目次

https://warp.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/259094/www.math.sci.kobe-u.ac.jp/home-j/index9-4.html

0.1 H6 数学必修

$\boxed{1}$ (1) 固有方程式 $g_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & -1 \\ 1 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)^2$ より固有値は $-1, 2$ である．$A-(-1)E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．よって固有空間 $W(1)$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$A-2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ を簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．よって固有空間 $W(2)$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底として，$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ を選ぶと，F の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．

(3) 異なる固有値の固有空間のベクトルは直交するから，$\left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ を直交化する．

$v_2' = v_2 - \frac{(v_2,v_1)}{|v_1|}\frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は v_1 と直交する固有ベクトルである．正規化すると求める基底は $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{2}$ (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\alpha x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} = \alpha(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + \alpha(\alpha-2)x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-2}$

より $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}+\alpha(\alpha-2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-2}(x^2+y^2+z^2) = (\alpha^2+\alpha)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}$

(2) 存在しないと仮定する．ある $\varepsilon > 0, R > 0$ が存在して，${}^\forall x > R, xf'(x) > \varepsilon$ である．$f(x)-f(R) = \int_R^x f'(t)dt > \int_R^x \frac{\varepsilon}{t}dt = \varepsilon \log\frac{x}{R} \to \infty \quad (x \to \infty)$ となり矛盾．

$\boxed{3}$ (1) $ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = e \Leftrightarrow abab = e \Leftrightarrow (ab)^2 = e$ 一番右の式は成立するから，G はアーベル群である．

(2) $a \in G, h \in H$ を任意に取る．$H \ni (ah)^2 = ahah = aha^{-1}h^{-1}$ より，$aha^{-1} \in H$ である．よって H は G の正規部分群

$[a] \in G/H$ に対して $[a]^2 = [a^2] = H$ であるから，(1) より G/H はアーベル群である．

$\boxed{4}$ (1) $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x,y) = d(y,x)$ は明らかである．$x,y,z \in \mathbb{R}^n$ に対して，$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ より $d(x,z) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i - z_i| \leq \max_{1\leq i\leq n}(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) < d(x,y) + d(y,z)$ よって d は三角不等式を満たす．

(2) $d(x,y) \leq \delta$ なる任意の $x,y \in \mathbb{R}^n$ に対して，$d(p,x) - d(p,y) \leq d(p,y) + d(y,x) - d(p,y) = d(y,x) \leq \delta$ である．x,y を入れ替えても同様にして $d(p,y) - d(p,x) \leq \delta$ であるから，$|d(p,x) - d(p,y)| \leq \delta$ である．

すなわち任意の ε に対して $\delta = \varepsilon$ と定めれば，$d(x,y) \leq \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ より f は連続．

(3) $a \in A$ に対して $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y)$ である．$a \in A$ についての下限をとれば $g(y) = \inf_{a\in A} d(a,y) \leq$

$\inf_{a\in A} d(a,x)+d(x,y)=g(x)+d(x,y)$ を得る．これは x,y を入れ替えても成り立つから，$|g(x)-g(y)|\le d(x,y)$ である．

したがって任意の ε に対して $\delta=\varepsilon$ と定めれば，$d(x,y)\le\delta$ ならば $|g(x)-g(y)|\le\varepsilon$ より g は連続.

0.2　H7 数学必修

$\boxed{1}$ $A^2=-I_n$ より $(\det A)^2=\det A^2=\det(-I_n)=(-1)^n$ であるから，$\det A\neq 0$．同様に $\det B\neq 0$．$AB+BA=O_n$ より $\det A\det B=\det(-BA)=(-1)^n\det B\det A$ ここで n が奇数ならば, $\det A=0\vee\det B=0$ となり矛盾する．よって n は偶数である．

$Tr(AB)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij}=Tr(BA)$ である．A は正則であるから，A^{-1} が存在して $ABA^{-1}+B=O_n$．よって $Tr(ABA^{-1})+Tr(B)=2Tr(B)=0$．すなわち $Tr(B)=0$．同様にして $Tr(A)=0$.

$\boxed{2}$ (1)$\sin x$ のマクローリン展開は $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$ である．$-\cos x+1>0\quad(x>0)$ より $[0,x]$ で積分して，$-\sin x+x>0\quad(x>0)$．同様にして $\cos x+\frac{x^2}{2!}-1>0\quad(x>0)$，$\sin x-x+\frac{x^3}{3!}>0\quad(x>0)$. よって $x-\sin x<\frac{x^3}{3!}\quad(x>0)$ を得る．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\frac{1}{3!}$ より収束級数.

(2)$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx\int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$

$x=uv,y=u(1-v)$ とおくと，ヤコビアンは $J=\begin{vmatrix} v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u$ である．また積分範囲は $u=x+y,v=\frac{1}{1+y/x}$ より $0<u<\infty,0<v<1$ である．よって

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_0^\infty\int_0^1 e^{-u}u^{p-1}v^{p-1}u^{q-1}(1-v)^{q-1}|-u|dudv\\&=\int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\\&=\Gamma(p+q)B(p,q)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ (1) 指数が 2 であるから H は正規部分群.

