0.1 H19 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(y)-f(x)|=|\int_x^y f'(t)dt|\leq\int_x^y|f'(t)|dt$

(2)(i)$c>1$ より $|f(y)-f(x)|\leq\int_x^y At^{-c}dt=\frac{A}{-c+1}(y^{-c+1}-x^{-c+1})<\frac{A}{c-1}x^{1-c}\to 0\quad(x\to\infty)$ である．$x_n=f(n)$ とすれば $|x_n-x_m|\leq\frac{A}{1-c}m^{1-c}\to 0\quad(m\to\infty)$ である．したがって数列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ はコーシー列であるから，収束列でその収束先を α とする．任意の $\varepsilon>0$ に対してある $M>0$ が存在して $x>M$ なら $|f(x)-f([x]+1)|<\varepsilon$ である．ここで $[x]$ は x 以下の最大の整数．またある整数 N が存在して $n>N$ なら $|x_n-\alpha|<\varepsilon$ である．したがって $x>N+M$ なら $|f(x)-\alpha|\leq|f(x)-f([x]+1)|+|f([x]+1)-\alpha|<2\varepsilon$ となるから収束する．

(ii)$|f(x)-\alpha|=\lim_{y\to\infty}|f(y)-f(x)|\leq\lim_{y\to\infty}\frac{A}{c-1}x^{1-c}=\frac{A}{c-1}x^{1-c}$

$\boxed{2}$ $v\in\ker AC_1$ に対して $Cv\in\ker A$ であり C_1 が正則であるから $C_1\colon\ker AC_1\to\ker A$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1=\dim\ker A$ である．$v\in\ker AC_1$ に対して $B_1v\in\ker B_1AC$ である．B_1 が正則であるから $B_1\colon\ker AC_1\to\ker B_1AC$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1=\dim\ker B_1AC_1$ である．以上より $\dim\ker A=\dim\ker B_1AC_1=m-r$ である．同様に $\dim\ker A=\dim\ker B_2AC_2=m-s$ であるから $r=s$．

$\boxed{3}$ $f(x,y_0)\neq 0$ より $f(x,y_0)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ であるから，$(x,y_0)\in f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は開集合であるから，$f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ は開集合である．したがってある $X\times Y$ の開集合 $V_x\times U_x$ が存在して $(x,y_0)\in V_x\times U_x\subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\bigcup_{x\in X}V_x$ は X の開被覆であるから，有限部分被覆 $\{V_{x_1},\cdots,V_{x_n}\}$ が存在する．$U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{x_i}$ とすれば $X\times U\subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．

$\boxed{4}$ $f(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{z^4}$ とすれば $f(z)$ は $z\neq 0$ で正則であり，$z=0$ で極である．$z=0$ での f のローラン級数は

$$\begin{aligned}f(z)&=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-z)^n)/z^4\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!}-(-1)^n\frac{1}{n!})z^{n-4}\end{aligned}$$

である．z^{-1} の係数は $1/3$ である．

$r<1$ なら内部に特異点を持たないから $\int_{\Gamma_r}f(z)dz=0$ である．$r>1$ なら $z=0$ が特異点となるから留数定理より $\int_{\Gamma_r}f(z)dz=2\pi i/3$ である．