0.1 R4 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$g_A(t)=\begin{vmatrix}2-t & a & 0\\ a & 2-t & a\\ 0 & a & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)\begin{vmatrix}2-t & a\\ a & 2-t\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a & 0\\ a & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)((2-t)^2-a^2)-a^2(2-t)=(2-t)(t^2-4t+4-a^2)$ である．$t^2-4t+4-a^2=0$ を満たす t の値は $t=2\pm\sqrt{2}a$ である．よって固有値は $2,\ 2+\sqrt{2}a,\ 2-\sqrt{2}a$ である．

(2)$\det A=\begin{vmatrix}2 & a & 0\\ a & 2 & a\\ 0 & a & 2\end{vmatrix}=2(2^2-a^2)-a^2 2=-4a^2+8$ である．よって $a\neq\pm\sqrt{2}$ のとき，A は正則であるから A の階数は 3 である．

$a=\sqrt{2}$ のとき，$A=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ より，A の階数は 2 である．

$a=-\sqrt{2}$ のとき，$A=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2} & -2\\ 0 & -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ より，A の階数は 2 である．

(3)$f(kv)={}^t(kv)Akv=k^2v^tAv=k^2f(v)$ であるから，f は線形写像でない．

(4) 固有値 λ に対する固有ベクトル空間を $W(\lambda)$ と表す．$a\neq 0$ のとき，A の固有値は全て異なる．ノルムが 1 となるベクトル $v_1\in W(2), v_2\in W(2+\sqrt{2}a), v_3\in W(2-\sqrt{2}a)$ をとる．A は対称行列であるから，固有ベクトルは直交し，$\mathbb{R}^3$ の基底となっている．$f(v+u)={}^t(v+u)A(v+u)=f(v)+f(u)+{}^tvAu+{}^tuAv=f(v)+f(u)+2({}^tv)Au$ である．よって $\mathbb{R}^3\ni v=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3$ とすると，$f(v)=c_1^2f(v_1)+f(c_2v_2+c_3v_3)+2c_1({}^tv_1)A(c_2v_2+c_3v_3)=c_1^2f(v_1)+c_2^2f(v_2)+c_3^2f(v_3)=2c_1^2+(2+\sqrt{2}a)c_2^2+(2-\sqrt{2}a)c_3^2$ である．よって f は全射である．

$a=0$ のとき $f(v)={}^tvAv=2v^tv=2\|v\|^2$ である．よって f は全射でない．

$\boxed{2}$ (1)G を $\mathbb{Z}$ の部分群とする．n を G に含まれる最小の正の整数とする．$\langle n\rangle\subset G$ である．$x\in G\backslash\langle x\rangle$ がとれると仮定する．$x<0$ なら $-x\in G\setminus\langle x\rangle$ であるから $x>0$ として一般性を失わない．$x=nq+r\ (0\leq r<n)$ とできる．$r\in G$ である．n の最小性から $r=0$ であるがこのとき，$x\in\langle n\rangle$ である．これは矛盾．よって $G=\langle x\rangle$．

(2) (a)$\sqrt{200}-3\sqrt{18}=10\sqrt{2}-9\sqrt{2}=\sqrt{2}$ である．したがって $\langle\sqrt{2}\rangle\subset G_1$ である．逆に $n\sqrt{18}+m\sqrt{200}=(3n+10m)\sqrt{2}$ であるから $G_1=\langle\sqrt{2}\rangle$ である．すなわち巡回群．

(b)G_2 が $\alpha\in\mathbb{R}$ によって生成される巡回群とする．このとき $n\alpha=\sqrt{20}=2\sqrt{5}, m\alpha=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$ をみたす $n,m\in\mathbb{Z}$ が存在する．よって $2m\sqrt{5}=10n\sqrt{2}$ である．したがって $5m^2=5n^2 2$ である．左辺は 2 の偶数乗を因数にもち，右辺は奇数乗を因数にもつから矛盾．よって巡回群でない．

(c)$(1,2),(3,4)$ で生成される群は $(1,2),(3,4)$ が可換であり，位数が共に 2 であることから $G_3=\{e,(1,2),(3,4),(1,2)(3,4)\}$ である．位数 4 の元が存在しないから巡回群でない．

(d)$(1,1)\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の位数は 6 である．G_4 の位数も 6 であるから巡回群．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x\in A$ について $x<\sqrt{2}$ であるから，$\sup A\leq\sqrt{2}$ である．任意の $\varepsilon>0$ について $1/n<\varepsilon$ をみたす正の整数 n が存在する．このとき $n\sqrt{2}-n(\sqrt{2}-\varepsilon)=n\varepsilon>1$ より $n(\sqrt{2}-\varepsilon)\leq m\leq n\sqrt{2}$ をみたす整数 m が存在する．このとき $m/n\leq\sqrt{2}$ より $m/n\in A$ であり，$\sqrt{2}-\varepsilon\leq m/n$ であるから $\sqrt{2}=\sup A$ である．

(2)$a_n>\alpha$ なる整数 n が存在すると仮定する．このとき $\varepsilon=(a_n-\alpha)/2$ とすると，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $m>N$ について $\alpha-\varepsilon<a_{n_m}<\alpha+\varepsilon$ であるが，$n_m>n$ なる整数 m について $a_{n_m}<\alpha+\varepsilon<a_n$ となり，非減少であることに矛盾．よって $a_n<\alpha$ である．

${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall m > N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_{n_m}$ である．$N_1 = n_{N+1}$ とすると，$n > N_1$ なる n について $|\alpha - a_n| < |\alpha - a_{N_1}| < \varepsilon$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である．

(3)$x - y = u, \sqrt{2}x = v$ と変数変換する．ヤコビアンは $\begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1/\sqrt{2}$ である．積分領域は $D'(t) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq t, 0 \leq v \leq \sqrt{2}u\}$ である．よって

$$\begin{aligned} f(t) &= t\left(1 - 2\iint_{D'(t)} e^{-u^2}/\sqrt{2}dudv\right) = t\left(1 - \sqrt{2}\int_0^t \int_0^{\sqrt{2}u} e^{-u^2} dvdu\right) \\ &= t\left(1 - \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{2}ue^{-u^2}du\right) = t\Big(1 + [e^{-u^2}]_0^t\Big) = te^{-t^2} \end{aligned}$$

$f'(t) = e^{-t^2}(1 - t^2)$ である．よって最大値は $1/e$ である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の異なる二点 $x, y \in A \subset X$ について X の開集合 U, V で $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．このとき $U \cap A, V \cap A$ は A の開集合であり，$x \in U \cap A, y \in V \cap A, (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ であるから A はハウスドルフ空間.

(2)$X = 0, 1$ に離散位相を入れる．$Y = \{0, 1\}$ に密着位相を入れる．このとき $f \colon X \to Y$ を $f(0) = 0, f(1) = 1$ とする．f は全単射であり X に離散位相が入っているから連続である．$f(\{1\}) = \{1\}$ は Y の開集合でないから逆写像は連続でない.

(3)$X \times Y$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．X の開集合 V_λ，Y の開集合 W_λ を用いて $U_\lambda = V_\lambda \times W_\lambda$ とかける．$\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の開被覆である．よって有限部分集合 $\Lambda_X \subset \Lambda$ が存在して $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_X} V_\lambda$ である．同様に Y についても有限部分集合 $\Lambda_Y \subset \Lambda$ が存在して $Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_Y} W_\lambda$ である．よって $X \times Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_X\cup\Lambda_Y} U_\lambda$ である．したがって $X \times Y$ はコンパクト.