0.1 H14 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ の基底である．

(2) $\phi_A(kX+\ell Y) = A(kX+\ell Y)-(kX+\ell Y)A = kAX+\ell YA-kXA-\ell YA = k(AX-XA)+\ell(AY-YA) = k\phi_A(X)+\ell\phi_A(Y)$ より ϕ_A は線形写像．

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ c & a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2b\\ 2c & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & -a\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c & 2a\\ 0 & c\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & 0\\ -a & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & 0\\ -2a & -b\end{pmatrix}$$

よって ϕ_A の表現行列は $\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ -2b & 2a & 0\\ 2c & 0 & -2a\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix}0 & -2b & 2c\\ -c & 2a & 0\\ b & 0 & -2a\end{vmatrix} = c\begin{vmatrix}-2b & 2c\\ 0 & -2a\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}-2b & 2c\\ 2a & 0\end{vmatrix} = c(4ab)-b(4ac)=0$. より ϕ_A の階数は 2 以下.

2×2 小行列式に着目すると，$\begin{vmatrix}0 & 2c\\ -c & 0\end{vmatrix} = 2c^2, \begin{vmatrix}0 & -2b\\ b & 0\end{vmatrix} = 2b^2, \begin{vmatrix}2a & 0\\ 0 & -2a\end{vmatrix} = -4a^2$ であるから，$a\neq 0 \vee b\neq 0 \vee c\neq 0$ のとき ϕ_A の階数は 2 である．

$a=b=c=0$ のとき $\phi_A=0$ であり階数は 0 である．

$\boxed{2}$ (1) $a\in G$ に対して $aH=\{ah \mid h\in H\}$ は $ah=ah'$ ならば $h=h'$ であるから $|aH|=|H|$. よって剰余類 G/H の各同値類の大きさは $|H|$ である．すなわち $G=\bigsqcup_{aH\in G/H} aH$ であるから．$|G|=\sum_{aH\in G/H}|aH|=|H||G/H|$.

すなわち H の位数 $|H|$ および指数 $|G/H|$ は共に G の約数.

(2)$a\in G$ の位数が n とし，$f(a)\neq 0$ とする．このとき $0=f(e)=f(a^n)=nf(a)$ となり矛盾する．よって a の位数は無限.

(3)φ は 1 の行き先で定まる．$1\neq\varphi(1)=\alpha\in\mathbb{C}^\times$ とする．

$\alpha=e^{2\pi im/q}$ $(p/q$は既約分数$)$ のとき，$\ker\varphi=\{pn \mid n\in\mathbb{Z}\}$ である．

他の場合は $\varphi(n)=1$ なら $\alpha^n=1$ より $\alpha=e^{2\pi im/n}$ となって矛盾するから，$\ker\varphi=\{0\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$\mathcal{O}_S=\{\emptyset, S, \{a,b\},\{b,c\},\{d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{b\},\{b,d\}\}$ が最小の位相である．

(2)$S=\{a,b,c\}\cup\{d\}$ が連結成分への分解である．$\{a,b,c\}$ が連結でないなら，すくなくともただ一つの元からなる連結成分が存在する．位相を考えると $\{b\}$ のみが開集合である．このとき補集合 $\{a,c\}$ は開集合でないため，$\{a,b,c\}$ は連結である．

(3) ハウスドルフではない．a を含む開集合は全て b を含む.

(4) 開基の逆像を調べれば十分.

$f^{-1}(\{a,b\})=\{b,c\}\in\mathcal{O}_S, f^{-1}(\{b,c\})=\{a,b\}\in\mathcal{O}_S, f^{-1}(d)=\{d\}\in\mathcal{O}_S$ であるから f は連続.

$g^{-1}(\{a,b\})=\{a,c\}\notin\mathcal{O}_S$ より g は連続でない.

