0.1 H26 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h26.pdf

$\boxed{1}$ (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y)/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y)/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．$x = y = 0$ でないなら一次従属である．$x = y = 0$ のときは $c \neq 0$ にたいして $c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ となるから一次独立でない.

(2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 11 & z-5x \end{vmatrix} = -(z-5x) - 11y$ である．$5x - 11y = z$ が成り立つとき一次従属.

(3)$\{u_1\}$ は一次独立である．$\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$ が一次独立と仮定する．このとき $c_1u_1 + \cdots + c_ku_k = 0$ とする．$\lambda_k c_1 u_1 + \cdots + \lambda_k c_k u_k = 0$ である．また A をかけると $\lambda_1 c_1 u_1 + \cdots + \lambda_k c_k u_k = 0$ である．よって $\lambda_1 c_1 u_1 + \cdots + \lambda_k c_{k-1} u_{k-1} = \lambda_k c_1 u_1 + \cdots + \lambda_k c_{k-1} u_{k-1}$ である．一次独立性から $\lambda_i c_i = \lambda_k c_i$ であり $\lambda_i \neq \lambda_k$ より $c_i = 0$ である．このとき $c_k = 0$ であるから $\{u_1, \ldots, u_k\}$ は一次独立である．

(4)(a)$c_0 x + c_1 Ax + \ldots c_{n-1}A^{n-1}x = 0$ とする．両辺に A^{n-1} をかけると $c_0 A^{n-1}x = 0$ である．$A^{n-1}x \neq 0$ であるから $c_0 = 0$ である．次に A^{n-2} をかければ $c_1 = 0$ が分かる．これを繰り返して $c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0$ であるから一次独立.

(b)n 個のベクトル $\{x, Ax, \ldots, A^{n-1}x\}$ が一次独立であるからこれは $\mathbb{R}^n$ の基底である．よって任意の $y \in \mathbb{R}^n$ は $y = c_0 x + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}x$ とかける．$A^n y = c_0 A^n x + \cdots + c_{n-1}A^{2n-1}x = 0$ であるから $A^n = O$ である．

$\boxed{2}$ (1)(a)$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+; x \mapsto e^x$ は全単射である．$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x)\varphi(y)$ であるから φ は群の同型写像である．

(b)$\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$ が群同型写像とする．$\varphi(1) = \alpha$ とする．$\varphi(\sum_{i=1}^{n} 1/n) = \varphi(1/n)^n = \alpha$ である．すなわち $\varphi(1/n) = \alpha^{1/n}$ である．$\alpha^{1/n}$ が有理数にならないような n は存在するからこれは φ が同型写像であることに矛盾.

(2)(a)G' の単位元を e' とする．$f\colon G \to G'$ に対して $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ である．$g \in G, x \in \ker f$ に対して $f(g^{-1}xg) = f(g)^{-1}f(x)f(g) = f(g)^{-1}f(g) = e'$ より $g^{-1}xg \in \ker f$ であるから $\ker f$ は正規部分群.

(b)$f(g+g') = (f_1(g+g'), f_2(g+g')) = (f_1(g)+f_1(g'), f_2(g)+f_2(g')) = (f_1(g), f_2(g)) + (f_1(g'), f_2(g')) = f(g) + f(g')$ である．よって f は準同型.

(3)$\pi_1\colon G \to G/N_1, \pi_2\colon G \to G/N_2$ を自然な全射とする．$\pi\colon G \to G/N_1 \times G/N_2$ を $\pi(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x))$ で定める．(2) から π は準同型である．$\ker \pi = \{x \in G \mid \pi(x) = (e_1, e_2)\} = \{x \in G \mid \pi_1(x) = e_1, \pi_2(x) = e_2\} = \{x \in G \mid x \in N_1, x \in N_2\} = N_1 \cap N_2$ である．

よって $N_1 \cap N_2$ は正規部分群で準同型定理から $G/(N_1 \cap N_2) \cong G/N_1 \times G/N_2$ である．右辺はアーベル群であるから，左辺もアーベル群である．

$\boxed{3}$ (1)(a)$x > 0$ で $1 - 1/(1+x) > 0$ である．よって $0 < \int_0^x 1 - 1/(1+t)dt = x - \log(1+x)$ である．

$x > 0$ で $x - 1 + 1/(1+x) \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{1}{1+x}} - 2 = 0$ であるから $0 < \int_0^x t - 1 + 1/(1+t)dt = x^2/2 - x + \log(1+x)$ である．すなわち $x - \log(1+x) < x^2/2$ である．

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n})) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < \infty$ であるから収束する．

(2)$f_x(x,y) = 2xe^{x-y^2} + (x^2 - 8y)e^{x-y^2} = (x^2 + 2x - 8y)e^{x-y^2}$ である．$f_y(x,y) = -8e^{x-y^2} - 2y(x^2-8y)e^{x-y^2} = (16y^2 - 2x^2y - 8)e^{x-y^2}$ である．$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ とすると，$x^2 + 2x - 8y = 0, 16y^2 - 2x^2y - 8 = 0$ である．これを解く．$(x^2 + 2x)y = x^2y + 4$ より $xy = 2$ である．よって $x \neq 0$ であるから $8y^2 - 4/y - 4 = 0$ である．

よって $8y^3-4y-4=0$ である．$8y^3-4y-4=(y-1)(8y^2+8y+4)$ であり $2y^2+2y+1=2(y+1/2)^2+1/2>0$ であるから $x=2, y=1$ が唯一の実数解である．

