目次

0.1 H15 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\{f(x) \mid x \in X\}$ が下に有界でないとする．すなわち任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) \leq -n$ なる $x \in X$ が存在する．これを x_n とおく．X は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合であるから有界閉集合である．よって X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$ となりこれは矛盾．よって下に有界．

(2) 下に有界であるから $\inf\{f(x) \mid x \in X\} = M \in \mathbb{R}$ である．M が下限であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x_n) \leq M + \frac{1}{m}$ なる x_n が存在する．数列 $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$M \leq f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty}(M + \frac{1}{n_k}) = M$ となり $f(\alpha) = M$．よって f は最小値をもつ．

$\boxed{2}$ (1)$g(0) = 1$ であり g は連続関数であるから 0 を含むある開区間 I で $g(x) > 0$ となる．I 上で $h(x) = \sqrt[m]{g(x)}$ とする．I 上で h は C^1 級であり $h(x)^m = g(x), h(x) > 0$ である．

(2)$f(\varphi(y)) = \varphi(y)^m g(\varphi(y)) = \varphi(y)^m h(\varphi(y))^m = y^m$ をみたす $\varphi(y)$ を求める．$\varphi(y)h(\varphi(y)) = y$ をみたす $\varphi(y)$ を求めればよい．$F(x,y) = xh(x) - y$ とおく．$\partial F/\partial x(0,0) = h(0) + 0\varphi'(0) > 0$ である．陰関数定理から $F(x,y) = 0$ をみたす C^1 級関数 $x = \varphi(y)$ が 0 の近傍で存在する．

$\boxed{3}$ (1)$T_A(cX+Y) =^t (cX+Y)A + A(cX+Y) = c^tXA + cAX +^t YA + AY = cT_A(X) + T_A(Y)$ である．

よって線形.

(2)${}^t({}^tXA+AX)=AX+{}^tXA$ より $\mathrm{Im}T_A\subset S$ である．$Y\in S$ に対して $X=A^{-1}Y/2$ とすると，${}^tXA+AX={}^t(AX)+AX={}^t(Y/2)+(Y/2)=Y$ となる．よって $S\subset\mathrm{Im}T_A$ である．

(3)${}^t(AX)+AX=O$ より AX が交代行列となる X を考える．よって $X_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ とする．AX_1,AX_2,AX_3 は交代行列である．よって X_1,X_2,X_3 は $\ker T_A$ の基底となる．

$\boxed{4}$ (1)$AB=BA$ のとき．$v\in V_j$ に対して $ABv=BAv=B\alpha_jv=\alpha_jBv$ より，$Bv\in V_j$ である．

$BV_j\subset V_j\quad(j=1,\dots,k)$ のとき．A がエルミート行列であるから，$\mathbb{C}^n$ を固有空間の直和に分解できる．したがって $\{v_1,\dots,v_n\}$ をそれぞれが A の固有ベクトルであるような基底とできる．$v_i\in V_{s_i}$ とする．$u\in\mathbb{C}^n$ に対して $u=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$ とできる．$ABu=A(a_1Bv_1+\dots a_nBv_n)=a_1\alpha_{s_1}Bv_1+\cdots+a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．また $BAu=B(a_1\alpha_{s_1}v_1+\dots a_n\alpha_{s_n}v_n)=a_1\alpha_{s_1}Bv_1+\cdots+a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．よって $ABu=BAu$ である．すなわち $AB=BA$

(2)$v\in V_j$ に対して $A^mv_j=\alpha_j^mv_j$ である．A^m の固有値 α_j^m の固有空間を W_j とすると，$W_j\supset V_j$ である．A はエルミート行列であるから固有値は実数である．したがって異なる固有値 α_i,α_j にたいして $\alpha_i^m=\alpha_j^m$ となるには m が偶数であることが必要．今 m は奇数であるから $\alpha_i^m\neq\alpha_j^m$ である．したがって $i\neq j$ なら $W_i\neq W_j$ である．よって $W_j=V_j$ である．A^m はエルミート行列であり $A^mC=CA^m$ であるから (1) より $CW_j\subset W_j$ である．よって $CV_j\subset V_j$ であるから $AC=CA$ である．

0.2 H16 数学 A

$\boxed{1}$ λ,μ の固有空間をそれぞれ V_λ,V_μ とする．対角化可能であるから $V=V_\lambda\oplus V_\mu$ である．$W_\lambda=W\cap V_\lambda,W_\mu=W\cap V_\mu$ とする．$W_\lambda\cap W_\mu=W\cap V_\lambda\cap V_\mu=\{0\}$ である．また $w\in W$ に対して $w=w_\lambda+w_\mu$ となる $w_\lambda\in V_\lambda,w_\mu\in V_\mu$ が一意的に存在する．$W\ni f(w)-\mu w=(\lambda-\mu)w_\lambda$ より $w_\lambda\in W_\lambda$ である．同様に $w_\mu\in W_\mu$ である．よって $W=W_\lambda\oplus W_\mu$ である．W を f の固有空間の直和に分解できたから $f|_W$ は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)X のコンパクト集合 C をとる．$x\in X\setminus C$ を一つ固定する．各 $y\in C$ に対して $x\in U_y,y\in V_y,U_y\cap V_y=\emptyset$ となる開集合 U_y,V_y が存在する．$\{V_y\mid y\in C\}$ は C の開被覆であるから有限部分集合 $C'\subset C$ が存在して $C\subset\bigcup_{y\in C'}V_y$ となる．$U=\bigcap_{y\in C'}U_y$ とする．U は x の開近傍であり $U\subset X\setminus C$ であるから x は C の外点．任意の x でなりたつから C は閉集合である．

(2)$A\cap B$ の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を任意にとる．$S\cup\{X\setminus A\}$ は B の開被覆である．したがって有限部分集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ が存在して $B\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda\cup(X\setminus A)$ となる．$A\cap B\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda$ である．したがって $A\cap B$ はコンパクト集合である．

$\boxed{3}$ (1)$G(x)=\int_0^xf(x,y)dy$ とする．

$$\begin{aligned}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}&=\int_0^{x+h}\frac{f(x+h,y)}{h}dy-\int_0^x\frac{f(x,y)}{h}dy=\int_x^{x+h}\frac{f(x,y)}{h}dy+\int_0^{x+h}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy\\&=\int_0^h\frac{f(x,y+x)}{h}dy+\int_0^x\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy+\int_x^{x+h}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy\end{aligned}$$

である．第一項は $\lim_{h\to0}\int_0^h\frac{f(x,y+x)}{h}dy=\frac{\partial}{\partial h}\int_0^hf(x,y+x)dy=f(x,x)$ である．

第二項は $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)$ となる $\theta \in (0,1)$ が存在して $\int_0^x \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy \leq \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)dy \leq \infty$ であるから優収束定理より $\lim_{h\to 0}\int_0^x \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．

第三項はある 0 の近傍で $\left|\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right| \leq M$ であるから $\lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy \leq \lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} Mdy = 0$ である．よって $G'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．

したがって $F'(x) = f(x,x) - f(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．さらに $F''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dy = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dy$ である．

$\boxed{4}$ 広義積分が収束することを示す．被積分関数の実部は $u(x) = \frac{x\cos x - \varepsilon \sin x}{x^2+\varepsilon^2}$ で虚部は $v(x) = \frac{x\sin x + \varepsilon\cos x}{x^2+\varepsilon^2}$ である．共に原点近傍で有界である．

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{-M} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx\right| = \left|\int_1^M \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx\right| &= \left|\left[\frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\right]_1^M - \int_1^M \sin x\left(\frac{1}{x^2+\varepsilon^2} - \frac{2x^2}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\right)dx\right| \\ &\leq \left|\frac{M\sin M}{M^2+\varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1+\varepsilon^2}\right| + \int_1^M \left|\frac{(-x^2+\varepsilon^2)\sin x}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\right|dx \leq \left|\frac{M\sin M}{M^2+\varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1+\varepsilon^2}\right| + \int_1^M \left|\frac{(x^2+\varepsilon^2)\sin x}{x^4}\right|dx\end{aligned}$$

よって $\int_1^\infty \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx, \int_{-\infty}^{-1} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx$ は収束する．から $u(x)$ の広義積分は収束する．同様に $v(x)$ の広義積分も収束する．したがって $u(x)+iv(x)$ の広義積分は収束する．

$f(z) = e^{iz}/(z-i\varepsilon)$ とすれば，f は $z \neq i\varepsilon$ で正則である．積分経路 C を原点中心の半径 $R > 2\varepsilon$ の上半平面の半円板の周とする．C_1 を実軸上の $-R$ から R までの部分，C_2 を半円とする．f の C での積分は留数定理から $\int_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i\varepsilon) = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ である．C_2 での積分は $z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると，

$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}}{Re^{i\theta}-i\varepsilon}\right|d\theta \leq \int_0^\pi \frac{Re^{-R\sin\theta}}{R-\varepsilon}d\theta \leq \frac{\pi R}{R-\varepsilon}e^{-R} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．したがって $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ より $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = e^{-\varepsilon}$ である．

0.3 H17 数学 A

$\boxed{1}$ (1)AB が正則であるから $f\circ g$ は同型である．よって f は全射，g は単射である．$\dim \mathrm{C}^n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{C}^m$ より $\dim \mathrm{Ker}\, f = n - m$ である．g は単射であるから $\dim \mathrm{Ker}\, g = 0$

(2)$ABv = \lambda v, v \neq 0$ とする．このとき $BABv = B\lambda v = \lambda Bv, Bv \neq 0$ であるから AB の固有値 λ は BA の固有値でもある．

$BAv = \lambda v, v\neq 0$ とする．$ABAv = \lambda Av$ であるから，$Av \neq 0$ なら λ は AB の固有値である．$Av = 0$ なら $BAv = 0 = \lambda v$ より $\lambda = 0$．すなわち BA の零でない固有値は AB の固有値でもあるから BA の固有値は $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ である．

(3)C^m における AB の固有値 λ_i の固有空間を $W(\lambda_i)$ とする．対角化可能であるから $\sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = m$ である．C^n における BA の固有値 λ_i の固有空間を $V(\lambda_i)$ とする．$g(W(\lambda_i)) \subset V(\lambda_i)$ であり g は単射であるから $\dim W(\lambda_i) \leq \dim V(\lambda_i)$ である．また $V(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(g\circ f)$ より $\dim V(\lambda_0) \geq n-m$ である．よって $\sum_{i=0}^k \dim V(\lambda_i) \geq n - m + \sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = n$ である．よって BA は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)f を商写像とする．$f^{-1}(B)$ を閉集合とする．$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X\setminus B)$ は開集合であるから $X\setminus B$ は開集合である．よって B は閉集合.

$f^{-1}(B)$ を開集合とする．$X\setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X\setminus B)$ は閉集合であるから $X\setminus B$ は閉集合である．よって B は開集合.

(2)$B \subset Y$ について $f^{-1}(B)$ が閉集合だとする．コンパクト空間の閉集合はコンパクトであるから $f^{-1}(B)$ はコンパクトである．f は全射連続写像であるから $f(f^{-1}(B)) = B$ はコンパクトである．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから B は閉集合である．よって f は商写像.

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x > 0$ について $x/N < 1$ なる N が存在する．$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (|x| < 1)$ であるから $n \geq N$ のとき $\log(1+x/n) = (x/n) - \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3)$ である．したがって $\sum_{n=N}^{\infty} x/n - \log(1+x/n) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3) < \infty$ である．よって収束する．

(2)$I = (1/2, 2)$ とする．$x \in I$ に対して $(x/n - \log(1+x/n))' = 1/n - \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n(2n+1)}$ である．よって $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \log(1+1/n)$ は一様収束する．したがって $(\sum_{n=1}^{\infty} x/n - \log(1+x/n))'|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \frac{1}{n+1} = 1$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ であるから $\frac{2z}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1}$ である．

(2) 整級数であるから項別積分ができて $|z| < 1$ で $f(z) = \log\left(1+z^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+2}/(2n+2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k}/k$ である．よって $f(z)/z^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k-n}/k$ でありこのローラン級数の z^{-1} の係数は n が偶数か 1 のとき 0，それ以外のとき $(-1)^{\ell-1}/\ell \quad (n = 2\ell+1)$ である．留数定理から $\int_C \frac{f(z)}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i(-1)^{\ell-1}/\ell & (n = 2\ell+1) \\ 0 & (n \neq 2\ell+1) \end{cases}$ である．

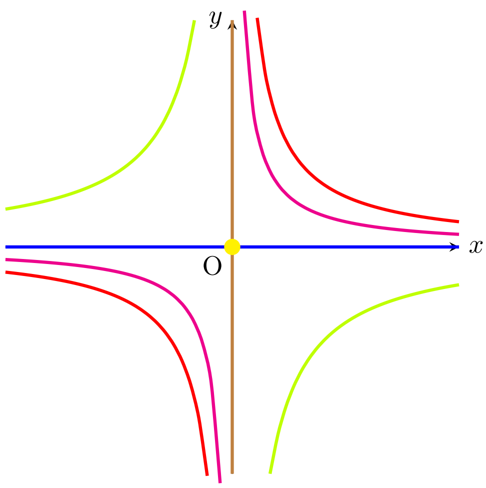
0.4 H18 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\dim V = k \leq n-1$ として V の直交補空間 $V^{\perp}$ をとると，$V \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^n$ より $\dim V^{\perp} = n-k \geq 1$ である．$0 \neq (a_1, \ldots, a_n)^{\top} \in V^{\perp}$ をとると，$F(x_1, \ldots, x_n)$ は $(a_1, \ldots, a_n)^{\top}$ と $(x_1, \ldots, x_n)$ の内積だから V 上で F は 0.

(2)V と b で生成されるベクトル空間を V' とおけば $\dim V' \leq n-1$ であり，$V_b \subset V'$ である．(1) より V' 上で 0 となる F が存在し，F は V_b 上 0 である．

$\boxed{2}$

(1) 点 (x,y) の属す同値類を $[(x,y)]$ と表す．$x = y = 0$ なら (x,y) の同値類は $\{(0,0)\}$ である．$x = 0, y \neq 0$ のとき $(0,y) \sim (0,ty) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$y = 0, x \neq 0$ のとき $(x,0) \sim (tx,0) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$x \neq 0 \neq y$ のとき $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow xy = x'y'$ である．したがって同値類は右のようになる．(異なる色は異なる同値類)



$x \neq 0 \neq y$ なる (x,y) が含まれる同値類は $g(x,y) = xy$ の逆像 $g^{-1}(xy)$ であるから閉集合．また $\{(0,0)\}$ も閉集合である．$[(0, y \neq 0)]$ は $(0,0)$ が集積点であるが同値類に含まれないから閉集合ではない．同様に $[(0 \neq x, 0)]$ も閉集合ではない．

(2)$(0,0)$ を含む R^2 の開集合 $\pi^{-1}(U)$ に対してある $\varepsilon_U > 0$ が存在して $B((0,0), \varepsilon_U) \subset \pi^{-1}(U)$ となる．したがって $(x,0) \in \pi^{-1}(U) \quad (x \neq 0)$ である．すなわち $[(0 \neq x, 0)] \in U$ である．したがって $[(0 \neq x, 0)]$ と $[(0,0)]$ を分離する開集合は存在しないからハウスドルフでない．

(3)$i \leq j$ のとき同値類 $[(1,1)]$ 上で $x^i y^j = y^{j-i}$ となるから定数となるには $i = j$ が必要．逆に $f(x,y) = \sum a_i (xy)^i$ とするとこれは全ての同値類の上で定数である．

(4)$D = [(x,y)] \quad (x \neq 0 \neq y)$ のとき，$D \neq D' = [(x',y')]$ に対して $xy \neq x'y'$ である．したがって $h(x,y) = xy \in E$ に対して $h(D) \neq h(D')$ となる．したがって $(*)$ を満たす D, D' は共に $[(0,0)], [(0,1)], [(1,0)]$ の何れか．$f(x,y) = \sum a_i (xy)^i$ について $f([(0,0)]) = a_0, f([(0,1)]) = a_0, f([(1,0)]) = a_0$ であるから求める対は $([(0,0)], [(0,1)]), ([(0,0)], [(1,0)]), ([(0,1)], [(1,0)])$ 及びこれらの順序を入れ替えたものである．

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから $Ax + b = \begin{pmatrix} -x+y+b \\ x-y+c \end{pmatrix}$ である．よって $\langle Ax+b, x\rangle = -(x-y)^2 + bx + cy$ である．

$x+y=s, x-y=t$ と変数変換すると $\langle Ax+b,x\rangle = -t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}$ で，ヤコビアンは $-1/2$ である．よって

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \exp\left(-t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}\right)\frac{1}{2}dsdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t-\frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b-c}{4})^2\right)dt \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{b+c}{2}s\right)ds
\end{aligned}
$$

である．$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\bigl(-(t-\frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b-c}{4})^2\bigr)dt$ は有限である．また $b+c<0$ なら $\int_0^{\infty}\exp\bigl(\frac{b+c}{2}s\bigr)ds$ も有限であり，$b+c \geq 0$ なら発散する．

$\boxed{4}$ $f(z)$ の 0 におけるローラン級数は 0 が極であることから正の整数 k を用いて $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ とかける．$z^k f(z)$ は $|z|<2$ で正則であり $\lim_{z\to 0} z^k f(z) = a_{-k} \neq 0$ である．したがってある $\delta > 0$ が存在して $|z| < \delta$ で $|z^k f(z)| > |a_{-k}|/2$ である．したがって

$$
\iint_{\varepsilon<|z|<\delta} \frac{|a_{-k}|}{2|z|^k} dxdy \leq \iint_{\varepsilon<|z|<\delta} |f(z)| dxdy < \infty
$$

である．$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換すると $\int_\varepsilon^\delta \int_0^{2\pi} \frac{|a_{-k}|}{2r^k} r dr d\theta = |a_{-k}|\pi \int_\varepsilon^\delta |r^{1-k}| dr < \infty$ である．$1-k \leq -1$ なら発散するから $k<2$ である．よって $k=1$ より一位の極．

0.5 H19 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(y)-f(x)| = |\int_x^y f'(t)dt| \leq \int_x^y |f'(t)|dt$

(2)(i)$c>1$ より $|f(y)-f(x)| \leq \int_x^y At^{-c}dt = \frac{A}{-c+1}(y^{-c+1} - x^{-c+1}) < \frac{A}{c-1}x^{1-c} \to 0 \quad (x \to \infty)$ である．$x_n = f(n)$ とすれば $|x_n - x_m| \leq \frac{A}{1-c}m^{1-c} \to 0 \quad (m\to\infty)$ である．したがって数列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ はコーシー列であるから，収束列でその収束先を α とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $M > 0$ が存在して $x > M$ なら $|f(x) - f([x]+1)| < \varepsilon$ である．ここで $[x]$ は x 以下の最大の整数．またある整数 N が存在して $n > N$ なら $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ である．したがって $x > N+M$ なら $|f(x)-\alpha| \leq |f(x) - f([x]+1)| + |f([x]+1) - \alpha| < 2\varepsilon$ となるから収束する．

(ii)$|f(x)-\alpha| = \lim\limits_{y\to\infty} |f(y)-f(x)| \leq \lim\limits_{y\to\infty} \frac{A}{c-1}x^{1-c} = \frac{A}{c-1}x^{1-c}$

$\boxed{2}$ $v \in \ker AC_1$ に対して $Cv \in \ker A$ であり C_1 が正則であるから $C_1\colon \ker AC_1 \to \ker A$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1 = \dim\ker A$ である．$v \in \ker AC_1$ に対して $B_1 v \in \ker B_1 AC$ である．B_1 が正則であるから $B_1\colon \ker AC_1 \to \ker B_1AC$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1 = \dim\ker B_1AC_1$ である．以上より $\dim\ker A = \dim\ker B_1AC_1 = m - r$ である．同様に $\dim\ker A = \dim\ker B_2AC_2 = m-s$ であるから $r=s$.

