Axiom of Determinacy

YasudaYasutomo

2019 年 7 月 15 日

概要

記述集合論は実数の部分集合の性質を調べる分野である「決定性」の概念は集合論, 特に内部モデル理論において非常に重要な役割を果たしている．今回は決定性の入り口へと誘う．

1　記述集合論の予備知識

ここでは記述集合論の基本的なことを述べる．

Baire 空間 $\mathcal{N} = {}^{\omega}\omega$ は次のような距離によって位相が定まり完全ポーランド空間[*1]となる．

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \alpha = \beta \text{ のとき} \\ \frac{1}{\mu n[\alpha(n) \neq \beta(n)]+1} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

[*2] Cantor 空間 $\mathbb{C} = {}^{\omega}2$ も同様に完全ポーランド空間になる．

定理 1.1. $\mathcal{X}$ を空でないポーランド空間とする．このとき連続かつ全射な $\pi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ が存在する．

定理 1.2. $\mathcal{X}$ を空でない完全ポーランド空間とする．このとき連続かつ単射な $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathcal{X}$ が存在する．

定理 1.3. 全ての非可算ポーランド空間は Baire 空間 $\mathcal{N}$ とボレル同型である．

これらのことから完全ポーランド空間は連続体濃度を持つことがわかる．

以下空間 $\mathcal{X}$ は ω，$\mathbb{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathbb{R}$ を有限個の積空間を表すこととする．

定義 1.4. 空間 $\mathcal{X}$ と部分集合 $P \subseteq \mathcal{X}$ に対して，$\neg P = \mathcal{X} \setminus P$ と定義する．また空間 $\mathcal{X} \times \omega$ と部分集合 $P \subseteq \mathcal{X} \times \omega$ に対して, $\exists^{\omega} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists n \in \omega P\,(x, n)\}$ と定義する．また $\forall^{\omega} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall n \in \omega P\,(x, n)\}$ と定義する．

定義 1.5. 空間 $\mathcal{X}$ に対して Borel 階層 $\mathbf{\Sigma}^0_n$, $\mathbf{\Pi}^0_n$, $\mathbf{\Delta}^0_n$ $(n \geq 1)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Sigma}^0_1 = \mathcal{X} \text{ の開集合全体}, \\ &\mathbf{\Sigma}^0_{n+1} = \exists^{\omega}\neg\mathbf{\Sigma}^0_n = \{\exists^{\omega}\neg P \mid P \in \mathbf{\Sigma}^0_n\}, \\ &\mathbf{\Pi}^0_n = \neg\mathbf{\Sigma}^0_n = \{\neg P \mid P \in \mathbf{\Sigma}^0_n\}, \\ &\mathbf{\Delta}^0_n = \mathbf{\Sigma}^0_n \cap \mathbf{\Pi}^0_n. \end{aligned}$$

Borel 階層の基本的な性質をいくつか挙げる．

[*1] 完備可分距離空間のことをポーランド空間という．

[*2] $\alpha(n) \neq \beta(n)$ となる最小の n のことである．

定理 1.6.

1. $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ は Wadge reducibility[*3], 共通部分, 和集合, $\exists^\omega$ に関して閉じている.
2. $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ は Wadge reducibility, 共通部分, 和集合, $\forall^\omega$ に関して閉じている.
3. $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ は Wadge reducibility, 共通部分, 和集合, $\neg$ に関して閉じている.

定理 1.7. Borel 階層は次のような階層をなす.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{\Sigma}^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^0_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^0_3 \arrow[dr, phantom, "\ddots"] & \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \\
 & \boldsymbol{\Pi}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^0_3 \arrow[ur, phantom, "\iddots"] &
\end{tikzcd}$$

定義 1.8. 空間 $\mathcal{X}$ と部分集合 $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ に対して, $\exists^{\mathcal{N}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists \alpha \in \mathcal{N} P(x, \alpha)\}$ と定義する. また $\forall^{\mathcal{N}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall \alpha \in \mathcal{N} P(x, \alpha)\}$ と定義する. 射影階層 $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ $(n \geq 1)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \boldsymbol{\Pi}^0_1, \\
&\boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \neg \boldsymbol{\Sigma}^1_n, \\
&\boldsymbol{\Pi}^1_n = \neg \boldsymbol{\Sigma}^1_n, \\
&\boldsymbol{\Delta}^1_n = \boldsymbol{\Sigma}^1_n \cap \boldsymbol{\Pi}^1_n.
\end{aligned}$$

射影階層の基本的な性質をいくつか挙げる.

