpha (\alpha < \kappa)$  を用意し、次の

論理式の集合を考える:

$$\{c \neq c_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \cup \left\{ \bigvee_{\beta \in X} \bigvee_{\alpha < \beta} c = c_\alpha \right\}.$$

これは明らかに  $\kappa$ -充足可能だがモデルを持たない。これは矛盾である。よって  $\kappa$  は正則基数である。次に強い極限であることを示す。そうでないと仮定する。ある  $\lambda < \kappa$  が存在して  $\kappa \leq 2^\lambda$  を満たすと仮定する。新しい定数  $c_\alpha, d_\alpha^i (\alpha < \lambda, i < 2)$  を用意する。次の論理式の集合を考える。

$$\left\{ \bigwedge_{\alpha < \lambda} [(c_\alpha = d_\alpha^0 \vee c_\alpha = d_\alpha^1) \wedge d_\alpha^0 \neq d_\alpha^1] \right\} \cup \left\{ \bigvee_{\alpha < \lambda} (c_\alpha \neq d_\alpha^{f(\alpha)} \mid f \in 2^\lambda) \right\}$$

これは明らかに  $\kappa$ -充足可能だがモデルを持たない。これは矛盾である。よって  $\kappa$  は強極限基数である。  $\square$

また弱コンパクト基数は木の性質で特徴付けることもできる。このことが2つの定義を結びつけると同時に2つ性質の繋がりを明瞭にしてくれる。

**定義 2.9** (木).

- 半順序集合  $(T, <_T)$  が木であるとは、各  $x \in T$  において  $\{y \in T \mid y <_T x\}$  が  $<_T$  に関して整列集合になっていることをいう。
- $x \in T$  において  $o(x)$  とは  $\{y \in T \mid y <_T x\}$  の順序型のこととする。
- 木  $T$  の  $\alpha$ -水準を  $\text{lev}(\alpha) = \{x \in T \mid o(x) = \alpha\}$  と定義する。
- 木  $T$  の高さを  $h(T) = \sup\{o(x) + 1 \mid x \in T\}$  と定義する。
- 包含に関して極大な  $<_T$  に関する全順序部分集合  $B \subset T$  を  $T$  の枝という。枝  $B$  の長さとは  $B$  の順序型のこととする。

**定義 2.10.**  $\kappa$  を正則基数とする。

- 木  $T$  が  $\kappa$ -木であるとは、高さが  $\kappa$  で各  $\alpha$ -水準の濃度が  $\kappa$  未満になっていることをいう。
- $\kappa$  が木の性質を持つとは全ての  $\kappa$ -木が長さ  $\kappa$  の枝を持つことをいう。

**定理 2.11** (木による特徴付け).

1.  $\kappa$  が弱コンパクト基数 ( $C$ ) ならば  $\kappa$  は木の性質を持つ。
2.  $\kappa$  が到達不能基数かつ木の性質を持つならば  $\kappa$  は弱コンパクト基数 ( $C$ ) である。

*Proof.* (1)  $\kappa$  を弱コンパクト基数 ( $C$ ) とする。  $(T, <_T)$  を  $\kappa$ -木とする。  $\kappa$  は到達不能基数であるから  $T = \kappa$  として良い。  $\kappa$  上の半順序  $<_T$  を次のように全順序  $\prec$  に拡張する。

- $\alpha <_T \beta$  ならば  $\alpha \prec \beta$
- $\alpha$  と  $\beta$  が  $<_T$  の意味で比較不能のとき  $\xi$  を  $\alpha$  と  $\beta$  の  $<_T$  での前者  $\alpha_\xi$  と  $\beta_\xi$  が異なるような最小の水準とし、

$$\alpha \prec \beta \iff \alpha_\xi < \beta_\xi$$

と定義する。

分割  $F: [\kappa]^2 \rightarrow 2$  を

$$F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \iff \alpha \prec \beta \wedge \alpha < \beta$$

と定義する． $\kappa$  は弱コンパクト基数 ( $C$ ) より，濃度  $\kappa$  の均質集合  $H$  が取れる． $B \subseteq \kappa$  を全ての  $x \in B$  に対して  $\{\alpha \in H \mid x <_T \alpha\}$  が濃度  $\kappa$  となるように取る． $T$  は  $\kappa$ -木であるから，各水準の元を少なくとも一つは含んでいる．さらに  $B$  は  $<_T$  に関して全順序集合となることから  $B$  は  $T$  のサイズ  $\kappa$  を枝である．ゆえに  $\kappa$  は木の性質を持つ．