$\boxed{3}$ $f(x,y_0) \neq 0$ より $f(x,y_0) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ であるから，$(x,y_0) \in f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は開集合であるから，$f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ は開集合である．したがってある $X\times Y$ の開集合 $V_x \times U_x$ が存在して $(x,y_0) \in V_x \times U_x \subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\bigcup\limits_{x\in X} V_x$ は X の開被覆であるから，有限部分被覆 $\{V_{x_1}, \cdots, V_{x_n}\}$ が存在する．$U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$ とすれば $X \times U \subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．

$\boxed{4}$ $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}$ とすれば $f(z)$ は $z \neq 0$ で正則であり，$z=0$ で極である．$z=0$ での f のローラン級数は

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-z)^n)/z^4 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!} - (-1)^n\frac{1}{n!})z^{n-4}
\end{aligned}
$$

である．z^{-1} の係数は $1/3$ である．

$r<1$ なら内部に特異点を持たないから $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0$ である．$r>1$ なら $z=0$ が特異点となるから留数定理より $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i/3$ である．

0.6　H20 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f_x(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})(-\sin\frac{\pi}{3}) + f_y(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\end{aligned}$$

(2)F は $[0,4\pi]$ 上で連続である．よって $\theta\in[0,4\pi]$ に対して $|F(\theta)|<M$ となる $M>0$ が存在する．$\tau\in\mathbb{R}$ に対して $t=2n\pi+\theta$ をみたす，$n\in\mathbb{Z},\theta\in[0,2\pi)$ が存在する．$F(\tau)=F(\theta)$ であるから $|F(\tau)|<M$ である．したがって有界．また F は $[0,4\pi]$ 上で連続であるから一様連続である．すなわち $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して任意の $\theta,\tau\in[0,4\pi]$ に対して $|\theta-\tau|<\delta$ なら $|F(\theta)-F(\tau)|<\varepsilon$ である．

よって $s\geq t\in\mathbb{R}$ に対して，$s=2n\pi+p$ をみたす $p\in[0,2\pi)$ が存在する．$|s-t|<\delta$ なら $|F(s)-F(t)|=|F(p)-F(p+s-t)|<\varepsilon$ であるから一様連続である．

$\boxed{2}$ (1)$\varphi_A\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m; x\mapsto Ax$ で定める．A の階数が m であるから $\dim\varphi_A=m=\dim\mathbb{C}^m$．したがって φ_A は全射である．よって任意の $c\in\mathbb{C}^m$ に対して $\varphi_A(x)=Ax=c$ となる $x\in\mathbb{C}^n$ が存在する．

(2)φ_B が単射なら $\operatorname{rank}\varphi_B=m$ である．よって $\operatorname{rank}B^T=m$ であるから φ_{B^T} は全射である．

(3)$B^TQ^T=P^t$ なる Q^T の存在を示す．P^T の列ベクトル p_i ごとに $q_i\in\mathbb{C}^n$ が存在して $B^Tq_i=p_i$ である．よって $Q^T=(q_1,\cdots,q_m)$ とすれば $B^TQ^T=P^T$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x,0),(x,1)\in Y$ について $(x,1)$ が属す Y の開集合 U をとる．U は開基の和集合でかけるから，ある $W\subset U, W\in\mathcal{B}$ が存在して $(x,1)\in W$．すなわちある $V\in\mathcal{O}$ が存在して $W=V\times\{0,1\}$ である．よって $(x,0)\in W\subset U$ であるから，ハウスドルフでない．

(2)$X\times\{0\}$ の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を任意にとる．任意の $x\in X$ についてある λ_x が存在して $x\in U_{\lambda_x}$ である．各 U_{λ_x} についてある開集合 $V_{\lambda_x}\in\mathcal{O}$ が存在して $x\in V_{\lambda_x}\times\{0\}\subset U_{\lambda_x}$ である．したがって $X\subset\bigcup_{x\in X}V_{\lambda_x}$ である．X はコンパクトであるから有限部分被覆 $\{V_{\lambda_{x_1}},\cdots,V_{\lambda_{x_n}}\}$ が存在する．$X\subset\bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_{x_i}}$ であるから $X\times\{0\}\subset\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_{x_i}}$ である．したがって $X\times\{0\}$ はコンパクトである．(1) で示したように $(x,1)\in Y\setminus(X\times\{0\})$ を含む開集合 U は $U\cap(X\times\{0\})\neq\emptyset$ である．したがって $X\times\{1\}$ は開集合でない．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{1}{1-z^3}=1+z^3+z^6+\cdots\quad(|z|<1)$ であるから，$\varphi(z)=\frac{z^p}{1-z^3}=\sum_{n=0}^\infty z^{3n+p}$ である．収束半径は 1 である．

(2)φ の特異点は $1,e^{2\pi i/3},e^{4\pi i/3}$ で，それ以外の点で正則である．したがって $R<1$ なら $\int_C\varphi(z)dz=0$ である．

特異点での留数を計算する．$\lim_{z\to1}(z-1)\varphi(z)=\frac{1}{3}$, $\lim_{z\to e^{2\pi i/3}}(z-e^{2\pi i/3})\varphi(z)=\frac{e^{2(p+1)\pi i/3}}{3}$, $\lim_{z\to e^{4\pi i/3}}(z-e^{4\pi i/3})\varphi(z)=\frac{e^{4(p+1)\pi i/3}}{3}$ である．よって留数定理から $\int_C\varphi(z)dz=\frac{2\pi i}{3}(1+e^{2(p+1)\pi i/3}+e^{4(p+1)\pi i/3})$ である．

0.7　H21 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=f'(0)$$

であるから $-f'(0)/2>0$ に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $nf(\frac{1}{n})<f'(0)+(-f'(0)/2)=f'(0)/2$ である．

(2)$\pi>x>0$ で $\frac{1}{1+x}<1$ より $\log(1+x)=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt<\int_0^1 1dt=t$ である．したがって $\log(1+x)<x$ である．またテイラーの定理から $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+R(x)$ である．$R(x)=\frac{(\cos^{(5)}s)}{5!}x^5\quad(0<s<x<\pi)$ である．$(\cos^{(5)}s)=-\sin s<0$ であるから $R(x)<0$ である．したがって $\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ である．

以上より

$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\leq\log\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}\right)\leq-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}<-\frac{1}{n}$$

であるから発散する．

$\boxed{2}$ (1) 略

(2)$\sigma(u)=u-2\frac{(u,u)}{(u,u)}u=-u$ より -1 は固有値である．$\sigma(x)=-x$ とすると，$x-2\frac{(x,u)}{(u,u)}u=-x$ であるから $x=\frac{(x,u)}{(u,u)}u$ である．すなわち $x\in\mathrm{spam(u)}$ である．よって $W(-1)=\mathrm{spam(u)}$ である．

(3)$\sigma\circ f(u)=f\circ\sigma(u)=f(-u)=-f(u)$ であるから $f(u)\in W(-1)=\mathrm{spam(u)}$ である．したがって u は f の固有ベクトルである．

(4)$\sigma(e_1)=e_1-2\frac{(e_1,u)}{(u,u)}u=e_1-\frac{2}{3}u=\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_3-\frac{2}{3}e_4,\sigma(e_2)=e_2,\sigma(e_3)=e_3+\frac{2}{3}u=\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}e_3+\frac{2}{3}e_4,\sigma(e_4)=e_4-\frac{2}{3}u=-\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_3+\frac{1}{3}e_4$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&1&0&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1) ハウスドルフ空間 $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト部分集合 C をとる．$y\in X\setminus C$ と $x\in C$ について $x\in U_x,y\in V_x,U_x\cap V_x=\emptyset$ となる開集合 $U_x,V_x\in\mathcal{O}$ が存在する．$\bigcup_{x\in C}U_x\supset C$ より有限部分集合 $X'\subset X$ が存在して $\bigcup_{x\in X'}U_x\supset C$ である．$V=\bigcap_{x\in X'}V_x$ とすれば V は y の開近傍で $V\cap C=\emptyset$ である．したがって $X\setminus C$ は開集合である．

(2)$f\colon X\times Y\to\mathbb{R};(x,y)\mapsto x-y$ とすると f は連続である．よって $f^{-1}(0)=F$ は閉集合である．$g\colon F\to\mathbb{R};(x,x)\mapsto x$ とすると g は連続である．$\sup g(x)=1$ より g は最大値をもたない．したがって F はコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$zx+iy$ とする．$e^z=-e^{-z}$ より $e^x=|e^z|=|-e^{-z}|=e^{-x}$ であるから $x=-x$ である．したがって $x=0$ である．$e^{iy}=-e^{-iy}$ より $\cos y=-\cos y$ である．よって $y=\frac{i\pi}{2}+n\pi\quad(n\in\mathbb{Z})$ である．

(2)$|e^{-iz}|=|e^{s-i\pm R}|=e^s\leq e^{\pi}$ である．$z=R+is$ のとき $|e^z+e^{-z}|\geq|e^z|-|e^{-z}|=e^R-e^{-R}$ であり，$z=-R+is$ のとき $|e^z+e^{-z}|\geq|e^{-z}|-|e^z|=e^R-e^{-R}$ である．よって $\sup_{z\in\Gamma_R}|e^{-iz}/(e^z+e^{-z})|\leq\frac{e^{\pi}}{e^R-e^{-R}}$ である．

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\right|dx\leq\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{e^{-x}}dx+\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x}dx<\infty$$

よって被積分関数は $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分であり, 連続であるから広義積分は収束する．$f(z)=e^{-iz}/(e^z+e^{-z})$ とする．(1) で求めた点以外で f は正則である．したがって積分経路 C を 4 点 $-R,R,R+i\pi,-R+i\pi$ を結んでできる長方形を反時計回りに進むとすると，留数定理から $\int_C f(z)dz=2\pi i(\mathrm{Res}(f,i\pi/2))$ である．$\lim_{z\to i\pi/2}\frac{z-1\pi/2}{e^z+e^{-z}}=\lim_{z\to i\pi/2}\frac{1}{e^z-e^{-z}}=\frac{1}{2i}$ であるから $\int_C f(z)dz=\pi e^{\pi/2}$ である．

また

$$\int_{R+i\pi}^{-R+i\pi} f(z)dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{-i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi}+e^{-x-i\pi}}dx = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\pi}e^{-ix}}{e^{x}+e^{-x}}dx$$
$$\left|\int_{R}^{R+i\pi} f(z)dz\right| \le \int_{R}^{R+i\pi} \left|\frac{e^{-iz}}{e^{z}+e^{-z}}\right| dz \le \pi e^{\pi}/(e^{R}-e^{-R}) \to 0 \quad (R\to\infty)$$
$$\left|\int_{-R+i\pi}^{-R} f(z)dz\right| \le \int_{-R+i\pi}^{-R} \left|\frac{e^{-iz}}{e^{z}+e^{-z}}\right| dz \le \pi e^{\pi}/(e^{R}-e^{-R}) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．よって $\pi e^{\pi/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x/(e^x+e^{-x})dx + e^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}/(e^x+e^{-x})dx$ である．よって $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x/(e^x+e^{-x})dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}$ である．

0.8 H22 数学 A

(1)f は一様連続であるから任意の ε に対して $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ なら $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ である．また $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束するから $\delta(\varepsilon)$ に対して，$N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $|g_n(x)-g(x)|<\delta(\varepsilon)$ である．

以上より，$n>N$ なら $|f(g_n(x))-f(g(x))|<\varepsilon$ である．したがって $f\circ g_n$ は $f\circ g$ に一様収束する．

(2)$h_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ とする．$|h_n(x)-h(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \quad (n\to\infty)$ である．したがって一様収束．

また $\sin x$ は一様連続である．これは平均値の定理から $\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi \le |(x-y)| \quad (\xi\in(x,y))$ より明らか．(1) より $\alpha_n(x) = \sin(h_n(x))$ は $\sin(h(x))$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (1)$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ を任意にとる．$X = X^T$ であるから $b=c$ である．したがって $X = aE_1+bE_2+cE_3$ と表せる．また $c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3 = O$ とすれば $c_1=c_2=c_3=0$ は一次独立．したがって V は $\{E_1,E_2,E_3\}$ を基底とする．

(2)$(A^TXA)^T = A^TX(A^T)^T = A^TXA$ であるから $f_A(X)\in V$ である．$f_A(cX+Y) = A^T(cX+Y)A = cA^TXA + A^TYA = cf_A(X)+f_A(Y)$ であるから線形写像である．

(3)$f_A(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} = E_1+aE_2+a^2E_3, f_A(E_2) = \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ a^2+1 & 2a \end{pmatrix} = 2aE_1+(a^2+1)E_2+2aE_3, f_A(E_3) = \begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = a^2E_1+aE_2+E_3$ である．よって f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ a & a^2+1 & a \\ a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ である．

(4)f_A の表現行列を $G(a)$ とする．$\det G(a) = \begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & -a^2+1 & a-a^3 \\ 0 & -a^3+a & 1-a^2 \end{vmatrix} = -(1-a^2)^2-(a-a^3)^2 = -(a^2+1)(1-a^2)^2$ である．

したがって $a\neq\pm1$ のとき $\det G(a)\neq 0$ であるから $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は $\{f_A(E_1), f_A(E_2), f_A(E_3)\}$ である．

$a=1$ のとき $G(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$a=-1$ のとき $G(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$S = \{(-\infty,n)\cup\{p_1\} \mid n\in\mathbb{N}\}$ とする．S は X_1 の開被覆である．有限部分被覆を持たないからコン

パクトでない．

(2) ユークリッド位相の入った位相空間 $\mathbb{R}$ を E で表す．E の開集合は X_2 の開集合であることを示す．E の開基として $\{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \mid x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ がとれる．$\frac{1}{n_1} \leq \varepsilon < \frac{1}{n_1+1}$ として n_1 を定める．n_i を $\frac{1}{n_i} \leq \varepsilon - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} < \frac{1}{n_i}$ として定める．ただし $\varepsilon - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} = 0$ のとき n_i は定めない．n_i が定義される i を集めてできる $A \subset \mathbb{N}$ を定める． このとき数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\max A}$ を得る．$\bigcup_{i=1}^{\max A}(x_0 - \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n_j}, x_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}) \cup (x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_i}, x_0 - \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ である．よって E の開集合は X_2 の開集合である．

$\varphi\colon X_2 \to [0,1]$ を $\varphi(p_1)=0, \varphi(p_2)=1, \varphi(x) = (\arctan x + \pi/2)/\pi \quad (x \in \mathbb{R})$ とする．$\varphi|_{\mathbb{R}}\colon E \to (0,1)$ は同相写像であるから φ は全単射．$(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ は E の開集合であるから $\varphi((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}))$ は $[0,1]$ の開集合である．$\varphi((-\infty, n) \cup \{p_1\}) = (0, \varphi(n)) \cup \{0\} = (-1, \varphi(n)) \cap [0,1]$ は開集合である．よって φ^{-1} は連続．$[0,1]$ の開集合 U について $U \subset (0,1)$ なら $\varphi^{-1}(U)$ は E の開集合．すなわち X_2 の開集合．$0 \in U, 1 \notin U$ ならある $\varepsilon > 0$ が存在して $U = [0,\varepsilon) \cup U \setminus \{0\}$ である．$\varphi^{-1}(U \setminus \{0\})$ は X_2 の開集合である．$\varphi^{-1}([0,\varepsilon)) = (-\infty, \varphi^{-1}(\varepsilon)) \cup \{p_1\}$ は X_2 の開集合である．よって $\varphi^{-1}(U)$ は X_2 の開集合．$0 \notin U, 1 \in U$ のとき,$0,1 \in U$ のときも同様．よって φ は連続．すなわち φ は同相.

