0.1 H20 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f_x(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})(-\sin\frac{\pi}{3}) + f_y(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\end{aligned}$$

(2)F は $[0,4\pi]$ 上で連続である．よって $\theta \in [0,4\pi]$ に対して $|F(\theta)| < M$ となる $M > 0$ が存在する．$\tau \in \mathbb{R}$ に対して $t = 2n\pi + \theta$ をみたす，$n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0,2\pi)$ が存在する．$F(\tau) = F(\theta)$ であるから $|F(\tau)| < M$ である．したがって有界．また F は $[0,4\pi]$ 上で連続であるから一様連続である．すなわち $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して任意の $\theta,\tau \in [0,4\pi]$ に対して $|\theta - \tau| < \delta$ なら $|F(\theta) - F(\tau)| < \varepsilon$ である．

よって $s \geq t \in \mathbb{R}$ に対して，$s = 2n\pi + p$ をみたす $p \in [0,2\pi)$ が存在する．$|s-t| < \delta$ なら $|F(s) - F(t)| = |F(p) - F(p+s-t)| < \varepsilon$ であるから一様連続である．

$\boxed{2}$ (1)$\varphi_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m; x \mapsto Ax$ で定める．A の階数が m であるから $\dim\varphi_A = m = \dim\mathbb{C}^m$．したがって φ_A は全射である．よって任意の $c \in \mathbb{C}^m$ に対して $\varphi_A(x) = Ax = c$ となる $x \in \mathbb{C}^n$ が存在する．

(2)φ_B が単射なら $\operatorname{rank}\varphi_B = m$ である．よって $\operatorname{rank} B^T = m$ であるから φ_{B^T} は全射である．

(3)$B^TQ^T = P^t$ なる Q^T の存在を示す．P^T の列ベクトル p_i ごとに $q_i \in \mathbb{C}^n$ が存在して $B^Tq_i = p_i$ である．よって $Q^T = (q_1,\cdots,q_m)$ とすれば $B^TQ^T = P^T$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x,0),(x,1) \in Y$ について $(x,1)$ が属す Y の開集合 U をとる．U は開基の和集合でかけるから，ある $W \subset U, W \in \mathcal{B}$ が存在して $(x,1) \in W$．すなわちある $V \in \mathcal{O}$ が存在して $W = V \times \{0,1\}$ である．よって $(x,0) \in W \subset U$ であるから，ハウスドルフでない．

(2)$X \times \{0\}$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．任意の $x \in X$ についてある λ_x が存在して $x \in U_{\lambda_x}$ である．各 U_{λ_x} についてある開集合 $V_{\lambda_x} \in \mathcal{O}$ が存在して $x \in V_{\lambda_x} \times \{0\} \subset U_{\lambda_x}$ である．したがって $X \subset \bigcup_{x\in X} V_{\lambda_x}$ である．X はコンパクトであるから有限部分被覆 $\{V_{\lambda_{x_1}},\cdots,V_{\lambda_{x_n}}\}$ が存在する．$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_{x_i}}$ であるから $X \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_{x_i}}$ である．したがって $X \times \{0\}$ はコンパクトである．(1) で示したように $(x,1) \in Y \setminus (X \times \{0\})$ を含む開集合 U は $U \cap (X \times \{0\}) \neq \emptyset$ である．したがって $X \times \{1\}$ は開集合でない．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{1}{1-z^3} = 1 + z^3 + z^6 + \cdots \quad (|z| < 1)$ であるから，$\varphi(z) = \frac{z^p}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+p}$ である．収束半径は 1 である．

(2)φ の特異点は $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ で，それ以外の点で正則である．したがって $R < 1$ なら $\int_C \varphi(z)dz = 0$ である．

特異点での留数を計算する．$\lim_{z\to 1}(z-1)\varphi(z) = \frac{1}{3}$, $\lim_{z\to e^{2\pi i/3}}(z - e^{2\pi i/3})\varphi(z) = \frac{e^{2(p+1)\pi i/3}}{3}$, $\lim_{z\to e^{4\pi i/3}}(z - e^{4\pi i/3})\varphi(z) = \frac{e^{4(p+1)\pi i/3}}{3}$ である．よって留数定理から $\int_C \varphi(z)dz = \frac{2\pi i}{3}(1 + e^{2(p+1)\pi i/3} + e^{4(p+1)\pi i/3})$ である．