0.1　H15 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\{f(x) \mid x \in X\}$ が下に有界でないとする．すなわち任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) \leq -n$ なる $x \in X$ が存在する．これを x_n とおく．X は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合であるから有界閉集合である．よって X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$ となりこれは矛盾．よって下に有界．

(2) 下に有界であるから $\inf\{f(x) \mid x \in X\} = M \in \mathbb{R}$ である．M が下限であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x_n) \leq M + \frac{1}{m}$ なる x_n が存在する．数列 $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$M \leq f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty}(M + \frac{1}{n_k}) = M$ となり $f(\alpha) = M$．よって f は最小値をもつ．

$\boxed{2}$ (1)$g(0) = 1$ であり g は連続関数であるから 0 を含むある開区間 I で $g(x) > 0$ となる．I 上で $h(x) = \sqrt[m]{g(x)}$ とする．I 上で h は C^1 級であり $h(x)^m = g(x), h(x) > 0$ である．

(2)$f(\varphi(y)) = \varphi(y)^m g(\varphi(y)) = \varphi(y)^m h(\varphi(y))^m = y^m$ をみたす $\varphi(y)$ を求める．$\varphi(y)h(\varphi(y)) = y$ をみたす $\varphi(y)$ を求めればよい．$F(x,y) = xh(x) - y$ とおく．$\partial F/\partial x(0,0) = h(0) + 0\varphi'(0) > 0$ である．陰関数定理から $F(x,y) = 0$ をみたす C^1 級関数 $x = \varphi(y)$ が 0 の近傍で存在する．

$\boxed{3}$ (1)$T_A(cX+Y) =^t (cX+Y)A + A(cX+Y) = c^tXA + cAX +^t YA + AY = cT_A(X) + T_A(Y)$ である．よって線形．

(2)${}^t({}^tXA + AX) = AX +^t XA$ より $\mathrm{Im}T_A \subset S$ である．$Y \in S$ に対して $X = A^{-1}Y/2$ とすると，${}^tXA + AX =^t (AX) + AX =^t (Y/2) + (Y/2) = Y$ となる．よって $S \subset \mathrm{Im}T_A$ である．

(3)${}^t(AX) + AX = O$ より AX が交代行列となる X を考える．よって $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．AX_1, AX_2, AX_3 は交代行列である．よって X_1, X_2, X_3 は $\ker T_A$ の基底となる．

$\boxed{4}$ (1)$AB = BA$ のとき．$v \in V_j$ に対して $ABv = BAv = B\alpha_j v = \alpha_j Bv$ より，$Bv \in V_j$ である．

$BV_j \subset V_j \quad (j = 1, \ldots, k)$ のとき．A がエルミート行列であるから，$\mathbb{C}^n$ を固有空間の直和に分解できる．したがって $\{v_1, \ldots, v_n\}$ をそれぞれが A の固有ベクトルであるような基底とできる．$v_i \in V_{s_i}$ とする．$u \in \mathbb{C}^n$ に対して $u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ とできる．$ABu = A(a_1Bv_1 + \ldots a_nBv_n) = a_1\alpha_{s_1}Bv_1 + \cdots + a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．また $BAu = B(a_1\alpha_{s_1}v_1 + \ldots a_n\alpha_{s_n}v_n) = a_1\alpha_{s_1}Bv_1 + \cdots + a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．よって $ABu = BAu$ である．すなわち $AB = BA$

(2)$v \in V_j$ に対して $A^m v_j = \alpha_j^m v_j$ である．A^m の固有値 α_j^m の固有空間を W_j とすると，$W_j \supset V_j$ である．A はエルミート行列であるから固有値は実数である．したがって異なる固有値 α_i, α_j にたいして $\alpha_i^m = \alpha_j^m$ となるには m が偶数であることが必要．今 m は奇数であるから $\alpha_i^m \neq \alpha_j^m$ である．したがって $i \neq j$ なら $W_i \neq W_j$ である．よって $W_j = V_j$ である．A^m はエルミート行列であり $A^mC = CA^m$ であるから (1) より $CW_j \subset W_j$ である．よって $CV_j \subset V_j$ であるから $AC = CA$ である．