(3)p_1 が属す開基は $\{(-\infty,n) \cup \{p_1\}\} \quad (n \in \mathbb{Z})$ である．任意の $m \in \mathbb{Z}$ について $\{(-\infty,m)\} \cup \{p_3\}$ も開基であるからそれぞれを含む任意の開基は共通部分をもつ．したがってハウスドルフ空間でない.

$\boxed{4}$ (1)

$$\left|\frac{\log z}{z^4+1}\right| = \frac{|\log r + i\theta|}{|r^4 e^{4i\theta}+1|} \leq \frac{|\log r| + \pi}{||r^4 e^{4i\theta}| - 1|} = \frac{|\log r| + \pi}{|r^4 - 1|}$$

(2)

$$\int_{\alpha_2} \frac{\log z}{z^4+1} dz = \int_R^\varepsilon \frac{\log x e^{\pi i}}{(xe^{\pi i})^4 + 1} e^{i\pi} dx = \int_\varepsilon^R \frac{\log x + \pi i}{x^4+1} dx = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{x^4+1} dx + \pi i \int_\varepsilon^R \frac{1}{x^4+1} dx$$

(3)$\partial D_{\varepsilon,R}$ の小さい円弧を C_1，大きい円弧を C_2 とする．$\left|\int_{C_1} \frac{\log z}{z^4+1} dz\right| = \int_0^\pi \left|\frac{\log \varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^4 e^{4i\theta}+1} i\varepsilon e^{i\theta}\right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{\varepsilon|\log\varepsilon| + \varepsilon\pi}{|\varepsilon^4 - 1|} d\theta \leq \pi \frac{\varepsilon|\log\varepsilon| + \varepsilon\pi}{|\varepsilon^4-1|} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$ である．また $\left|\int_{C_2} \frac{\log z}{z^4+1} dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{\log Re^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta}+1} iRe^{i\theta}\right| d\theta \leq \pi \frac{R|\log R| + R\pi}{|R^4-1|} \to 0 \quad (R \to \infty)$ である.

また $\int_{\alpha_1} \frac{\log z}{z^4+1} dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{x^4+1} dx$ である.

$\varepsilon < 1 < R$ である．$D_{\varepsilon,R}$ 内で $\frac{\log z}{z^4+1}$ は $e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}$ を特異点にもつ．留数を求めると $\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1}, e^{\pi i/4}\right) = \pi e^{7i\pi/4}/16, \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1}, e^{3\pi i/4}\right) = 3\pi e^{i\pi/4}/16$ である．よって $\int_{\partial D_{\varepsilon,R}} \frac{\log z}{z^4+1} dz = \frac{i\pi^2}{8}(3e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8} + i\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$ である．すなわち $\lim_{R\to\infty, \varepsilon\to 0} \int_{\partial D_{\varepsilon,R}} \frac{\log z}{z^4+1} dz = 2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+1} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx$ である．以上より $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+1} dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}, \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ である.

0.9 H23 数学 A

$\boxed{1}$ (1)V の基底として $\{1, x+1, (x+1)^2\}$ をとる．$F(1) = 0, F(x) = x+1, F((x+1)^2) = 2(x+1)^2$ であるから F の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(2)G の表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とし，F の表現行列を A とする．$G \circ F = F \circ G$ は $AB = BA$

と同値である．よって $AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\2b_{31}&2b_{32}&2b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b_{12}&2b_{13}\\0&b_{22}&2b_{23}\\0&b_{32}&2b_{33}\end{pmatrix}$ であるから，$b_{12}=b_{13}=b_{21}=b_{31}=b_{23}=b_{32}=0$ である．したがって $B=\begin{pmatrix}b_{11}&0&0\\0&b_{22}&0\\0&0&b_{33}\end{pmatrix}$ である．よって M の次元は 3 である．

$\boxed{2}$ (1)$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $|f_N(x)-f(x)|<1$ である．f_N は有界であるから $f_N(x)\le M$ とするとよって $|f(x)|\le 1+|f_N(x)|<1+M$ である．よって f は有界.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して一様収束性から，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n,m>N$ なら $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ である．この n,m に対してある $M(n)>0$ が存在して $x>M(n)$ なら $|a_n-f_n(x)|<\varepsilon$ であり，またある $M(m)>0$ が存在して $x>M(m)$ なら $|a_m-f_m(x)|<\varepsilon$ である．$|a_n-a_m|\le|a_n-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-a_m|$ であるから $x>M(n)+M(m)$ をとることで $|a_n-a_m|<4\varepsilon$ である．すなわち $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N_1$ なら $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ である．またある $N_2\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N_2$ なら $|a_n-A|<\varepsilon$ である．$N=N_1+N_2$ とする．ある $M>0$ が存在して $x>M$ なら $|f_N(x)-a_n|<\varepsilon$ である．よって $|f(x)-A|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-a_n|+|a_n-A|<3\varepsilon$ となる．

$\boxed{3}$ (1)$(a,b)\notin G$ を任意にとる．$b\neq f(a)$ と Y がハウスドルフ空間であることから開集合 U,V が存在して $f(a)\in U,b\in V,U\cap V=\emptyset$ である．$(a,b)\in f^{-1}(U)\times V$ である．ある $(x,y)\in f^{-1}(U)\times V$ について $f(x)=y$ と仮定する．$f(x)\in U,y\in V$ であるから $y\in U\cap V$ となり矛盾．よって $f^{-1}(U)\times V\cap G=\emptyset$ である．$f^{-1}(U)\times V$ は開集合であるから G は閉集合.

(2)$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ 1/x & (x>0)\end{cases}$ とする．f は連続でないが G は閉集合である．

$\boxed{4}$ (1)$|e^{iz}|=|\exp(ire^{it})|=|\exp(-r\sin t+ir\cos t)|=|\exp(-r\sin t)|\le 1$ である．よって $|\int_{C_r}f(z)dz|\le\int_{C_r}|\frac{2}{z^2}|dz=2\int_0^{\pi}|\frac{1}{r}|dt=2\pi\frac{1}{r}\to 0\quad(r\to\infty)$ である．

$(1-e^{iz})/z^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-2}z^{n-2}$ である．よって $\int_{C_r}f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-2}\int_{C_r}z^{n-2}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-1}\int_0^{\pi}r^{n-1}e^{i(n-1)t}dt$ である．$n=1$ の項については $\int_0^{\pi}dt=\pi$ である．$n\ge 2$ なら $|\int_0^{\pi}r^{n-1}e^{i(n-1)t}dt|\le\int_0^{\pi}r^{n-1}dt\to 0\quad(r\to 0)$ である．よって $\int_{C_r}f(z)dz\to\pi\quad(r\to 0)$ である．

(2) 曲線 $\alpha_{\varepsilon,r}$ を $z=x\quad(-r\le x\le-\varepsilon)$ とする．$\int_{\alpha_{\varepsilon,r}}f(z)dz=\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-e^{-ix}}{x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-\cos x}{x^2}dx+i\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x^2}dx$ である．

曲線 $\beta_{\varepsilon,r}$ を $z=x\quad(\varepsilon\le x\le r)$ とする．$\int_{\beta_{\varepsilon,r}}f(z)dz=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-\cos x}{x^2}dx-i\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x^2}dx$ である．

$C_\varepsilon,\beta_{\varepsilon,r},C_r,\alpha_{\varepsilon,r}$ をつないでできる積分曲線を C とすると，C の内部で f は正則であるから $\int_C f(z)dz=0$ である．よって $\int_{-C_\varepsilon}f(z)dz+\int_{\beta_{\varepsilon,r}}f(z)dz+\int_{C_r}f(z)dz+\int_{\alpha_{\varepsilon,r}}f(z)dz=0$ である．$\varepsilon\to 0,r\to\infty$ とすると $2\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-\cos x}{x^2}dx-\pi\to 0$ であるから $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$ である．

0.10 H24 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $\varepsilon<a_n<\varepsilon$ である．

よって $n>N$ で $(1-\frac{\varepsilon}{n})^n\le(1+\frac{a_n}{n})^n\le(1+\frac{\varepsilon}{n})^n$ である．極限をとれば $e^{-\varepsilon}\le\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{n})^n\le e^{\varepsilon}$ である．ε は任意であるから $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{n})^n=1$ である．

(2)$n\cos\frac{t}{\sqrt{n}}-n=-\frac{1}{2}t^2+O(\frac{1}{n})$ であり，$\lim_{n\to\infty}s\cos\frac{t}{\sqrt{n}}=s$ であるから，$\lim_{n\to\infty}a_n=s-\frac{1}{2}t^2=0$ より $(s,t)=(\frac{t^2}{2},t)\quad(t\in\mathbb{R})$ である．

(3)(2) の a_n をもちいると，$\cos\frac{t}{\sqrt{n}}=\frac{n}{n+s}\frac{n+s}{n}\cos\frac{t}{\sqrt{n}}=\frac{n}{n+s}(1+\frac{a_n}{n})$ である．したがって $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{t}{\sqrt{n}})^n=$

$e^{-\frac{t^2}{2}}$ である．よって $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\begin{vmatrix} -3-t & -2 & 1 \\ 4 & 3-t & -1 \\ -4 & -2 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t-1)^2$ である．よって固有値は $0, 1$ である．

$t=0$ のとき，$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから V_0 の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$t=1$ のとき，$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ であるから固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

(2)$BAy = BABx = B\alpha x = \alpha Bx = \alpha y$

(3)AB の rank は 2 であるから A の rank は 2 以上．$A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ であるから A の rank は 2 である．すなわち A は単射．同様に B は全射である．

よって $\dim \operatorname{Im} g_1 = 2$ である．

(4)B は全射であるから任意の $y \in \mathbb{C}$ に対して $Bx = y$ となる $x \in \mathbb{C}^2 = V_1$ が存在する．$BAy = y$ より $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$f^{-1}([0,1)) = [0,1)$ は X の開集合でないから f は連続でない．

(2) X は $\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ を開基とする位相空間である．

$g^{-1}(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x - \frac{\varepsilon}{n}, x+\varepsilon)$ より g は連続．

(3)A^+ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ をとる．$0 \in U_{\lambda'}$ なる $\lambda' \in \Lambda$ が存在する．ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_{\lambda'}$ である．$\frac{1}{n} < \varepsilon$ となるような最大の n を N とする．N 以下の n に対して $\frac{1}{n}$ を含むような U_{λ_n} が存在する．したがって $\Lambda' = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N, \lambda'\}$ は A^+ の有限部分被覆である．よって A^+ はコンパクトである．

A^- は A^+ と同様にしてコンパクトである．

(4)A^+ は Y においてコンパクトである．0 を含む開集合は開集合 $[0,x)$ を部分集合にもつ．x 以上の $\frac{1}{n}$ なる n は有限個なので (3) と同様にコンパクト．

A^- はコンパクトでない．$\{[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \mid n = 1, 2, \ldots\} \cup \{[0,1)\}$ は開被覆であるが有限部分被覆を持たない．

$\boxed{4}$ (1)$z = e^{i\pi/5}$ は一位の極である．よって留数は $\lim_{z \to e^{i\pi/5}} (z - e^{i\pi/5})/(z^5+1) = e^{6i\pi/5}/5$ である．

(2)$|\int_{\Gamma_R} f(z)dz| \leq \int_{\Gamma_R} |\frac{1}{z^5+1}||dz = \int_0^{2\pi/5} |\frac{1}{R^5-1}Ri|d\theta = \frac{2\pi}{5}\frac{R}{R^5-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$ である．

(3) 半径 R の扇形で偏角が 0 から $2\pi/5$ の曲線を反時計回りに進む積分曲線を C とする．$f(z) = \frac{1}{z^5+1}$ は C を含むある領域で C 内に孤立特異点をもち，それ以外で正則であるから，留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\bigl(f, e^{i\pi/5}\bigr) = 2\pi i e^{6i\pi/5}/5$ である．

$\Gamma_A = \{xe^{i2\pi/5} \mid 0 \leq x \leq R\}$ とする．ただし Γ_A の向きは C と同じ方向にとる．

$$\int_{\Gamma_A} \frac{1}{z^5+1}dz = -\int_0^R \frac{1}{x^5+1}e^{2\pi i/5}dx = -\cos\frac{2\pi}{5}\int_0^R \frac{1}{x^5+1}dx - i\sin\frac{2\pi}{5}\int_0^R \frac{1}{x^5+1}dx$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx - \cos\frac{2\pi}{5}\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx = -\frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}$$

よって $\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx = \frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}/(1-\cos\frac{2\pi}{5})$ である．

$$\frac{\sin\frac{6\pi}{5}}{(1-\cos\frac{2\pi}{5})}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin^2\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

より $\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}$ である．

0.11 H25 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$u(x)=\int_0^x \phi(x)\psi(y)f(y)dy+\int_x^\pi \psi(x)\phi(y)f(y)dy=\phi(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\psi(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy$$

である．$\phi(y)f(y),\psi(y)f(y)$ は $(0,\pi)$ 上連続であるから，$u(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned}u'(x)&=\phi'(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\phi(x)\psi(x)f(x)+\psi'(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy-\psi(x)\phi(x)f(x)\\&=\phi'(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\psi'(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy\end{aligned}$$

先ほどと同様の理由で $u'(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned}u''(x)&=\phi''(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\phi'(x)\psi(x)f(x)+\psi''(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy-\psi'(x)\phi(x)f(x)\\&=-\phi(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\phi'(x)\psi(x)f(x)-\psi(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy+\psi'(x)\phi(x)f(x)\\&=-u(x)+\phi'(x)\psi(x)f(x)-\psi'(x)\phi(x)f(x)\end{aligned}$$

よって u は C^2 級である．

(2) $u''(x)+u(x)=(\phi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\phi(x))f(x)$ である．$h(x)=\phi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\phi(x)$ とおくと $h'(x)=\phi''(x)\psi(x)+\phi'(x)\psi'(x)-\psi''(x)\phi(x)-\psi'(x)\phi'(x)=-\phi(x)\psi(x)+\psi(x)\phi(x)=0$．より $h(x)=W$．

(3)ψ が C^2 級の実数値関数であることと $\psi''(x)+\psi(x)=0$ より $\psi(x)=\mathrm{Re}(Ae^{ix}+Be^{-ix})=C\cos x+D\sin x$．($A,B$ は,$C=A+B\in\mathbb{R},D=(A-B)i\in\mathbb{R}$ を満たす任意定数) である．

$\phi(x)=\sin x,W=1$ より $\cos x\psi(x)-\sin x\psi'(x)=1$．とくに $x=0$ で $\psi(0)=1$ である．よって $C=1$．また $\psi'(0)=0$ より $D=0$．よって $\psi(x)=\cos x$．

$\boxed{2}$ (1)$v\in f^{n+1}(V)=f^n(f(V))$ に対して，ある $u\in f(V)$ が存在して，$v=f^n(u)$ である．すなわち $f^{n+1}(V)\subset f^n(V)$ である．

(2)$f^{n+1}(V)\subset f^n(V)$ より $f^k(V)$ の次元は単調減少である．V は有限次元であるから，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq n_0$ ならば $f^{n+1}(V)=f^n(V)$ である．

(3)$f|_W\colon W\to W$ は $f|_W(W)=f|_W(f^{n_0}(V))=f^{n_0+1}(V)=W$ より全射である．有限次元ベクトル空間の全射自己準同型は同型射であるから，$f|_W$ は同型.

$\boxed{3}$ (1)$\pi^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ は R の開集合であるから，$\emptyset\in\mathcal{O}$ である．$\pi^{-1}(R/\sim)=R$ は R の開集合であるから，$R/\sim\in\mathcal{O}$ である．

$U,V\in\mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U),\pi^{-1}(V)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)=\pi^{-1}(U\cap V)$ は R の開集合である．よって $U\cap V\in\mathcal{O}$ である．

$U_\lambda\in\mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda)=\bigcup_\lambda\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合である．よって $\bigcup_\lambda U_\lambda\in\mathcal{O}$ である．

以上より $R/\sim$ は $\mathcal{O}$ を位相とする位相空間.

(2) ハウスドルフ空間であれば，一点集合は閉集合である．$\{x_0\}\subset R/\sim$ について $\pi^{-1}(\{x_0\})=D$ は R の閉集合ではない．よって $\{x_0\}$ は閉集合ではないから，ハウスドルフ空間でない.

