0.1　R5 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $I(x)=x^{-1}\int_0^x (y+1)^2dy = x^{-1}\left[\frac{1}{3}(y+1)^3\right]_0^x = \frac{1}{3}x^2+x+1, I(x)=x^{-1}\int_0^x y+1dy = x^{-1}\left[\frac{1}{2}y^2+y\right]_0^x = \frac{1}{2}x+1, I(1)=x^{-1}\int_0^x 1dy=1$ である．

(2) 表現行列は $A=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\1&1/2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ である．

(3)A の固有値は $1/3,1/2,1$ である．$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1/6&0\\1&1&2/3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2/15\\0&1&4/5\\0&0&0\end{pmatrix}$ より，固有値 $1/3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2/15\\-4/5\\1\end{pmatrix}$ である．よって $f=c(\frac{2}{15}x^2-\frac{4}{5}x+1)\quad(c\in\mathbb{R})$ に対して $I(f)=\frac{1}{3}f$ である．

$\begin{pmatrix}-1/6&0&0\\1&0&0\\1&1&1/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1/2\\0&0&0\end{pmatrix}$ より，固有値 $1/2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1\end{pmatrix}$ である．よって $f=c(-\frac{1}{2}x+1)\quad(c\in\mathbb{R})$ に対して $I(f)=\frac{1}{2}f$ である．

$\begin{pmatrix}-2/3&0&0\\1&-1/2&0\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ より，固有値 $1/3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ である．よって $f=c\quad(c\in\mathbb{R})$ に対して $I(f)=f$ である．

(4)$P=\begin{pmatrix}2/15&0&0\\-4/5&-1/2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ とする．$P^{-1}=\begin{pmatrix}15/2&0&0\\-12&-2&0\\9/2&2&1\end{pmatrix}$ である．$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ である．よって $A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}1/3^n&0&0\\0&1/2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{15\cdot 3^n}&0&0\\-\frac{4}{5\cdot 3^n}&-\frac{1}{2\cdot 2^n}&0\\\frac{1}{3^n}&\frac{1}{2^n}&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n}&0&0\\\frac{6}{2^n}-\frac{6}{3^n}&\frac{1}{2^n}&0\\\frac{15}{2\cdot 3^n}-\frac{12}{2^n}+\frac{9}{2}&-\frac{2}{2^n}+2&1\end{pmatrix}$ である．$A^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n}\\\frac{7}{2^n}-\frac{6}{3^n}\\\frac{15}{2\cdot 3^n}-\frac{14}{2^n}+\frac{15}{2}\end{pmatrix}$ である．すなわち $I^n(x^2+x+1)=\frac{1}{3^n}x^2+(\frac{7}{2^n}-\frac{6}{3^n})x+(\frac{15}{2\cdot 3^n}-\frac{14}{2^n}+\frac{15}{2})$ である．

$\boxed{2}$ (1)$f(e)=f(e\cdot e)=f(e)\cdot f(e)$ より，$e=f(e)^{-1}f(e)=f(e)^{-1}f(e)f(e)=f(e)$ である．$e=f(e)=f(yy^{-1})=f(y)f(y^{-1})$ である．よって $f(y^{-1})=f(y)^{-1}$ である．

(2)$(x,f(x)),(y,f(y))\in G_f$ に対して $(x,f(x))\cdot(y,f(y))=(xy,f(x)f(y))=(xy,f(xy))\in G_f$ より演算で閉じている．$(x,f(x))\cdot(x^{-1},f(x^{-1}))=(xx^{-1},f(x)f(x^{-1}))=(e,f(e))\in G_f$ より逆元を持つ．よって部分群をなす．

(3)$F\colon G\to G_f; x\mapsto(x,f(x))$ とする．F は同型写像．

(4)G がアーベル群なら $G\times G$ はアーベル群である．よって部分群 G_f は正規部分群である．

f が全射準同型であるとする．G_f が正規部分群であるから, $x,y\in G$ に対して $(y,e)\cdot(x,f(x))\cdot(y,e)^{-1}\in G_f$ である．すなわち $(yxy^{-1},f(x))\in G_f$ である．よって $f(yxy^{-1})=f(x)$ より $yx(xy)^{-1}\in\ker f$ である．したがって $x\ker f\cdot y\ker f=y\ker f\cdot x\ker f$ より $G/\ker f$ はアーベル群．よって群準同型定理から G はアーベル群．