(2)  $\kappa$  を到達不能基数かつ木の性質を持つとする．任意に分割  $F : [\kappa]^2 \rightarrow 2$  を取る． $T \subseteq 2^{<\kappa}$  を帰納法によって次のように構成する． $t_0 = \emptyset$  とする．各  $\alpha < \kappa$  において  $t_0 \dots t_\beta (\beta < \alpha)$  まで構成したとき， $t_\alpha$  を  $\xi$  による帰納法で， $t_\alpha \restriction \xi$  がどの  $t_\beta$  とも異なるとき， $t_\alpha = t_\alpha \restriction \xi$  とする．ある  $\beta < \alpha$  において  $t_\alpha \restriction \xi = t_\beta$  のとき， $t_\alpha(\xi) = F(\{\alpha, \beta\})$  と定義する． $(T, \subsetneq)$  は濃度  $\kappa$  かつ  $\kappa$  は到達不能基数であるから，各水準の濃度は  $\kappa$  未満となる．ゆえに  $(T, \subset)$  の高さは  $\kappa$  である．構成より  $t_\beta \subset t_\alpha$  ならば  $\beta < \alpha$  かつ

$$F(\{\beta, \alpha\}) = t_\alpha(\text{lh}(t_\beta))$$

が成立する． $\kappa$  は木の性質を持つことから濃度  $\kappa$  の枝  $B$  を持つ．各  $i \in 2$  に対して，

$$H_i = \{\alpha \mid t_\alpha \in B \wedge t_\alpha \frown \langle i \rangle \in B\}$$

と定義する．このとき  $H_i$  は分割  $F$  に対する均質集合であり，そのどちらかはサイズ  $\kappa$  である．よって  $\kappa$  は弱コンパクト基数 ( $C$ ) である．  $\square$

**定理 2.12** (定義の同値性)．

1.  $\kappa$  が弱コンパクト基数 ( $C$ ) ならば言語  $\mathcal{L}_{\kappa, \kappa}$  は弱コンパクト性を満たす．
2.  $\kappa$  が到達不能基数で  $\mathcal{L}_{\kappa, \omega}$  が弱コンパクト性を満たすならば  $\kappa$  は弱コンパクト基数 ( $C$ ) である．

*Proof.* (1) 証明は通常のコmpact性定理と同様である． $\Sigma$  を非論理記号を高々  $\kappa$  個しか使っていない  $\mathcal{L}_{\kappa, \kappa}$ -文の集合で  $\kappa$ -充足可能なものとする． $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\kappa, \kappa}$  とする．仮定より  $|\mathcal{L}| = \kappa$  として良い．言語を次のように拡張する．各論理式  $\phi$  の自由変数  $v_\xi (\xi < \alpha)$  に対して，新しい定数  $c_\xi^\phi (\xi < \alpha)$  を用意して，言語  $\mathcal{L}$  を  $\mathcal{L}^{(1)}$  に拡張する．これを繰り返して

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{L}^{(n)}$$

を得る． $\kappa$  は到達不能基数より， $|\mathcal{L}^*| = \kappa$  である．次に各論理式  $\phi(v_\xi)_{\xi < \alpha}$  に対して，

$$\sigma_\phi \equiv \exists_{\xi < \alpha} \phi(v_\xi)_{\xi < \alpha} \rightarrow \phi(c_{xi}^\phi)_{\xi < \alpha}$$

と定義する． $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\sigma_\phi \mid \phi \in \mathcal{L}^*\}$  とする． $\{\psi_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$  を  $\mathcal{L}^*$ -文の数え上げとする． $(T, \subsetneq)$  を木で次の条件を満たすものとする．

- $T \subseteq 2^{<\kappa}$ ,
- 各  $t \in T$  に対して， $\Sigma \cap \{\psi_\alpha \mid \alpha \in \text{dom}(t)\}$  のモデル  $\mathfrak{A}$  で各  $\alpha \in \text{dom}(t)$  に対して，

$$t(\alpha) = 1 \iff \mathfrak{A} \models \psi_\alpha$$

が成立するものが存在する．

$\kappa$  は木の性質を持つことから濃度  $\kappa$  の枝  $B$  を取る． $\Delta = \{\psi_\alpha \mid \exists t \in B(t(\alpha) = 1)\}$  と定義する． $\Sigma^* \subset \Delta$  である．構造  $\mathfrak{A}$  の領域を  $\mathcal{L}^*$  の定数項の集合を

$$\tau_1 \sim \tau_2 \iff (\tau_1 \dot{=} \tau_2) \in \Delta$$



で定めた同値関係で割ったものとする．あとは通常のコンパクト性定理と同様に解釈を定めてやると  $\mathfrak{A}$  は  $\Delta$  のモデルとなっている．つまり  $\Sigma$  のモデルでもある．よって示された．