(3)$\{x_0\}$ 以外の一点集合はすべて閉集合である．よって f が同相写像なら閉集合の像は閉集合であるから $f(x_0)=x_0$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を z に収束する任意の複素数列とする．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z} &= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{z_n-z}\left(\frac{1}{e^{i\theta}-z_n}-\frac{1}{e^{i\theta}-z}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta\end{aligned}$$

ここで $|z|<1$ より任意の $\theta\in[0,2\pi]$ とある整数 N より大きい n に対して，ある $\varepsilon>0$ が存在して $|(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)|\geq|1-|z_n||1-|z||>\varepsilon$ である．したがって $\sup_{n>N}\left|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}\right|<|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{\varepsilon}|<M\in\mathbb{R}$ である．

よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{i\theta}((e^{i\theta}-z)^{-1})'d\theta$$

となり微分可能．よって f は $|z|<1$ で正則である．

(2)$|z|<1$ のとき $n!c_n=f^{(n)}(0)$ である．$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})((e^{i\theta}-z)^{-1})^{(n)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})(n!(e^{i\theta}-z)^{-n-1})d\theta$ である．よって $f^{(n)}(0)=n!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta$ である．

$$\begin{aligned}2\pi c_n &= \int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta=\left[\phi(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{ni}d\theta=\left[\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2i^2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-n^2i^2}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2}d\theta\leq 2\pi\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

よって $n^2|c_n|\leq\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|$ である．

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2}<\infty$$

よって絶対収束するから，$|z|=1$ で $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ は収束する．

(4) ワイエルシュトラスの M 判定法と (3) での不等式から $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ は $|z|\leq 1$ で一様収束する．したがって一様収束先の関数は連続であるから，$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ である．

0.12 H26 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$(\arctan)'(y)=\frac{1}{1+y^2}$ より $(\arctan y+\arctan(1/y))'=\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+(1/y)^2}(-1/y^2)=0$ より $\arctan y+\arctan(1/y)$ は定数関数である。よって $\arctan x\in F$

(2)$f(x)+f(1/x)=c\in\mathbb{R}$ とする．$0<a<1$ に対して

$$\int_a^1 f(x)dx=\int_{1/a}^1-\frac{f(1/t)}{t^2}dt=\int_1^{1/a}\frac{f(t)-c}{t^2}dt=\int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt+c\left[\frac{1}{t}\right]_1^{1/a}=\int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt+c(a-1)$$

したがって $\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx$ の存在と $\lim_{a\to 0}\int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt$ の存在は同値である。

(3)g が $G \in \mathbf{F}$ に 拡張可能だとする．このとき $\lim_{x\to 1-0} g'(x) = \lim_{x\to 1-0} G'(x)$ は G が C^1 級であるから存在する．

逆に $\lim_{x\to 1-0} g'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ とする．1 に収束する $(0,1)$ 上の任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $1-\delta < x < 1$ ならば $\alpha - \varepsilon < g'(x) < \alpha + \varepsilon$ である．$\varepsilon\delta$ に対してある N が存在して $n > N$ ならば $1-\varepsilon\delta < x_n < 1$ である．$n, m > N$ について平均値の定理から $g(x_n) - g(x_m) = g'(\xi)(x_n - x_m)$ となる $\xi \in (1-\varepsilon\delta, 1)$ が存在する．よって $|g(x_n) - g(x_m)| < (\alpha+\varepsilon)\delta\varepsilon \to 0$ となるから $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列．すなわち収束列．以上より $\lim_{x\to 1-0} g(x)$ は存在する．その収束先を β とする．

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in (0,1)) \\ \beta - G(1/x) & (x \in (1,\infty)) \\ \beta & (x=1) \end{cases}$$ と定めると $G|_{(0,1)} = g$ であり，$G(x) + G(1/x) = \beta$ である．

$G(x)$ は $x = 1$ 以外の点で微分可能であり，導関数は連続である．$\lim_{x\to 1-0} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{g'(x)}{1} = \alpha$ である．(ロピタルの定理) $\lim_{x\to 1+0} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{\beta - G(1/x)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{-g'(1/x)(-x^{-2})}{1} = \alpha$ である．よって G は $x=1$ で微分可能.

$\lim_{x\to 1+0} G'(x) = \lim_{x\to 1+0} -g'(1/x)(-x^{-2}) = \alpha$ である．よって導関数が $x=1$ で連続であるから G は C^1 級.

$\boxed{2}$ (1) 一次独立であることを示す．$c_1\cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x = 0$ とする．$x=0$ とすると，$c_1 + c_3 = 0$ である．$x = \pi$ とすると，$-c_1 + c_3 = 0$ である．よって $c_1 = c_3 = 0$ である．$x = \frac{\pi}{2}$ とすると，$c_2 = 0$ である．よって $c_4 = 0$ より S は一次独立．よって V の基底

(2)$\Phi(\cos x) = -\sin x, \Phi(\sin x) = \cos x, \Phi(\cos 2x) = -2\sin 2x, \Phi(\sin 2x) = 2\cos 2x$ より Φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．$\Psi(\cos x) = \sin x, \Psi(\sin x) = \cos x, \Psi(\cos 2x) = -\cos 2x, \Psi(\sin 2x) = -\sin 2x$ より

Ψ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

(3)$g(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 2x + c_4 \sin 2x$ とする．

$\Phi(g(x)) - \Psi(g(x)) = \cos 2x$ より $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

すなわち $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．したがって $c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ が解である．よって $g(x) = c_2 \sin x + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x$ である．

$\boxed{3}$ (1)Q が連結でないとすると，Q の非空開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset, U \cup V = Q$ となるものが存在する．このとき $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset, \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V) = \mathbb{R}^2$ となる．すなわち $\mathbb{R}^2$ が連結でないがこれは矛盾．よって Q は連結である．

(2)$(1,0) \in \mathbb{R}^2$ の同値類は $A = \{(x,0) \mid x \neq 0\}$ である．また $(0,0)$ の同値類は $B = \{(0,0)\}$ である．B を含む Q の開集合 U を任意にとる．$(0,0) \in \pi^{-1}(Q)$ で $\pi^{-1}(Q)$ は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B((0,0),\varepsilon) \subset \pi^{-1}(Q)$ である．$B((0,0),\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である．よって B を含む任意の開集合は A を含むから，

ハウスドルフ空間でない．

(3)$A_n = \{(x,y)\in\mathbb{R} \mid -n < xy < n\}$ とする．A_n は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}\pi(A_n) = A_n$ である．$\{\pi(A_n) \mid n = 1,2,\dots\}$ は Q の有限部分被覆を持たない開被覆である．よってコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$z\in D$ について，z に収束する D 上の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとる．

$$\begin{aligned}2\pi i \lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z} &= \lim_{n\to\infty}\int_C\left(\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z_n}-\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}\right)\frac{1}{z_n-z}d\zeta\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_C\frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)}d\zeta\end{aligned}$$

ここで $\zeta\in C, z_n, z\in D$ より $\zeta(\zeta-2)-z_n > M, \zeta(\zeta-2)-z > M$ となる $M > 0$ が存在する．よって $\frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)} < \frac{1}{M^2}$ であるから $\int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)}d\zeta < 2\pi M^2$ である．よってルベーグの収束定理から

$$2\pi i \lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z} = \int_C\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)}d\zeta = \int_C\frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z)^2}d\zeta$$

よって $f(z)$ は D 上で正則．

(2)$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty}c_k\zeta^k$ とする．$\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty}c_k\zeta^{k+n+1}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = n!c_{-1}$ である．

$((\zeta-2)^{-n-1})^{(n)} = (-n-1)(-n-2)\dots(-n-n)(\zeta-2)^{-2n-1} = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!(\zeta-2)^{2n+1}}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n!2^{2n+1}}$ よって $c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ である．

$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}$ は C 内で $\zeta = 0$ を特異点にもつ．よって留数定理から $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}d\zeta = \mathrm{Res}\left\{\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}, 0\right\} = c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$

(3)$\zeta(\zeta-2)-z = (\zeta-(1+\sqrt{1+z}))(z-(1-\sqrt{1+z}))$ である．$|z|<1$ より $-\pi/2 < \arg(1+z) < \pi/2$ である．よって $-\pi/2 < \arg(\sqrt{1+z}) < \pi/2$ より $\mathrm{Re}(1+\sqrt{1+z}) > 1$ である．すなわち $|1+\sqrt{1+z}| > 1$ である．

$\zeta = 1-\sqrt{1+z}$ は $\zeta^2-2\zeta-z=0$ より $|\zeta||\zeta-2| = |z| < 1$ である．よって $|\zeta| < 1/|\zeta-2| = 1/|1-\sqrt{1+z}-2| = 1/|1+\sqrt{1+z}| < 1$ である．よって $\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}$ は D 内で特異点 $\zeta = 1-\sqrt{1+z}$ を持つ．一位の極であるから留数は $\lim_{\zeta\to 1-\sqrt{1+z}}(\zeta-(1-\sqrt{1+z}))\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z} = \frac{1}{-2\sqrt{1+z}}$ である．よって $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}d\zeta = \frac{-1}{2\sqrt{1+z}}$ である．

0.13　H27 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)|$ である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して一様収束するから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n \ge N$ ならば，$^\forall x\in\mathbb{R}, |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ である．この N に対して f_N は一様連続であるから，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ ならば $|f_N(x)-f_N(y)| < \varepsilon$ である．よって，$|x-y| < \delta$ ならば，$|f(x)-f(y)| < 3\varepsilon$ である．すなわち，f は一様連続である．

(2) 一様収束するから任意の $\varepsilon > 0$ について，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n \ge N$ ならば，$^\forall x\in\mathbb{R}, f_n(x)-\varepsilon < f(x) < f_n(x)+\varepsilon$ である．両辺の sup をとって $\sup A \le \sup A_n + \varepsilon$ である．よって A は有界．$|\sup A - \sup A_n| < \varepsilon$ より $\lim\sup A_n = \sup A$

$\boxed{2}$ (1)$f_a(e_1) = a^te_1 - e_1^ta = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-a_2&-a_3\\a_2&0&0\\a_3&0&0\end{pmatrix} = -a_2E_1 - a_3E_2, f_a(e_2) = \begin{pmatrix}0&a_1&0\\-a_1&0&-a_3\\0&a_3&0\end{pmatrix} = a_1E_1 - a_3E_3, f_a(e_3) = \begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&0&a_2\\-a_1&-a_2&0\end{pmatrix} = a_1E_2 + a_2E_3$ である．

よって $T_a = \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \end{pmatrix}$ である．

(2)$\det T_a = -a_2(-a_1(-a_3)) + a_3 a_1 a_2 = 0$ より $\operatorname{rank} f_a \leq 2$ である．

$a \neq 0$ よりある i について $a_i \neq 0$ である．T_a の部分小行列として $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 \end{pmatrix}$ がとれる．これらの行列式は何れかが 0 でないから $\operatorname{rank} f_a \geq 2$ である．よって $\operatorname{rank} f_a = 2$ である．したがって $\dim \operatorname{Im} f_a = 2, \dim \operatorname{Ker} f_a = 1$ である．

(3)T_a の固有多項式を g_a とすると $g_a = \begin{vmatrix} -a_2 - \lambda & a_1 & 0 \\ -a_3 & -\lambda & a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_2^2 - 2a_1 a_3)\lambda = -\lambda(\lambda^2 - (a_2^2 - 2a_1 a_3))$ である．

よって $a_2^2 - 2a_1a_3 \neq 0$ ならば T_a の固有値は全て異なるから，対角化可能．$a_2^2 - 2a_1a_3 = 0$ ならば，T_a の固有値は 0 のみである．固有値 0 の固有空間は $\ker T_a$ であるから $a \neq 0$ なら固有空間の次元は 1 となり，対角化不可能．$a = 0$ ならば $T_a = 0$ であるから対角化可能.

以上より $a = 0 \vee a_2^2 - 2a_1a_3 \neq 0$ が対角化可能性に関する必要十分条件である．

$\boxed{3}$ (1)$N_r(A)$ は開集合である．これを示す．$x \in N_r(A)$ を任意にとる．ある $a \in A$ が存在して $b := r - d(x,a) > 0$ である．$y \in B(x, b/2) := \{y \in X \mid d(x,y) < b/2\}$ について $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < r - b + b/2 < r$ である．よって $B(x,b/2) \subset N_r(A)$ である．よって $N_r(A)$ は開集合である．

$F_K = \{N_n(K) \mid n = 1, 2, \dots\}, F_L = \{N_n(L) \mid n = 1, 2, \dots\}$ とする．F_K, F_L は X の開被覆である．とくに K, L の開被覆である．よって L の被覆 $\{N_{n_1}(K), N_{n_2}(K), \dots, N_{n_m}(K)\}$ と，K の被覆 $\{N_{m_1}(L), N_{m_2}(L), \dots, N_{m_\ell}(L)\}$ がとれる．$r = n_m + m_\ell$ とすれば，$L \subset N_r(K), K \subset N_r(L)$ である．

(2) 任意の $r > 0$ に対して $K \subset N_r(K)$ である．よって $D(K,K) = 0$ である．逆に $D(K,L) = 0$ とする．任意の $r > 0$ について $K \subset N_r(L), L \subset N_r(K)$ である．$x \in K$ に対して，ある $y \in L$ が存在して $d(x,y) < r$ である．この r は任意にとれるから x は L の触点である．距離空間はハウスドルフ空間であり，ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから，L は閉集合である．よって $x \in L$ である．すなわち $K \subset L$ である．同様にして $L \subset K$ である．よって $K = L$ である．

定義から $D(K,L) = D(L,K)$ である．

K, L, M をコンパクト集合とする．$D(K,L) = r_1, D(L,M) = r_2, r := r_1 + r_2$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ を一つ固定する．$x \in K$ に対して，$y \in L$ が存在して $d(x,y) < r_1 + \varepsilon$ である．$y \in L$ に対して，$z \in M$ が存在して $d(y,z) < r_2 + \varepsilon$ である．よって $d(x,z) < r_1 + r_2 + 2\varepsilon$ である．すなわち $K \subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(M)$ である．逆も同様に $M \subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(K)$ である．よって $D(K,M) \leq r_1 + r_2 + 2\varepsilon$ である．ε は任意にとれるから $D(K,M) \leq r_1 + r_2$ である．よって $D(K,M) \leq D(K,L) + D(L,M)$ である．

$\boxed{4}$ (1)$1 + e^{2\pi z} = 0$ とする．$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ とすると，$e^{2\pi x} e^{2\pi i y} = -1$ である．よって $\sin 2\pi y = 0$ であるから，$y = \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$ である．よって $e^{2\pi z} = e^{2\pi x}(-1)^n = -1$ より $x = 0$ で n は奇数である．S_R 内では $z = i/2$ が唯一の解である．すなわち $f(z)$ は $z = i/2$ を特異点にもつ．

$$\lim_{z \to \frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{e^{2\pi a z}}{1 + e^{2\pi z}} = \lim_{z \to \frac{i}{2}} \frac{e^{2\pi a z} + (z - \frac{i}{2}) 2\pi z e^{2\pi a z}}{2\pi e^{2\pi z}} = -\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$$

より $\operatorname{Res}\{f(z), i/2\} = -\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$ である．

したがって留数定理から $\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}) = -ie^{a\pi i}$ である．

(2)$|\int_{J_R^+} f(z)dz| = |\int_0^1 \frac{e^{2\pi a(R+iy)}}{1+e^{2\pi(R+iy)}} idy| \le \int_0^1 |\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}|dy$ である．

$$\left|\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}\right| = \left|\frac{1}{e^{-2\pi aR}+e^{2\pi R(1-a)}e^{2\pi iy}}\right| \le \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$$

であるから，$|\int_{J_R^+} f(z)dz| \le \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}dy = \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$ である．$0<1-a<1$ より $|\int_{J_R^+} f(z)dz| \to 0 \quad (R\to\infty)$ である．同様に $|\int_{J_R^-} f(z)dz| \to 0 \quad (R\to\infty)$ である．

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-2\pi ax}+e^{2\pi(1-a)x}}dx \le \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi(1-a)x}}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{-2\pi ax}}dx < \infty$ である．よって広義積分は収束する．$R+i$ から $-R+i$ への向きのついた線分を C とする．$\int_C \frac{e^{2\pi az}}{1+e^{2\pi z}}dz = \int_R^{-R} \frac{e^{2\pi a(x+i)}}{1+e^{2\pi(x+i)}}dx = -e^{2\pi ai}\int_{-R}^R \frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}}dx$ である．よって $\int_{\gamma_R} f(z)dz = (1-e^{2\pi ai})\int_{-R}^R f(z)dz + \int_{J_R^+} f(z)dz - \int_{J_R^-} f(z)dz$ である．すなわち $R\to\infty$ で $-ie^{a\pi i} = (1-e^{2\pi ai})\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$ である．よって $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \frac{-ie^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}} = \frac{-i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}} = \frac{1}{2\sin a\pi}$ である．

0.14 H28 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|x| \le \frac{1}{2}$ なら $5-1/(1+x)^2 > 0$ である．よって $0 < \int_0^x 5-1/(1+t)^2dt = 5x+1/(1+x)-1$ である．よって $0 < \int_0^x 5t+1/(1+t)-1dt = 5x^2/2+\log(1+x)-x$ である．よって $-5x^2/2 < \log(1+x)-x$ である．

また $5+1/(1+x)^2 > 0$ である．よって $0 < \int_0^x 5+1/(1+t)^2dt = 5x-1/(1+x)+1$ である．よって $0 < \int_0^x 5t-1/(1+t)+1dt = 5x^2/2-\log(1+x)+x$ である．よって $5x^2/2 > \log(1+x)-x$ である．

すなわち $|\log(1+x)-x| < 5x^2/2$ である．

(2)$\sum a_k$ が収束するから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\ge N$ ならば，$a_n < 1/2$ である．無限積の収束性は $k=N$ からの無限積の収束性と同じ．また (1) より $|\log(1+x)| \le Cx^2+x$ である．log の連続性から

$$\log\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^n(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=N}^n(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n\log(1+a_k)$$

である．

絶対級数 $\sum|\log(1+a_k)|$ の収束性を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n|\log(1+a_k)| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n Ca_k^2+a_k = C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n a_k^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n a_k$$

右辺は収束するから，$\sum\log(1+a_k)$ は絶対収束する．よって収束するので，$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^n(1+a_k)$ は収束する．

(3)$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ と $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2$ の収束を示せばよい．$S_n = \sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{3k+1}$ とする．$S_{2n} = \sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1} > 0$ より S_{2n} は単調増加する．同様に $S_{2n+1} = 1/4-\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1} > 0$ より S_{2n+1} は単調減少する．$S_{2n+1}-S_{2n} = 1/(3(2n+1)+1)$ であり，$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}-S_{2n} = 0$ である．また $S_{2n+1} = 1/(3(2n+1)+1)+S_n > 0$ より S_{2n+1} は有界な単調数列であるから収束する．したがって S_{2n} も収束して $\lim_{n\to\infty}S_{2n} = \lim_{n\to\infty}S_{2n+1}$ である．よって $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ は収束する．