定理 1.9.

1. $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ は Wadge reducibility, 共通部分, 和集合, $\forall^\omega$, $\exists^{\mathcal{N}}$ に関して閉じている.
2. $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ は Wadge reducibility, 共通部分, 和集合, $\exists^\omega$, $\forall^{\mathcal{N}}$ に関して閉じている.
3. $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ は Wadge reducibility, 共通部分, 和集合, 補集合, $\forall^\omega$, $\exists^\omega$ に関して閉じている.

定理 1.10. 射影階層は次のような階層をなす.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{\Sigma}^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^0_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^0_3 \arrow[dr, phantom, "\ddots"] & \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \\
 & \boldsymbol{\Pi}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^0_3 \arrow[ur, phantom, "\iddots"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{\Sigma}^1_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 \arrow[dr, phantom, "\ddots"] & \\
\boldsymbol{\Delta}^1_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \\
 & \boldsymbol{\Pi}^1_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\supsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 \arrow[ur, phantom, "\iddots"] &
\end{tikzcd}$$

定理 1.11 (Suslin)**.** Borel 集合全体の族を $\mathbb{B}$ とする. このとき $\mathbb{B} = \boldsymbol{\Delta}^1_1$ が成立する.

定義 1.12. $A \subseteq \mathcal{N}$ とする.

- A が Lebesgue 可測であるとは, ある Borel 集合 P, Q が存在して $A \triangle P \subseteq Q$ かつ $\mu(Q) = 0$ を満たすことをいう. ただし μ は Lebesgue 測度.

[*3] 連続関数の逆像を取る操作のこと

- A が Baire の性質を持つとは, ある Borel 集合 P, Q が存在して $A \triangle P \subseteq Q$ かつ Q は第 1 類であることをいう.
- A が完全集合の性質を持つとは, A は可算または空でない完全集合を含むことをいう.

この 3 つの性質を本稿では実数の集合の正則性と呼ぶことにする. [*4]

2 イントロダクション

Q 2.1 (Cantor)**.** $2^{\aleph_0} = \aleph_1$?

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という言明を連続体仮説という. Cantor は連続体仮説の解決のために実数の集合の性質を調べた.

定理 2.2 (Cantor–Bendixson)**.** $A \subseteq \mathcal{N}$ を $\mathbf{\Pi}^0_1$ とする. このとき A は完全集合の性質を持つ.

空でない完全集合は完全ポーランド部分空間となり Cantor 空間が埋め込めることより連続体濃度を持つ. ゆえに完全集合の性質を持つ実数の集合は連続体仮説の反例にはなり得ない. Cantor の結果は ZFC において $\mathbf{\Sigma}^1_1$ まで拡張された.

定理 2.3 (Suslin–Mansfield)**.** $A \subseteq \mathcal{N}$ を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ とする. このとき A は Lebesgue 可測かつ Baire の性質を持ち, 完全集合の性質を持つ. [*5]

このようにして階層のどのレベルまで正則性が成立するのかを調べることは記述集合論の大きな動機となった. そして集合論と合流する.

定理 2.4 (Gödel)**.** $V = L$[*6]ならば, Baire の性質を持たず Lebesgue 可測でない Δ^1_2 集合が存在する. また完全集合の性質を持たない Π^1_1 集合が存在する.

定理 2.5 (Gödel, Cohen)**.** ZFC が無矛盾ならば, 連続体仮説は ZFC から独立である.