$\boxed{4}$ $((a)\Rightarrow(b))C^1$ 級関数 $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が凸関数であるとする．このとき $x<y<z$ に対して $(g(y)-g(x))/(y-x)\le(g(z)-g(x))/(z-x)\le(g(z)-g(y))/(z-y)$ が成り立つ．これを示す.

$sx+(1-s)z=y$ なる $s\in(0,1)$ がただ一つ存在する．

$$g(y)-g(x)=g(sx+(1-s)z)-g(x)\leq sg(x)+(1-s)g(z)-g(x)=(1-s)(g(z)-g(x))$$

$$(g(y)-g(x))/(y-x)\leq(1-s)(g(z)-g(x))/(y-x)=(g(z)-g(x))/((1-s)(z-x))=(g(z)-g(x))/(z-x)g(z)-g(y) \quad =$$

$$(g(z)-g(y))/(z-y)\geq s(g(z)-g(x))/(z-y)=s(g(z)-g(x))/s(z-x)=(g(z)-g(x))/(z-x)$$

$x<z$ に対して，$g'(x)=\lim_{y\to x+0}(g(y)-g(x))/(y-x)\leq\lim_{y\to x+0}(g(z)-g(x))/(z-x)=(g(z)-g(x))/(z-x)$ 同様に $y\to z-0$ として $(g(z)-g(x))/(z-x)\leq g'(z)$．よって $g'(x)\leq g'(z)$．したがって g' は広義単調増加である．

$g(y)-g(x)-g'(x)(y-x)\geq 0$ を示す．

任意の $x,y\in\mathbb{R},x<y$ に対して平均値の定理から $g(y)-g(x)=g'(c)(y-x)$ となる $c\in(x,y)$ が存在する．$x<c$ より $g'(x)\leq g'(c)$ であるから，$g(y)-g(x)-g'(x)(y-x)=g'(c)(y-x)-g'(x)(y-x)=(g'(c)-g'(x))(y-x)\geq 0$ また $x>y$ の時も同様で $x=y$ の時は明らか．

f について (b) が成り立つことを示す．$x,y\in\mathbb{R}^n$ に対して $c\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n;t\mapsto x+t(y-x)$ とする．$f\circ c\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は C^1 級凸関数である．よって $f\circ c(1)-f\circ c(0)-(f\circ c)'(0)\geq 0$ である．$f\circ c(1)=f(y),f\circ c(0)=f(x),(f\circ c)'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c(0))(y_i-x_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i-x_i)$ であるから，$f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i-x_i)\geq 0$ である．

$((b)\Rightarrow(c))$ $0\leq E(x,y)+E(y,x)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i-x_i)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)(x_i-y_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)(y_i-x_i)$

$((c)\Rightarrow(a))$ $z=(1-\theta)x+\theta y$ とする．f についてテイラーの定理をもちいると，$s=x+\alpha\theta(y-x),t=y+\beta(1-\theta)(x-y)$ となる $\alpha,\beta\in(0,1)$ が存在して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
f(z)&=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)(z_i-x_i)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)(\theta(y_i-x_i))\\
f(z)&=f(y)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)(z_i-y_i)=f(y)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)((1-\theta)(y_i-x_i))\\
f(z)&=(1-\theta)f(z)+\theta f(z)\\
&=(1-\theta)f(x)+\theta f(y)+\theta(1-\theta)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(y_i-x_i)
\end{aligned}$$

$s-t=(x-y)+\alpha\theta(y-x)-\beta(1-\theta)(x-y)=(\alpha\theta+\beta(1-\theta)-1)(y-x)$ である．ここで α,β,θ の範囲に注意すると $\alpha\theta+\beta(1-\theta)-1\leq 0$ である．

よって $0\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(s_i-t_i)=(\alpha\theta+\beta(1-\theta)-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(y_i-x_i)$ であるから，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(y_i-x_i)\leq 0$ である．

すなわち $f((1-\theta)x+\theta y)=f(z)\leq(1-\theta)f(x)+\theta f(y)$ である．