## 0.1 H29 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_n|$ は $n$ に関する単調増加数列であり，$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_n| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_n$ より，有界である．よって $\sum|a_n|$ は収束する．したがって $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_n|$ はコーシー列である．

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ とすると，$n \geq m$ に対して $|S_n - S_m| = |\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_n| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n}|a_n| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$ である．よって $S_n$ はコーシー列であるから，収束列．

(2)$x \in (0,1)$ で $|f(x)| < x$ より $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ である．$x = 0$ なら $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(2^n x) = 0$ である．$0 < x < 1/2$ のとき．$2^{n_0}x \leq 1 < 2^{n_0+1}x$ となる正の整数 $n_0$ が存在する．$\sum\limits_{n=1}^{n_0}|f(2^n x)| \leq \sum\limits_{n=1}^{n_0} 2^n x = x(2^{n_0+1} - 2) \leq 2$ である．また $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}|f(2^n x)| \leq \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} 1/(2^n x) = 1/(2^{n_0}x) \leq 2$ である．よって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(2^n x)| \leq 4$ であるから $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(2^n x)$ は収束する．

(3) $\sup\limits_{x \in [0,\infty)} |\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(2^n x)| \leq 4$ である．

$\boxed{2}$ (1)$A$ は正則であるから $\det A \neq 0$ である．$\det A = \det(-{}^tA) = (-1)^n \det A$ であるから $n$ は偶数である．

(2)$\mathbb{C}^n$ における標準エルミート内積を $(x, y) = x\overline{{}^ty}$ で表す．$A$ の固有値 $\lambda$ とその固有ベクトル $v \neq 0$ をとる．$\lambda(v,v) = (Av, v) = (v, \overline{{}^tA}v) = (v, -Av) = -\overline{\lambda}(v,v)$ である．$v \neq 0$ より $(v,v) \neq 0$ であるから $\lambda = -\overline{\lambda}$ より $\lambda$ の実部は 0．よって $\lambda$ は純虚数である．

(3)$v \in W(B,\alpha)$ に対して $BAv = ABv = \alpha Av$ より $Av \in W(B,\alpha)$ である．よって $W(B,\alpha) \to W(B,\alpha); v \mapsto Av$ は $W(B,\alpha)$ 上の線形写像である．$A$ は正則であるからこの線形写像は単射．有限次元であるから全単射であるから $AW(B,\alpha) = W(B,\alpha)$ である．

(4)$i\colon W(B,\alpha) \to \mathbb{R}^n$ を包含写像とする．$g\colon W(B,\alpha) \to W(B,\alpha); v \mapsto Av$ は $W(B,\alpha)$ 上の同型写像である．$\mathbb{R}^n$ の標準内積に関する $W(B,\alpha)$ の正規直交基底 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ を一つ固定し，この基底に関する $g$ の表現行列を $G$ とする．$v \in W(B,\alpha)$ に対して $i(Gv) = Ai(v)$ である．

$x = \sum a_i v_i, y = \sum b_i v_i$ に対して $\langle x, y\rangle = \sum a_i b_i$ と定めれば $W(B,\alpha)$ の内積となり，$\langle x, y\rangle = (i(x), i(y))$ である．($\because$ 基底が正規直交基底)

よって $\langle Gx, y\rangle = (i(Gx), i(y)) = (Ai(x), i(y)) = -(i(x), Ai(y)) = -\langle x, Gy\rangle$ である．よって $G$ は正則な交代行列．したがって $k$ は偶数．$B$ が対称行列であるから，固有空間の次元は固有値の固有方程式における重複度である．したがって全ての固有値の重複度が偶数であるから，$g_B(t) = f(t)^2$ なら $f(t)$ が存在する．

$\langle x, y\rangle = (i(x), i(y))$ の証明

$v_i = \sum c_{i,j} e_j$ とする．$(i(x), i(y)) = \sum_j (\sum_i a_i c_{i,j})(\sum_k b_k c_{k,j}) = \sum_{i,j,k} a_i b_k c_{i,j} c_{k,j} = \sum_{i,k} a_i b_k (v_i, v_j) = \sum_{i,k} a_i b_k \delta_{i,k} = \sum_i a_i b_i = \langle x, y\rangle$ である．