また巨大基数の仮定があれば全ての実数の集合が正則性を持ち得る.

定理 2.6 (Solovay)**.** κ を到達不能基数とする.
このとき V のある強制拡大の内部モデルで次が成立する.

1. 全ての実数の集合は Lebesgue 可測である.
2. 全ての実数の集合は Baire の性質を持つ.
3. 全ての実数の集合は完全集合の性質を持つ.
4. DC

今まで見た実数の集合の正則性は到達不能基数の存在から出てしまう. もっと強い正則性はないのか?

[*4] 実数と言ったら基本的に $\mathcal{N}$ を考えることが多い.
[*5] これは lightface で成立する.
[*6] L とは最小の ZF の内部モデル (順序数を全て含む ZF のモデル) である. また ZFC + GCH のモデルとなっておりさらに細かい解析が可能である.

3 Axiom of Determinacy

実数の究極の正則性とも言える決定性を定義する.

定義 3.1 (ゲーム)**.** $A \subseteq \mathcal{N}$ とする. ゲーム $G(A)$ を次のように定義する.

$$\begin{tikzcd} I & a_0 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dr] & & a_4 & & \cdots\cdots \\ II & & a_1 \arrow[ur] & & a_3 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

上の図のように I と II が交互に自然数を出す. この操作を繰り返し実数 $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ を得る. $\alpha \in A$ のとき, I の勝利. そうでないとき II の勝利と定義する.

- I の戦略とは関数 $\sigma\colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \to \omega$ のことである. II の戦略とは関数 $\tau\colon \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \to \omega$ のことである.
- I が戦略 σ で, II が戦略 τ でゲームをプレイしたときの結果を $\sigma * \tau$ と表す.
- σ を I の戦略とする. $\alpha \in \mathcal{N}$ に対して $\sigma * [\alpha]$ を, II が α をプレイし I は戦略 σ に従ってプレイしたゲームの結果を表すとする. II の戦略 τ に対して $[\alpha] * \tau$ を同様に定義する.
- I の戦略 σ がゲーム $G(A)$ の必勝戦略とは, 任意の II の戦略 τ に対して $\sigma * \tau \in A$ となることである.

余談 1. 戦略は実数として表すことができる. 以降戦略を $\mathcal{N}$ の元として扱う.

定義 3.2 (決定性)**.**

- 集合 $A \subseteq \mathcal{N}$ が決定的であるとは, I か II のどちらかがゲーム $G(A)$ において必勝戦略を持つことをいう.
- クラス Γ に対して, $\mathrm{Det}(\Gamma)$ は任意の $A \subseteq \mathcal{N}$ において $A \in \Gamma$ ならば A は決定的であるという言明を表す.

クラス Γ が連続写像の代入で閉じているならば, $\mathrm{Det}(\Gamma)$ は $\mathrm{Det}(\neg\Gamma)$ と同値である.

決定性の例を紹介する.

例 3.3 (Gale-Stewart)**.** ZFC において, $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Pi}^0_1\big)$ が成立する.

例 3.4 (Wolfe)**.** ZFC において, $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Pi}^0_2\big)$ が成立する.

公理 3.5. 決定性公理 (AD) とは実数からなる集合は全て決定的であるという公理である.

余談 2. 決定性公理と選択公理は矛盾する.

命題 3.6. 選択公理を仮定する. このとき決定的でない実数の集合が存在する.

Proof. $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ を I の戦略全体の集合とし, $\{\tau_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ を II の戦略全体の集合とする. $\big($ここで選択公理を使った.$\big)$ α による帰納法で $\mathcal{N}$ の部分集合 $X = \{x_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, $Y = \{y_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ を次

のように構成する．

（構成） $\{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$, $\{y_\xi \mid \xi < \alpha\}$ まで構成したとき, y_α をある $b \in \mathcal{N}$ が存在して $\sigma_\alpha * [b] = y_\alpha$ かつ $y_\alpha \notin \{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$ となるように取る．x_α をある $a \in \mathcal{N}$ が存在して $[a] * \tau_\alpha = x_\alpha$ かつ $x_\alpha \notin \{y_\xi \mid \xi \leq \alpha\}$ となるように取る．（構成終）

