0.1　H16 数学 A

$\boxed{1}$ λ,μ の固有空間をそれぞれ V_λ, V_μ とする．対角化可能であるから $V = V_\lambda \oplus V_\mu$ である．$W_\lambda = W \cap V_\lambda, W_\mu = W \cap V_\mu$ とする．$W_\lambda \cap W_\mu = W \cap V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$ である．また $w \in W$ に対して $w = w_\lambda + w_\mu$ となる $w_\lambda \in V_\lambda, w_\mu \in V_\mu$ が一意的に存在する．$W \ni f(w) - \mu w = (\lambda - \mu) w_\lambda$ より $w_\lambda \in W_\lambda$ である．同様に $w_\mu \in W_\mu$ である．よって $W = W_\lambda \oplus W_\mu$ である．W を f の固有空間の直和に分解できたから $f|_W$ は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)X のコンパクト集合 C をとる．$x \in X \setminus C$ を一つ固定する．各 $y \in C$ に対して $x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となる開集合 U_y, V_y が存在する．$\{V_y \mid y \in C\}$ は C の開被覆であるから有限部分集合 $C' \subset C$ が存在して $C \subset \bigcup_{y \in C'} V_y$ となる．$U = \bigcap_{y \in C'} U_y$ とする．U は x の開近傍であり $U \subset X \setminus C$ であるから x は C の外点．任意の x でなりたつから C は閉集合である．

(2)$A \cap B$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．$S \cup \{X \setminus A\}$ は B の開被覆である．したがって有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \cup (X \setminus A)$ となる．$A \cap B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ である．したがって $A \cap B$ はコンパクト集合である．

$\boxed{3}$ (1)$G(x) = \int_0^x f(x,y)dy$ とする．

$$\begin{aligned}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} &= \int_0^{x+h} \frac{f(x+h,y)}{h}dy - \int_0^x \frac{f(x,y)}{h}dy = \int_x^{x+h} \frac{f(x,y)}{h}dy + \int_0^{x+h} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy \\ &= \int_0^h \frac{f(x,y+x)}{h}dy + \int_0^x \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy + \int_x^{x+h} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy\end{aligned}$$

である．第一項は $\lim_{h\to 0} \int_0^h \frac{f(x,y+x)}{h}dy = \frac{\partial}{\partial h}\int_0^h f(x,y+x)dy = f(x,x)$ である．

第二項は $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)$ となる $\theta \in (0,1)$ が存在して $\int_0^x \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy \le \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)dy \le \infty$ であるから優収束定理より $\lim_{h\to 0}\int_0^x \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．

第三項はある 0 の近傍で $\left|\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right| \le M$ であるから $\lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy \le \lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} M dy = 0$ である．よって $G'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．

したがって $F'(x) = f(x,x) - f(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．さらに $F''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dy = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dy$ である．

$\boxed{4}$ 広義積分が収束することを示す．被積分関数の実部は $u(x) = \frac{x\cos x - \varepsilon \sin x}{x^2+\varepsilon^2}$ で虚部は $v(x) = \frac{x \sin x + \varepsilon \cos x}{x^2+\varepsilon^2}$ である．共に原点近傍で有界である．

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{-M} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx\right| &= \left|\int_1^M \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx\right| = \left|\left[\frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\right]_1^M - \int_1^M \sin x\left(\frac{1}{x^2+\varepsilon^2} - \frac{2x^2}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\right)dx\right| \\ &\le \left|\frac{M\sin M}{M^2+\varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1+\varepsilon^2}\right| + \int_1^M \left|\frac{(-x^2+\varepsilon^2)\sin x}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\right|dx \le \left|\frac{M\sin M}{M^2+\varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1+\varepsilon^2}\right| + \int_1^M \left|\frac{(x^2+\varepsilon^2)\sin x}{x^4}\right|dx\end{aligned}$$

よって $\int_1^\infty \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx, \int_{-\infty}^{-1} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx$ は収束する．から $u(x)$ の広義積分は収束する．同様に $v(x)$ の広義積分も収束する．したがって $u(x)+iv(x)$ の広義積分は収束する．

$f(z) = e^{iz}/(z-i\varepsilon)$ とすれば，f は $z \neq i\varepsilon$ で正則である．積分経路 C を原点中心の半径 $R > 2\varepsilon$ の上半平面の半円板の周とする．C_1 を実軸上の $-R$ から R までの部分，C_2 を半円とする．f の C での積分は留数定理

から $\int_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i\varepsilon) = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ である．C_2 での積分は $z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると，

$$\left| \int_{C_2} f(z)dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{iRe^{i\theta}} Rie^{i\theta}}{Re^{i\theta} - i\varepsilon} \right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{Re^{-R\sin\theta}}{R-\varepsilon} d\theta \leq \frac{\pi R}{R-\varepsilon} e^{-R} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

である．したがって $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ より $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = e^{-\varepsilon}$ である．