0.1 H30 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$f(X)$ が連結でないと仮定する．このとき，$f(X) \subset U \cup V$ なる Y の開集合 U, V で $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ かつ $U \cap f(X) \neq \emptyset, V \cap f(X) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する．$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = X$ であり，$f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は X の開集合である．$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = \emptyset$ で，$f^{-1}(U) \neq \emptyset, f^{-1}(V) \neq \emptyset$ であるから，X は連結でない．これは矛盾．よって，$f(X)$ は連結である．

(2)$Y = \{0, 1\}$ で Y に密着位相をいれる．$X = \{0, 1\}$ で X に離散位相をいれる．このとき $f(x) = x$ は連続であり，X はハウスドルフ空間である．しかし $Y = f(X)$ はハウスドルフ空間でない．

(3)$f(X)$ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，$T = \{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆である．X はコンパクトであるから，T の有限部分集合 $\{f^{-1}(U_{\lambda_i})\}_{i=1}^n$ が存在して，$X = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i})$ となる．$f(X) = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ であり，$f(X)$ はコンパクトである．

$\boxed{2}$ (1)$f^d(V) = V^d$ とする．$V^{d+1} = f^{d+1}(V) = f^d(f(V)) \subset f^d(V) = V^d$ である．よって，ベクトル空間の降下列 $V = V^0 \supset V^1 \supset \cdots \supset V^n \supset \cdots$ が定まる．f^d が零写像であるから $V^d = 0$ である．降下列であるから次元は単調減少する．$V^{i-1} = V^i$ なる i が存在したとき，$V^{i+1} = f^{i+1}(V) = f(V^i) = f(V^{i-1}) = V^i$ となるから，以降すべて等しい．よって次元は小さくなり続けたのち，ある次元で以降不変になる．

$f^d = 0$ より，$V^d = 0 = V^{d+1}$ である．また $f^{d-1} \neq 0$ より $V^{d-1} \neq 0$ である．すなわち V^d までは次元は小さくなり続ける．$\dim V = n$ より $d \leq n$ である．

(2)$v \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$ について，ある $w \in V$ が存在して $f(w) = v$ である．$0 = f(v) = f(f(w)) = f(w) = v$ であるから，$\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ である．

(3) 求める最大元は $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ である．ただし，$\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す．

V の基底を $\{v_1, \cdots, v_n\}$ とする．$g(v_i) = \begin{cases} 0 & (i \leq m) \\ v_{i-m} & (i > m) \end{cases}$ とする．g は線形写像である．$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Span}\{v_1, \cdots, v_{n-m}\}$ であり，$\ker(g) = \mathrm{Span}\{v_1, \cdots, v_m\}$ である．m の定義から $m \leq n - m$ であるから，$\dim(\mathrm{Im}(g) \cap \ker(g)) = \dim \mathrm{Span}\{v_1, \cdots, v_m\} = m$ である．よって $m \in A$ である．

次元定理より $f \colon V \to V$ に対して $n = \dim V = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \ker(f)$ である．よって $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)) \leq \min\{\dim \mathrm{Im}(f), \dim \ker(f)\} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ である．

よって $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ は A の上界である．よって m は求める最大元である．

$\boxed{3}$ (1)$2 - \cos x > 0$ より $0 \leq \int_0^x 2 - \cos t dt = 2x - \sin x$ である．よって $0 \leq \int_0^x 2t - \sin t dt = x^2 + \cos x - 1$ である．よって $0 \leq \int_0^x t^2 + \cos t - 1 dt = \frac{1}{3}x^3 + \sin x - x$ である．

よって $f_n(x) = n^{p+1}(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) \leq n^{p+1}(\frac{1}{3}(\frac{x}{n})^3) = \frac{x^3}{3n^{2-p}}$ である．$p < 2$ なら $0 < 2 - p$ より $n \to \infty$ で $f_n(x) \to 0$ である．

(2) 任意の有界閉区間 I について，$^\forall x \in I, |x| \leq M$ とできる $M > 0$ が存在する．$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_n(x)$ が一様コーシー列であることを示す．$n > m$ に対して $|S_n(x) - S_m(x)| = |\sum_{k=m+1}^n f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{M^3}{3k^{2-p}} = \frac{M^3}{3} \sum_{k=m+1}^n k^{p-2}$ である．$p < 1$ より $p - 2 < -1$ であるから，$\sum_{k=m+1}^n k^{p-2} \leq \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k t^{p-2} dt = \int_m^n t^{p-2} dt = \frac{1}{p-1}(n^{p-1} - m^{p-1}) \to 0 \quad (n, m \to \infty)$ である．よって一様コーシー列であるから，一様収束する．

(3)$|x| < \pi/6$ のとき，$\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$ である．よって $0 \leq \int_0^x \cos t - \frac{1}{2} dt = \sin x - \frac{x}{2}$ である．よって $0 \leq \int_0^x \sin t - \frac{t}{2} dt = -\cos x - \frac{x^2}{4} + 1$ である．よって $0 \leq \int_0^x -\cos t - \frac{t^2}{4} + 1 dt = -\sin x - \frac{x^3}{12} + x$ である．すなわち $\frac{x^3}{12} \leq x - \sin x \quad (|x| < \pi/6)$ である．