作り方から X と Y は互いに素である．各 α に対してある $a, b \in \mathcal{N}$ が存在して $\sigma_\alpha * [b] \notin X$ かつ $[a] * \tau_\alpha \in X$ となる．従ってゲーム $G(X)$ において I, II どちらも必勝戦略を持たない． $\square$

余談 3. 以下このセクションでは選択公理は仮定しない．

決定性公理は今までの実数の集合の正則性を導く．

定理 3.7. AD を仮定する．このとき次が成立する．

1. 全ての実数の集合は Lebesgue 可測である．
2. 全ての実数の集合は Baire の性質を持つ．
3. 全ての実数の集合は完全集合の性質を持つ．

Proof. 3 を示す．$A \subseteq \mathbb{C} = {}^\omega 2$ に対して次のゲーム $G^*(A)$ を考える．

$$\begin{array}{lccccc}
\mathrm{I} & a_0, \ldots, a_{k_0-1} & & a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_1-1} & & \cdots\cdots \\
& & \searrow \quad \nearrow & & \searrow & \\
\mathrm{II} & & a_{k_0} & & a_{k_1} &
\end{array}$$

I は各番で空でない 0 と 1 の有限列を選ぶことができる．このゲームの結果を $\alpha = (a_0, a_1, \ldots)$ として, $\alpha \in A$ のとき I の勝利, そうでないとき II の勝利と定義する．

主張. II が $G^*(A)$ の必勝戦略を持つならば, A は可算である．

$\because$ II の必勝戦略を τ とする．$x \in \mathcal{N}$ を任意に取る．列 $(s_0, k_0, \ldots, s_{l-1}, k_{l-1})$ が x に関して good であるとは, $w = s_0{}^\frown (k_0)^\frown \cdots ^\frown s_{l-1}{}^\frown (k_{l-1}) \prec x$ かつ $k_0 = \tau((s_0))$, $k_1 = \tau((s_0, k_0, s_1))$, $\ldots$ を満たすことをいう．

任意の x に関する good な列が good な真の拡張を持つとき x は戦略 τ に従ったゲームの結果となっていることより $x \notin A$ となる．従って $\alpha \in A$ に対してある極大である good な列 $(s_0, k_0, \ldots, s_{l-1}, k_{l-1})$ が必ず取れる． $s_0{}^\frown (k_0)^\frown \cdots ^\frown s_{l-1}{}^\frown (k_{l-1}) = (\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1))$ とすると, $i > n$ において $\alpha(i) = 1 - \tau((s_0, k_0, \ldots, s_{l-1}, k_{l-1}, (\alpha(n), \ldots, \alpha(i-1))))$ を満たす．ゆえ α は有限列と $\alpha(n)$ の値によってのみ決まる．従って A は可算である．$\dashv$ claim.

今 II が $G^*(A)$ の必勝戦略を持たないとする．AD よりこのゲームは決定的であるから I は必勝戦略 σ を持つ．$B = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{I が } \sigma \text{ に従ってプレイしたゲームの結果全体}\}$ とすると, σ は I の必勝戦略より $B \subseteq A$ である．また B はある木 $T \subseteq 2^{<\omega}$ の無限枝の全体 $[T]$ として表せるから閉集合である．B が完全集合であることは σ は I の必勝戦略であることから従う．

今 $A \subseteq \mathcal{N}$ を非可算とすると, $\mathcal{N}$ と $\mathbb{C}$ は Borel 同型であるから A は空でない完全集合を含む． $\square$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{extendible} \arrow[dr] & & \\
& \text{supercompact} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{superstrong} \arrow[dr] & & \text{strongly compact} \arrow[dl] \\
& \text{Woodin} \arrow[d] & \\
& \text{strong} \arrow[d] & \\
& \text{measurable} \arrow[d] & \\
& 0^{\#} \text{ exists} \arrow[d] & \\
& \text{inaccessible} &
\end{tikzcd}$$

また AD は巨大基数の存在をも導く．(巨大基数の無矛盾性の強さに関しては直前に図があるので適宜参照するとよい．ただし数多くある巨大基数のほんの一部である．)

定義 3.8. 非可算無限基数 κ が可測基数であるとは, κ 上に κ-完備[*7]な超フィルター[*8]が存在するときのことをいう.