剰余類 G/H は $x\in G\setminus H$ を用いて，$G/H=\{H,xH\}$ と表せる．$g=xh'\in G\setminus H,h\in H$ に対して，$ghg^{-1}=xh''$ なら $x^{-1}xh'hg^{-1}=h''\in H$ より $g^{-1}\in H$ となり矛盾．よって $ghg^{-1}\in H$.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{1,-1\}$ を H に対して $1\cdot h=h,-1\cdot h=h^{-1}$ とすれば，これは作用である．H の単位元以外の元は位数が 2 でないから，その軌道は二元集合である．単位元の軌道は $\{e\}$ である．

したがって軌道分解を考えれば H の位数は $2n+1$(n は e を含まない軌道の数) である．すなわち H の位数は奇数.

(2)$aha^{-1}h=ahah=(ah)^2$ で $ah\in G\setminus H$ より $(ah)^2=e$．よって $aha^{-1}h=e$．どうように $haha^{-1}=(ha)^2=e$．よって $aha^{-1}=h^{-1}$.

$\boxed{4}$ $F_k(x)=\max\limits_{0\le i\le k}f_i(x)$ とすると，$F_{k+1}(x)=\max\{F_k(x),f_{k+1}(x)\}$ であるから，F_2 が連続であることを示せば，$F=F_r$ が連続であることは帰納的に示せる．

$F_2=\frac{1}{2}(|f_1-f_2|+f_1+f_2)$ であるから，f_1,f_2 が連続ならば F_2 も連続.

よって F は連続である．

(2) $f_n(x,y)=\begin{cases}x^{1/n} & (x\ge 0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ とすれば，f_n は連続である．$G(x,y)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ より G は連続でない.

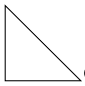
0.3 H8 数学必修

$\boxed{1}$ 求める体積を V とする．$V=\int\int\int_K 1dxdydz$ である．$x^a=u, y^b=v, z^c=w$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} \frac{1}{a}u^{\frac{1}{a}-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}v^{\frac{1}{b}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c}w^{\frac{1}{c}-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}u^{\frac{1}{a}-1}v^{\frac{1}{b}-1}w^{\frac{1}{c}-1}$．よって $V=\frac{1}{abc}\int\int\int_{u+v+w\le 1,u,v,w\ge 0} u^{\frac{1}{a}-1}v^{\frac{1}{b}-1}w^{\frac{1}{c}-1}dudvdw$．$(u,v,w)=r(\xi,\eta,\zeta), \xi+\eta+\zeta=1$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & 0 & \xi \\ 0 & r & \eta \\ -r & -r & \zeta \end{vmatrix} = r^2(\zeta+\eta)+r^2\xi=r^2$.

$V=\frac{1}{abc}\int_0^1 r^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}\int\int_{\xi+\eta+\zeta=1,\xi,\eta,\zeta\ge 0}\xi^{\frac{1}{a}-1}\eta^{\frac{1}{b}-1}\zeta^{\frac{1}{c}-1}d\xi d\eta dr$.

$\int_0^1 r^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}dr=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ である．

$\int\int_{\xi+\eta+\zeta=1,\xi,\eta,\zeta\ge 0}\xi^{\frac{1}{a}-1}\eta^{\frac{1}{b}-1}\zeta^{\frac{1}{c}-1}d\xi d\eta$.

うまく変数変換して Γ 関数あるいは，β関数の形にしたい．積分領域は上からみると (z 軸の正から負の方向)  のような形をしている．これを $[0,1]\times[0,1]$ の形に変換したいので，$s=\xi, t=\frac{\eta}{1-\xi}$ と変数変換する．

$s=\xi, (1-s)t=\eta$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1-s \end{vmatrix}=1-s$．よって

$$\begin{aligned}
\int\int_{\xi+\eta+\zeta=1,\xi,\eta,\zeta\ge 0}\xi^{\frac{1}{a}-1}\eta^{\frac{1}{b}-1}\zeta^{\frac{1}{c}-1}d\xi d\eta &= \int_0^1\int_0^1 s^{\frac{1}{a}-1}(1-s)^{\frac{1}{b}-1}t^{\frac{1}{b}-1}(1-s)^{\frac{1}{c}-1}(1-t)^{\frac{1}{c}-1}(1-s)dsdt \\
&= \int_0^1 s^{\frac{1}{a}-1}(1-s)^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}ds\int_0^1 t^{\frac{1}{b}-1}(1-t)^{\frac{1}{c}-1}dt \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}
\end{aligned}$$

よって $V=\frac{1}{abc}\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$.

$\boxed{2}$ (1) $G=H\cup K$ と仮定する．$x\in G\setminus H\subset K, y\in G\setminus K\subset H$ に対して，$xy\in G=H\cup K$ より $xy\in H$ または $xy\in K$ である．$xy\in H$ ならば $xy=h\in H$ より，$x=yy^{-1}\in H$ となり矛盾．$xy\in K$ ならば $xy=k\in K$ より，$y=x^{-1}k\in K$ となり矛盾.

(2) $x\in H\cap K, x\notin L$ が存在すると仮定する．$\ell\in G\setminus(H\cup K)\subset L$ に対して，$x\ell\in H$ なら $x\ell=h\in H$ より $\ell=x^{-1}h\in H$ となり矛盾．$x\ell\in K$ も同様．よって $x\ell\in L$ だが，$\ell\in L$ より $x\in L$ となり矛盾.