別解

$W = W(B,\alpha)$ の基底 $\{t_1, \ldots, t_k\}$ をとり，$\mathbb{R}^{\ltimes}$ に延長して $\{t_1, \ldots, t_n\}$ を得る．シュミットの正規直交化法をつかって $\{\tilde{t_1}, \ldots, \tilde{t_n}\}$ を得る．$k$ 個目までは $W$ の元である．$g$ の $\{\tilde{t_1}, \ldots, \tilde{t_k}\}$ に関する表現行列を $G$ とする．$f$ の $\{\tilde{t_1}, \ldots, \tilde{t_n}\}$ に関する表現行列を $F$ とする．$G$ は $F$ の首座小行列である．$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{t_1} & \ldots & \tilde{t_n} \end{pmatrix}$ とすれば，$F = \tilde{T}^{-1}AT$ である．$T$ は直交行列であるから $F$ は交代行列．よって $G$ は交代行列．(1) より $k$ は偶数．

$\boxed{3}$ $X$ の開集合全体を $\mathcal{O}$ とすると，$\mathcal{O} = 2^{\mathbb{Q}} \cup \{\mathbb{R}\}$ である．実際これは位相の定義をみたす．

(1)$A \in 2^{\mathbb{Q}}$ に対して $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \in A \subset \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}$ である．また $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ であるから，$f$ は連続．

(2)$\sqrt{2}$ を含む開集合は $\mathbb{R}$ のみである．$\sqrt{3}$ についても同様．よってハウスドルフでない．

(3)$X$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{O}\}$ を任意にとる．$\sqrt{2}$ を含む開集合が $S$ に存在する．$\sqrt{2}$ を含む開集合は $\mathbb{R}$ のみであるから，$\mathbb{R} \in S$ である．よって有限部分被覆 $\{\mathbb{R}\}$ が存在するからコンパクト．

(4)$f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$ である．$\{0\}$ は $R$ では閉集合であるから，$f$ が連続なら $\mathbb{Q}$ は $X$ で閉集合である．すなわち，$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は $X$ で開集合であるがこれは矛盾．よって $f$ は連続でない．

$\boxed{4}$ (1)$1/(z^2+1)^{n+1}$ の $z = i$ まわりのローラン展開を $\sum_k a_k(z-i)^k$ とする．$1/(z+i)^{n+1} = \sum_k a_k(z-i)^{k+n+1}$ であるから，$k+n+1 < 0$ なら $a_k = 0$ である．両辺の $n$ 回微分に $i$ を代入する．左辺は $(-(n+1))(-(n+2))\dots(-(2n))(2i)^{-2n-1} = (-1)^n(2i)^{-2n-1}(2n)!/n!$ である．右辺は $a_{-1}n!$ であるから，$a_{-1} = (-1)^n(2i)^{-2n-1}(2n)!/(n!)^2$ である．これが留数．

(2)

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}}\right| = \left|\int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}}dz\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{R}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}}\right|dz \le \int_0^\pi \frac{R}{|R^2-1|^{n+1}}dz = \frac{\pi R}{|R^2-1|^{n+1}} \to 0 \quad (R \to \infty$$

(3)$\int_{-1}^1 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ は有限値をとる．$\int_1^\infty 1/(x^2+1)^{n+1}dx, \int_{-\infty}^{-1} 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ はそれぞれ収束する．よって $\int_{-\infty}^\infty 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ は収束する．$\int_{-R}^R 1/(z^2+1)^{n+1}dz = \int_{C_R} 1/(z^2+1)^{n+1}dz - \int_{\Gamma_R} 1/(z^2+1)^{n+1}dz$ である．($C_R$ は $-R$ から $R$ まで進み $G_R$ 上を反時計まわりに進む経路) 留数定理と (2) より

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = 2\pi i\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2(2i)^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\pi = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\pi$$