0.1 H25 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$u(x)=\int_0^x \phi(x)\psi(y)f(y)dy+\int_x^\pi \psi(x)\phi(y)f(y)dy=\phi(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\psi(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy$$

である．$\phi(y)f(y),\psi(y)f(y)$ は $(0,\pi)$ 上連続であるから，$u(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned}u'(x)&=\phi'(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\phi(x)\psi(x)f(x)+\psi'(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy-\psi(x)\phi(x)f(x)\\&=\phi'(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\psi'(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy\end{aligned}$$

先ほどと同様の理由で $u'(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned}u''(x)&=\phi''(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\phi'(x)\psi(x)f(x)+\psi''(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy-\psi'(x)\phi(x)f(x)\\&=-\phi(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy+\phi'(x)\psi(x)f(x)-\psi(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy+\psi'(x)\phi(x)f(x)\\&=-u(x)+\phi'(x)\psi(x)f(x)-\psi'(x)\phi(x)f(x)\end{aligned}$$

よって u は C^2 級である．

(2) $u''(x)+u(x)=(\phi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\phi(x))f(x)$ である．$h(x)=\phi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\phi(x)$ とおくと $h'(x)=\phi''(x)\psi(x)+\phi'(x)\psi'(x)-\psi''(x)\phi(x)-\psi'(x)\phi'(x)=-\phi(x)\psi(x)+\psi(x)\phi(x)=0$．より $h(x)=W$．

(3)ψ が C^2 級の実数値関数であることと $\psi''(x)+\psi(x)=0$ より $\psi(x)=\mathrm{Re}(Ae^{ix}+Be^{-ix})=C\cos x+D\sin x$．($A,B$ は,$C=A+B\in\mathbb{R},D=(A-B)i\in\mathbb{R}$ を満たす任意定数) である．

$\phi(x)=\sin x,W=1$ より $\cos x\psi(x)-\sin x\psi'(x)=1$．とくに $x=0$ で $\psi(0)=1$ である．よって $C=1$．また $\psi'(0)=0$ より $D=0$．よって $\psi(x)=\cos x$．

$\boxed{2}$ (1)$v\in f^{n+1}(V)=f^n(f(V))$ に対して，ある $u\in f(V)$ が存在して，$v=f^n(u)$ である．すなわち $f^{n+1}(V)\subset f^n(V)$ である．

(2)$f^{n+1}(V)\subset f^n(V)$ より $f^k(V)$ の次元は単調減少である．V は有限次元であるから，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq n_0$ ならば $f^{n+1}(V)=f^n(V)$ である．

(3)$f|_W : W\to W$ は $f|_W(W)=f|_W(f^{n_0}(V))=f^{n_0+1}(V)=W$ より全射である．有限次元ベクトル空間の全射自己準同型は同型射であるから，$f|_W$ は同型.

$\boxed{3}$ (1)$\pi^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ は R の開集合であるから，$\emptyset\in\mathcal{O}$ である．$\pi^{-1}(R/\sim)=R$ は R の開集合であるから，$R/\sim\in\mathcal{O}$ である．

$U,V\in\mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U),\pi^{-1}(V)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)=\pi^{-1}(U\cap V)$ は R の開集合である．よって $U\cap V\in\mathcal{O}$ である．

$U_\lambda\in\mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda)=\bigcup_\lambda\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合である．よって $\bigcup_\lambda U_\lambda\in\mathcal{O}$ である．

以上より $R/\sim$ は $\mathcal{O}$ を位相とする位相空間.

(2) ハウスドルフ空間であれば，一点集合は閉集合である．$\{x_0\}\subset R/\sim$ について $\pi^{-1}(\{x_0\})=D$ は R の閉集合ではない．よって $\{x_0\}$ は閉集合ではないから，ハウスドルフ空間でない.

(3)$\{x_0\}$ 以外の一点集合はすべて閉集合である．よって f が同相写像なら閉集合の像は閉集合であるから $f(x_0)=x_0$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を z に収束する任意の複素数列とする．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}&=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{z_n-z}\left(\frac{1}{e^{i\theta}-z_n}-\frac{1}{e^{i\theta}-z}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta\end{aligned}$$

ここで $|z|<1$ より任意の $\theta\in[0,2\pi]$ とある整数 N より大きい n に対して，ある $\varepsilon>0$ が存在して $|(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)|\geq|1-|z_n||1-|z||>\varepsilon$ である．したがって $\sup_{n>N}\left|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}\right|<|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{\varepsilon}|<M\in\mathbb{R}$ である．

よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{i\theta}((e^{i\theta}-z)^{-1})'d\theta$$

となり微分可能．よって f は $|z|<1$ で正則である．

(2)$|z|<1$ のとき $n!c_n=f^{(n)}(0)$ である．$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})((e^{i\theta}-z)^{-1})^{(n)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})(n!(e^{i\theta}-z)^{-n-1})d\theta$ である．よって $f^{(n)}(0)=n!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta$ である．

$$\begin{aligned}2\pi c_n&=\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta=\left[\phi(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{ni}d\theta=\left[\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2i^2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-n^2i^2}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2}d\theta\leq 2\pi\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

よって $n^2|c_n|\leq\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|$ である．

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2}<\infty$$

よって絶対収束するから，$|z|=1$ で $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ は収束する．

(4) ワイエルシュトラスの M 判定法と (3) での不等式から $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ は $|z|\leq 1$ で一様収束する．したがって一様収束先の関数は連続であるから，$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ である．