$\boxed{3}$ $\mathrm{Cl}\,A$ で A の閉包を表す.

$x\in U\cap V$ に対して，$x\in B(x,r_x)\cap X\subset U\cap V$ なる $r_x>0$ が存在する．このとき，$x\in \mathrm{Cl}\,B(x,r_x/2)\cap X\subset U\cap V$ である．$x\in U\setminus V$ についても $x\in \mathrm{Cl}\,B(x,r_x/2)\cap X\subset U$ なる r_x が存在する.

$x\in V\setminus U$ についても同様.

r_x を x に対して一つ固定する.

$\bigcup_{x\in X} B(x,r_x/2)=X$ であるから，コンパクト性より有限部分集合 $X_0\subset X$ が存在して $\bigcup_{x\in X_0} B(x,r_x/2)=X$ となる.

$X_{0,U} = \{x \in X_0 \mid x_0 \in U\}, X_{0,V} = \{x \in X_0 \mid x_0 \in V\}$ とする．$K = \bigcup_{x \in X_{0,U}} \mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X, L = \bigcup_{x \in X_{0,V}} \mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X$ とする．

$\mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2)$ は有界閉集合だからコンパクトで，$\mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X$ も X のコンパクト集合である．K, L は有限個のコンパクト集合の和集合だからコンパクトである．$x \in X_{0,U}$ に対して，$\mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X \subset U$ であるから $K \subset U$．同様に $L \subset V$．

$\boxed{4}$行基本変形によって $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t & 2t \\ 1 & t & t & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2t-1 & -1 & 3t-1 \\ 0 & 0 & 2t & t \end{pmatrix}$ とできる．$t \neq 0$ ならさらに $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4t-2 & 0 & 6t-1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$f(t) = \det A(t) = 2(2t-1)2t$ であるから，$f(t_0) = 0$ ならば $t_0 = 1/2, 0$ である．$t \to 1/2 + 0$ のとき，$x(t) = \begin{pmatrix} -t/(2t-1) \\ (6t-1)/(4t-2) \\ 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ 1/2 \end{pmatrix}$ である．$t \to 1/2 - 0$ のとき，$x(t) \to \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ 1/2 \end{pmatrix}$ である．

$t \to 0$ のとき，$x(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ である．

0.4 H9 数学必修

$\boxed{1}$ (a) グリーンの定理から $\int_C (xdy - ydx)/2 = \int\int_D (1-(-1))/2dxdy = \int\int_D dxdy$.
囲まれる領域を D，$\partial D = C$，求める面積を V とする．
$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), r = 1 + \cos\theta$ より $dx = (-\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta)d\theta, dy = (1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta$.

$$\begin{aligned}
\int_C xdy &= \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\cos\theta(1+\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\theta + \cos^2\theta + \cos^3\theta + \cos^4\theta - \cos\theta\sin^2 - \cos^2\theta\sin^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cos^4\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \left(\frac{\cos^2 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta = \frac{3\pi}{2} \\
\int_C ydx &= \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\sin\theta(-\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta)d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta + 3\cos\theta\sin^2 + 2\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} d\theta = -\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

よって $V=(\frac{3\pi}{2}-\frac{-3\pi}{2})/2=\frac{3\pi}{2}$.

(b)

(A) 反例を与える．

$a=0, b=1, f_n(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}, g(x)=0$ とする．$x\in[0,1]$ について $|f_n(x)-g(x)|\leq\frac{1}{n+1}$ より，$f_n(x)$ は $[0,1]$ で $g(x)$ に一様収束する．$f_n'(x)=x^n$ は $[0,1]$ で $h(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ に各点収束するから，$f_n'(x)$ は $[0,1]$ で $g'(x)=g(x)$ に一様収束しない．

(B)$f_n(x)=\int_{x_0}^{x}f_n'(t)dt$ とかける．$|f_n(x)-f(x)|=|\int_{x_0}^{x}(f_n'(t)-f'(t))dt|\leq\int_{x_0}^{x}|f_n'(t)-f'(t)|dt$ より，$f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (a) は (b) において $T=S$ とすればよい．(b) を示す．$|S|+|T|>G$ のとき, $g\in G$ について $|gT^{-1}|=|T|$ であるから，$|S|+|gT^{-1}|>G$ より $S\cap gT^{-1}\neq\emptyset$．$S\cap gT^{-1}\ni s$ とすると，$s=gt^{-1}$ となる $t\in T$ が存在する．すなわち $g=st\in ST$.