$f_{xx}=(2x+2)e^{x-y^2}+(x^2+2x-8y)e^{x-y^2}=(x^2+4x-8y+2)e^{x-y^2}$，$f_{xy}=-8e^{x-y^2}-2y(x^2+2x-8y)e^{x-y^2}=(-2x^2y-4xy+16y^2-8)e^{x-y^2}$，$f_{yy}=(32y-2x^2)e^{x-y^2}-2y(16y^2-2x^2y-8)e^{x-y^2}=(-32y^3+4x^2y^2+48y-2x^2)e^{x-y^2}$ である．よって $(2,1)$ におけるヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 6e & -8e \\ -8e & 24e \end{pmatrix}=80e^2>0$ であり $f_{xx}|_{(2,1)}=6e>0$ より f は $(2,1)$ で極小値 $f(2,1)=-4e$ をとる．

(3)$\sqrt{9-x^2-y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$ をみたすのは $x^2+y^2=4$ のときである．よって求める体積を V とする．$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$ とする．$V=\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$ である．$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)\quad(0\leq r\leq 2, 0\leq 2\pi)$ と極座標変換するとヤコビアンは r である．

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2(\sqrt{9-r^2}-\sqrt{1+r^2})rdrd\theta \\
&= 2\pi\int_0^2(\sqrt{9-r^2}-\sqrt{1+r^2})rdr \\
&= 2\pi\left(\int_0^2 r\sqrt{9-r^2}dr-\int_0^2 r\sqrt{1+r^2}dr\right) \\
&= 2\pi\left(\left[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{3/2}\right]_0^2-\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^2\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{3}(5^{3/2}-27)-\frac{1}{3}(5^{3/2}-1)\right) \\
&= 4\pi\left(14-5\sqrt{5}\right)/3
\end{aligned}
$$

(4) 任意の ε に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $n\geq N$ に対して $\alpha-\varepsilon<a_{n+1}-a_n<\alpha+\varepsilon$ である．よって $a_n+\alpha-\varepsilon<a_{n+1}<a_n+\alpha+\varepsilon$ である．すなわち任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $a_N+k\alpha-k\varepsilon<a_{N+1}+(k-1)\alpha+(k-1)\varepsilon<\cdots<a_{N+k}<a_N+k\alpha+k\varepsilon$ がなりたつ．よって $\frac{a_N+k\alpha-k\varepsilon}{N+k}<\frac{a_{N+k}}{N+k}<\frac{a_N+k\alpha+k\varepsilon}{N+k}$ である．$k\to\infty$ とすると $\alpha-\varepsilon<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}<\alpha+\varepsilon$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\alpha$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{2,3,4\}\subset A$ である．$0\in C\in\mathcal{O}$ に対して $X\setminus C$ が空集合，または有限集合であるから C は無限集合である．よって C は A の部分集合でない．よって $A^i=\{2,3,4\}$ である．$x\in X\setminus A$ は $x\neq 0$ であるから $x\in\{x\}\subset X\setminus A$ より $A^e=X\setminus A$ である．$0\in C\in\mathcal{O}$ は $C\cap X\setminus A\neq\emptyset$ となるから $A^f=\{0\}$.

(2)$x,y\in X\setminus\{0\}$ に対して $x\in\{x\}\in\mathcal{O}, y\in\{y\}\in\mathcal{O}, \{x\}\cap\{y\}=\emptyset$ である．$x=0, y\neq 0$ に対して $x\in X\setminus\{y\}\in\mathcal{O}$ であり $x\in\{x\}\cap(X\setminus\{y\})=\emptyset$ である．よってハウスドルフ．

(3)X の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を任意にとる．$0\in U_\lambda$ となる $\lambda\in\Lambda$ が存在する．$0\in U_\lambda$ であるから $X\backslash U_\lambda$ は有限集合か空集合である．空集合なら $\{u_\lambda\}$ が有限部分被覆となる．有限集合なら $X\setminus U_\lambda=\{x_1,\ldots,x_n\}$ とできる．$x_i\in U_{\lambda_i}$ となる $\lambda_i\in\Lambda$ が存在する．$\{U_{\lambda_1},\ldots,U_{\lambda_n},U_\lambda\}$ が有限部分被覆となる．よってコンパクト．

(4)$f\colon X\to Y; n\to 1/n$ とする．f は全単射である．U を Y の開集合とする．$0\notin U$ なら $0\notin f^{-1}(U)$ より $f^{-1}(U)\in\mathcal{O}$ である．$0\in U$ ならある $\varepsilon>0$ が存在して $(-\varepsilon,\varepsilon)\cap Y\subset U$ である．$0<1/n<\varepsilon$ なる n は無限個存在するから U は無限集合である．よって $f^{-1}(U)$ は 0 を含まない無限集合であるから $f^{-1}(U)\in\mathcal{O}$ である．よって f は連続．

$0\in B\in\mathcal{O}$ に対して $Y\setminus f(B)=f(X\setminus A)=\{1/n_1,\ldots,1/n_m\}$ は閉集合．よって $f(B)$ は開集合．$0\notin A\in\mathcal{O}$ に対して $f(A)=\{1/n\mid n\in A\}$ である．$1/(n+1)<1/n-\varepsilon_n<1/n<1/n+\varepsilon_n<1/(n-1)$ なる ε_n が存在する．よって $(1/n-\varepsilon_n, 1/n+\varepsilon_n)\cap Y=\{1/n\}$ より $f(A)$ は開集合．よって f は同相.