0.1 R2 数学 A

$\boxed{1}$ (1) 一様連続でないと仮定する．このとき $^\exists\varepsilon > 0, ^\forall\delta > 0, ^\exists x, y \in [0,1], |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ である．$\delta = \frac{1}{n}$ として，x_n, y_n を定める．数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界閉区間 $[0,1]$ に含まれるので，収束部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ を持つ．$|y_{\varphi(n)} - x_*| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - x_*| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - x_*| \to 0 \quad (n \to \infty)$ より，$y_{\varphi(n)} \to x_*$ である．

よって $\varepsilon \leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \to |f(x_*) - f(x_*)| = 0$ となり矛盾する．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，一様収束性からある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$^\forall x \in [0,1], ^\forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ である．この N について f_N の連続性から，$^\exists\delta > 0, ^\forall x \in [0,1], |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_*)| < \varepsilon$ である．よって $|x - x_*| < \delta$ なら $|f(x) - f(x_*)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_*)| + |f_N(x_*) - f(x_*)| < 3\varepsilon$ となるから連続.

$|f(x)|$ は有界閉区間の連続関数だから最大値 M が存在する．また一様収束するから，$^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall n > N, \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| < M$ である．すなわち $|f_n(x)| < 2M \quad (n > N, x \in [0,1])$ である．

f_n の最大値を M_n とし, $L := \max\{M, M_1, \ldots, M_N\}$ とする．このとき $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq L \quad (x \in [0,1])$ である．

有界閉区間の定数関数はルベーグ可積分であるから，ルベーグの収束定理より，$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ である．

$\boxed{2}$ (1)$|PQ|$ で線分 PQ の長さを表す．$|PQ| = \sqrt{54}$ である．よって $|PR| = \sqrt{(m+4)^2 + (n+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{54}$ である．$\overrightarrow{PQ} = (5, 5, -2), \overrightarrow{PR} = (m+4, n+1, -1)$ で内積は $\sqrt{54}^2 \cos\frac{\pi}{3} = 27$ であるから，$5(m+4) + 5(n+1) + 2 = 27$ である．よって $m + n = 0$ である．$54 = (m+4)^2 + (-m+1)^2 + 1$ より，$m = 3, -6$ である．よって $(m, n) = (3, -3), (-6, 6)$ である．

(2)$\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\}$ は線形独立である．よってこの基底からつくられる全ての内積が，f で保たれることが f が直交変換であることの必要十分条件.

$m = 3, n = -3$ のとき，$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -9, (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) = -9, (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}) = -9$ である．よって (*) を満たす全ての f は直交変換だから，$f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OR}$ より 2 個.

$m = -6, n = 6$ のとき，$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -9, (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) = 18, (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}) = 18$ である．$f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OR}$ より (*) を満たす直交変換は存在しない.

$\boxed{3}$ (1)$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が x, y に収束するとする．$x \neq y$ ならハウスドルフであるから，開集合 U, V が存在して $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ である．x に収束するから，ある N_1 が存在して $^\forall n > N_1, x_n \in U$ である．同様に y に収束するから，ある N_2 が存在して $^\forall n > N_2, x_n \in V$ である．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$x_n \in U \cap V$ となり矛盾する．よって $x = y$ である．

(2)$X = \{0, 1\}$ として X に密着位相をいれる．$x_n = 0$ とする数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $0, 1$ に収束する．

(3)$f(x)$ を含む任意の開集合 V をとる．$x \in f^{-1}(V) = U$ であるから，ある N が存在して $^\forall n > N, x_n \in U$ である．よって $^\forall n > N, f(x_n) \in V$ であるから $f(x_n)$ は $f(x)$ に収束する．

$\boxed{4}$ (1)$f(z) = \frac{\exp\left(-z^2/2\right)}{z}$ とする．$z = 0$ は f の一位の極で，主要部は $\frac{1}{z}$ である．よって $f(z) - \frac{1}{z}$ は原点近傍で正則であるから, 有界である．よって $\int_{C_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{z} dz \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$ である．$\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = \frac{i\pi}{4}$ であるから，$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz \to \frac{i\pi}{4} \quad (\varepsilon \to 0)$ である．

(2)

$$\left| \int_{S_R} \frac{\exp\left(-z^2/2\right)}{z} dz \right| = \left| \int_0^R \frac{\exp\left(\frac{y^2 - R^2}{2}\right) e^{iRy}}{R + iy} i dy \right| \leq \frac{1}{Re^{\frac{R^2}{2}}} \int_0^R e^{\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{Re^{\frac{R^2}{2}}} \int_0^R e^{\frac{y^2}{2}} dy = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{R^2}{2}} + R^2 e^{\frac{R^2}{2}}} e^{\frac{R^2}{2}} = 0$$

よって $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{\exp\left(-z^2/2\right)}{z}dz=0$ である．

(3)$I_{\varepsilon,R}$ を ε から R までの実軸上の積分経路とする．$D_{\varepsilon,R}$ を $R+Ri$ から $(\varepsilon+\varepsilon i)/\sqrt{2}$ までの積分経路とする．

$-C_\varepsilon, I_{\varepsilon,R}, S_R, D_{\varepsilon,R}$ を結んでできる閉曲線を C とする．f は原点以外で正則であるか，$\int_C f(z)dz = 0$ である．

$$\int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_R^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2(1+i)^2}{2}\right)}{x(1+i)}(1+i)dx = -\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\exp\left(-ix^2\right)}{x}dx = -\int_\varepsilon^R \frac{\cos x^2}{x}dx - \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{\cos x^2}{x}dx + i\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\sin x^2}{x}dx$$

$$\int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x}dx, \int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\cos x^2}{x}dx - \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{\cos x^2}{x}dx + i\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\sin x^2}{x}dx$$

ここで $\frac{cosx^2}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x^4}{2x} + \cdots$ であるから，$\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{\cos x^2}{x} - \frac{1}{x}dx \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$ である．また $\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{1}{x}dx = \log\sqrt{2}$ である．

よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon\to 0, R\to 0} \int_{-C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz + \int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz \\
&= -\frac{i\pi}{4} + \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\cos x^2}{x}dx - \log\sqrt{2} + i\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\cos x^2}{x}dx = \log\sqrt{2}$$