0.1 R3 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$f_1'(x) = \cos x, f_2'(x) = -\sin x, f_3'(x) = \sin x + x\cos x, f_4'(x) = \cos x - x\sin x$ である．したがって $F(f_1) = f_2, F(f_2) = -f_1, F(f_3) = f_1 + f_4, F(f_4) = f_2 - f_3$ である．

(2)W の任意の元は $f_1, \dots f_4$ の線形結合で表され，F は線形写像であるから，$F(f_i) \in W \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ なら $F(W) \subset W$ である．(1) から $F(f_i) \in W$ は明らか.

(3)W の定義から $\{f_1, \dots, f_4\}$ は W を生成する．よって一次独立であれば基底である．$c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 + c_4f_4 = 0$ とする．これは任意の $x \in \mathbb{R}$ について成り立つ恒等式である．$x = 0$ とすると $c_2 = 0$ である．$x = 2\pi$ とすれば，$c_4 2\pi = 0$ より $c_4 = 0$ である．よって $c_1 \sin x + c_3 x \sin x = 0$ である．両辺を x で微分すると $c_1 \cos x + c_3 \sin x + c_3 x \cos x = 0$ である．この式も恒等式であり，$x = \pi/2$ とすると $c_3 = 0$ である．よって $x = 0$ とすれば $c_1 = 0$ であるから一次独立.

(4)(1) より表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(5) 表現行列の固有多項式は $\begin{vmatrix} -t & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-t^2 & 1 & t \\ 1 & -t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1-t^2 & 1 & t \\ 0 & 0 & -1-t^2 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = (1+t^2)\begin{vmatrix} -1-t^2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1+t^2)^2$ である．よって固有値は実数でない.

$\boxed{2}$ (1)G の単位元を e とする．$a \in G$ に対して $a = e^{-1}ae$ より $a \sim a$ である．$a \sim b$ なら $a = g^{-1}bg$ となる $g \in G$ が存在する．このとき $b = (g^{-1})^{-1}a(g^{-1})$ であるから $b \sim a$ である．

$a \sim b, b \sim c$ なら $a = g^{-1}bg, b = h^{-1}ch$ となる $g, h \in G$ が存在する．このとき $a = g^{-1}h^{-1}chg = (hg)^{-1}chg$ であるから $a \sim c$ である．よって同値関係.

(2) 同値類が n 個あるとする．任意の $a, g \in G$ について $g^{-1}ag = a$ である．よって $ag = ga$ となるから，G はアーベル群．逆にアーベル群なら $a \sim b$ のとき，$a = g^{-1}bg$ より $a = bg^{-1}g = b$ より $a = b$．よって $m = n$

(3)$g, h \in N(a)$ なら $(gh^{-1})^{-1}a(gh^{-1}) = hg^{-1}agh^{-1} = hah^{-1} = a$ であるから $gh^{-1} \in N(a)$ である．よって部分群.

(4) 有限集合 X に対して X の元の個数を $|X|$ で表す．$g, h \in G$ に対して $gag^{-1}, hah^{-1} \in [a]$ である．$gag^{-1} = hah^{-1} \Leftrightarrow a = (h^{-1}g)^{-1}a(h^{-1}g) \Leftrightarrow h^{-1}g \in N(a) \Leftrightarrow hN(a) = gN(a)$ である．よって $\varphi\colon [a] \to G/N(a); x \mapsto gN(a) \quad (x = gag^{-1})$ とすると，φ は well-defined であるから写像である．また単射であることも明らか．よって φ は全単射であるから $|[a]|$ と $|G/N(a)|$ は等しい.