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^2} < \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$ である．ともに収束するから無限積も収束する．

$\boxed{2}$ (1)$y\in f_A(W^\perp)$ を任意にとる．ある $x\in W^\perp$ が存在して $y=f_A(x)$ である．任意の $u\in W$ について $(u,y) =^t uAx =^t({}^tAu)x = ({}^tAu,x) = (f_A(u),x) = 0$ である．よって $y\in W^\perp$ である．

A の固有値 $\lambda\in\mathbb{C}$ と固有ベクトル $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ をとる．$x,y\in\mathbb{C}^n$ について標準エルミート内積 $(x,y) =^t x\overline{y}$ を定める．$\lambda(v,v) = (Av,v) = (v,\overline{{}^tA}v) = (v,\overline{\lambda}v) = \overline{\lambda}(v,v)$ である．$(v,v)>0$ より $\lambda=\overline{\lambda}$ である．よって $\lambda\in\mathbb{R}$ である．

(2)A の固有空間全ての直和を W とする．$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ である．$f_A(W) \subset W$ となるから，$f_A|_{W^\perp} \colon W^\perp \to W^\perp$ を得る．$\mathbb{C}$ による定数倍を加えることで $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}$ 上線形空間 $\mathbb{C}^n$ に拡張する．$W, W^\perp$ も同様に $\overline{W}, \overline{W^\perp}$ に拡張する．$f_A|_{W^\perp}$ は $\overline{W^\perp}$ 上の線形変換に拡張できる．$W^\perp \neq \{0\}$ なら $f_A|_{\overline{W^\perp}}$ の固有値 λ と固有ベクトル $v \neq 0$ をとれる．$u = 0 + v \in \overline{W} \oplus \overline{W^\perp}$ とする．$Au = \lambda u$ である．λ は f_A の固有値であるから $\lambda \in \mathbb{R}$ である．よって $u \in \mathbb{R}^n$ としてよい．$u \in W^\perp$ となるがこれは W の定義に矛盾．よって $W^\perp = \{0\}$．

f_A の固有値 λ と固有ベクトル x について $\mathrm{Span}\{x\} = \mathrm{Span}\{x\}^{\perp\perp}$ であり，任意の $y \in \mathrm{Span}\{x\}^\perp$ について $(y, {}^tAx) = (Ay, x) = 0$ より ${}^tAx \in \mathrm{Span}\{x\}$ である．よって ${}^tAx = \mu x$ とできる．$\lambda(x,x) = (Ax, x) = (x, {}^tAx) = (x, \mu x) = \mu(x,x)$ である．$(x,x) > 0$ より $\lambda = \mu$ である．

$\mathbb{R}^n$ の任意の元 x は固有ベクトル $v_1, \ldots, v_n$ の線形結合で表せる．$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ とする．$Ax = \sum_{i=1}^n a_i A v_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i = {}^t Ax$ である．よって $A = {}^t A$ である．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x, y \in [0,1]^\infty$ に対して $|x_k - y_k| \leq 1$ である．よって $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ である．よって d は $[0,1]^\infty \times [0,1]^\infty$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

$x = y$ なら $d(x,y) = 0$ である．また $d(x,y) = 0$ なら $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k| = 0$ であるから $x_k = y_k$ である．よって $d(x,y) = 0$ なら $x = y$ である．$d(x,y) = d(y,x)$ は明らか．

x, y, z について $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-k}|x_k - z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-k}|x_k - y_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-k}|y_k - z_k|$ である．$n \to \infty$ とすると $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k - z_k|$ である．よって $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ である．

よって d は距離．

(2)$x_n \to a$ とする．$d(x_n, a) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_{n,k} - a_k| \geq 2^{-i}|x_{n,i} - a_i| \to 0 \quad (n \to \infty)$ である．よって任意の k に対して $x_{n,k} \to a_k$．

任意の k に対して $x_{n,k} \to a_k$ とする．任意の ε に対して $2^{1-n_0} \leq \varepsilon$ なる n_0 が存在する．このとき $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} 2^{-k}|x_{n,k} - a_k| \leq 2^{1-n_0} \leq \varepsilon$ である．1 から $n_0 - 1$ までの整数 k について，ある N_k が存在して $n \geq N_k$ なら $|x_{n,k} - a_k| \leq \varepsilon$ である．$N = \max\{N_1, \ldots, N_{n_0-1}\}$ とする．このとき $\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k}|x_{n,k} - a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k}\varepsilon \leq 2\varepsilon$ である．よって $n \geq N$ なら $d(x_n, a) \leq 3\varepsilon$ であるから $x_n \to a$ である．

(3)$\{x_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ は有界閉区間 $[0,1]$ 内の点列であるから，収束部分列を必ずもつ．したがって収束部分列 $\{x_{n,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^\infty$ に対して数列 $\{x_{n+1,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^\infty$ も収束部分列 $\{x_{n+1,k_j^{(n+1)}}\}_{j=1}^\infty$ を持つ．このとき $\{k_j^{(n+1)}\}_{j=1}^\infty$ は $\{k_j^{(n)}\}_{j=1}^\infty$ の部分列である．これが任意の n について成り立つから数列 $\{k_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty, \{k_j^{(2)}\}_{j=1}^\infty, \ldots$ を得て，それぞれ前の数列の部分列となっている．数列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ を $s_n = k_n^{(n)}$ で定める．$\{s_n\}_{n=1}^\infty$ は全ての m について $n > m$ では $\{k_j^{(m)}\}_{j=1}^\infty$ の部分列となっている．したがって $\{x_{s_n,k}\}_{n=1}^\infty$ は収束列になっている．よって $\{x_{s_n}\}_{n=1}^\infty$ は収束列である．

$\boxed{4}$ (1)$z = re^{i\theta}$ とする．

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{ire^{i\theta}} ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi ie^{ire^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi ie^{ir\cos\theta} e^{-r\sin\theta} d\theta$$
$$\int_{C_r} \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| dz = \int_0^\pi \left|e^{-r\sin\theta}\right| d\theta \leq \int_0^\pi d\theta = \pi$$

である．よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi i d\theta = \pi i, \quad \lim_{r\to\infty} \left|\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz\right| \leq \lim_{r\to\infty} \int_0^\pi \left|e^{-r\sin\theta}\right| d\theta = \int_0^\pi 0 d\theta = 0$$

(2)

$r > \varepsilon > 0$ に対して $z = \varepsilon$ から $z = r$ までの積分経路を $\Gamma_{\varepsilon,r}^+$ とする．$z = -r$ から $z = -\varepsilon$ までの積分経路を

$\Gamma^-_{\varepsilon,r}$ とする．

$$\int_{\Gamma^+_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_\varepsilon^r \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_\varepsilon^r \frac{\cos x + i\sin x}{x}dx$$
$$\int_{\Gamma^-_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_r^\varepsilon -\frac{\cos x - i\sin x}{-x}dx = \int_\varepsilon^r \frac{-\cos x + i\sin x}{x}dx$$

である．積分経路 $\Gamma^+_{\varepsilon,r}, C_r, \Gamma^-_{\varepsilon,r}, -C_\varepsilon$ によってできる閉曲線 Γ を考えると，被積分関数は原点を除いて正則であるから，$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$ である．よって

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma^+_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\Gamma^-_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz \\
&= \int_\varepsilon^r \frac{\cos x + i\sin x}{x}dx + \int_\varepsilon^r \frac{-\cos x + i\sin x}{x}dx + I(r) - I(\varepsilon) \\
&= 2i\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x}dx + I(r) - I(\varepsilon) \to 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx - \pi i \quad (r \to \infty)
\end{aligned}$$

したがって $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$ である．

0.15 H29 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\sum\limits_{k=1}^n |a_n|$ は n に関する単調増加数列であり，$\sum\limits_{k=1}^n |a_n| \le \sum\limits_{k=1}^\infty b_n$ より，有界である．よって $\sum |a_n|$ は収束する．したがって $\sum\limits_{k=1}^n |a_n|$ はコーシー列である．

$S_n = \sum\limits_{k=1}^n a_n$ とすると，$n \ge m$ に対して $|S_n - S_m| = |\sum\limits_{k=m+1}^n a_n| \le \sum\limits_{k=m+1}^n |a_n| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$ である．よって S_n はコーシー列であるから，収束列．

(2)$x \in (0,1)$ で $|f(x)| < x$ より $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ である．$x = 0$ なら $\sum\limits_{n=1}^\infty f(2^n x) = 0$ である．$0 < x < 1/2$ のとき．$2^{n_0}x \le 1 < 2^{n_0+1}x$ となる正の整数 n_0 が存在する．$\sum\limits_{n=1}^{n_0} |f(2^n x)| \le \sum\limits_{n=1}^{n_0} 2^n x = x(2^{n_0+1} - 2) \le 2$ である．また $\sum\limits_{n=n_0+1}^\infty |f(2^n x)| \le \sum\limits_{n=n_0+1}^\infty 1/(2^n x) = 1/(2^{n_0}x) \le 2$ である．よって $\sum\limits_{n=1}^\infty |f(2^n x)| \le 4$ であるから $\sum\limits_{n=1}^\infty f(2^n x)$ は収束する．

(3) $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |\sum\limits_{n=1}^\infty f(2^n x)| \le 4$ である．

$\boxed{2}$ (1)A は正則であるから $\det A \ne 0$ である．$\det A = \det(-{}^tA) = (-1)^n \det A$ であるから n は偶数である．

(2)$\mathbb{C}^n$ における標準エルミート内積を $(x, y) = x\overline{{}^ty}$ で表す．A の固有値 λ とその固有ベクトル $v \ne 0$ をとる．$\lambda(v,v) = (Av, v) = (v, \overline{{}^tA}v) = (v, -Av) = -\overline{\lambda}(v,v)$ である．$v \ne 0$ より $(v,v) \ne 0$ であるから $\lambda = -\overline{\lambda}$ より λ の実部は 0．よって λ は純虚数である．

(3)$v \in W(B,\alpha)$ に対して $BAv = ABv = \alpha Av$ より $Av \in W(B,\alpha)$ である．よって $W(B,\alpha) \to W(B,\alpha); v \mapsto Av$ は $W(B,\alpha)$ 上の線形写像である．A は正則であるからこの線形写像は単射．有限次元であるから全単射であるから $AW(B,\alpha) = W(B,\alpha)$ である．

(4)$i\colon W(B,\alpha) \to \mathbb{R}^n$ を包含写像とする．$g\colon W(B,\alpha) \to W(B,\alpha); v \mapsto Av$ は $W(B,\alpha)$ 上の同型写像である．$\mathbb{R}^n$ の標準内積に関する $W(B,\alpha)$ の正規直交基底 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ を一つ固定し，この基底に関する g の表現行列を G とする．$v \in W(B,\alpha)$ に対して $i(Gv) = Ai(v)$ である．

$x = \sum a_i w_i, y = \sum b_i w_i$ に対して $\langle x, y\rangle = \sum a_i b_i$ と定めれば $W(B,\alpha)$ の内積となり，$\langle x, y\rangle = (i(x), i(y))$ である．($\because$ 基底が正規直交基底)

よって $\langle Gx, y\rangle = (i(Gx), i(y)) = (Ai(x), i(y)) = -(i(x), Ai(y)) = -\langle x, Gy\rangle$ である．よって G は正則な交代行列．したがって k は偶数．B が対称行列であるから，固有空間の次元は固有値の固有方程式における重複度である．したがって全ての固有値の重複度が偶数であるから，$g_B(t) = f(t)^2$ なら $f(t)$ が存在する．

$\langle x,y\rangle=(i(x),i(y))$ の証明
$w_i=\sum c_{i,j}e_j$ とする．$(i(x),i(y))=\sum_j(\sum_i a_ic_{i,j})(\sum_k b_kc_{k,j})=\sum_{i,j,k}a_ib_kc_{i,j}c_{k,j}=\sum_{i,k}a_ib_k(w_i,w_j)=\sum_{i,k}a_ib_k\delta_{i,k}=\sum_i a_ib_i=\langle x,y\rangle$ である．

別解
$W=W(B,\alpha)$ の基底 $\{t_1,\ldots,t_k\}$ をとり，$\mathbb{R}^n$ に延長して $\{t_1,\ldots,t_n\}$ を得る．シュミットの正規直交化法をつかって $\{\tilde{t_1},\ldots,\tilde{t_n}\}$ を得る．k 個目までは W の元である．g の $\{\tilde{t_1},\ldots,\tilde{t_k}\}$ に関する表現行列を G とする．f の $\{\tilde{t_1},\ldots,\tilde{t_n}\}$ に関する表現行列を F とする．G は F の首座小行列である．$\tilde{T}=\begin{pmatrix}\tilde{t_1} & \ldots & \tilde{t_n}\end{pmatrix}$ とすれば，$F=\tilde{T}^{-1}AT$ である．T は直交行列であるから F は交代行列．よって G は交代行列．(1) より k は偶数.

$\boxed{3}$ X の開集合全体を $\mathcal{O}$ とすると，$\mathcal{O}=2^{\mathbb{Q}}\cup\{\mathbb{R}\}$ である．実際これは位相の定義をみたす.

(1)$A\in 2^{\mathbb{Q}}$ に対して $f^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R}\mid\ x+1\in A\subset\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{Q}$ である．また $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ であるから，f は連続.

(2)$\sqrt{2}$ を含む開集合は $\mathbb{R}$ のみである．$\sqrt{3}$ についても同様．よってハウスドルフでない.

(3)X の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\ \lambda\in\Lambda,U_\lambda\in\mathcal{O}\}$ を任意にとる．$\sqrt{2}$ を含む開集合が S に存在する．$\sqrt{2}$ を含む開集合は $\mathbb{R}$ のみであるから，$\mathbb{R}\in S$ である．よって有限部分被覆 $\{\mathbb{R}\}$ が存在するからコンパクト.

(4)$f^{-1}(\{0\})=\mathbb{Q}$ である．$\{0\}$ は R では閉集合であるから，f が連続なら $\mathbb{Q}$ は X で閉集合である．すなわち，$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ は X で開集合であるがこれは矛盾．よって f は連続でない.

$\boxed{4}$ (1)$1/(z^2+1)^{n+1}$ の $z=i$ まわりのローラン展開を $\sum_k a_k(z-i)^k$ とする．$1/(z+i)^{n+1}=\sum_k a_k(z-i)^{k+n+1}$ であるから，$k+n+1<0$ なら $a_k=0$ である．両辺の n 回微分に i を代入する．左辺は $(-(n+1))(-(n+2))\ldots(-(2n))(2i)^{-2n-1}=(-1)^n(2i)^{-2n-1}(2n)!/n!$ である．右辺は $a_{-1}n!$ であるから，$a_{-1}=(-1)^n(2i)^{-2n-1}(2n)!/(n!)^2$ である．これが留数.

(2)

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}}\right|=\left|\int_0^\pi\frac{Rie^{i\theta}}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}}dz\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{R}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}}\right|dz\le\int_0^\pi\frac{R}{|R^2-1|^{n+1}}dz=\frac{\pi R}{|R^2-1|^{n+1}}\to 0\quad(R\to\infty$$

(3)$\int_{-1}^1 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ は有限値をとる．$\int_1^\infty 1/(x^2+1)^{n+1}dx,\int_{-\infty}^{-1}1/(x^2+1)^{n+1}dx$ はそれぞれ収束する．よって $\int_{-\infty}^\infty 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ は収束する．$\int_{-R}^R 1/(z^2+1)^{n+1}dz=\int_{C_R}1/(z^2+1)^{n+1}dz-\int_{\Gamma_R}1/(z^2+1)^{n+1}dz$ である．(C_R は $-R$ から R まで進み G_R 上を反時計まわりに進む経路) 留数定理と (2) より

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx=2\pi i\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2(2i)^{2n+1}}=\frac{(2n)!}{(n!)^22^{2n}}\pi=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\pi$$

0.16 H30 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$f(X)$ が連結でないと仮定する．このとき，$f(X)\subset U\cup V$ なる Y の開集合 U,V で $U\cap V\cap f(X)=\emptyset$ かつ $U\cap f(X)\neq\emptyset,V\cap f(X)\neq\emptyset$ を満たすものが存在する．$f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cup V)=X$ であり，$f^{-1}(U),f^{-1}(V)$ は X の開集合である．$f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V\cap f(X))=\emptyset$ で，$f^{-1}(U)\neq\emptyset,f^{-1}(V)\neq\emptyset$ であるから，X は連結でない．これは矛盾．よって，$f(X)$ は連結である.

(2)$Y=\{0,1\}$ で Y に密着位相をいれる．$X=\{0,1\}$ で X に離散位相をいれる．このとき $f(x)=x$ は連続であり，X はハウスドルフ空間である．しかし $Y=f(X)$ はハウスドルフ空間でない.

(3)$f(X)$ の任意の開被覆 $S=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$T=\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆である．X はコンパクトであるから，T の有限部分集合 $\{f^{-1}(U_{\lambda_i})\}_{i=1}^n$ が存在して，$X=f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i})$ となる．$f(X)=\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ であり，$f(X)$ はコンパクトである.