ZFC において可測基数は到達不能基数となる．ZFC において可測基数の存在は独立である.

定理 3.9 (Martin–Solovay)**.** AD を仮定する．このとき ω_1 は可測基数となる.

補題 3.10. AD を仮定する．$\mathcal{D}_T$ を Turing 次数の構造とする．$A \subseteq \mathcal{D}_T$ を任意に取る．このときある $d_0 \in \mathcal{D}_T$ が存在して $\{d \mid d_0 \leq_T d\} \subseteq A$ または $\{d \mid d_0 \leq_T$ [*9]$d\} \subseteq \mathcal{D}_T \setminus A$ が成立する.

Proof. 次のゲームを考える．$A \subseteq \mathcal{D}_T$ に対して, ゲームの結果を α とする．I が勝利するのは $[\alpha]_T \in A$ のときとする．I が必勝戦略 σ を持つとき, $d_0 = [\sigma]_T$ とする．任意の $\beta \in d \geq_T d_0$ において, $\sigma * [\beta] \equiv_T \beta$ かつ $[\sigma * [\beta]]_T = d \in A$ が成立する．II が必勝戦略 σ を持つときも同様である. □

$\mathcal{D}_T$ 上のフィルター U を,

$$U = \{A \subseteq \mathcal{D}_T \mid \exists d_0 \in \mathcal{D}_T \{d \mid d_0 \leq_T d\}\}$$

と定義する．U は $\aleph_1$-完備な超フィルターとなる．Martin–Solovay の結果を証明する.

Proof. WO $= \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \ \leq_\alpha = \{(n,m) \mid \alpha(\langle n,m \rangle) = 1\}$: 整列順序である．$\}$ とし, $\alpha \in WO$ に対して $|\alpha| = ot(\leq_\alpha)$ と定義する．各 $\alpha \in \mathcal{N}$ に対して, $\omega_1^\alpha = \sup\{|\beta| \mid \beta \leq_T \alpha \wedge \beta \in WO\}$ と定義する．各次数 d に対して $\omega_1^d = \omega_1^\alpha$ $(\alpha \in d)$ とする．これは取り方によらない．ω_1 上のフィルター U^* を

$$U^* = \{A \subseteq \omega_1 \mid \{d \mid \omega_1^d \in A\} \in U\}$$

[*7] κ 未満個の共通部分を取る操作で閉じていること.

[*8] 極大なフィルター

[*9] Turing reducibility の意味での順序.

と定義する. U^* は ω_1 上の $\aleph_1$-完備な超フィルターとなる. □

系 3.11. $\mathrm{Con}\,(\mathrm{ZF}+\mathrm{AD}) \Rightarrow \mathrm{Con}\,\big(\mathrm{ZFC}+text$ 可測基数が存在する$\big)$

ZF + AD の無矛盾性は実は可測基数の存在よりもはるかに強い.

4　決定性の無矛盾性

Borel 階層の低層の方では決定性が成立することをみた. しかしそれより上の階層では成立し得るのか？という問が自然に生じる. このセクションではそれをみる.

余談 4. 以下 ZFC で作業を行う.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbf{\Sigma}^0_1 \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Sigma}^0_2 \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Sigma}^0_3 \arrow[dr, phantom, "\ddots"] & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^0_2 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^0_3 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \\
& \mathbf{\Pi}^0_1 \arrow[ur, hook] & & \mathbf{\Pi}^0_2 \arrow[ur, hook] & & \mathbf{\Pi}^0_3 \arrow[ur, phantom, "\iddots"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbf{\Sigma}^1_1 \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Sigma}^1_2 \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Sigma}^1_3 \arrow[dr, phantom, "\ddots"] & \\
\mathbf{\Delta}^1_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^1_2 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{\Delta}^1_3 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \\
& \mathbf{\Pi}^1_1 \arrow[ur, hook] & & \mathbf{\Pi}^1_2 \arrow[ur, hook] & & \mathbf{\Pi}^1_3 \arrow[ur, phantom, "\iddots"] &
\end{tikzcd}
$$

次のことが成立する.

