0.1 H17 数学必修

$\boxed{1}$ (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x}{(x^2+y^2)^2}2x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

x, y について対称だから

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\log\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

(2)$x/a = s, y/b = t$ と変数変換する．ヤコビアンは ab である．積分領域 D' は $D' = \left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le s, 0\le t, s^2+t^2\le 1\right\}$ である．よって $\int_D xdxdy = \int_{D'} saabdsdt = a^2b\int_{D'} sdsdt$ である．$s = r\cos\theta, t = r\sin\theta$ と変数変換する．ヤコビアンは r である．$\int_{D'} sdsdt = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^2\cos\theta rdrd\theta = \frac{1}{3}$ である．

よって $\int_D xdxdy = \frac{a^2b}{3}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\det A = a\begin{vmatrix} -3a+4 & -2a+3 \\ 4a-4 & 3a-3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -3a+4 & -2a+3 \\ a & a \end{vmatrix} = a^2(-a+1)$ である．

(2)$a \neq 0, 1$ で $\mathrm{rank}A = 3$ である．$a = 1$ のとき $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で $\mathrm{rank}A = 2$ である．

$a = 0$ のとき $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ で $\mathrm{rank}A = 1$ である．

(3)$a = 1$ である．$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$ とすれば解を持つ．この連立方程式の解は $c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ である．

$\boxed{3}$ f の連続性から $f(\alpha) = \lim_{x\to\alpha-0} f(x) \ge \lim_{x\to\alpha-0} x = \alpha, f(\alpha) = \lim_{x\to\alpha+0} f(x) \le \lim_{x\to\alpha+0} x = \alpha$ である．よって $f(\alpha) = \alpha$ である．

$x_1 < \alpha$ のとき．$x_n < \alpha$ なら $x_n < f(x_n) = x_{n+1}, f(x_n) < f(\alpha) = \alpha$ であるから数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ は有界単調増加であり収束する．$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$ とする．$f(\beta) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \beta$ である．よって $\beta = \alpha$ である．

$x_1 > \alpha$ のときも同様にして $\beta = \alpha$ である．

$\boxed{4}$ (1)$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ の積位相とは，$\{U\times Y \mid U\in\mathcal{O}_X\}\cup\{X\times V \mid V\in\mathcal{O}_Y\}$ を開基とする位相である．

(2)$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X\times Y$ を任意にとる．X, Y は弧状連結であるから，連続写像 $c_X\colon [0,1]\to X, c_Y\colon [0,1]\to Y$ であって $c_X(0) = x_1, c_X(1) = x_2, c_Y(0) = y_1, c_Y(1) = y_2$ となるものが存在する．$c\colon [0,1]\to X\times Y$ を $c(t) = (c_X(t), c_Y(t))$ と定める．

$X\times Y$ の開集合 W は $W = \bigcup_{i\in I} U_i\times V_i \quad (U_i\in\mathcal{O}_X, V_i\in\mathcal{O}_Y)$ とできる．

$c^{-1}(W) = \bigcup_{i\in I} c^{-1}(U_i\times V_i) = \bigcup_{i\in I}(c_X^{-1}(U_i)\cap c_Y^{-1}(V_i))$ である．$c_X^{-1}(U_i)\cap c_Y^{-1}(V_i)$ は $[0,1]$ の開集合であるから $c^{-1}(W)$ は開集合である．よって c は連続であるから $X\times Y$ は弧状連結．

(3)$X\times Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ を開被覆とする．$W_\lambda = \bigcup_{i_\lambda\in I_\lambda} U_{i_\lambda}\times V_{i_\lambda}$ とできる．このとき $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{i_\lambda\in I_\lambda} U_{i_\lambda}, Y =$

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{i_\lambda\in I_\lambda} V_{i_\lambda}$ である．コンパクト性から有限部分集合 $S \subset \{i_\lambda \mid \lambda\in\Lambda, i_\lambda\in\lambda\}$ がとれて $X = \bigcup_{U_{i_\lambda}\in S} U_{i_\lambda}$ となる．Y についても同様の有限部分集合 T がとれる．$S\times T$ は有限であり，$\bigcup_{(i_\lambda,j_\lambda)\in S\times T} U_{i_\lambda}\times V_{j_\lambda}$ は $X\times Y$ の開被覆である．すなわち $X\times Y$ はコンパクトである．

$\boxed{5}$ (1) $f(x)=-x, g(x)=-x+1$ である．

(2) $f\circ g(x)=f(-x+1)=x-1$ より $f\circ g$ はマイナス方向に 1 ずらす変換である．

(3)$-x+2=g(ax+b)=-(ax+b)+1=-ax+1-b$ より $a=1, b=-1$ である．よって $g\circ f\circ g(x)=-x+2$

(4)$-x+n=g(ax+b)=-ax+1-b$ より $a=1, b=1-n$ である．よって $g\circ(f\circ g)^{n-1}(x)=g(x-(n-1))=-x+n$ である．

(5)(2),(4) より $\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{Z}\}=H$ とわかる．$h(x)=ax+b\in H$ に対して $h^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ である．$h\circ(f\circ g)^n\circ h^{-1}=(h\circ f\circ g\circ h^{-1})^n$ より $h\circ f\circ g\circ h^{-1}\in\langle f\circ g\rangle$ を示せばよい．

$h\circ f\circ g\circ h^{-1}(x)=h\circ f\circ g(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a})=h\circ f(-\frac{x}{a}+\frac{b}{a}-1)=h(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}+1)=x-b+a+b=x-a=(f\circ g)^a\in\langle f\circ g\rangle$ である．

(6)$N=\langle x-3\rangle$ とする．$h\circ(x-3)\circ h^{-1}(x)=h(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}-3)=x-b-3a+b=x-3a$ より N は H の正規部分群．$H/N=\{[x],[x-1],[x-2],[-x],[-x-1],[-x-2]\}$ である．ここで $[f]$ は $f+N$ を表す．位数 6 の群であり，$[-x-2]\circ[-x]=[x-2], [-x]\circ[-x-2]=[x-1]$ より H/N は可換でない．すなわち $H/N\cong S_3$ である．