0.1 H7 数学必修

https://warp.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/259094/www.math.sci.kobe-u.ac.jp/HOME/nakanisi/mc/7m1.gif

$\boxed{1}$ $A^2 = -I_n$ より $(\det A)^2 = \det A^2 = \det(-I_n) = (-1)^n$ であるから，$\det A \neq 0$．同様に $\det B \neq 0$．$AB+BA = O_n$ より $\det A \det B = \det(-BA) = (-1)^n \det B \det A$ ここで n が奇数ならば, $\det A = 0 \vee \det B = 0$ となり矛盾する．よって n は偶数である．

$Tr(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = Tr(BA)$ である．A は正則であるから，A^{-1} が存在して $ABA^{-1} + B = O_n$．よって $Tr(ABA^{-1}) + Tr(B) = 2Tr(B) = 0$．すなわち $Tr(B) = 0$．同様にして $Tr(A) = 0$．

$\boxed{2}$ (1)$\sin x$ のマクローリン展開は $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ である．$-\cos x + 1 > 0 \quad (x > 0)$ より $[0, x]$ で積分して，$-\sin x + x > 0 \quad (x > 0)$．同様にして $\cos x + \frac{x^2}{2!} - 1 > 0 \quad (x > 0)$，$\sin x - x + \frac{x^3}{3!} > 0 \quad (x > 0)$．よって $x - \sin x < \frac{x^3}{3!} \quad (x > 0)$ を得る．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\frac{1}{3!}$ より収束級数.

(2)$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$

$x = uv, y = u(1-v)$ とおくと，ヤコビアンは $J = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$ である．また積分範囲は $u = x+y, v = \frac{1}{1+y/x}$ より $0 < u < \infty, 0 < v < 1$ である．よって

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u}u^{p-1}v^{p-1}u^{q-1}(1-v)^{q-1}|-u|dudv \\
&= \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \\
&= \Gamma(p+q)B(p,q)
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ (1) 指数が 2 であるから H は正規部分群.

剰余類 G/H は $x \in G \setminus H$ を用いて，$G/H = \{H, xH\}$ と表せる．$g = xh' \in G \setminus H, h \in H$ に対して，$ghg^{-1} = xh''$ なら $x^{-1}xh'hg^{-1} = h'' \in H$ より $g^{-1} \in H$ となり矛盾．よって $ghg^{-1} \in H$.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\}$ を H に対して $1 \cdot h = h, -1 \cdot h = h^{-1}$ とすれば，これは作用である．H の単位元以外の元は位数が 2 でないから，その軌道は二元集合である．単位元の軌道は $\{e\}$ である．

したがって軌道分解を考えれば H の位数は $2n+1$(n は e を含まない軌道の数) である．すなわち H の位数は奇数.

(2)$aha^{-1}h = ahah = (ah)^2$ で $ah \in G \setminus H$ より $(ah)^2 = e$．よって $aha^{-1}h = e$．どうように $haha^{-1} = (ha)^2 = e$．よって $aha^{-1} = h^{-1}$.

$\boxed{4}$ $F_k(x) = \max\limits_{0 \le i \le k} f_i(x)$ とすると，$F_{k+1}(x) = \max\{F_k(x), f_{k+1}(x)\}$ であるから，F_2 が連続であることを示せば，$F = F_r$ が連続であることは帰納的に示せる．

$F_2 = \frac{1}{2}(|f_1 - f_2| + f_1 + f_2)$ であるから，f_1, f_2 が連続ならば F_2 も連続.

よって F は連続である．

(2) $f_n(x,y) = \begin{cases} x^{1/n} & (x \ge 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$ とすれば，f_n は連続である．$G(x,y) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$ より G は連続でない.