定理 4.1 (Martin)**.** ZFC において, $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Delta}^1_1\big)$ が成立する.

さらに上は ZFC で証明できるのか？という自然な発想が出てくるが本質的に巨大基数の仮定が必要である.

定理 4.2 (Martin)**.** 可測基数が存在すると仮定する. このとき $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Pi}^1_1\big)$ が成立する.

実は仮定を弱めることができる.

定理 4.3 (Harrington)**.** 次は同値

1. $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Pi}^1_1\big)$
2. 全ての $x \in \mathcal{N}$ に対して, $x^{\#}$[*10]が存在する.

Harrington の結果の証明は今回の範囲を大きく逸脱するので Martin の結果の証明をする.

定義 4.4. λ を非可算無限基数, F を λ 上のフィルターとする. F が正規フィルターであるとは, 任意の $\langle X_\xi \mid \xi < \lambda\rangle \in {}^\lambda F$ に対して $\triangle_{\xi<\lambda} X_\xi = \{\xi < \lambda \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\} \in F$ を満たすことをいう.

命題 4.5. κ を可測基数とする. このとき κ 上に κ-完備な正規超フィルターが存在する.

定理 4.6 (Rowbottom)**.** κ を可測基数とする. U を κ 上の κ-完備な正規超フィルターとする. このとき任意の $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma\ (\gamma < \kappa)$ に対して, ある $H \in U$ で全ての $n \in \omega$ において $|f``[H]^{n}$[*11]$| \le 1$ となるものが存在する.

*10 $L[x]$ に対する $0^{\#}$ のこと
*11 pointwise image のこと

命題 4.7. $A \subseteq \mathcal{N}$ を $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合とする．このとき関数 D で次を満たすように取れる．

1. $\mathrm{dom}(D) = \{u \mid \mathrm{Seq}\,(u) \wedge \mathrm{lh}\,(u) :$ が偶数である$\}$.
2. $\mathrm{Seq}\,(u)$ かつ $\mathrm{lh}\,(u) = 2n$ ならば $D\,(u)$ は n 個の自然数上の全順序.
3. $\alpha \in \mathcal{N}$ かつ $t < s$ ならば $D\,(\bar{\alpha}\,(2t))$ は $D\,(\bar{\alpha}\,(2s))$ の部分順序である $(\bar{\alpha}\,(n) = (\alpha\,(0)\,, \ldots, \alpha\,(n-1)))$.
4. $\alpha \in A \Leftrightarrow \bigcup_t D\,(\bar{\alpha}\,(2t))$ が整列順序である．

Martin の結果を示す.

Proof. $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Sigma}^1_1\big)$ と $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Pi}^1_1\big)$ は同値であることに注意する．$A \subseteq \mathcal{N}$ を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合とする．κ を可測基数とし, U を κ 上の κ-完備な超フィルターとする．上の事実の関数 D を $\mathcal{N} \setminus A$ に対して取る．このとき次が成立している．

$$\alpha \notin A \leftrightarrow \bigcup_t D\,(\bar{\alpha}\,(2t)) \text{ が整列順序である.}$$

ゲーム G^* を次のように定義する．

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & a_4 & & \\ & & & & & & & \cdots\cdots \\ \mathrm{II} & & a_1, \xi_0 & & a_3, \xi_1 & & & \end{array}$$