(2)  $\kappa$  が木の性質を持っていることを示す．任意に  $\kappa$ -木  $(T, <_T)$  を取る．新しい定数  $c_x (x \in T)$  と一項述語  $B$  を用意する．次の論理式の集合  $\Sigma$  を考える．

- 任意の比較不能な  $x, y \in T$  において,  $\neg(B(c_x) \wedge B(c_y))$
- 全ての  $\alpha < \kappa$  と  $T$  の  $\alpha$ -水準  $U_\alpha$  において,  $\bigvee_{x \in U_\alpha} B(c_x)$

$\Sigma$  は  $\kappa$ -充足可能である．弱コンパクト性より  $\Sigma$  はモデルを持ち,  $B$  の解釈が  $T$  の濃度  $\kappa$  の枝となっている．  $\square$

弱コンパクト基数の二つの定義が同値であることが確かめられた．これまでの証明をみると組み合わせ論的性質とモデル理論的性質の繋がりが見えてくるだろう．更なる弱コンパクト基数の性質をみていく．

### 3 弱コンパクト基数 その2

記述不能性を使うと弱コンパクト基数の別な特徴付けが得られる．構造  $\mathcal{D} = (D, \in, \dots)$  に対して高階の言語を考える．つまり  $n$  階の量子子は  $\mathcal{P}^{n-1}(D)$  を走る．論理式のクラス  $\Pi_m^n, \Sigma_m^n$  を高階の量子子の数で同様に定義する．

**定義 3.1.**  $n, m \in \omega$  とする．基数  $\kappa$  が  $\Pi_m^n$ -記述不能であるとは任意の  $R \subset V_\kappa$  と任意の  $\Pi_m^n$ -文  $\phi$  に対して,  $(V_\kappa, \in, R) \models \phi$  ならば, ある  $\alpha < \kappa$  が存在して  $(V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha) \models \phi$  を満たすことをいう．

**定義 3.2.**  $\kappa$  が拡張の性質を持つとは, 任意の  $R \subset V_\kappa$  においてある推移的集合  $X$  と  $S \subset X$  が存在して,  $(V_\kappa, \in, R) \prec (X, \in, S)$  かつ  $\kappa \in X$  を満たすときのことをいう．

弱コンパクト基数は拡張の性質を持つ．

**定理 3.3.**  $\kappa$  が弱コンパクト基数ならば,  $\kappa$  は拡張の性質を持つ．

*Proof.*  $\kappa$  を弱コンパクト基数とする． $R \subset V_\kappa$  を任意に取る． $\kappa$  は到達不能基数であるから  $|V_\kappa| = \kappa$  が成立する．新しい定数  $c, \dot{x} (x \in V_\kappa)$  を用意する．論理式の集合  $\Sigma$  を

$$\Sigma = \text{Th}((V_\kappa, \in, R, \dot{x})_{x \in V_\kappa}) \cup [c \in \text{Ord}] \cup \{c \neq \dot{\alpha} \mid \alpha < \kappa\}$$

とする． $\Sigma$  は  $\kappa$ -充足可能である．弱コンパクト性より  $\Sigma$  のモデルを得る．整礎性は

$$\neg \exists x_0 \exists x_1 \cdots \bigwedge_{n \in \omega} (x_{n+1} \in x_n)$$

を満たすことから良い．そのモデルの推移的崩壊を  $(X, \in, S, \bar{x}, c^X)_{x \in V_\kappa}$  とする．このとき  $(X, \in, S)$  は求めるものとなっている．  $\square$

実は弱コンパクト基数であることと拡張の性質を持つことは同値であるが, それは次の記述不能性の証明からわかる．

**事実 3.4.** 次は同値である

1.  $\kappa$  が到達不能基数でない．

2. ある  $m \in \omega$  が存在して  $\kappa$  は  $\Pi_m^0$ -記述可能.

**定理 3.5** (弱コンパクト基数の記述不能性). 次は同値である.

1.  $\kappa$  は弱コンパクト基数
2.  $\kappa$  は  $\Pi_1^1$ -記述不能

*Proof.* (1  $\rightarrow$  2)  $\kappa$  が弱コンパクト基数だと仮定する. 任意に  $R \subset V_\kappa$  と  $(V_\kappa, \in, R) \models \phi$  なる  $\Pi_1^1$ -論理式  $\phi$  を取る.  $\phi = \forall A \psi(A)$  とする.  $\kappa$  は拡張の性質を持つから  $(V_\kappa, \in, R)$  の初等拡大  $(X, \in, S)$  であって  $\kappa \in X$  を満たすものを取る.

