

0.1 R2 数学必修

[1] (1) $A, B \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$ より, $A+B \in S_2(\mathbb{R})$ である. また $k \in \mathbb{R}, A \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t(kA) = k{}^tA = kA$ より $kA \in S_2(\mathbb{R})$ である. よって $S_2(\mathbb{R})$ は部分空間.

(2) $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. それぞれ対称行列である. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ に対して $A = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{22}Q_3$ である. $c_1Q_1 + c_2Q_2 + c_3Q_3 = 0$ とする. $c_1Q_1 + c_2Q_2 + c_3Q_3 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = O$ より $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ である. よって Q_1, Q_2, Q_3 は線形独立である. すなわち $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ は $S_2(\mathbb{R})$ の基底である.

(3) $A \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t(PAP) = {}^tP {}^tA {}^tP = {}^tPAP$ である. よって $f_P(S_2(\mathbb{R})) \subset S_2(\mathbb{R})$ である.

(4) $g_P(Q_1) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = a^2Q_1 + abQ_2 + b^2Q_3$ である.

$g_P(Q_2) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & cb+ad \\ cb+ad & 2bd \end{pmatrix} = 2acQ_1 + (cb+ad)Q_2 + 2bdQ_3$ である.

$g_P(Q_3) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix} = c^2Q_1 + cdQ_2 + d^2Q_3$ である.

よって表現行列は $X = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & cb+ad & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{pmatrix}$ である.

(5) g_P が全射なら ${}^tPAP = E$ を満たす $A \in S_2(\mathbb{R})$ が存在する. $\det {}^tP \det A \det P = 1$ であるから $(\det P)^2 \det A = 1$ である. よって $\det P \neq 0$ である. よって P は可逆行列.

P が可逆行列なら任意の $Q \in S_2(\mathbb{R})$ に対して $A = {}^tP^{-1}QP^{-1}$ とすれば, $A \in S_2(\mathbb{R})$ であり, $g_P(A) = Q$ である. よって g_P は全射である.

[2] (1) G を非空集合, $\cdot : G \times G \rightarrow G$ を写像とする. $\langle G, \cdot \rangle$ が群であるとは, 次の条件を満たすことである.

(i) 任意の $a, b, c \in G$ に対して $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ である.

(ii) ある $e \in G$ がただ一つ存在して任意の $a \in G$ に対して $e \cdot a = a \cdot e = a$ である.

(iii) (ii) の e と任意の $a \in G$ に対して, ある $b \in G$ が存在して $a \cdot b = b \cdot a = e$ である.

(2) $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, (-1)^{x_2}y_1 + y_2) \cdot (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, (-1)^{x_3}((-1)^{x_2}y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, (-1)^{x_2+x_3}y_1 + (-1)^{x_3}y_2 + y_3)$ である. また $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, (-1)^{x_3}y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, (-1)^{x_3}y_1 + (-1)^{x_1}y_2 + y_3)$ である. よって (i) を満たす.

$(x_1, y_1) \cdot (0, 0) = (x_1, (-1)^0y_1) = (x_1, y_1)$ である. また $(0, 0) \cdot (x_1, y_1) = (0, (-1)^{x_1}y_1) = (x_1, y_1)$ である. 逆に $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ なら $x_1 = x_1 + x_2$ であるから $x_2 = 0$ である. よって $(-1)^{x_2}y_1 + y_2 = y_1 + y_2 = y_1$ より $y_2 = 0$ である. よって (ii) を満たす.

(x_1, y_1) に対して $(x_1, y_1) \cdot (-x_1, (-1)^{-x_1+1}y_1) = (0, (-1)^{-x_1}y_1 + (-1)^{-x_1+1}y_1) = (0, 0), (-x_1, (-1)^{-x_1+1}y_1) \cdot (x_1, y_1) = (0, (-1)^{x_1}y_1 + (-1)^{-x_1+1}y_1) = (0, 0)$ である. よって (iii) を満たす. すなわち群である.

(3) 任意の $(x_1, y_1) \in G, (x, y) \in H$ に対して, $(-x_1, (-1)^{-x_1+1}y_1) \cdot (x, y) \cdot (x_1, y_1) = (-x_1 + x, (-1)^x(-1)^{-x_1+1}y_1 + y) \cdot (x_1, y_1) = (x, (-1)^{x_1}((-1)^{-x_1+1}y_1 + y) + y_1) = (x, (-1)^{x+1-2x_1}y_1 + (-1)^{x_1}y + y_1)$ である. $x \in 2F$ であり, $(-1)^{x+1-2x_1}y_1 + (-1)^{x_1}y + y_1 = (-1)^{x_1}y \in 3\mathbb{Z}$ である. よって H は G の正規部分群.

[3] (1) $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ と極座標変換する. ヤコビアンは r である. 積分領域は $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq$

$r \leq 1, -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ である。よって

$$\begin{aligned} \iint_D x |\log(x^2 + y^2)| dx dy &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \cos \theta |\log r^2| dr d\theta = [\sin \theta]_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^1 -r^2 \log r^2 dr \\ &= \sqrt{3} \left(\left[-r^2 \frac{2}{r} \right]_0^1 - \int_0^1 -4dr \right) = \sqrt{3}(-2 + 4) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) 極座標変換して $0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta < 2\pi$ での $f(r, \theta) = r^2 \cos \theta \sin \theta (3 - r^2)$ の最大値, 最小値を考える。

$0 \leq r \leq 1$ での $r^2(3 - r^2) = -(r^2 - 3/2)^2 + 9/4$ は $r = 1$ で最大値 2 をとり, $r = 0$ で最小値 0 をとる。

$0 \leq \theta < 2\pi$ での $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ は $\theta = \pi/4$ で最大値 1 をとり, $\theta = 3\pi/4$ で最小値 -1 をとる。

よって最大値は 2, 最小値は -2 である。

(3) $(a_n)_{n=1}^\infty$ がコーシー列であることを示す。 $n > m$ とする。 $(f(n))_{n=1}^\infty$ は単調減少有界列であるから収束列である。 よってコーシー列である。 よって

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \int_m^n f(x) dx - \sum_{k=m+1}^n f(k) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f(x) - f(k) dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=m+1}^n f(k-1) - f(k) \right| = |f(m) - f(n)| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるからコーシー列である。

□ (1) 任意の異なる二点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ をとる。 $x_1 \neq x_2$ のとき, $x_1 \subset U_1, x_2 \subset U_2$ なる開集合 U_1, U_2 で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものが存在する。 このとき $(x_1, y_1) \subset U_1 \times Y, (x_2, y_2) \subset U_2 \times Y$ であり, $U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = \emptyset$ である。 $x_1 = x_2$ のとき, $y_1 \neq y_2$ であり, その場合も同様にできる。 よって $X \times Y$ はハウスドルフである。

(2) $A \subset X$ が有限のとき, $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の開被覆とする。 各 $a \in A$ に対して $a \in U_{\lambda_a}$ なる $\lambda_a \in \Lambda$ が存在するからこれを固定する。 このとき $A \subset \bigcup_{a \in A} U_{\lambda_a}$ より A はコンパクト。

A が無限集合なら A の開被覆として $S = \{\{a\} \mid a \in A\}$ とすればこれは有限部分被覆をもたないからコンパクトでない。 対偶をとればコンパクトなら有限集合である。