$\boxed{3}$ (a)$x\in\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}/\sim$ における同値類を $[x]$ で表す．$[0]\neq[1]$ である．$R/\sim$ の開集合 $[0]\in U,[1]\in V$ で $U\cap V=\emptyset$ となるものが存在すると仮定する．自然な全射 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$ を π とする．

$0\in\pi^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}$ の開集合であるから，ある ε が存在して $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\pi^{-1}(U)$．任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して，$x/2^n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ となる n が存在する．よって $\pi^{-1}\pi(-\varepsilon,\varepsilon)=\mathbb{R}$ より $\pi(-\varepsilon,\varepsilon)$ は $\mathbb{R}/\sim$ の開集合である．$1/2^n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ なる n が存在するから $[1]\in\pi(-\varepsilon,\varepsilon)\subset U$．これは矛盾．

(b)$x,y'\in\mathbb{R}$ に対して，$|x-2^ny'|$ が最小となる n を n_0 として，$y=2^{n_0}y', |x-y|=d$ とする．$[x]\neq[y]$ と仮定する．必要なら x,y をいれかえることで $x\leq y$ としてよい．このとき $y=x+d$ となる．y の取り方から $2^{-1}y+d<x$ である．

$\mathbb{R}_+$ から $\mathbb{R}_+/\sim$ への自然な全射を π とする．$x\in U=\pi((x-d/2,x+d/2)), y\in V=\pi((y-d/2,y+d/2))$ とする．

$\pi^{-1}\pi((x-d/2,x+d/2))=\left\{z\in\mathbb{R}_+\mid {}^\exists\alpha\in(x-d/2,x+d/2), {}^\exists m\in\mathbb{Z}, z=2^m\alpha\right\}=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(2^m(x-d/2),2^m(x+d/2))$．より U は開集合．同様に V も開集合．

$U\cap V\neq\emptyset$ とする．$[z]\in U\cap V$ とすると，$x-d/2<2^mz<x+d/2, y-d/2<2^nz<y+d/2$ なる $m,n\in\mathbb{Z}$ が存在する．

$2^mz<x+d/2=y-d/2<2^nz$ より $m\leq n-1$．$2^{n-1}z<2^{-1}y+d/4<x-3d/4<2^mz$ より $n-1\leq m$. よって $m=n-1$.

$2^m+1z<y+d/2$ より，$2^mz-d/4<2^{-1}y$ であり，$x-d/2<2^mz$ より，$x-2^{-1}y<3d/4<d$ となり，これは y の取り方に矛盾．よって $U\cap V=\emptyset$.

$\boxed{4}$ (a) $B_1,B_2\in V(A), c\in\mathbb{C}$ とすると，$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$ より $B_1+B_2\in V(A)$．$A(cB)=cAB=cBA$ より $cB\in V(A)$．よって $V(A)$ は $\mathbb{C}$ の部分空間.

(b) 固有方程式 $g_A(t)=\begin{vmatrix}-t & 0 & 1\\ 1 & -t & 0\\ 0 & 1 & -t\end{vmatrix}=-t^3+1=0$ より $\omega=e^{2\pi i/3}$ とすると，固有値は $1,\omega,\omega^2$.

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

固有値 ω に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-\omega & 0 & 1\\ 1 & -\omega & 0\\ 0 & 1 & -\omega\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\omega^2\\ 0 & 1 & -\omega\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}\omega^2\\ \omega\\ 1\end{pmatrix}$.

固有値 ω^2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & 1 \\ 1 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega \\ 0 & 1 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

固有値 λ とその固有ベクトル x に対して $B \in V(A)$ は $ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx$ より Bx も λ に対する固有ベクトル．$1, \omega, \omega^2$ に対応する 3 つの固有ベクトルからなる集合は $\mathbb{C}^3$ の基底であるから，B は 3 つ固有ベクトルの行き先から一意に決まる．各固有ベクトルは固有空間の次元が 1 であることから，$x \in W(\lambda)$ について $Bx = cx$ となる $c \in \mathbb{C}$ が存在する．

各固有空間について定数 c を定めれば，B が定まるから，$V(A)$ は 3 次元.

0.5 H10 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $F(x,y) = x^3 - 2xy + y^3$ とする．$F_x = 3x^2 - 2y, F_y = -2x + 3y^2, F_{xx} = 6x, F_{xy} = -2, F_{yy} = 6y$ である．$(1,1)$ 付近で $F(x,y) = F(x, \varphi(x))$ と表せて $d\varphi/dx = -Fx/Fy, F_y d^2\varphi/dx^2 = -(F_{xx} + F_{xy} d\varphi/dx) - (F_{xy} + F_{yy} d\varphi/dx) d\varphi/dx$ より

$d\varphi/dx|_{(1,1)} = -1, d^2\varphi/dx^2|_{(1,1)} = -16$．よって φ の 2 次までのテイラー展開は $1 - (x-1) - 8(x-1)^2$.

(2) (a) 被積分関数は積分区間で常に正の値をとるから，$A = \int_0^1 |\sin x|/x^\alpha dx, B = \int_1^\infty |\sin x|/x^\alpha dx$ に分けて収束性をしらべる.

$\int_0^1 \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ の収束性が問題になるのは 0 の近傍である．$x \to +0$ で $\sin x \sim x$ よりある $\delta > 0$ が存在して $0 \le x < \delta$ で $x/2 \le \sin x \le 3x/2$.

$\frac{3}{2}\int_0^\delta x^{1-\alpha} dx \ge \int_0^\delta \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \ge \int_0^\delta \frac{x}{2x^\alpha} dx = \frac{1}{2}\int_0^\delta x^{1-\alpha} dx$.

したがって A は $\alpha < 2$ で収束する.

