0.1 H23 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h23.pdf

$\boxed{1}$ (1) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x-1 & 1-x & 0 \\ x-1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(-1) \begin{vmatrix} 1+x & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(x-1)^2(-x-1-x) = (x-1)^2(2x+1)$ である．

(2)$x \neq 1, -1/2$ のとき，A は正則だから $\mathrm{rank}A = 3$ である．

$x = 1$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の階数は 1 であるから $\mathrm{rank}A = 1$

$x = -1/2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & -3/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ より階数は 2 であるから $\mathrm{rank}A = 2$

(3)$AB = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -x-1 & -x-1 \\ -x-1 & -2x & -x-1 \\ -x-1 & -x-1 & -2x \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -x-1 & -x-1 \\ -x-1 & -2x & -x-1 \\ -x-1 & -x-1 & -2x \end{pmatrix}$ であるから $AB = BA$ である．

(4)$g_B(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 & -1 \\ -1 & -t & -1 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t+1 & -1+t & 0 \\ -1 & -t & -1 \\ 0 & t-1 & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -t-1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(t-1)^2 \begin{vmatrix} -t-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(t-1)^2(t+1+1) = -(t-1)^2(t+2)$ である．

よって固有値は $1, -2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は明らかに固有値 1 の固有ベクトルで一次独立．固有方程式における 1 の重複度が 2 であるからこれらは固有空間の基底.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 -2 の固有ベクトルである．

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ である．

(5)$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1-x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (1-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2x+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $P^{-1}AP =$

$\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2x+1 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$a,b\in R^\times$ の乗法的逆元を a^{-1},b^{-1} とする，$ab(b^{-1}a^{-1})=1$ より ab は可逆である．すなわち $R^\times$ は乗法で閉じている．$1,a^{-1}\in R^\times$ は明らか．結合律も成り立つ．よって群．

(2)x の同値類を $[x]$ で表す．$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の可逆元は 0 以外のすべての元である．$[3],[3]^2=[2],[3]^3=[6],[3]^4=[4],[3]^5=[5],[3]^6=[1]$ であるから巡回群．

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の可逆元は 8 と互いに素な $1,3,5,7$ の 4 つである．$[1]^2=[3]^2=[5]^2=[7]^2=[1]$ であるから位数 4 の元は存在しない．よって巡回群でない．

(3) 素数 p に対する有限体 F_p は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型である．これは環準同型 $\varphi\colon\mathbb{Z}\to F_p; n\mapsto n\cdot 1_{F_p}$ が全射であるから $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong F_p$ となり位数から $n=p$ とわかる．

$[1],[2]\in F_3$ は共に $x^2+1=0$ を満たさないから x^2+1 は $F_3[x]$ の既約多項式である．$F_3[x]$ は PID であるからイデアル (x^2+1) は極大イデアルで $F_3[x]/(x^2+1)$ は体．よって $(F_3[x]/(x^2+1))^\times=\{[1],[2],[x],[x+1],[x+2],[2x],[2x+1],[2x+2]\}$ である．$[x+1]^2=[2x],[x+1]^3=[2x+1],[x+1]^4=[2],[x+1]^5=[2x+2]$ より $[x+1]$ の位数は 8 であり巡回群となる．

$p=5$ のとき，$x^2+1=(x-2)(x-3)$ でありイデアルとして $(x-2)+(x-3)=(1)$ が成り立つから，中国剰余定理より $F_5[x]/(x^2+1)\cong F_5[x]/(x-2)\times F_5[x]/(x-3)\cong F_5\times F_5$ である．よって $(F_5[x]/(x^2+1))^\times\cong(F_5\times F_5)^\times=F_5^\times\times F_5^\times$ である．すなわち位数は 16 であるが，任意の元は 4 乗すると 1 になるから巡回群でない．

$\boxed{3}$ (1) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるとは，任意の異なる 2 点 $x,y\in X$ に対して開集合 U,V が存在して $x\in U,y\in V,U\cap V=\emptyset$ となることである．

(2) 異なる $x_1,x_2\in X$ に対して $f(x_1),f(x_2)$ は異なる．よって $f(x_1)\in U,f(x_2)\in V$ となる Y の開集合 U,V で $U\cap V=\emptyset$ なるものがある．$f^{-1}(U),f^{-1}(V)$ は X の開集合であり $x_1\in f^{-1}(U),x_2\in f^{-1}(V),f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=\emptyset$ である．よって X はハウスドルフ．

(3)X をコンパクト空間，Y をハウスドルフとし $f\colon X\to Y$ を全単射連続とする．X の閉集合 C をとる．C の開被覆 $C\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ をとる．$X=(X\setminus C)\cup\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ は X の開被覆であるからコンパクト性より有限集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ が存在して $X=(X\setminus C)\cup\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda$ よって $C\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda$ となるから C はコンパクトである．f は連続であるから $f(C)$ はコンパクトである．$y\notin f(C)$ を一つとる．各 $a\in f(C)$ に対して $y\in U_a,a\in V_a,U_a\cap V_a=\emptyset$ となる Y の開集合 U_a,V_a が存在する．$f(C)\subset\bigcup_{a\in f(C)}U_a$ であり $f(C)$ はコンパクトであるから有限集合 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ が存在して $f(C)\subset\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$ となる．$\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ は y を含む Y の開集合で $f(C)\cap\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}=\emptyset$ となるから $f(C)$ は閉集合である．よって f は全単射連続閉写像であるから同相．

$\boxed{4}$ (1)$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})=1,\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}=e$ である．充分大きい n で $(1+\frac{1}{n^2})<3$ より $(1+\frac{1}{n^2})^{2n}<3^{\frac{2}{n}}\to 0\quad(n\to\infty)$．よって $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{(1+n)^2}=e$ である．

(2)$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}2x=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．よって $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ である．

(3)$x>0$ で $e^{-x^2}<e^{-x}$ であり $\int_0^\infty e^{-x}dx$ は収束するから $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ も収束する．e^{-x^2} は偶関数であるから $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ は存在しそれを I とおく．

$$I^2=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

である．$(x,y)=(rcos\theta,rsin\theta)$ と極座標変換するとヤコビアンは r であり $I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^\infty=\pi$ である．よって $I=\sqrt{\pi}$ である．

$\boxed{5}$ (1)$|a_n|$ が 0 に収束しないとする．このとき $^\exists\varepsilon > 0, {}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \geq N$ で $|a_n| > \varepsilon$ である．$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \alpha$ とすればある N が存在して任意の $n \geq N$ について $|\sum_{k=0}^{n} a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ がなりたつ．$m > N$ で $|a_m| > \varepsilon$ なる m をとる．$|\sum_{k=0}^{m-1} a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ より $\alpha - \varepsilon/2 < \sum_{k=0}^{m-1} a_n < \alpha + \varepsilon/2$ だが $\alpha - \varepsilon/2 + a_m < \sum_{k=0}^{m} a_n < \alpha + \varepsilon/2 + a_m$ となり $a_m > \varepsilon$ なら $\alpha + \varepsilon/2 < \sum_{k=0}^{m} a_n$，$a_m < -\varepsilon$ なら $\alpha - \varepsilon/2 > \sum_{k=0}^{m} a_n$ となり矛盾．よって $|a_n|$ は 0 に収束する．

(2) $\sup_{|x|\leq r} |a_n x^n| = |a_n| r^n$ である．また $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ より任意の n について $|a_n| \leq M$ となる定数 M が存在する．$|x| \leq r < 1$ より $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M|r|^k = \frac{M}{1-r}$ である．優級数定理から $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は一様収束する．