0.1 H10 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $F(x,y)=x^3-2xy+y^3$ とする．$F_x=3x^2-2y, F_y=-2x+3y^2, F_{xx}=6x, F_{xy}=-2, F_{yy}=6y$ である．$(1,1)$ 付近で $F(x,y)=F(x,\varphi(x))$ と表せて $d\varphi/dx=-Fx/Fy, F_yd^2\varphi/dx^2=-(F_{xx}+F_{xy}d\varphi/dx)-(F_{xy}+F_{yy}d\varphi/dx)d\varphi/dx$ より

$d\varphi/dx|_{(1,1)}=-1, d^2\varphi/dx^2|_{(1,1)}=-16$．よって φ の 2 次までのテイラー展開は $1-(x-1)-8(x-1)^2$.

(2) (a) 被積分関数は積分区間で常に正の値をとるから，$A=\int_0^1|\sin x|/x^\alpha dx, B=\int_1^\infty|\sin x|/x^\alpha dx$ に分けて収束性をしらべる.

$\int_0^1\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ の収束性が問題になるのは 0 の近傍である．$x\to+0$ で $\sin x\sim x$ よりある $\delta>0$ が存在して $0\le x<\delta$ で $x/2\le\sin x\le 3x/2$.

$\frac{3}{2}\int_0^\delta x^{1-\alpha}dx\ge\int_0^\delta\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx\ge\int_0^\delta\frac{x}{2x^\alpha}dx=\frac{1}{2}\int_0^\delta x^{1-\alpha}dx.$

したがって A は $\alpha<2$ で収束する.

$\alpha=1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_1^\infty|\sin x|/xdx&\ge\sum_{n=1}^\infty\int_{n\pi+\pi/4}^{n\pi+3\pi/4}|\sin x|/xdx\\&\ge\sum_{n=1}^\infty\int_{n\pi+\pi/4}^{n\pi+3\pi/4}\frac{1}{\sqrt{2}x}dx\\&\ge\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{2}}[\log x]_{n\pi+\pi/4}^{n\pi+3\pi/4}\\&\ge\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{2}}[\log x]_{(n-1)\pi+3\pi/4}^{n\pi+3\pi/4}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\log(n\pi+3\pi/4)=\infty\end{aligned}$$

よって $\alpha=1$ で収束しない．$x\ge1,\alpha\le1$ なら $|\sin x|/x^\alpha\ge|\sin x|/x$ となるから B は収束しない.

$\alpha>1$ なら $B\le\int_1^\infty 1/x^\alpha dx$ で収束する.

以上より $1<\alpha<2$ で収束する.

(b) (a) と同様に $C=\int_0^1|\cos x|/x^\alpha dx, D=\int_1^\infty|\cos x|/x^\alpha dx$ に分けて収束性をしらべる.

D については B と同様に $\alpha>1$ で収束する.

C については A と同様に 0 付近での収束性が問題になるが，$x\to+0$ で $\cos x\sim1$ よりある $\delta>0$ が存在して $0\le x<\delta$ で $1/2\le\cos x\le3/2$．$\int_0^\delta\frac{3}{2x^\alpha}\ge\int_0^\delta\frac{|\cos x|}{x^\alpha}dx\ge\int_0^\delta\frac{1}{2x^\alpha}dx$．より C は $1>\alpha$ で収束する.

よって任意の α で発散する.

$\boxed{2}$ (1) $|\varphi(g)|=r\ge0$ とする．G は有限群であるから，$g^n=e$ となる n が存在する．$|\varphi(g^n)|=|\varphi(g)^n|=r^n$ である．群準同型は単位元を単位元にうつすから，$\varphi(e)=1$ よって $1=|\varphi(e)|=|\varphi(g^n)|=r^n$ すなわち $r=1$.

(2)φ に対して $S_\varphi=\sum_{g\in G}\varphi(g)$ とする.

G の正規部分群 N について，$\varphi\colon G\to\mathbb{C}^*$ から誘導される $G/N\to\mathbb{C}^*$ を $\bar\varphi$ とする.

$G=\bigsqcup_{[g]\in G/N}\{gn\mid n\in N\}$ であるから，$S_\varphi=\sum_{g\in G}\varphi(g)=\sum_{[g]\in G/N}\sum_{n\in N}\varphi(gn)=\sum_{[g]\in G/N}\bar\varphi([g])\sum_{n\in N}\varphi(n)=S_{\bar\varphi}\sum_{n\in N}\varphi(n)$ である.

$\varphi\equiv1$ なら $S=|G|$ である.

$\varphi\not\equiv1$ なら $\ker\varphi\ne G$ は正規部分群であるから $S_\varphi=S_{\bar\varphi}\sum_{n\in\ker\varphi}\varphi(n)=|\ker\varphi|S_{\bar\varphi}$ である.

$S_{\bar\varphi}$ を求めればいいから，あらためて $0\ne G/\ker f$ を G，$\bar\varphi$ を φ とおきなおす．φ は単射である．準同型定

理から $G \cong \mathrm{Im}\varphi \leq \mathbb{C}^*$ より G はアーベル群である．

$e \neq x \in G$ について $x^|G| = e$ より $\varphi(x)^{|G|} = 1, \varphi(x) \neq 1$．すなわち $x^n - 1 = 0$ の因数分解を考えれば $\varphi(x)^{|G|-1} + \cdots + \varphi(x) + 1 = 0$ である．$\langle x \rangle$ は G の正規部分群であるから，$S_\varphi = S_{\bar{\varphi}} \sum_{x^n \in \langle x \rangle} \varphi(x^n) = 0$

$\boxed{3}$ (1) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフ空間であるとは，任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して $U, V \in \mathcal{O}_X$ で $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となるものが存在することである．

(2)x, y についてハウスドルフ性からわかる U, V を $U_{x,y}, V_{x,y}$ とする．y, z および，x, z についても同様に $V_{y,z}, W_{y,z}, U_{x,z}, W_{x,z}$ をとる．$U = U_{x,y} \cap U_{x,z}, V = V_{x,y} \cap V_{x,z}, W = W_{y,z} \cap W_{x,z}$ とする．$x \in U, y \in V, z \in W$ はあきらか．$U \cap V = U_{x,y} \cap U_{x,z} \cap V_{x,y} \cap V_{x,z} = \emptyset$ である．

他も同様.

$\boxed{4}$

(1)$F(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3), F(y_1, y_2, y_3) = (y'_1, y'_2, y'_3)$ とする．$d(F(x_1, x_2, x_3), F(y_1, y_2, y_3))^2 = (x'_1 - y'_1)^2 + (x'_2 - y'_2)^2 + (x'_3 - y'_3)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$ である．また $d(F(x_1, x_2, x_3), 0)^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ である．

したがって $x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3)$ である．よって $(F(x_1, x_2, x_3), F(y_1, y_2, y_3)) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ である．

(2)$(F(a), F(x) + F(y)) = (F(a), F(x)) + (F(a), F(y)) = (a, x) + (a, y) = (a, x + y) = (F(a), F(x + y))$ である．$d(F(x + y), F(x) + F(y))^2 = (F(x + y) - F(x) - F(y), F(x + y) - F(x) - F(y)) = (F(x + y) - F(x) - F(y), F(x + y - x - y)) = 0$ よって $F(x + y) = F(x) + F(y)$

$d(F(kx), kF(x))^2 = (F(kx) - kF(x), F(kx) - kF(x)) = (F(kx), F(kx)) - 2k(F(kx), F(x)) + k^2(F(x), F(x)) = (kx, kx) - 2k(kx, x) + k^2(x, x) = 0$ よって $F(kx) = kF(x)$