$\alpha = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty |\sin x|/x dx &\ge \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi+\pi/4}^{n\pi+3\pi/4} |\sin x|/x dx \\
&\ge \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi+\pi/4}^{n\pi+3\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}x} dx \\
&\ge \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} [\log x]_{n\pi+\pi/4}^{n\pi+3\pi/4} \\
&\ge \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} [\log x]_{(n-1)\pi+3\pi/4}^{n\pi+3\pi/4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \log(n\pi + 3\pi/4) = \infty
\end{aligned}$$

よって $\alpha = 1$ で収束しない．$x \ge 1, \alpha \le 1$ なら $|\sin x|/x^\alpha \ge |\sin x|/x$ となるから B は収束しない.

$\alpha > 1$ なら $B \le \int_1^\infty 1/x^\alpha dx$ で収束する.

以上より $1 < \alpha < 2$ で収束する.

(b) (a) と同様に $C = \int_0^1 |\cos x|/x^\alpha dx, D = \int_1^\infty |\cos x|/x^\alpha dx$ に分けて収束性をしらべる.

D については B と同様に $\alpha > 1$ で収束する.

C については A と同様に 0 付近での収束性が問題になるが，$x \to +0$ で $\cos x \sim 1$ よりある $\delta > 0$ が存在して $0 \le x < \delta$ で $1/2 \le \cos x \le 3/2$．$\int_0^\delta \frac{3}{2x^\alpha} \ge \int_0^\delta \frac{|\cos x|}{x^\alpha} dx \ge \int_0^\delta \frac{1}{2x^\alpha} dx$．より C は $1 > \alpha$ で収束する.

よって任意の α で発散する.

$\boxed{2}$ (1) $|\varphi(g)| = r \ge 0$ とする．G は有限群であるから，$g^n = e$ となる n が存在する．$|\varphi(g^n)| = |\varphi(g)^n| = r^n$ である．群準同型は単位元を単位元にうつすから，$\varphi(e) = 1$ よって $1 = |\varphi(e)| = |\varphi(g^n)| = r^n$ すなわち $r = 1$.

(2)φ に対して $S_\varphi = \sum_{g\in G} \varphi(g)$ とする．

G の正規部分群 N について，$\varphi\colon G\to\mathbb{C}^*$ から誘導される $G/N\to\mathbb{C}^*$ を $\bar\varphi$ とする．

$G = \bigsqcup_{[g]\in G/N} \{gn \mid n\in N\}$ であるから，$S_\varphi = \sum_{g\in G}\varphi(g) = \sum_{[g]\in G/N}\sum_{n\in N}\varphi(gn) = \sum_{[g]\in G/N}\bar\varphi([g])\sum_{n\in N}\varphi(n) = S_{\bar\varphi}\sum_{n\in N}\varphi(n)$ である．

$\varphi\equiv 1$ なら $S=|G|$ である．

$\varphi\not\equiv 1$ なら $\ker\varphi\neq G$ は正規部分群であるから $S_\varphi = S_{\bar\varphi}\sum_{n\in\ker\varphi}\varphi(n) = |\ker\varphi| S_{\bar\varphi}$ である．

$S_{\bar\varphi}$ を求めればいいから，あらためて $0\neq G/\ker f$ を G，$\bar\varphi$ を φ とおきなおす．φ は単射である．準同型定理から $G\cong \mathrm{Im}\varphi\leq\mathbb{C}^*$ より G はアーベル群である．

$e\neq x\in G$ について $x^{|}G| = e$ より $\varphi(x)^{|G|}=1, \varphi(x)\neq 1$．すなわち $x^n-1=0$ の因数分解を考えれば $\varphi(x)^{|G|-1}+\cdots+\varphi(x)+1=0$ である．$\langle x\rangle$ は G の正規部分群であるから，$S_\varphi = S_{\bar\varphi}\sum_{x^n\in\langle x\rangle}\varphi(x^n)=0$

$\boxed{3}$ (1) 位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ がハウスドルフ空間であるとは，任意の 2 点 $x,y\in X$ に対して $U,V\in\mathcal{O}_X$ で $x\in U, y\in V, U\cap V=\emptyset$ となるものが存在することである．

(2)x,y についてハウスドルフ性からわかる U,V を $U_{x,y}, V_{x,y}$ とする．y,z および，x,z についても同様に $V_{y,z}, W_{y,z}, U_{x,z}, W_{x,z}$ をとる．$U=U_{x,y}\cap U_{x,z}, V=V_{x,y}\cap V_{x,z}, W=W_{y,z}\cap W_{x,z}$ とする．$x\in U, y\in V, z\in W$ はあきらか．$U\cap V = U_{x,y}\cap U_{x,z}\cap V_{x,y}\cap V_{x,z}=\emptyset$ である．

他も同様.