$\boxed{2}$ (1)$f^d(V)=V^d$ とする．$V^{d+1}=f^{d+1}(V)=f^d(f(V))\subset f^d(V)=V^d$ である．よって，ベクトル空間の降下列 $V=V^0\supset V^1\supset\cdots\supset V^n\supset\cdots$ が定まる．f^d が零写像であるから $V^d=0$ である．降下列であるから

次元は単調減少する．$V^{i-1}=V^i$ なる i が存在したとき，$V^{i+1}=f^{i+1}(V)=f(V^i)=f(V^{i-1})=V^i$ となるから，以降すべて等しい．よって次元は小さくなり続けたのち，ある次元で以降不変になる．

$f^d=0$ より，$V^d=0=V^{d+1}$ である．また $f^{d-1}\neq 0$ より $V^{d-1}\neq 0$ である．すなわち V^d までは次元は小さくなり続ける．$\dim V=n$ より $d\leq n$ である．

(2)$v\in \mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)$ について，ある $w\in V$ が存在して $f(w)=v$ である．$0=f(v)=f(f(w))=f(w)=v$ であるから，$\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)=\{0\}$ である．

(3) 求める最大元は $m:=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ である．ただし，$\lfloor x\rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す．

V の基底を $\{v_1,\cdots,v_n\}$ とする．$g(v_i)=\begin{cases}0 & (i\leq m)\\ v_{i-m} & (i>m)\end{cases}$ とする．g は線形写像である．$\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_{n-m}\}$ であり，$\ker(g)=\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_m\}$ である．m の定義から $m\leq n-m$ であるから，$\dim(\mathrm{Im}(g)\cap\ker(g))=\dim\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_m\}=m$ である．よって $m\in A$ である．

次元定理より $f\colon V\to V$ に対して $n=\dim V=\dim\mathrm{Im}(f)+\dim\ker(f)$ である．よって $\dim(\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f))\leq\min\{\dim\mathrm{Im}(f),\dim\ker(f)\}\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ である．

よって $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ は A の上界である．よって m は求める最大元である．

$\boxed{3}$ (1)$2-\cos x>0$ より $0\leq\int_0^x 2-\cos t dt=2x-\sin x$ である．よって $0\leq\int_0^x 2t-\sin t dt=x^2+\cos x-1$ である．よって $0\leq\int_0^x t^2+\cos t-1dt=\frac{1}{3}x^3+\sin x-x$ である．

よって $f_n(x)=n^{p+1}(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n})\leq n^{p+1}(\frac{1}{3}(\frac{x}{n})^3)=\frac{x^3}{3n^{2-p}}$ である．$p<2$ なら $0<2-p$ より $n\to\infty$ で $f_n(x)\to 0$ である．

(2) 任意の有界閉区間 I について，$^\forall x\in I,|x|\leq M$ とできる $M>0$ が存在する．$S_n(x)=\sum_{k=1}^n f_n(x)$ が一様コーシー列であることを示す．$n>m$ に対して $|S_n(x)-S_m(x)|=|\sum_{k=m+1}^n f_k(x)|\leq\sum_{k=m+1}^n|f_k(x)|\leq\sum_{k=m+1}^n\frac{M^3}{3k^{2-p}}=\frac{M^3}{3}\sum_{k=m+1}^n k^{p-2}$ である．$p<1$ より $p-2<-1$ であるから，$\sum_{k=m+1}^n k^{p-2}\leq\sum_{k=m+1}^n\int_{k-1}^k t^{p-2}dt=\int_m^n t^{p-2}dt=\frac{1}{p-1}(n^{p-1}-m^{p-1})\to 0\quad(n,m\to\infty)$ である．よって一様コーシー列であるから，一様収束する．

(3)$|x|<\pi/6$ のとき，$\cos x-\frac{1}{2}\geq 0$ である．よって $0\leq\int_0^x\cos t-\frac{1}{2}dt=\sin x-\frac{x}{2}$ である．よって $0\leq\int_0^x\sin t-\frac{t}{2}dt=-\cos x-\frac{x^2}{4}+1$ である．よって $0\leq\int_0^x-\cos t-\frac{t^2}{4}+1dt=-\sin x-\frac{x^3}{12}+x$ である．すなわち $\frac{x^3}{12}\leq x-\sin x\quad(|x|<\pi/6)$ である．

よってある x に対して $\frac{x}{n}<\frac{\pi}{6}$ なる n について $f_n(x)=n^{p+1}(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n})\geq\frac{x^3}{12n^{2-p}}$ である．すなわち $p>2$ なら $n\to\infty$ で $f_n(x)\to\infty$ である．

$p<2$ のとき (1) より $f(x)=0$ に各点収束する．$x=n\pi/2$ とすると，$f(n\pi/2)=0,f_n(n\pi/2)=n^{p+1}(\frac{\pi}{2}-1)$ であるから，$\mathbb{R}$ 上で一様収束しない．

$p=2$ のとき，各 x について $f_n(x)=n^3(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n})=n^3(\frac{1}{3!}(\frac{x}{n})^3-\frac{1}{5!}(\frac{x}{n})^5+\cdots)\to\frac{x^3}{6}\quad(n\to\infty)$ である．よって $g(x)=\frac{x^3}{6}$ に各点収束する．$g(n\pi/2)=\frac{(n\pi/2)^3}{6}=n^3\frac{\pi^3}{48},f_n(n\pi/2)=n^3(\frac{\pi}{2}-1)$ より一様収束しない．

$\boxed{4}$ (1)

$$\lim_{z\to 0}\frac{ze^{iz}}{e^z-e^{-z}}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}+ize^{iz}}{e^z+e^{-z}}=\frac{1}{2},\qquad\lim_{z\to i\pi}\frac{(z-i\pi)e^{iz}}{e^z-e^{-z}}=\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{iz}+i(z-i\pi)e^{iz}}{e^z+e^{-z}}=-\frac{1}{2e^\pi}$$

である．よって $\mathrm{Res}(f(z),0)=\frac{1}{2},\mathrm{Res}(f(z),i\pi)=-\frac{1}{2e^\pi}$ である．

(2)

$$\left|\int_{\Gamma_R^+}f(z)dz\right|\leq\left|\int_0^\pi\frac{e^{i(R+it)}}{e^{R+it}-e^{-(R+it)}}idt\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{e^{-t}}{e^{R+it}-e^{-(R+it)}}\right|dt\leq\int_0^\pi\frac{e^{-t}}{||e^R|-|e^{-R}||}dt=\frac{1-e^{-\pi}}{e^R-e^{-R}}\to 0\quad(R\to\infty)$$

$$\left|\int_{\Gamma_R^-}f(z)dz\right|\leq\left|\int_0^\pi\frac{e^{i(-R+it)}}{e^{-R+it}-e^{-(-R+it)}}idt\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{e^{-t}}{e^{-R+it}-e^{R-it}}\right|dt\leq\int_0^\pi\frac{e^{-t}}{||e^{-R}|-|e^R||}dt=\frac{1-e^{-\pi}}{e^R-e^{-R}}\to 0\quad(R\to\infty)$$

(3)

図のように積分経路 $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ とそれらをつなげてできる閉曲線 C を定める．C 内で f は正則であるから $\int_C f(z)dz = 0$ である．

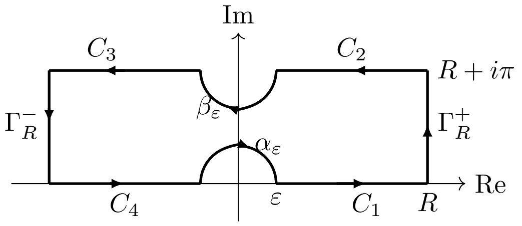


図 1　積分経路の図

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$
$$\int_{C_4} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{e^x - e^{-x}}dx = \int_R^\varepsilon -\frac{e^{i(-x)}}{e^{-x} - e^x}dx = \int_\varepsilon^R \frac{-\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$
$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_R^\varepsilon \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}}dx = e^{-\pi}\int_R^\varepsilon \frac{e^{ix}}{-e^x + e^{-x}}dx = e^{-\pi}\int_\varepsilon^R \frac{\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$
$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}}dx = -e^{-\pi}\int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{e^x - e^{-x}}dx = e^{-\pi}\int_\varepsilon^R \frac{-\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$

である．$z=0, z=i\pi$ は f の一位の極であるから，原点近傍で有界になるように，$f(z)$ から主要部を引けば $\varepsilon \to 0$ で 0 になる．

$$\int_{\alpha_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\alpha_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{2z}dz + \int_\pi^0 \frac{1}{2\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta \to -\frac{i\pi}{2} \quad (\varepsilon \to 0)$$
$$\int_{\beta_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\beta_\varepsilon} f(z) + \frac{1}{2e^\pi z}dz + \int_0^{-\pi} -\frac{1}{2e^\pi \varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta \to \frac{i\pi}{2e^\pi} \quad (\varepsilon \to 0)$$

である．よって $0 = \int_C f(z)dz = 2i(1+e^{-\pi})\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}dx + \int_{\alpha_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\beta_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R^+} f(z)dz + \int_{\gamma_R^-} f(z)dz$ である．$R \to \infty, \varepsilon \to 0$ とすると，$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}dx = -\frac{\pi(e^{-\pi}-1)}{4(e^{-\pi}+1)}$ である．

0.17　H31 数学 A

$\boxed{1}$ (1) $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall n \geq N, ^\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ である．また f_N は連続であるから，$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists\delta > 0, ^\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ である．以上より，$^\forall x_* \in \mathbb{R}, ^\forall\varepsilon > 0, ^\exists\delta > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_*)| + |f_N(x_*) - f(x_*)| < 3\varepsilon$ であるから，f は連続である．

(2)$a \geq x > 0$ のとき，平均値の定理から $u\left(\frac{x}{n}\right) - u(0) = \frac{x}{n}u'(\alpha_n), u(-\frac{x}{n}) - u(0) = -\frac{x}{n}u'(\beta_n)$ となる $-\frac{x}{n} < \beta_n < 0 < \alpha_n < \frac{x}{n}$ が存在する．よって $u_n(x) = \frac{x}{n}(u'(\alpha_n) - u'(\beta_n))$ である．平均値の定理から $u'(\alpha_n) - u'(\beta_n) = u''(\gamma_n)(\alpha_n - \beta_n)$ となる $-\frac{x}{n} < \beta_n < \gamma_n < \alpha_n < \frac{x}{n}$ が存在する．よって $u_n(x) = \frac{x}{n}(u''(\gamma_n)(\alpha_n - \beta_n))$ である．$\alpha_n - \beta_n \leq \frac{2x}{n}$ であり，また u'' は $[-a, a]$ 上連続であるから，有界である．よって $^\forall n, u''(\gamma_n) < M$ とできる $M > 0$ が存在する．以上より $|u_n(x)| \leq \frac{2x^2}{n}|u''(\gamma_n)| \leq \frac{2a^2M}{n^2}$ である．よって $\sum |f_n(x)| \leq 2a^2M\sum\frac{1}{n^2} < \infty$ である．これは $-a \leq x < 0$ でも成立し，また $x = 0$ なら $u_n(x) = 0$ であるから $x = 0$ でも成立する．ワイエルシュトラスの M 判定法より，$u_n(x)$ は絶対一様収束する．また (1) より収束先の関数は連続である．

$\boxed{2}$ (1)$N^2 \neq O$ より $N^2u \neq 0$ なる $u \in \mathbb{C}^3$ が存在する．この u について $c_1u + c_2Nu + c_3N^2u = 0$ とすると，N^2 を左からかけれ，$c_1N^2u = 0$ より $c_1 = 0$ である．よって N をかければ $c_2N^2u = 0$ より $c_2 = 0$ である．よって $c_3 = 0$ である．よって u, Nu, N^2u は一次独立である．

(2)(1) の $P = \begin{pmatrix} N^2u & Nu & u \end{pmatrix}$ とすれば P は正則で $J := P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

$g\colon V \to V$ を $g(X) = JX - XJ$ とする．$f(PXP^{-1}) = NPXP^{-1} - PXP^{-1}N = Pg(X)P^{-1}$ である．$f^2(PXP^{-1}) = f(Pg(X)P^{-1}) = Pg(g(X))P^{-1} = Pg^2(X)P^{-1}$ である．繰り返して $f^k(PXP^{-1}) = Pg^k(X)P^{-1}$ である．P は正則であるから，$f^k = 0 \Leftrightarrow g^k = 0$ である．また $g^k = 0$ ならば $g^{k+1} = 0$ である．

$g^2(X)=J(JX-XJ)-(JX-XJ)J=J^2X-2JXJ+XJ^2, g^3(X)=J^2(JX-XJ)-2J(JX-XJ)J+(JX-XJ)J^2=-3J(JX-XJ)J, g^4(X)=-3J(J^2-2JXJ+XJ^2)J=6J^2XJ^2, g^5(X)=6J^2(JX-XJ)J^2=0$ である．よって $g^5=0$ である．

$X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ とすると $J^2XJ^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq O$ であるから，$g^4\neq 0$ である．よって $g^k=0$ となる最小の k は 5 である．

$\boxed{3}$ (1)$d\colon A\times A\to\mathbb{R}$ が距離関数であるとは次の条件を満たすことである．

(i)$\forall x,y\in A, d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

(ii)$\forall x,y\in A, d(x,y)=d(y,x)$

(iii)$\forall x,y,z\in A, d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

(2) 任意の異なる二点 $x,y\in A$ について $d(x,y)>0$ である．$\varepsilon=d(x,y)/2$ とすれば，$x\in B(x,\varepsilon):=\{a\in A\mid\ d(x,a)<\varepsilon\}, y\in B(y,\varepsilon), B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)=\emptyset$ である．よって A はハウスドルフ空間である．

(3)$x\in A$ を一つ固定する．$S=\{B(x,n)\mid\ n\in\mathbb{N}\}$ は A の開被覆である．コンパクトであるから，有限部分集合 $\{B(x,n_i)\mid\ i=1,\cdots,m\}$ が存在して，$A\subset\bigcup_{i=1}^m B(x,n_i)$ となる．$n=\max_{i=1,\cdots,m}n_i$ とすれば $A\subset B(x,n)$ である．したがって任意の二点 $y,z\in A$ について $d(y,z)\leq d(y,x)+d(x,z)<2n$ である．

(4)$x\in U_{x,y}, y\in V_{x,y}, U_{x,y}\cap V_{x,y}=\emptyset$ となる開集合対 $(U_{x,y},V_{x,y})$ を各 $(x,y)\in C_1\times C_2$ ごとに定める．

$S_y=\{U_{x,y}\mid\ x\in C_1\}$ は C_1 の開被覆であるから，有限部分集合 $C_{1,y}\subset C_1$ が存在して，$S'_y=\{U_{x,y}\mid\ x\in C_{1,y}\}$ が C_1 の開被覆となる．また $V_y=\bigcap_{x\in C_{1,y}}V_{x,y}$ とする．有限個の共通部分であるから V_y は開集合である．

$T=\{V_y\mid\ y\in C_2\}$ は C_2 の開被覆であるから，有限部分集合 $C'_2\subset C_2$ が存在して，$T'=\{V_y\mid\ y\in C'_2\}$ が C_2 の開被覆となる．$U=\bigcap_{y\in C'_2}(\bigcup_{S'_y}U_{x,y}), V=\bigcup_{y\in C'_2}V_y$ とする．C'_2 は有限集合であるから，U,V は開集合である．

S'_y は C_1 の開被覆であるから，$C_1\subset U$ であり，また $C_2\subset V$ も明らか．$z\in U\cap V$ とすると，ある $y'\in C'_2$ について $z\in V_{y'}\subset V_{x,y'}\quad(\forall x\in C_{1,y'})$ である．また $z\in U$ より $\forall y\in C'_2$ について $z\in\bigcup_{S'_y}U_{x,y}$ である．とくに $z\in\bigcup_{S'_{y'}}U_{x,y'}$ である．したがってある $x'\in C_{1,y'}$ について $z\in U_{x',y'}$ である．よって $z\in U_{x',y'}\cap V_{x',y'}$ となり矛盾．よって $U\cap V=\emptyset$ である．

$\boxed{4}$ (1)$zf(z)$ は $z=0$ で正則であるから，$z=0$ は f の一位の極である．よって $\lim_{z\to 0}zf(z)=\frac{1}{a^2}$ より主要部は $\frac{1}{a^2z}$ である．

(2)$f(z)-\frac{1}{a^2z}$ は原点近傍で有界である．よって $\int_{C_r}f(z)-\frac{1}{a^2z}dz\to 0\quad(r\to 0)$ である．よって $\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{1}{a^2z}dz=\lim_{r\to 0}\int_0^\pi\frac{1}{a^2re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=\frac{i\pi}{a^2}$ である．

$$\left|\int_{C_r}f(z)dz\right|=\left|\int_0^\pi\frac{\exp\bigl(ie^{i\theta}\bigr)}{re^{i\theta}(r^2e^{2i\theta}+a^2)}rie^{i\theta}d\theta\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{\exp(-\sin\theta)}{(r^2e^{2i\theta}+a^2)}\right|d\theta\leq\int_0^\pi\frac{1}{|r^2-a^2|}d\theta=\frac{\pi}{|r^2-a^2|}\to 0\quad(r\to\infty)$$

(3)$D_{r,R}$ の内部に f は $z=ia$ を特異点にもち，$z=ia$ を除いて f は $D_{r,R}$ で正則であるから留数定理より $\int_{\partial D_{r,R}}f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,ia)$ である．$\lim_{z\to ia}(z-ia)f(z)=\frac{e^{iia}}{ia(ia+ia)}=-\frac{1}{2a^2e^a}$ より $\int_{\partial D_{r,R}}f(z)dz=-\frac{\pi ie^{-a}}{a^2}$ である．

(4)$\partial D_{r,R}$ と実軸の正の部分との共通部分を α_1，負の部分との共通部分を α_2 とする．向きは $\partial D_{r,R}$ と同じ向きを入れる．$\int_{\alpha_1}f(z)dz=\int_r^R\frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)}dx=\int_r^R\frac{\cos x+i\sin x}{x(x^2+a^2)}dx$ である．また $\int_{\alpha_2}f(z)dz=\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)}dx=$

$\int_R^r \frac{e^{-ix}}{-x(x^2+a^2)}(-1)dx = \int_r^R \frac{-\cos x+i\sin x}{x(x^2+a^2)}dx$ である．よって

$$-\frac{\pi i e^{-a}}{a^2} = \lim_{r\to 0, R\to\infty}\int_{\partial D_{r,R}} f(z)dz = \lim_{r\to 0, R\to\infty}\left(\int_{-C_r} f(z)dz + \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz\right)$$
$$= -\frac{i\pi}{a^2} + \lim_{r\to 0, R\to\infty}\left(\int_r^R \frac{2i\sin x}{x(x^2+a^2)}dx\right) = -\frac{i\pi}{a^2} + 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$$

0.18 R2 数学 A

$\boxed{1}$ (1) 一様連続でないと仮定する．このとき $^\exists\varepsilon > 0, ^\forall\delta > 0, ^\exists x, y \in [0,1], |x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$ である．$\delta = \frac{1}{n}$ として，x_n, y_n を定める．数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は有界閉区間 $[0,1]$ に含まれるので，収束部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}_{n=1}^\infty$ を持つ．$|y_{\varphi(n)} - x_*| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - x_*| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - x_*| \to 0 \quad (n\to\infty)$ より，$y_{\varphi(n)} \to x_*$ である．

よって $\varepsilon \leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \to |f(x_*) - f(x_*)| = 0$ となり矛盾する．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，一様収束性からある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$^\forall x \in [0,1], ^\forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ である．この N について f_N の連続性から，$^\exists\delta > 0, ^\forall x \in [0,1], |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_*)| < \varepsilon$ である．よって $|x - x_*| < \delta$ なら $|f(x) - f(x_*)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_*)| + |f_N(x_*) - f(x_*)| < 3\varepsilon$ となるから連続.