$$(\forall A \subset V_\kappa)(V_\kappa, \in, R) \models \psi(A)$$

が成立することより,  $(X, \in, S) \models (\forall A \subset V_\kappa)(V_\kappa, \in, S \cap V_\kappa) \models \psi(A)$  が成立する. さらに

$$(X, \in, S) \models \exists \alpha (\forall A \subset V_\alpha)(V_\alpha, \in, S \cap V_\alpha) \models \psi(A)$$

より

$$(V_\kappa, \in, R) \models \exists \alpha (\forall A \subset V_\alpha)(V_\alpha, \in, S \cap V_\alpha) \models \psi(A)$$

が成立する. したがってある  $\alpha < \kappa$  が存在して,  $(V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha) \models \phi$ . よって  $\kappa$  は  $\Pi_1^1$ -記述不能である.

(2  $\rightarrow$  1)  $\kappa$  を  $\Pi_1^1$ -記述不能だと仮定する. このとき  $\kappa$  は到達不能基数である.  $\kappa$  は木の性質を持つことを示す. このとき木  $(T, <_T)$  であって  $T \subseteq 2^{<\kappa}$  となる木を考えれば良い.  $t \in T$  で  $\text{dom}(t) = \alpha$  なるものを取り,

$$B = \{t \mid \xi \mid \xi < \alpha\}$$

と定義すると任意の  $\alpha < \kappa$  において

$$(V_\alpha, \in, T \cap V_\alpha) \models \exists B (B \subset T \wedge B \text{ は非有界な枝})$$

が成立する.  $\kappa$  は  $\Pi_1^1$ -記述不能であることから  $(V_\kappa, \in, T)$  は長さサイズ  $\kappa$  の枝を持つ. よって  $\kappa$  は弱コンパクト基数である.  $\square$

可測基数は  $V \neq L$  を導いたが, 弱コンパクト基数は  $V = L$  と両立する.

**補題 3.6.**  $\kappa$  を弱コンパクト基数とする.  $A \subset \kappa$  が任意の  $\alpha < \kappa$  において  $A \cap \alpha \in L$  を満たすならば  $A \in L$ .

*Proof.*  $A \subset \kappa$  が条件を満たすとする.  $\kappa$  は弱コンパクト基数より初等拡大  $(V_\kappa, \in, A) \prec (X, \in, S)$  を取る.  $\kappa \in X$  であるから, 論理式

$$\forall \alpha \exists x (x \in L \wedge x = A \cap \alpha)$$

を考えると  $A \in L$  がわかる.  $\square$

**定理 3.7.** 最後に  $\kappa$  が  $V$  で弱コンパクト基数ならば,  $L$  でも弱コンパクト基数である.

*Proof.*  $L$  の中で  $\kappa$ -木  $(\kappa, <_T)$  を取る.  $\kappa$  は  $V$  で弱コンパクト基数より  $V$  で濃度  $\kappa$  の枝  $B$  が取れる. このとき  $B \in L$  であることから  $\kappa$  は  $L$  でも木の性質を持つ. 到達不能性は下方向に絶対的だから  $\kappa$  は  $L$  でも弱コンパクト基数である.  $\square$

## 4 終わり

これまで弱コンパクト基数の性質をみてきたが弱コンパクト基数は無矛盾性の強さでは巨大基数の中ではまだ弱いものである。弱コンパクト基数よりも大きい巨大基数である可測基数や超コンパクト基数などはより強い組み合わせ論的性質や反映の性質を持っている。それでも弱コンパクト基数から無限組み合わせ論的性質とモデル理論的性質という一見かけ離れた2つの性質との間に深い繋がりをみることができ、他にもいくつかの同値な特徴付けがある。巨大基数の奥深さを表している基数の1つであると言えるだろう。主な参考文献である [1] は巨大基数を勉強するには非常に良い文献である、私自身 [1] を読んで集合論という分野に非常に興味を持った経緯がある。集合論の歴史についてもその流れも書いてあり一度読んでみることを勧める。

## 参考文献

- [1] A.J.Kanamori, The Higher Infinite, Second Edition. Springer, 2009.
- [2] T.Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded. Springer, 2002.
- [3] John R. Steel, The Derived Model Theorem, 2008.
- [4] はかり,  $\omega_1$  上の巨大基数的性質と自然な構造, Mathematical Logic Advent Calendar 2020, <https://mgtohakari.hatenablog.com/entry/2020/12/16/200409>, 2020.
- [5] Donald A. Martin and John R. Steel. Iteration trees. Journal of the American Mathematical Society, 7(1):1 - 73, 1994.
- [6] D.A. Martin and J.R. Steel, A Proof of Projective Determinacy, Journal of the American Mathematical Society, 2, 1989, 71-125.
- [7] W. Hugh Woodin, Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 85, 6587-6591.