$\boxed{3}$ (1)$f_x = (y - x^2y)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, f_y = (x - y^2x)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ である．ともに 0 となる点 (x, y) は $(0, 0)$ と $(\pm1, \pm1)$ である．$f_{xx} = (x^3y - 3xy)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, f_{yy} = (y^3x - 3yx)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, f_{xy} = (x^2y^2 - y^2 - x^2 + 1)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ である．$(0, 0)$ では $x = 0$ として y 軸方向の増減を考えれば極値点でない．$(\pm1, \pm1)$ (複号同順) ではヘッシアンは $\begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -2/e \end{pmatrix}$ である．これは負定値行列であるから極大値 $f(1, 1) = 1/e$ をとる．

$(\pm1, \mp1)$ (複号同順) ではヘッシアンは $\begin{pmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}$ である．これは正定値行列であるから極小値 $f(-1, 1) = -1/e$ をとる．

(2)$A = \{x \mid |x| \geq 1\}$ と $B = \{x \mid |x| \leq 2\}$ のそれぞれで一様連続なら $\mathbb{R}$ 上一様連続である．B は有界閉区間であるから f の連続性より一様連続である．A 上で考える．ある $\delta > 0$ と任意の $x \in A, y \in (x - \delta, x + \delta)$ に対して $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{y^2-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \frac{|y-x||x+y|}{x^2} \leq \delta|\frac{2}{x} + \frac{\delta}{x^2}| \leq \delta(2 + \delta)$ である．したがって任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta^2 + 2\delta < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ をとれば，${}^\forall x, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ であるから A 上一様連続である．

(3)$(1 - x) + (x - y) = s, (1 - x) - (x - y) = t$ と変数変換すると，$y = 1 - s, x = (1 + y - t)/2 = 1 - (s + t)/2$ である．よってヤコビアンは $|\begin{vmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}| = 1/2$ である．積分領域は $0 \leq 1 - s \leq 1 - (s + t)/2 \leq 1$ より $0 \leq s \leq 1, -s \leq t \leq s$ である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\mathrm{Arctan} y}{\sqrt{(1-x)(x-y)}} dxdy &= \int_0^1 \int_{-s}^s \frac{\mathrm{Arctan}(1-s)}{\sqrt{s^2-t^2}} dtds = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(1-s) \left[\mathrm{Arcsin}\frac{t}{s}\right]_{-s}^s ds \\
&= \pi \int_0^1 \mathrm{Arctan}(1-s)ds = \pi \int_0^1 \mathrm{Arctan} s ds = \pi(1 \cdot \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx) \\
&= \pi(\frac{\pi}{4} + [\log|\cos x|]_0^{\pi/4}) = \pi(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2})
\end{aligned}$$

である．

$\boxed{4}$ (1)(a)Y の開集合全体を $\mathcal{O}_Y$ とし，X の開集合全体を $\mathcal{O}_X$ とする．$f \colon X \to Y$ が連続写像であるとは，${}^\forall V \in \mathcal{O}_Y, f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ であることである．

(b)$W \in \mathcal{O}_Z$ に対して $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ である．g は連続であるから $g^{-1}(W) \in \mathcal{O}_Y$ である．f は連続であるから $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{O}_X$ である．よって $g \circ f$ は連続である．

(2)(a) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフ空間であるとは，${}^\forall x, y \in X, x \neq y$ に対して開集合 $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ であることである．

(b) 任意の $y \in X \setminus \{x\}$ に対して，$U_y, V_y \in \mathcal{O}_X$ で $x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となる開集合が存在する．$\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y = X \setminus \{x\}$ は開集合であるから，$\{x\}$ は閉集合．

(3)(a)A がコンパクトであるとは，A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつことである．

(b)$A \cup B$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．S は A の開被覆でもあるから有限部分集合 $\Lambda_A \subset \Lambda$ が存在して $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_A} U_\lambda$ である．同様に B の開被覆でもあるから有限部分集合 $\Lambda_B \subset \Lambda$ が存在して $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_B} U_\lambda$ である．よって $A \cup B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_A \cup \Lambda_B} U_\lambda$ である．