$|f(x)|$ は有界閉区間の連続関数だから最大値 M が存在する．また一様収束するから，$^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall n > N, \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| < M$ である．すなわち $|f_n(x)| < 2M \quad (n > N, x \in [0,1])$ である．

f_n の最大値を M_n とし, $L := \max\{M, M_1, \ldots, M_N\}$ とする．このとき $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq L \quad (x \in [0,1])$ である．

有界閉区間の定数関数はルベーグ可積分であるから，ルベーグの収束定理より，$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ である．

$\boxed{2}$ (1)$|PQ|$ で線分 PQ の長さを表す．$|PQ| = \sqrt{54}$ である．よって $|PR| = \sqrt{(m+4)^2 + (n+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{54}$ である．$\overrightarrow{PQ} = (5, 5, -2), \overrightarrow{PR} = (m+4, n+1, -1)$ で内積は $\sqrt{54}^2 \cos\frac{\pi}{3} = 27$ であるから，$5(m+4) + 5(n+1) + 2 = 27$ である．よって $m + n = 0$ である．$54 = (m+4)^2 + (-m+1)^2 + 1$ より，$m = 3, -6$ である．よって $(m, n) = (3, -3), (-6, 6)$ である．

(2)$\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\}$ は線形独立である．よってこの基底からつくられる全ての内積が，f で保たれることが f が直交変換であることの必要十分条件.

$m = 3, n = -3$ のとき，$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -9, (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) = -9, (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}) = -9$ である．よって (*) を満たす全ての f は直交変換だから，$f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OR}$ より 2 個.

$m = -6, n = 6$ のとき，$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -9, (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) = 18, (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}) = 18$ である．$f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OR}$ より (*) を満たす直交変換は存在しない.

$\boxed{3}$ (1)$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ が x, y に収束するとする．$x \neq y$ ならハウスドルフであるから，開集合 U, V が存在して $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ である．x に収束するから，ある N_1 が存在して $^\forall n > N_1, x_n \in U$ である．同様に y に収束するから，ある N_2 が存在して $^\forall n > N_2, x_n \in V$ である．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$x_n \in U \cap V$ となり矛盾する．よって $x = y$ である．

(2)$X = \{0, 1\}$ として X に密着位相をいれる．$x_n = 0$ とする数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は $0, 1$ に収束する．

(3)$f(x)$ を含む任意の開集合 V をとる．$x \in f^{-1}(V) = U$ であるから，ある N が存在して $^\forall n > N, x_n \in U$ である．よって $^\forall n > N, f(x_n) \in V$ であるから $f(x_n)$ は $f(x)$ に収束する．

$\boxed{4}$ (1)$f(z) = \frac{\exp\left(-z^2/2\right)}{z}$ とする．$z = 0$ は f の一位の極で，主要部は $\frac{1}{z}$ である．よって $f(z) - \frac{1}{z}$ は原点近傍で正則であるから, 有界である．よって $\int_{C_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{z}dz \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$ である．$\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{z}dz = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = \frac{i\pi}{4}$

であるから，$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz \to \frac{i\pi}{4} \quad (\varepsilon \to 0)$ である．

(2)

$$\left|\int_{S_R} \frac{\exp\left(-z^2/2\right)}{z} dz\right| = \left|\int_0^R \frac{\exp\left(\frac{y^2-R^2}{2}\right)e^{iRy}}{R+iy} idy\right| \leq \frac{1}{Re^{\frac{R^2}{2}}}\int_0^R e^{\frac{y^2}{2}}dy$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{Re^{\frac{R^2}{2}}}\int_0^R e^{\frac{y^2}{2}}dy = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{R^2}{2}} + R^2 e^{\frac{R^2}{2}}} e^{\frac{R^2}{2}} = 0$$

よって $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{\exp\left(-z^2/2\right)}{z}dz = 0$ である．

(3)$I_{\varepsilon,R}$ を ε から R までの実軸上の積分経路とする．$D_{\varepsilon,R}$ を $R+Ri$ から $(\varepsilon+\varepsilon i)/\sqrt{2}$ までの積分経路とする．

$-C_\varepsilon, I_{\varepsilon,R}, S_R, D_{\varepsilon,R}$ を結んでできる閉曲線を C とする．f は原点以外で正則であるか，$\int_C f(z)dz = 0$ である．

$$\int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_R^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2(1+i)^2}{2}\right)}{x(1+i)}(1+i)dx = -\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\exp\left(-ix^2\right)}{x}dx = -\int_\varepsilon^R \frac{\cos x^2}{x}dx - \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^{\varepsilon}\frac{\cos x^2}{x}dx + i\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\sin x^2}{x}dx$$

$$\int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x}dx,\ \int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \cos x^2}{x}dx - \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^{\varepsilon}\frac{\cos x^2}{x}dx + i\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\sin x^2}{x}dx$$

ここで $\frac{cos x^2}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x^4}{2x} + \cdots$ であるから，$\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^{\varepsilon}\frac{\cos x^2}{x} - \frac{1}{x}dx \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$ である．また $\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^{\varepsilon}\frac{1}{x}dx = \log\sqrt{2}$ である．

よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon\to 0, R\to 0}\int_{-C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz + \int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz \\
&= -\frac{i\pi}{4} + \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \cos x^2}{x}dx - \log\sqrt{2} + i\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \cos x^2}{x}dx = \log\sqrt{2}$$

0.19 R4 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$[0, \frac{\pi}{4}]$ と $[\frac{\pi}{4}, \infty)$ にわけて収束をしらべる．

$x \in [0, \pi/4]$ で $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ である．不等式を 0 から x まで積分すると，$\frac{1}{2}x \leq \sin x \leq x$ を得る．

$\int_0^{\pi/4}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|dx \leq \int_0^{\pi/4}\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx = \begin{cases}\left[\frac{1}{2-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right]_0^{\pi/4} & (\alpha \neq 2) \\ [\log x]_0^{\pi/4} & (\alpha = 2)\end{cases}$ であるから $\alpha < 2$ で絶対収束する．

$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx \geq \int_0^{\pi/4}\frac{1}{2x^{\alpha-1}}dx$ であるから，$\alpha \geq 2$ で発散する．

$1 < \alpha < 2$ のとき，$\int_{\pi/4}^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|dx \leq \int_{\pi/4}^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{\pi/4}^\infty$ であるから $\alpha > 1$ で絶対収束する．

$\alpha \leq 1$ のとき，$p > q \geq \pi/4$ に対して

$$\left|\int_q^p \frac{\sin x}{x^\alpha}dx\right| = \left|\left[\frac{-\cos x}{x^\alpha}\right]_q^p - \int_q^p \frac{\cos x}{\alpha x^{\alpha+1}}dx\right| \leq \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{p^\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_q^p \frac{1}{x^{\alpha+1}}dx \leq \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{p^\alpha} + \left[-\frac{1}{x^\alpha}\right]_q^p \to 0 \quad (p, q \to \infty)$$

であるから，$\alpha \leq 1$ で収束する．

以上より $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ は $\alpha < 2$ で収束する．

(2)(1) の計算から $1<\beta<2$ で収束し，$\beta\geq 2$ で発散することがわかる．

$\beta\leq 1$ のとき，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\beta}dx=\int_0^\pi\frac{\sin x}{(x+n\pi)^\beta}dx\geq\frac{1}{((n+1)\pi)^\beta}\int_0^\pi\sin xdx=\frac{2}{((n+1)\pi)^\beta}$$
$$\int_1^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{n=1}^\infty\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\sum_{n=1}^\infty\frac{2}{((n+1)\pi)^\beta}$$

よって $\beta\leq 1$ で発散する．

以上より $1<\beta<2$ で収束し，$\beta\leq 1, 2\leq\beta$ で発散する．

$\boxed{2}$ (1)$b(x,y)=x^TAy=x^T(-A^T)y=-((Ax)^Ty)^T=-y^T(Ax)=-b(y,x)$.

(2)(1) より $y\in\ker f$ のときに示せば十分．$b(x,y)=x^TAy=x^T0=0$.

(3)$Ax=v+u, v\in V, u\in\ker f$ と一意に表せる．$B(x,v)=b(x,Ax-u)=x^TA(Ax-u)=x^TA^2x=-x^TA^TAx=-(Ax)^TAx$ である．$x\in V$ より $Ax\neq 0$ であるあから，$(Ax)^TAx\neq 0$．よって $B(x,v)\neq 0$.

(4)$\det A=\det -A^T=(-1)^n\det A$ より n が奇数なら $\det A=0$.

(5)V の基底 $\{v_1,\ldots,v_k\}$ を一つ固定する．$b_{ij}=B(v_i,v_j)$ として行列 $M=(b_{ij})$ を定める．$x=\sum x_iv_i, y=\sum y_iv_i\in V$ に対して $B(x,y)=(\sum_i x_iv_i)^TA(\sum_j y_jv_j)=\sum_{i,j}x_iy_jv_i^TAv_j=\sum_{i,j}x_iy_jb_{ij}=x^TMy$ である．(この転置は $\mathbb{R}^n$ の標準基底による座標の転置ではなく，固定した V の基底による座標の転置) (1) から $b_{ij}=b(v_i,v_j)=-b(v_j,v_i)=-b_{ji}$ であるから M は交代行列．M が正則でないとする．このときある $x\in V$ について $Mx=0$ であるが任意の y について $B(x,y)=-B(y,x)=-y^TBx=0$ となり (3) に矛盾．よって M は正則．$\det M\neq 0$ だから (4) より k は偶数．$\operatorname{rank}A=n-\dim\ker f=\dim V=k$ より $\operatorname{rank}A$ は偶数.

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x\in X$ について $(x,y)\in U$ より $x\in S_x, y\in V_x, S_x\times V_x\subset U$ なる開集合 S_x, V_x が存在する．$\{S_x \mid x\in X\}$ は X の開被覆であるから有限部分被覆 $\{S_{x_i}\mid i=1,\ldots,n\}$ が存在する．$V=\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ とすると任意の $x\in X, y\in V$ について $x\in S_{x_i}$ なる x_i が存在して $y\in V_{x_i}$ であるから $(x,y)\in U$．よって $X\times V\subset U$ である．

(2)$X\times Y$ の閉集合 C を任意にとる．$U:=X\times Y\setminus C$ とする．$y\notin P_Y(C)$ について $X\times y\subset U$ であるから (1) より $X\times V_y\subset U$ なる開集合 V_y が存在する．$V:=\bigcup_{y\in P_Y(C)}V_y$ とすると，$Y\setminus P_Y(C)\subset V$ である．$v\in V$ に対して $X\times\{v\}\subset U$ であるから ${}^\forall x\in X, (x,v)\notin C$ である．よって $v\notin P_Y(C)$ であるから $Y\setminus P_Y(C)=V$ より P_Y は閉写像.

$\boxed{4}$ (1)f の極は $z=i,-i$ である．$z=i$ の留数は $\lim(z-i)f(z)=\frac{e^{xi}}{2i}$ である．$z=-i$ の留数は $\lim(z+i)f(z)=\frac{e^{-xi}}{-2i}$ である．

(2)$i,-i$ は共に D の内部の点である．留数定理から $\int_C f(z)dz=2\pi i(\frac{e^{xi}}{2i}+\frac{e^{-xi}}{-2i})=\pi(e^{xi}-e^{-xi})=2\pi i\sin x$ である．

(3)C_1 を $1+Ri$ から Ri への有向線分，C_2 を半径 R の円の実部が負の部分を反時計回りに周る曲線，C_3 を $-Ri$ から $1-Ri$ への有向線分とする．C_1,C_2,C_3,L_R を合わせると C となる．$R>2$ のとき

$$\left|\int_{C_1}f(z)dz\right|=\left|\int_1^0\frac{e^{x(t+Ri)}}{(t+Ri)^2+1}dt\right|\leq\int_0^1\left|\frac{e^{xt}}{t^2-R^2+1+tRi}\right|dt\leq\int_0^1\frac{e^x}{R^2}dt\to 0\quad(R\to\infty)$$
$$\left|\int_{C_3}f(z)dz\right|=\left|\int_0^1\frac{e^{x(t-Ri)}}{(t-Ri)^2+1}dt\right|\leq\int_0^1\left|\frac{e^{xt}}{t^2-R^2+1-tRi}\right|dt\leq\int_0^1\frac{e^x}{R^2}dt\to 0\quad(R\to\infty)$$
$$\left|\int_{C_2}f(z)dz\right|=\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{e^{xRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}+1}Rie^{i\theta}d\theta\right|\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\frac{e^{xR\cos\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}R\right|d\theta\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{R}{R^2-1}d\theta\to 0\quad(R\to\infty)$$

よって $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R}f(z)dz=\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sin x$ である．

0.20 R5 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$f_n(0)=\frac{(-1)^n}{2n}$ である．$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$ とする．$S_{2n}(0)=\sum_{k=1}^{2n}f_k(0)=\sum_{k=1}^{n}f_{2k-1}(0)+f_{2k}(0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{2(2k-1)}+\frac{1}{2(2k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-2}{4k(4k-2)}$ である．よって $S_{2n}(0)$ は単調減少である．$S_{2n+1}(0)=\frac{-1}{2}+\sum_{k=1}^{n}f_{2k}(0)+f_{2k+1}(0)=\frac{-1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(2k)}-\frac{1}{2(2k+1)}=\frac{-1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{4k(4k+2)}$ である．よって $S_{2n+1}(0)$ は単調増加である．$S_{2n+1}(0)=S_{2n}(0)+\frac{-1}{2(2n+1)}$ より $S_{2n+1}(0)<S_{2n}(0)$ である．よって共に有界数列であるから，収束する．また $\lim S_{2n+1}(0)=\lim(S_{2n}(0)+\frac{-1}{2(2n+1)})=\lim S_{2n}(0)$ より極限値は一致する．よって $S_n(0)$ は収束する．

(2)$|f_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n}{2n+\sin x}\right|=\frac{1}{2n+\sin x}\geq\frac{1}{2n+1}$ である．よって $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\geq\int_1^{\infty}\frac{1}{2x+1}dx$ より発散する．

(3) まずは各点収束することを示す．(1) と同様に $S_{2n}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{2(2k-1)+\sin x}+\frac{1}{2(2k)+\sin x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-2}{(4k+\sin x)(4k-2+\sin x)}$ である．よって $S_{2n}(x)$ は単調減少である．$S_{2n+1}(x)=\frac{-1}{2+\sin x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(2k)+\sin x}-\frac{1}{2(2k+1)+\sin x}=\frac{-1}{2+\sin x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(4k+\sin x)(4k+2+\sin x)}$ である．よって $S_{2n+1}(x)$ は単調増加である．$S_{2n+1}(x)=S_{2n}(x)+\frac{-1}{2(2n+1)+\sin x}$ より $S_{2n+1}(x)<S_{2n}(x)$ である．よって共に有界数列であるから，収束する．また $\lim S_{2n+1}(x)=\lim(S_{2n}(x)+\frac{-1}{2(2n+1)+\sin x})=\lim S_{2n}(x)$ より極限値は一致する．よって $S_n(x)$ は収束する．$S_n(x)$ が $S(x)$ に各点収束するとする．

$$|S(x)-S_{2n}(x)|=\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty}f_{2k-1}(x)+f_{2k}(x)\right|=\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{-2}{(4k+\sin x)(4k-2+\sin x)}\right|\leq\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{2}{(4k-3)(4k-1)}\to 0\quad(n$$
$$|S(x)-S_{2n+1}(x)|=\left|\sum_{k=2n+2}^{\infty}f_{2k}(x)+f_{2k+1}(x)\right|=\left|\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{2}{(4k+\sin x)(4k+2+\sin x)}\right|\leq\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{2}{(4k-1)(4k+1)}\to 0\quad(n$$

