## 0.1　R7 数学 A

$\boxed{1}$ $^\forall x, f(x) \leq M$ より

$$\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_0^1 M^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M \therefore \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M$$

である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$A_\varepsilon = \{x \in [0,1] \mid |f(x) - M| \leq \varepsilon\}$ とする．$\mu$ をルベーグ測度とすると

$$\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{A_\varepsilon} f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{A_\varepsilon} (M-\varepsilon)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = (M-\varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \to M - \varepsilon \quad (n \to \infty)$$

である．$\varepsilon$ は任意であるから，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$ である．

$\boxed{2}$ (1)$E_{ij}$ を $i,j$ 成分が1で他が0である行列とする．このとき $\{E_{ij} \mid i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{nn} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ は $V$ の基底となる．よって $V$ の次元は $n^2 - 1$ である．

(2)$X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{tr}(XY) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n x_{ij} y_{ji} = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n y_{ji} x_{ij} = \mathrm{tr}(YX)$ である．よって $X \in V$ に対して $\mathrm{tr}\big(A^{-1}XA\big) = \mathrm{tr}\big(XAA^{-1}\big) = \mathrm{tr}(X) = 0$ である．すなわち $f_A(V) \subset V$ である．また任意の $X \in V$ に対して $f_A(AXA^{-1}) = X$ であるから，$f_A(V) = V$ である．

(3)$A$ が対角化可能であるから正則行列 $P$ と対角行列 $D$ が存在して $P^{-1}AP = D$ である．$A$ が正則であるから $D$ も正則である．すなわち $D$ の対角成分は全て非零である．$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ $(^\forall i, d_i \neq 0)$ とする．$M_n(\mathbb{C})$ の基底 $\{E_{ij} \mid i,j \in 1,2,\ldots,n\}$ に対して $\left\{PE_{ij}P^{-1} \mid i,j \in 1,2,\ldots,n\right\}$ も基底である．$P^{-1}f_A(PE_{ij}P^{-1})P = P^{-1}A^{-1}PE_{ij}P^{-1}AP = D^{-1}E_{ij}D = \frac{d_j}{d_i}E_{ij}$ である．すなわち $f(PE_{ij}P^{-1}) = \frac{d_j}{d_i}PE_{ij}P^{-1}$ である．よって固有ベクトルからなる基底が存在するから対角化可能．

$\boxed{3}$ (1) 略

(2) ハウスドルフ $A$ のコンパクト部分集合 $C$ を任意にとる．$a \in A \setminus C$ を固定する．$c \in C, a \in A$ に対して $c \in U_c, a \in V_c, U_c \cap V_c = \emptyset$ なる開集合 $U_c, V_c$ が存在する．$\{U_c \mid c \in C\}$ は $C$ の開被覆であるから，有限部分被覆 $\{U_{c_1}, U_{c_2}, \ldots, U_{c_n}\}$ が存在する．$V_a = \bigcap\limits_{i=1}^n V_{c_i}$ は開集合であり，$V_a \cap C = \emptyset$ である．$A \setminus C = \bigcup\limits_{a \in A\setminus C} V_a$ であるから $A \setminus C$ は開集合である．よって $C$ は閉集合．

(3)$K$ を $X \times Y$ のコンパクト集合とする．$\pi(K)$ はコンパクト集合であるから，$f^{-1}(\pi(K))$ はコンパクト集合．$z \in h^{-1}(K)$ に対して $(f(z), g(z)) \in K$ であるから，$f(z) \in \pi(K)$ である．よって $h^{-1}(K) \subset f^{-1}(\pi(K))$ である．また $K$ は閉集合であるから，$h^{-1}(K)$ は閉集合である．コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトであるから，$h^{-1}(K)$ はコンパクト集合．よって $h$ は固有．

$\boxed{4}$ (1)$z = -1$ が極であり，留数は $f(-1) = \exp((a-1)\log(-1)) = \exp((a-1)(0+i\pi)) = e^{i(a-1)\pi}$ である．

(2)

$$\left|\int_{C_{(r,\varepsilon)}} f(z)dz\right| = \left|\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{\exp\big((a-1)\log re^{i\theta}\big)}{re^{i\theta}+1} ire^{i\theta} d\theta\right| \leq \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left|\frac{r^{a-1}}{re^{i\theta}+1} r\right| d\theta \leq \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{r^a}{|r-1|} d\theta \leq 2\pi \frac{r^a}{|r-1|} \to 0 \quad (r \to 0)$$

(3)$R > r$ として $re^{i\varepsilon}$ から $Re^{i\varepsilon}$ までの経路を $S_{(r,R)}$ とし，$Re^{i(2\pi-\varepsilon)}$ から $re^{i(2\pi-\varepsilon)}$ までの経路を $T_{(r,R)}$ とする．積分経路 $C$ を $C = S_{(r,R)} + C_{(R,\varepsilon)} + T_{(r,R)} - C_{(r,\varepsilon)}$ とすれば，留数定理から $\int_C f(z)dz = 2\pi i e^{i(a-1)\pi}$ である．また (2) の不等式から $\lim\limits_{R\to\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{(R,\varepsilon)}} f(z)dz = 0$ である．

$$\int_{S_{(r,R)}} f(z)dz = \int_r^R \frac{\exp\big((a-1)\log xe^{i\varepsilon}\big)}{xe^{i\varepsilon}+1} e^{i\varepsilon} dx = \int_r^R \frac{x^{a-1}e^{ia\varepsilon}}{xe^{i\varepsilon}+1} dx$$

$\left|\frac{x^{a-1}e^{ia\varepsilon}}{xe^{i\varepsilon}+1}\right| \leq \frac{x^{a-1}}{|x-1|}$ である．右辺は $[r,R]$ で可積分であるからルベーグの収束定理より $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{(r,R)}} f(z)dz = \int_r^R \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{a-1}e^{i(a-1)\varepsilon}}{xe^{i\varepsilon}+1}dx = \int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1}dx$ である．同様に $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{T_{(r,R)}} f(z)dz = \int_R^r \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{a-1}e^{ia(2\pi-\varepsilon)}}{xe^{i(2\pi-\varepsilon)}+1}dx = -e^{2\pi a}\int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1}dx$ である．よって

$$2\pi i e^{i(a-1)\pi} = \int_{S_{(r,R)}} f(z)dz + \int_{T_{(r,R)}} f(z)dz + \int_{C_{(r,\varepsilon)}} f(z)dz + \int_{C_{(R,\varepsilon)}} f(z)dz \to (1-e^{2i\pi a})\int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1}dx$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}dx = \frac{2\pi i e^{i(a-1)\pi}}{1-e^{2i\pi a}} = 2\pi i\frac{1}{e^{i\pi a}-e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$