$\boxed{4}$

(1)$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1',x_2',x_3'), F(y_1,y_2,y_3) = (y_1',y_2',y_3')$ とする．$d(F(x_1,x_2,x_3),F(y_1,y_2,y_3))^2 = (x_1'-y_1')^2+(x_2'-y_2')^2+(x_3'-y_3')^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$ である．また $d(F(x_1,x_2,x_3),0)^2 = x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2, y_1'^2+y_2'^2+y_3'^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2$ である．

したがって $x_1'y_1'+x_2'y_2'+x_3'y_3' = (x_1,y_1)+(x_2,y_2)+(x_3,y_3)$ である．よって $(F(x_1,x_2,x_3),F(y_1,y_2,y_3)) = ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$ である．

(2)$(F(a),F(x)+F(y)) = (F(a),F(x))+(F(a),F(y)) = (a,x)+(a,y) = (a,x+y) = (F(a),F(x+y))$ である．$d(F(x+y),F(x)+F(y))^2 = (F(x+y)-F(x)-F(y), F(x+y)-F(x)-F(y)) = (F(x+y)-F(x)-F(y), F(x+y-x-y)) = 0$ よって $F(x+y)=F(x)+F(y)$

$d(F(kx),kF(x))^2 = (F(kx)-kF(x), F(kx)-kF(x)) = (F(kx),F(kx))-2k(F(kx),F(x))+k^2(F(x),F(x)) = (kx,kx)-2k(kx,x)+k^2(x,x)=0$ よって $F(kx)=kF(x)$

0.6 H11 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $E_{ij}\in M_n(\mathbb{C})$ を (i,j) 成分が 1 で他が 0 の行列とする．$\{E_{ij}\mid 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n,\}$ は $M_n(\mathbb{C})$ の基底である．

$X=(x_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ に対して $X=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{ij}E_{ij}$ と表せる．

(2)$X=(x_{ij}), Y=(Y_{ij})\in\ker f, c,d\in\mathbb{C}$ に対して $f(cX+dY) = \sum_{i=1}^n cx_{ii}+dy_{ii} = c\sum_{i=1}^n x_{ii}+d\sum_{i=1}^n y_{ii} = cf(X)+df(Y)$．より $\ker f$ は部分ベクトル空間.

$F_i = (f_ij)\in M_n(\mathbb{C})\quad(1\leq i<n)$ を (i,i) 成分が 1 で (n,n) 成分が -1 で他が 0 の行列とする．$B=\{E_{ij}\mid 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n, i\neq j\}\cup\{F_i\mid 1\leq i<n\}$ は基底である．一次独立性はあきらか，$X\in\ker f$ に対して $f(X)=0$ より $X=\sum_{i=1}^n x_{ij}=0$ であるから $x_n = -\sum_{i=1}^{n-1}x_i$ である．

よって $X=\sum_{1\leq i,j\leq n, i\neq j} x_{ij}E_{ij}+\sum_{1\leq i<n}x_iF_i$ と表せる．次元は n^2-1

(3)$g(E_{ij})=a_{ij}$ とする．$A=(a_{ji})$ とすると $g(X)=\sum_{i,j}a_{ji}x_{ij} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}x_{ij} = \mathrm{Tr}(AX)$.

$\boxed{2}$ (1) 平均値の定理から $f(x_1)-f(x_2) = (x_1-x_2)f'(c)$ となる $c\in(x_1,x_2)$ が存在する．よって

$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2||f'(c)|\leq M|x_1-x_2|$ である．

(2)$x_1=x_2$ のとき $g\colon[y_1,y_2]\to\mathbb{R}$ を $g(t)=f(x_1,t)$ とする．g は C^1 級で $\frac{dg}{dt}|_t=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_1,t)}$ である．よって $|\frac{dg}{dt}|=|\frac{\partial f}{\partial y}|\leq M^2$ である．(1) より $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leq M^2|y_1-y_2|=M^2\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ である．

$x_1\neq x_2$ のとき，$\tan\theta=(y_2-y_1)/(x_2-x_1),-\pi/2<\theta<\pi/2$ とする．$z\colon[0,\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}]\to\mathbb{R}^2;t\mapsto(t\cos\theta+x_1,t\sin\theta+y_1)$ とする．z は明らかに C^1 級である．$\frac{\partial f\circ z}{\partial t}|_t=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}|_{z(t)}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}|_{z(t)}$ である．

$|\frac{\partial f\circ z}{\partial t}|=|\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}|\leq|\frac{\partial f}{\partial x}|+|\frac{\partial f}{\partial y}|$ である．

$|\frac{\partial f}{\partial x}|\leq 1+|\frac{\partial f}{\partial x}|^2$ であるから，$|\frac{\partial f\circ z}{\partial t}|\leq 2+|\frac{\partial f}{\partial x}|^2+|\frac{\partial f}{\partial y}|^2\leq 2+M^2$ である．

(1) より $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=|f\circ z(0)-f\circ z(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2})|\leq(2+M^2)\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ である．

$\boxed{3}$ (1)G/H の完全代表系 $X=\{g_1,\dots g_n\}$ を一つ固定する．$g_1\in H$ として一般性を失わない．

$g\in G,g_i\in X$ に対して $g\cdot g_i\in[g_j]$ となる j がただ一つ存在する．これを $j=\sigma_g(i)$ と書くことにする．このとき σ_g は $\{1,\dots,n\}$ の置換である．

$f\colon G\to S_n$ を $f(g)=\sigma_g$ とする．$gg'g_i=g[g_{\sigma_{g'}(i)}]=[g_{\sigma_g(\sigma_{g'}(i))}]$ であるから $\sigma_{gg'}=\sigma_g\sigma_{g'}$ である．よって f は群準同型である．

$g\in\ker f$ について $g\cdot g_1\in[g_1]$ より $h\in H$ をもちいて，$gg_1=g_1h$ とできる．よって $g=g_1hg_1^{-1}\in H$ より $\ker f\subset H$ である．