共に x について一様収束する．よって $S_n(x)$ は $S(x)$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (1)$\{w,f(w),f^2(w),\ldots,f^m(w)\}$ が一次独立であり $\{w,f(w),f^2(w),\ldots,f^{m+1}(w)\}$ が一次従属となるような最小の m をとる．$m=n-1$ なら V の次元が n であることより条件をみたすから，このような m は存在する．

一次従属であるから，$f^{m+1}(w)=a_0w+a_1f(w)+\cdots+a_mf^m(w)$ となる $a_0,a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{C}$ が存在する．このとき $f^{m+2}(w)=a_0f(w)+a_1f^2(w)+\cdots+a_mf^{m+1}(w)=a_0w+(a_1+a_0)f(w)+\cdots+(a_m+a_{m-1})f^m(w)$ と表せる．$f^{m+3},f^{m+4},\ldots$ も同様に表せる．

よって $f^n(w)$ は $w,f(w),f^2(w),\ldots,f^{m-1}(w)$ の線形結合で表せるから $f^n(w)\in W$．

(2)(1) で定めた m について，W は $\{w,f(w),\ldots,f^m(w)\}$ で生成されるから，m 次元ベクトル空間．よって $k=m$ である．

(3)$\dim W=n$ より $W=V$ である．よって $\{w,f(w),\ldots,f^{n-1}(w)\}$ は V の基底である．この基底に関す

る，f の表現行列は $f^n(w)=\alpha w$ より $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．よって固有方程式は

$$\det\begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -t \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\alpha + (-t)^n$$

である．

$\boxed{3}$ (1)$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ とする．ある正の実数 r が存在して，$rx_1=x_2, r^{-1}y_1=y_2$ である．よって $x_1=r^{-1}x_2, y_1=ry_2$ で r^{-1} は正の実数であるから，$(x_2,y_2)\sim(x_1,y_1)$ である．

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2),(x_2,y_2)\sim(x_3,y_3)$ とする．ある正の実数 r_1,r_2 が存在して，$r_1x_1=x_2, r_1^{-1}y_1=y_2, r_2x_2=x_3, r_2^{-1}y_2=y_3$ である．よって $r_2r_1x_1=x_3,(r_2r_1)^{-1}y_1=y_3$ であるから，$(x_1,y_1)\sim(x_3,y_3)$ である．

よって $\sim$ は同値関係である．

(2)$a\neq 0, b\neq 0$ のとき $A_{a,b}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy=ab, ax>0\right\}$ である．実際，$(x,y)\sim(a,b)$ なら $rx=a, r^{-1}y=b$ より $xy=ab$ であり，$r>0$ より a と x は同符号である．また $xy=ab\neq 0$ より $x\neq 0, y\neq 0$ であるから $ax>0$ である．逆に (x,y) が $xy=ab, ax>0$ を満たすとする．$x/a=r>0$ とすれば，$ar=x, r^{-1}b=y$ であり $(x,y)\sim(a,b)$ である．

$a<0, b\neq 0$ のとき $A_{a,b}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x<0, y=0\right\}$ である．これは明らか．よって $B=\bigcup_{(a,b)\in I} A_{a,b} = \{(x,y)\in\mathbb{R} \mid -1\leq xy\leq 1, x<0\}$ である．したがって $\overline{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid -1\leq xy\leq 1, x\leq 0\}$ より $\overline{B}\setminus B = \{(x,y)\in\mathbb{R} \mid x=0\}$ である．

(3)$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ から X への標準射影を p とする．$A_{-1,0}$ と $A_{0,1}$ について考える．$A_{-1,0}\in U\subset X$ なる開集合 U について $(-1,0)\in A_{-1,0}\subset p^{-1}(U)$ よりある $\varepsilon>0$ が存在して $(-1,0)$ を中心とする半径 ε の開球 $B((-1,0),\varepsilon)\subset p^{-1}(U)$ である．同様に $A_{0,1}\in V\subset X$ なる開集合 V について $(0,1)\in A_{0,1}\subset p^{-1}(V)$ よりある $\delta>0$ が存在して $B((0,1),\delta)\subset p^{-1}(V)$ である．$\gamma=\min\{\varepsilon,\delta\}$ とする．$(-1,\gamma)\in p^{-1}(U), (-1,-\gamma)\in p^{-1}(V)$ である．$p(-1,\gamma)\sim p(-1,-\gamma)$ であるから $A_{-1,\gamma}\in U, A_{-1,-\gamma}\in V$ である．よって $U\cap V\neq\emptyset$ である．

任意の開集合 U,V について成り立つから，X はハウスドルフでない．

$\boxed{4}$ (1)$1<|z|<2$ なら $\frac{|z|}{2}<1, \frac{1}{|z|}<1$ である．よって共に有界数列であるから $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\dots)-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots)$ である．

(2)$\sin z$ の零点は $z=n\pi$ である．$(\sin z)'|_{n\pi}=(-1)^n$ であるから，$z=n\pi$ は $\sin z$ の一位の零点である．すなわち $\sin z=(z-n\pi)g(z), g(n\pi)\neq 0$ となる正則関数 $g(z)$ が存在する．また $|f(n\pi)|\leq|\sin n\pi|=0$ より $f(n\pi)=0$ である．$h(z)=\frac{f(z)}{\sin z}$ とする．$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)h(z)=\lim_{z\to n\pi}\frac{f(z)}{g(z)}=0$ である．すなわち $z=n\pi$ は $h(z)$ の除去可能な特異点である．$|h(z)|\leq 1$ となるから，リュービルの定理より h は定数関数で $h(z)\equiv\alpha\in\mathbb{C}$ とできる．したがって $f(z)=\alpha\sin z$ である．

(3) 実数値関数 u,v を用いて $g(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ と表せる．g は正則関数であるから，u,v は C^∞ 級関数である．またコーシー・リーマンの方程式 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ を満たす．

実数値関数 s,t を用いて $\overline{g(\overline{x+iy})}=s(x,y)+it(x,y)$ と表せる．$\overline{g(\overline{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$ であるから，$s(x,y)=u(x,-y), t(x,y)=-v(x,-y)$ である．したがって s,t は C^∞ 級関数である．$s_x=u_x=v_y=t_y, s_y=-u_y=v_x=-t_x$ であるから，s,t はコーシー・リーマンの方程式を満たす．よって $\overline{g(\overline{z})}$ は正則関数である．

0.21　R6 数学 A

$\boxed{1}$ (1) 一様収束であるから，$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall n \geq N,\ \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ となる．$f(x)$ は連続であるから可積分である．

$$\left|\int_a^b f(x) - f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \to 0 \quad (n \to \infty)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(2)$x \in [a,b]$ に対して $0 < g(x) < 1$ であるから，$\sum_{k=0}^{\infty} g(x)^k$ は収束する．$g(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} g(x)^k$ とする．$g(x)$ は有界閉区間上の連続関数であるから，$^\forall x, g(x) < M < 1$ となる M が存在する．

$$\left|\sum_{k=0}^n g(x)^k - g(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^n g(x)^k - \sum_{k=0}^\infty g(x)^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^\infty g(x)^k\right| \leq \frac{g(x)^{n+1}}{1-g(x)} \leq \frac{M^{n+1}}{1-M}$$
$$\sup_{x\in[a,b]} \left|\sum_{k=0}^n g(x)^k - g(x)\right| \leq \frac{M^{n+1}}{1-M} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より一様収束．

(3)$1 \leq x \leq 3$ のとき，$0 < \frac{x}{1+x} < 1$ であるから，$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k$ は $\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}} = 1 + x$ に一様収束する．したがって

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^3 \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{1+x}\right)^k dx = \int_1^3 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{1+x}\right)^k dx = \int_1^3 1 + xdx = 6$$

$\boxed{2}$ (1)λ に対応する固有ベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ をとる．$Tv = \lambda v$ である．$T^2v = T(Tv) = \lambda Tv = \lambda^2 v$ であるから，λ^2 は T^2 の固有ベクトルである．

(2)$T^k = 0$ とする．T の固有値 λ に対して (1) と同様にして λ^k が T^k の固有値であることがわかる．零写像の固有値は全て零であるから，$\lambda^k = 0$ である．よって $\lambda = 0$ である．

(3)$F = \mathbb{C}$ より V は T の広義固有空間に分解できる．T の固有値は 0 のみであるから，V が T の広義固有空間である．すなわち $V = \left\{v \in V \mid {}^\exists n, T^n v = 0\right\}$ である．V の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に対して，$T^n v_i = 0$ となる n をそれぞれ n_i とする．$N := \max\{n_1, \cdots, n_n\}$ とすれば，$T^N = 0$ である．

(4)$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば，$f(x) = Ax$ で定まる線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $\det \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ であるから，0 以外の実数を固有値にもたない．$A^2 = -E$ であるから，f はべき零でない．

$\boxed{3}$ (1) 成立．

(2) 成立．$f(K)$ が連結でないと仮定する．$f(K) = (U \cap f(K)) \cup (V \cap f(K)), (U \cap f(K)) \cap (V \cap f(K)) = \emptyset, (U \cap f(K)) \neq \emptyset \neq (V \cap f(K))$ となる Y の開集合 U, V が存在する．$(f^{-1}(U) \cap K) \cup (f^{-1}(V) \cap K) = K, (f^{-1}(U) \cap K) \cap (f^{-1}(V) \cap K) = \emptyset, (f^{-1}(U) \cap K) \neq \emptyset \neq (f^{-1}(V) \cap K)$ である．K が連結であることに矛盾．

(3)$K \cap A$ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を任意にとる．$S' = S \cup \{X \setminus A\}$ とする．S' は K の開被覆であるから有限部分被覆 $\{U_{\lambda_1}, \cdots, U_{\lambda_n}, X \setminus A\}$ が存在する．よって $\{U_1, \cdots, U_n\}$ が $K \cap A$ の有限部分被覆であるからコンパクト．

$\boxed{4}$ (1)f が a で正則であるから，ある a の ε 近傍で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ とできる．一様収束しているから，$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ である．よって $f'(a) = c_1$ である．

$\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ の $z=a$ における留数は $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ のローラン展開が $\sum_{k=-2}^{\infty} c_k(z-a)^{k-2}$ であるから c_1 である．よって留数は $f'(a)$

(2)$(z^2+1)^2=(z-i)^2(z+i)^2$ である．よって極は $z=i,-i$．$\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$ は $z=i$ で正則であるから，$\frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$ の $z=i$ における留数は (1) より $\frac{d}{dz}\left.\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right|_{z=i}=\frac{1}{2ei}$ である．同様に $z=-i$ における留数は $\frac{d}{dz}\left.\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right|_{z=-i}=0$ である．

(3)

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz\right|\leq\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2}Rie^{i\theta}d\theta\right|\leq\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{-R\sin\theta}}{(R^2-1)^2}\right|d\theta=\frac{\pi}{(R^2-1)^2}\to 0\quad(R\to\infty)$$

(4)$R_1,R_2>1$ に対して，

$$\begin{aligned}\left|\int_{R_1}^{R_2}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\right|&\leq\int_{R_1}^{-1}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx+\int_{1}^{R_2}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx\\&\leq\int_{R_1}^{-1}\frac{1}{x^4}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx+\int_{1}^{R_2}\frac{1}{x^4}dx\to 0\quad(R_1,R_2\to\infty)\end{aligned}$$

よって広義積分は収束する．留数定理から $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i\frac{1}{2ei}=\frac{\pi}{e}$ である．

0.22　R7 数学 A

$\boxed{1}$ $^\forall x, f(x)\leq M$ より

$$\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\int_0^1 M^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=M\therefore\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\leq M$$

である．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$A_\varepsilon=\{x\in[0,1]\mid |f(x)-M|\leq\varepsilon\}$ とする．μ をルベーグ測度とすると

$$\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_{A_\varepsilon} f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_{A_\varepsilon}(M-\varepsilon)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=(M-\varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{n}}\to M-\varepsilon\quad(n\to\infty)$$

である．ε は任意であるから，$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=M$ である．

$\boxed{2}$ (1)E_{ij} を i,j 成分が1で他が0である行列とする．このとき $\{E_{ij}\mid i\neq j\}\cup\{E_{ii}-E_{nn}\mid i=1,2,\ldots,n-1\}$ は V の基底となる．よって V の次元は n^2-1 である．

(2)$X,Y\in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{tr}(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}y_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_{ji}x_{ij}=\mathrm{tr}(YX)$ である．よって $X\in V$ に対して $\mathrm{tr}\bigl(A^{-1}XA\bigr)=\mathrm{tr}\bigl(XAA^{-1}\bigr)=\mathrm{tr}(X)=0$ である．すなわち $f_A(V)\subset V$ である．また任意の $X\in V$ に対して $f_A(AXA^{-1})=X$ であるから，$f_A(V)=V$ である．

(3)A が対角化可能であるから正則行列 P と対角行列 D が存在して $P^{-1}AP=D$ である．A が正則であるから D も正則である．すなわち D の対角成分は全て非零である．$D=\begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}$ $(^\forall i, d_i\neq 0)$ とする．$M_n(\mathbb{C})$ の基底 $\{E_{ij}\mid i,j\in 1,2,\ldots,n\}$ に対して $\bigl\{PE_{ij}P^{-1}\bigm| i,j\in 1,2,\ldots,n\bigr\}$ も基底である．$P^{-1}f_A(PE_{ij}P^{-1})P=P^{-1}A^{-1}PE_{ij}P^{-1}AP=D^{-1}E_{ij}D=\frac{d_j}{d_i}E_{ij}$ である．すなわち $f(PE_{ij}P^{-1})=\frac{d_j}{d_i}PE_{ij}P^{-1}$ である．よって固有ベクトルからなる基底が存在するから対角化可能.

$\boxed{3}$ (1) 略

(2) ハウスドルフ A のコンパクト部分集合 C を任意にとる．$a\in A\setminus C$ を固定する．$c\in C, a\in A$ に対して $c\in U_c, a\in V_c, U_c\cap V_c=\emptyset$ なる開集合 U_c,V_c が存在する．$\{U_c\mid c\in C\}$ は C の開被覆であるから，有限部分

被覆 $\{U_{c_1}, U_{c_2}, \ldots, U_{c_n}\}$ が存在する．$V_a = \bigcap_{i=1}^{n} V_{c_i}$ は開集合であり，$V_a \cap C = \emptyset$ である．$A \setminus C = \bigcup_{a \in A \setminus C} V_a$ であるから $A \setminus C$ は開集合である．よって C は閉集合.

(3)K を $X \times Y$ のコンパクト集合とする．$\pi(K)$ はコンパクト集合であるから，$f^{-1}(\pi(K))$ はコンパクト集合．$z \in h^{-1}(K)$ に対して $(f(z), g(z)) \in K$ であるから，$f(z) \in \pi(K)$ である．よって $h^{-1}(K) \subset f^{-1}(\pi(K))$ である．また K は閉集合であるから，$h^{-1}(K)$ は閉集合である．コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトであるから，$h^{-1}(K)$ はコンパクト集合．よって h は固有.

$\boxed{4}$ (1)$z = -1$ が極であり，留数は $f(-1) = \exp((a-1)\log(-1)) = \exp((a-1)(0+i\pi)) = e^{i(a-1)\pi}$ である．

(2)

$$\left| \int_{C_{(r,\varepsilon)}} f(z)dz \right| = \left| \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{\exp\bigl((a-1)\log re^{i\theta}\bigr)}{re^{i\theta}+1} ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left| \frac{r^{a-1}}{re^{i\theta}+1} r \right| d\theta \leq \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{r^a}{|r-1|} d\theta \leq 2\pi \frac{r^a}{|r-1|} \to 0 \quad (r \to 0)$$

(3)$R > r$ として $re^{i\varepsilon}$ から $Re^{i\varepsilon}$ までの経路を $S_{(r,R)}$ とし，$Re^{i(2\pi-\varepsilon)}$ から $re^{i(2\pi-\varepsilon)}$ までの経路を $T_{(r,R)}$ とする．積分経路 C を $C = S_{(r,R)} + C_{(R,\varepsilon)} + T_{(r,R)} - C_{(r,\varepsilon)}$ とすれば，留数定理から $\int_C f(z)dz = 2\pi i e^{i(a-1)\pi}$ である．また (2) の不等式から $\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_{(R,\varepsilon)}} f(z)dz = 0$ である．

$$\int_{S_{(r,R)}} f(z)dz = \int_r^R \frac{\exp\bigl((a-1)\log xe^{i\varepsilon}\bigr)}{xe^{i\varepsilon}+1} e^{i\varepsilon} dx = \int_r^R \frac{x^{a-1}e^{ia\varepsilon}}{xe^{i\varepsilon}+1} dx$$

$\left| \frac{x^{a-1}e^{ia\varepsilon}}{xe^{i\varepsilon}+1} \right| \leq \frac{x^{a-1}}{|x-1|}$ である．右辺は $[r, R]$ で可積分であるからルベーグの収束定理より $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{(r,R)}} f(z)dz = \int_r^R \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{a-1}e^{i(a-1)\varepsilon}}{xe^{i\varepsilon}+1} dx = \int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1} dx$ である．同様に $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{T_{(r,R)}} f(z)dz = \int_R^r \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{a-1}e^{ia(2\pi-\varepsilon)}}{xe^{i(2\pi-\varepsilon)}+1} dx = -e^{2\pi a} \int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1} dx$ である．よって

$$2\pi i e^{i(a-1)\pi} = \int_{S_{(r,R)}} f(z)dz + \int_{T_{(r,R)}} f(z)dz + \int_{C_{(r,\varepsilon)}} f(z)dz + \int_{C_{(R,\varepsilon)}} f(z)dz \to (1 - e^{2i\pi a}) \int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1} dx$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1} dx = \frac{2\pi i e^{i(a-1)\pi}}{1 - e^{2i\pi a}} = 2\pi i \frac{1}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$