(5)$\sim$ による商集合を $\{[e], [a_1], \dots, [a_k]\}$ とする．$|[e]| = 1$ である．$|[e]| + |[a_1]| + \cdots + |[a_k]| = |G| = p^2$ が成り立つ．$|[a_i]| = p \quad (i = 1, \dots, k)$ なら $p^2 = 1 + pk$ となり矛盾する．よってある i について $|[a_i]| = 1$ である．$|[a_1]| = 1$ として一般性を失わない．$|[a_1]| = 1$ より $N(a_1) = G$ である．よって $a_1 \in N(a_i)$ である．$i \geq 2$ なら $\langle a_i \rangle \subset N(a_i)$ であるから $|N(a_i)| \geq p + 1$ である．よって $N(a_i) = G$ である．すなわち $|[a_i]| = 1$ である．よって $|G/\sim| = |G|$ であるからアーベル群.

$\boxed{3}$ (1)$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ とする．ヤコビアンは $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$ である．積分領域は

$D' = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 1\}$ である．

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+z(x^2+y^2))^2} &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{(1+zr^2)^2}drd\theta dz \\ &= \int_0^1 2\pi\left[\frac{-1}{2z}\frac{1}{1+zr^2}\right]_0^1 dz \\ &= \pi\int_0^1 \frac{1}{1+z}dz = \pi[\log(1+z)]_0^1 = \pi\log 2\end{aligned}$$

(2)$x>1$ のとき $\frac{1}{x^\alpha+1} < \frac{1}{x^\alpha}$ である．よって $\int_1^M \frac{1}{x^\alpha+1}dx < \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{-\alpha+1}(M^{-\alpha+1}-1) \to \frac{1}{\alpha-1} \quad (M\to\infty)$ である．よって左辺は収束する．

(3)$f_x = 2x+2\sin y, f_y = 2x\cos y - \sin 2y, f_{xx} = 2, f_{yy} = -2x\sin y - 2\cos 2y, f_{xy} = 2\cos y$ である．よってヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 2 & 2\cos y \\ 2\cos y & -2x\sin y - 2\cos 2y\end{pmatrix}$ でその行列式は $-4x\sin y - 4\cos 2y - 4\cos^2 y$ である．

$f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ を解くと $2x+2\sin y = 0, 2x\cos y - \sin 2y = 0$ であるから，$x=-\sin y, 2x\cos y = 2\sin y\cos y$ である．よって $x=-\sin y, x\cos y = 0$ である．$x=0$ のとき $y=n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$ である．$\cos y = 0$ なら $y\in\pi/2+n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$ であり，$x=-\sin(\pi/2+n\pi)=(-1)^{n+1}$ である．これらが極値点の候補である．各点についてヘッセ行列式を考えると $(0,n\pi)$ のとき，-8 であるから極値点でない．$((-1)^{n+1},\pi/2+n\pi)$ のとき，8 であるから極小点．

$\boxed{4}$ (1)(i) 正しい．$x\in A\cap B$ に対して $f(x)\in f(A)\cap f(B)$.

(ii) 正しくない．$f\colon\{1,2\}\to\{1\}$ を $f(1)=f(2)=1$ とする．$A=\{1\}, B=\{2\}$ とすれば，$A\cap B=\emptyset$ であるが，$f(A)\cap f(B)=\{1\}$

(2)$U\in\mathcal{O}'$ について $a\in U$ なら $f^{-1}(U)=X\in\mathcal{O}$ である．$a\notin U$ なら $f^{-1}(X)=\emptyset\in\mathcal{O}$ である．よって f は連続写像である．

(3)$p\in U_{p,q}, q\in V_{p,q}, U_{p,q}\cap V_{p,q}=\emptyset$ なる開集合 $U_{p,q}, V_{p,q}$ が存在する．同様にして $U_{p,r}, V_{q,r}, W_{p,r}, W_{q,r}$ が存在する．$U=U_{p,q}\cap U_{p,r}, V=V_{p,q}\cap V_{q,r}, W=W_{p,r}\cap W_{q,r}$ とすると，U,V,W は開集合であり，$p\in U, q\in V, r\in W$ である．$U\cap V\cap W=\emptyset$ である．