(2)(1) で完全代表系を固定したが，f の定め方は完全代表系によらない．これを示す．$X'=\{g_1',\dots,g_n'\}$ を別の完全代表系とする．ただし $[g_i]=[g_i']\in G/H$ として一般性を失わない．このとき $g_i=g_i'h_i$ となる $h_i\in H$ がただ一つ存在する．

$g\in G$ に対して $gg_i'=gg_ih_i=g_{\sigma_g(i)}h_i=g'_{\sigma_g(i)}h_{\sigma_g(i)}h_i\in[g'_{\sigma_g(i)}]$ より σ_g が完全代表系の取り方に依らないことを示せた．

G の指数 n の部分群 H,H' について $H\neq H'$ とする．ある $g\in G$ に対して G/H を考えることで定まる σ_g と G/H' を考えることで定まる σ_g' が異なることを示す．$h\in H\setminus H'$ とする $\sigma_h(1)=1,\sigma_h'(1)\neq 1$ である．よって $\sigma_h\neq\sigma_h'$ である．

すなわち $H\neq H'$ ならば $f\neq f'$ である．(f' は (1) より H' に対して存在する写像．)

$\hom(G,S_n)$ は G が有限生成であることから有限集合なので，指数 n の部分群も有限．

$\boxed{4}$ (1) $f\colon(0,1)\to[0,1];x\mapsto\begin{cases}1 & (x=1/2)\\ 0 & (x=1/3)\\ 1/(n-2) & (x=1/n,n\geq 4)\\ x & (\text{otherwise})\end{cases}$ とすると f は全単射である．

(2)$(0,1)$ の開被覆として $\{(0,1-1/n)\mid n=2,3,\dots\}$ を考えるとこれは有限部分被覆をもたないから $(0,1)$ はコンパクトでない．

$[0,1]$ は有界閉集合だからコンパクトである．

同相ならコンパクト性は保たれるから同相でない．

0.7 H12 数学必修

$\boxed{1}$ (1) テイラーの定理より，$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$ とできる．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)+f'(a)(-h)+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)}{h^2}$$
$$=f''(a)$$

(2) $(x,y)=(a+h,b+k)$ とする．$f(x,y)=f(a,b)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+o(h^2+k^2)$ が成り立つ．

(3)$f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)=f(a,b)+r(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}r^2(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+g(r,\theta)\quad g(r,\theta)\in o(r^2)$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b)d\theta&=\int_0^{2\pi}r(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}r^2(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+g(r,\theta)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}r^2\frac{1}{2!}(\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(a,b)+g(r,\theta)d\theta\\&=\pi r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\pi r^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta+\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta\\&=\pi r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)+\pi r^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)+\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta\end{aligned}$$

$\lim\limits_{r\to 0}g(r,\theta)/r^2=0$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，$0<r<\delta$ ならば $|g(r,\theta)|<\varepsilon r^2$ である．よって $|\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta|/r^2\le\int_0^{2\pi}|\varepsilon r^2|d\theta/r^2=2\pi\varepsilon$ である．

よって $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta=0$ である．

すなわち $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b)d\theta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)$ である．

$\boxed{2}$ (1) $\det A_x=\begin{vmatrix}x&x&x\\x&1-x&1\\x&1&1-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&x&x\\0&1-2x&1-x\\0&1-x&1-2x\end{vmatrix}=x((1-2x)^2-(1-x)^2)=-x^2(2-3x)$

(2)$x\neq 0,2/3$ のとき，$\det A_x\neq 0$ より A_x は正則であるから，$\mathrm{rank}A_x=3$ である．

$x=3/2$ のとき，$\mathrm{rank}A_{2/3}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}2/3&2/3&2/3\\0&-1/3&1/3\\0&1/3&-1/3\end{pmatrix}=2$ である．

$x=0$ のとき，$\mathrm{rank}A_0=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=1$ である．

(3) $B,B'\in V(A_x),c\in\mathbb{C}$ に対して $A_x(B+cB')=A_xB+cA_xB'=BA_x+cB'A_x=(B+cB')A_x$ より $V(A_x)$ は部分空間である．

(4) A_x の階数が最小になるのは $x=0$ のときである．

A_0 の固有値および固有空間をもとめる．$\begin{vmatrix}-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-2\lambda^2=0$ より $\lambda=0,2$ である．

$\lambda=0$ のとき，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ より固有空間 $W(0)=()\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle$ である．

$\lambda=2$ のとき，$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ より固有空間 $W(2)=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$ である．

$B \in A_0$ と A_0 の固有値 λ の固有ベクトル x について，$ABx = BAx = \lambda Bx$ であるから，Bx は固有値 λ の固有ベクトルである．よって B は各固有空間の自己準同型である．すなわち $\dim V(A_0) = \dim \mathrm{Hom}(W(0), W(0)) + \dim \mathrm{Hom}(W(2), W(2)) = 2^2 + 1^2 = 5$ である．

$\boxed{3}$ (1)

$$\begin{aligned} f(e) &= f(ee) = f(e)f(e) \\ f(e)^{-1}f(e) &= f(e)^{-1}f(e)f(e) \\ e' &= f(e) \end{aligned}$$