各 a_i は自然数で $\xi_i < \kappa$ を満たす． また $\mathrm{Field}\,(D\,(\bar{\alpha}\,(2t))) = \{x_0, \ldots, x_{t-1}\}$, $\mathrm{Field}\,(\bigcup_t D\,(\bar{\alpha}\,(2t))) = \{x_0, x_1, \ldots\}$ とする．このとき写像 $x_i \mapsto \xi_i$ が $\bigcup_t D\,(\bar{\alpha}\,(2t))$ から κ への順序保存写像となっているとき II の勝利と定義する．G^* は閉集合のゲームだから選択公理を用いて決定的である．II がゲーム G^* の必勝戦略を持つときゲーム $G(A)$ に勝利することは明らか. I がゲーム G^* の必勝戦略 σ^* を持つときゲーム $G(A)$ の必勝戦略を持つことを示す.

t 個の異なる順序数 $\xi_0, \ldots, \xi_{t-1}$ と列 $u = (a_0, \ldots, a_{2t-1})$ に対して, $D(u)$ から定まる $\{\xi_0, \ldots, \xi_{t-1}\}$ の順序を $\xi_{n(u,0)}, \ldots, \xi_{n(u,t-1)}$ とする． 長さ $2t$ の列 $u = (a_0, \ldots, a_{2t-1})$ に対して分割 $F_u \colon [\kappa]^t \to \omega$ を $F_u(\xi_0, \ldots, \xi_{t-1}) = \sigma^*\left(a_0, (a_1, \xi_{n(u,0)}), \ldots\right)$ と定義する．Rowbottom の定理より均質集合 $H \in U$ が取れる．I の必勝戦略を $\sigma(a_0, \ldots, a_{2t-1}) = F_u(\{\xi_0, \ldots, \xi_{t-1}\})$ $\left(\xi_0, \ldots, \xi_{t-1} \in H\right.$ は任意$\left.\right)$ と定義する．I が戦略 σ に従ってプレイしたゲーム $G(A)$ の結果を α とする．$\alpha \notin A$ を仮定する．このとき $\bigcup_t D\,(\bar{\alpha}\,(2t))$ は整列順序かつ H は非可算集合であるから順序保存写像が取れる．H の均質性からこれは σ^* が I の必勝戦略であることに矛盾する． □

また Martin は同様の証明で $\mathrm{Det}\big(\mathbf{\Pi}^1_2\big)$ を I2 の存在から証明している．しかしこの仮定は過剰である．

今回証明したのは射影階層の低層の部分である． 次のことが Martin–Steel によって与えられている． Martin の結果を一般化となっており, Woodin 基数の内部モデルを考える際に自然に現れる Iteration tree を用いることで homogeneous tree を構成しそこから決定性を得ている．

定理 4.8 (Martin–Steel)**.** n 個の Woodin 基数とそれらより大きい可測基数が存在すると仮定する．このとき $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$ が成立する．

このことから無限個の Woodin 基数が存在するとき射影集合の決定性が成立することがわかる．さらに決定性公理の無矛盾性も証明されている．これは Martin–Steel の結果と Woodin により stationary tower forcing を用いた結果を使うことで得られる．

定理 4.9 (Martin–Steel–Woodin). ω 個の Woodin 基数とそれらより大きい可測基数が存在すると仮定する. このとき $L(\mathbb{R})$[*12]において AD が成立する.

今回は決定性公理の記述集合論的なパワフルな側面は惜しみながらも割愛した. 今回は PD や AD を考えたが, 他にも AD^+ や $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ などのより強い決定性が研究されている. また内部モデル理論との繋がりもあり記述集合論の結果を用いて内部モデルの解析もなされている. 今回紹介できた話は極々一部であるが興味を持っていただければ幸いである.

参考文献

[1] A. J. Kanamori, M. Foreman, *Handbook of Set Theory*, Springer (2010).

[2] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive set theory*, second edition, volume 155 of Mathematical Surveys and Mono- graphs. American Mathematical Society, Providence, RI, (2009).

[3] A. J. Kanamori, *The Higher Infinite*, second edition. Springer, (2009).

*12 実数を全て含むような最小の内部モデル.