0.1 H31 数学必修

$\boxed{1}$ (1) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．よって固有値は $0, 1, a^4$ である．

(2)$P = [p_{ij}] \quad (p_{ij} = p_{ji})$ とする．$AP = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ a^2 p_{21} & a^2 p_{22} & a^2 p_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a^3 & a^4 & -a^4 \end{pmatrix}$ より $P = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & a^2 & -a^2 \\ a & -a^2 & b \end{pmatrix} \quad (b \in \mathbb{R})$ である．

(3)P が直交行列なら列ベクトル全体は正規直交基底をなすから，$a^2 - a^4 - a^2 b = 0, -a^3 + ab = 0$ である．よって $a = 0, \pm 1/\sqrt{2}$ である．$a = 0$ なら一列目が零ベクトルとなるから基底をなさない．よって $a \neq 0$ である．$a = \pm 1/\sqrt{2}$ とすると $b = 1/2$ である．このとき正規直交基底をなすことが確認できる．よって $a = \pm 1/\sqrt{2}$

(4)(3) より $a = \pm 1/\sqrt{2}$ である．$AP = B$ より ${}^t(AP)AP = {}^tBB$ である．${}^tAA$ の固有値 λ とその固有ベクトル v に対して ${}^tBB(P^{-1}v) = {}^tP{}^tAAv = P^{-1}\lambda v = \lambda(P^{-1}v)$ である．よって ${}^tBB$ の固有値は $0, 1, 1/4$ である．

$\boxed{2}$ (1) $BA = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_p \\ -\omega_p & 0 \end{pmatrix}$ である．$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, AB^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_p \\ -\omega_p & 0 \end{pmatrix}$ である．よって $AB^3 = BA$ である．

(2) 単位行列を E とする．$B^4 = E$ であるから B の位数は 4．$A^n = \begin{pmatrix} \omega_p^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \omega_p^n \end{pmatrix}$ である．ω_p は 1 の原始 p 乗根であり p は奇数であるから，A の位数は $2p$ である．

(3)G は A, B で生成されるから G の任意の元は $P = A^{i_1}B^{j_1}A^{i_2}\dots A^{i_n}B^{j_n} \quad (i_1, j_1, \dots, i_n, j_n \in \mathbb{Z})$ と表せる．A, B は共に位数が有限であるから $i_k, j_k \geq 0$ と仮定して一般性を失わない．$BA = AB^3$ より $B^{j_{k-1}}A^{i_k} = B^{j_{k-1}-1}AB^3A^{i_k-1} = AB^{3j_k}A^{i_k-1} = A^2B^{9j_k}A^{i_k-2} = \cdots = A^{i_k}B^{3^{i_k}j_k}$ である．P に繰り返しこれを適用することで $A^iB^j \quad (i, j \geq 0)$ とできる．

(4)A^i は対角成分以外が 0 であるから $A^i = B^j \neq E$ とすると，$j = 2$ である．$\omega_p^i = -1$ なら $\omega_p^{2i} = 1$ より $2i = pq$ なる整数 q が存在する．2 は p を因数にもたないから i は p の倍数である．これは $\omega_p^p = 1$ に矛盾．よって $H_1 \cap H_2 = \{E\}$ である．

(5)$A^iB^j \in G, B^n \in H_2$ を任意にとると，$(A^iB^j)^{-1}B^n(A^iB^j) = B^{4-j}A^{2p-i}B^nA^iB^j = B^{4-j}A^{2p-i}A^iB^{3n}B^j = B^{3n} \in H_2$ より H_2 は G の正規部分群である．$H_2H_1 = G$ も明らかである．したがって $G \cong H_2 \rtimes H_1$ である．すなわち G の位数は $2p \cdot 4 = 8p$ である．

$A^iB^j = A^sB^t$ とすると，$A^{i-s} = B^{t-j}$ であり，(4) より $i = s, j = t$ である．よって $G = \{A^iB^j \mid 0 \leq i \leq 2p-1, 0 \leq j \leq 3\}$ である．よって G の位数は $8p$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換する．ヤコビアンは r である．積分領域は $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4\}$ である．

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}dxdy = \iint_{D'} \frac{r\cos\theta}{1+r^2} r dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta d\theta \int_0^1 1 - \frac{1}{1+r^2} dr$$
$$= [\sin\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4}[r - \arctan r]_0^1 = \sqrt{2}(1 - \frac{\pi}{4})$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2xe^{-x^2-y^2} + (x^2-y^2)(-2x)e^{-x^2-y^2} = 2(-x^3+xy^2+x)e^{-x^2-y^2} \\
f_y &= -2ye^{-x^2-y^2} + (x^2-y^2)(-2y)e^{-x^2-y^2} = 2(y^3-x^2y-y)e^{-x^2-y^2} \\
f_{xx} &= 2(-3x^2+y^2+1)e^{-x^2-y^2} + 2(-x^3+xy^2+x)(-2x)e^{-x^2-y^2} = 2(2x^4-5x^2-2x^2y^2+y^2+1)e^{-x^2-y^2} \\
f_{yy} &= 2(3y^2-x^2-1)e^{-x^2-y^2} + 2(y^3-x^2y-y)(-2y)e^{-x^2-y^2} = 2(-2y^4+5y^2+2x^2y^2-x^2-1)e^{-x^2-y^2} \\
f_{xy} &= 2(xy)e^{-x^2-y^2} + 2(-x^3+xy^2+x)(-2y)e^{-x^2-y^2} = 4(x^3y-xy^3)e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

である．$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ とすると，$(x,y) = (0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$ である．各点におけるヘッシアンを考える．$(0,0)$ において $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ で，行列式が負であるから鞍点．$(0,\pm1)$ において $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ で，行列式が正で $1,1$ 成分が正であるから極小点．$(\pm1,0)$ において $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ で，行列式が正であり，$1,1$ 成分が負であるから極大点である．

(3)$|a_n| \leq |a_{n-1}|/c \leq |a_{n-2}|/c^2 \leq \cdots \leq |a_0|/c^n$ である．よって $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq |a_0| \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{|x|}{c})^n$ である．右辺は $|x|/c < 1$ で収束するから $|x| < c$ で収束する．よって絶対収束するから収束する．

$\boxed{4}$ (1)$p,q \in X, p \neq q$ を任意にとる．$d(p,q) > 0$ である．$r = d(p,q)/2$ とする．$x \in X$ に対して $B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ とすると，$B(x,\varepsilon)$ は開集合である．$y \in B(p,r) \cap B(q,r)$ とすると，$d(p,y) < r, d(q,y) < r$ であるが，$d(p,q) < d(p,y) + d(y,q) = 2r = d(p,q)$ となり矛盾．よって $B(p,r) \cap B(q,r) = \emptyset$ であるからハウスドルフ．

(2)$n \in \mathbb{Z}$ に対して開集合 $(-1/2+n, n+1/2)$ に対して $(-1/2+n, n+1/2) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$ であるから離散位相．

(3)$f(A)$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ より有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} f^{-1}(U_\lambda)$ である．よって $f(A) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ であるからコンパクト．