よってある x に対して $\frac{x}{n} < \frac{\pi}{6}$ なる n について $f_n(x) = n^{p+1}(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) \geq \frac{x^3}{12n^{2-p}}$ である．すなわち $p > 2$ なら $n \to \infty$ で $f_n(x) \to \infty$ である．

$p < 2$ のとき (1) より $f(x) = 0$ に各点収束する．$x = n\pi/2$ とすると，$f(n\pi/2) = 0, f_n(n\pi/2) = n^{p+1}(\frac{\pi}{2} - 1)$

であるから，$\mathbb{R}$ 上で一様収束しない．

$p=2$ のとき，各 x について $f_n(x) = n^3(\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}) = n^3(\frac{1}{3!}(\frac{x}{n})^3 - \frac{1}{5!}(\frac{x}{n})^5 + \cdots) \to \frac{x^3}{6} \quad (n \to \infty)$ である．よって $g(x) = \frac{x^3}{6}$ に各点収束する．$g(n\pi/2) = \frac{(n\pi/2)^3}{6} = n^3\frac{\pi^3}{48}, f_n(n\pi/2) = n^3(\frac{\pi}{2} - 1)$ より一様収束しない．

$\boxed{4}$ (1)

$$\lim_{z\to 0}\frac{ze^{iz}}{e^z - e^{-z}} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{iz} + ize^{iz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{z\to i\pi}\frac{(z-i\pi)e^{iz}}{e^z - e^{-z}} = \lim_{z\to i\pi}\frac{e^{iz} + i(z-i\pi)e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = -\frac{1}{2e^{\pi}}$$

である．よって $\mathrm{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{2}, \mathrm{Res}(f(z), i\pi) = -\frac{1}{2e^{\pi}}$ である．

(2)

$$\left|\int_{\Gamma_R^+} f(z)dz\right| \leq \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{i(R+it)}}{e^{R+it} - e^{-(R+it)}}idt\right| \leq \int_0^{\pi}\left|\frac{e^{-t}}{e^{R+it} - e^{-(R+it)}}\right|dt \leq \int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{||e^R| - |e^{-R}||}dt = \frac{1-e^{-\pi}}{e^R - e^{-R}} \to 0 \quad (R\to\infty)$$
$$\left|\int_{\Gamma_R^-} f(z)dz\right| \leq \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{i(-R+it)}}{e^{-R+it} - e^{-(-R+it)}}idt\right| \leq \int_0^{\pi}\left|\frac{e^{-t}}{e^{-R+it} - e^{R-it}}\right|dt \leq \int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{||e^{-R}| - |e^{R}||}dt = \frac{1-e^{-\pi}}{e^R - e^{-R}} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

(3)

図のように積分経路 $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ とそれらをつなげてできる閉曲線 C を定める．C 内で f は正則であるから $\int_C f(z)dz = 0$ である．

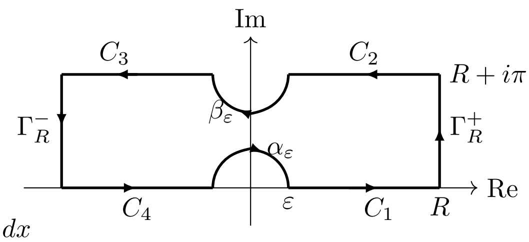

図 1　積分経路の図

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$
$$\int_{C_4} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{e^x - e^{-x}}dx = \int_{R}^{\varepsilon} -\frac{e^{i(-x)}}{e^{-x} - e^{x}}dx = \int_{\varepsilon}^{R}\frac{-\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$
$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{R}^{\varepsilon}\frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}}dx = e^{-\pi}\int_{R}^{\varepsilon}\frac{e^{ix}}{-e^x + e^{-x}}dx = e^{-\pi}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$
$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{-\varepsilon}^{-R}\frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}}dx = -e^{-\pi}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{e^x - e^{-x}}dx = e^{-\pi}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{-\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$

である．$z = 0, z = i\pi$ は f の一位の極であるから，原点近傍で有界になるように，$f(z)$ から主要部を引けば $\varepsilon \to 0$ で 0 になる．

$$\int_{\alpha_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\alpha_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{2z}dz + \int_{\pi}^{0}\frac{1}{2\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon ie^{i\theta}d\theta \to -\frac{i\pi}{2} \quad (\varepsilon\to 0)$$
$$\int_{\beta_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\beta_\varepsilon} f(z) + \frac{1}{2e^{\pi}z}dz + \int_{0}^{-\pi} -\frac{1}{2e^{\pi}\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon ie^{i\theta}d\theta \to \frac{i\pi}{2e^{\pi}} \quad (\varepsilon\to 0)$$

である．よって $0 = \int_C f(z)dz = 2i(1+e^{-\pi})\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}dx + \int_{\alpha_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\beta_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R^+} f(z)dz + \int_{\gamma_R^-} f(z)dz$ である．$R\to\infty, \varepsilon\to 0$ とすると，$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}dx = -\frac{\pi(e^{-\pi}-1)}{4(e^{-\pi}+1)}$ である．