(2)$f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(e) = e', f(g^{-1})f(g) = f(g^{-1}g) = f(e) = e'$ より $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

(3)$g \in G, x \in \ker f$ について $f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e'$ より $gxg^{-1} \in \ker f$．よって $g \ker f g^{-1} \subset \ker f$ が任意の $g \in G$ について成り立つ．

(4)$aba^{-1}b^{-1} \in [G, G]$ について $f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1} = f(a)f(a)^{-1}f(b)f(b)^{-1} = e'$ である．二番目の等式は G' がアーベル群であるから成り立つ．

よって $[G, G] \subset \ker f$ である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の $x, y \in X$ について $x \neq y$ なら $U, V \in \mathcal{O}_X$ であって $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となるものが存在するとき，$(X, \mathcal{O}_X)$ はハウスドルフ空間という．

X の部分集合 A がコンパクトであるとは，A の任意の開被覆が有限部分被覆を持つことである．

(2)$y \in A$ に対して $y \in V_y, x \in U_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となる $U_y, V_y \in \mathcal{O}_X$ を定める．$\bigcup_{y \in A} V_y \supset A$ である．A はコンパクトだから，有限部分集合 $A' \subset A$ が存在して $\bigcup_{y \in A'} V_y \supset A$ となる．

$V = \bigcup_{y \in A'} V_y, U = \bigcap_{y \in A'} U_y$ とすると，$x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ である．

(3) ハウスドルフ空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ において，A がコンパクトであるとき，$x \in A^c$ に対して (2) より $x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ となる $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在する．$U \cap A = \emptyset$ であるから A^c は開集合である．すなわち A は閉集合.

0.8 H13 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$.

(2) $\det J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y+z & x-y & x-z \\ yz & zx-yz & xy-yz \end{vmatrix} = (x-y)(xy-yz) - (x-z)(xz-yz) = (x-y)(y-z)(x-z)$.

(3)$x \neq y \neq z \neq x$ のとき，$\det J \neq 0$ より J は正則であるから，$\mathrm{rank} J = 3$ である．

$x = y \neq z$ のとき，$\mathrm{rank} J = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+z & 0 & x-z \\ xz & 0 & x^2 \end{pmatrix} = 2$ である．$x = z \neq y$ および，$y = z \neq x$ のときも同様に $\mathrm{rank} J = 2$ である．

$x = y = z$ のとき，$\mathrm{rank} J = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2x & 2x \\ x^2 & x^2 & x^2 \end{pmatrix} = 1$ である．

$\boxed{2}$ (1) x, y で生成される巡回群 $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ に対して，$\varphi\colon \langle x \rangle \to \langle y \rangle$ を $x^i \mapsto y^i$ で定める．

$\varphi(x^i x^j) = \varphi(x^{i+j}) = y^{i+j} = y^i y^j = \varphi(x^i)\varphi(x^j)$ であるから，φ は群準同型．$y^i \varphi(x^i) = y^0$ なら $i = 0$ より φ は単射.

$y^i \in \langle y \rangle$ に対して，$y^i = \varphi(x^i)$ となる $x^i \in \langle x \rangle$ が存在する．よって φ は全射.

よって φ は同型写像であるから $\langle x \rangle \cong \langle y \rangle$ である．

(2)$G = \langle x \rangle$ を巡回群とし φ, ψ を G の自己同型とする．G が巡回群であるから，自己同型は x の行き先で定まる．$\varphi(x) = x^i, \psi(x) = x^j$ とする．

$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(x^j) = x^{ij} = \psi(x^i) = \psi \circ \varphi(x)$ より $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ である．

(3)H を $G = \langle x \rangle$ の部分群とする．$H = \{x^0\}$ なら H は巡回群である．$H \neq \{x^0\}$ とする．$\Lambda = \{i \in \mathbb{Z} \mid x^i \in H\}$ とする．$x^i \in H \quad (i \neq 0)$ より $x^i, x^{-i} \in H$ より Λ の最小の正の元 d がとれる．

$\langle x^d \rangle \subset H$ である．$x^k \in H$ について $k = dq + r \quad (0 \leq r < d)$ とすると $x^r = x^k x^{-dq} \in H$ であるから d の最小性より $r = 0$ である．よって $H = \langle x^d \rangle$ である．

(4) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $\varphi\colon G \to G; (m,n) \mapsto (n,m), \psi\colon G \to G; (m,n) \mapsto (-m,n)$ とする．

φ, ψ は共に G の自己同型である．$\varphi \circ \psi(m,n) = \varphi(-m,n) = (n,-m), \psi \circ \varphi(m,n) = \psi(n,m) = (-n,m)$ より $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ である．

よってアーベル群の自己同型群はアーベル群でない．

$\boxed{3}$ (1) (D) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi(x-n) = 0$ である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x-n)| \geq \lim_{n\to\infty} |\varphi(0)| \neq 0$ より各点収束だが，一様収束でない．

(2) (C) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |2^{-n}\varphi(2^{-n}x)| \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sup_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)| = 0$ より一様収束する．

$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-n}\varphi(2^{-n}x)dx = \int_{-2^n}^{2^n} 2^{-n}\varphi(2^{-n}x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt > 0 \quad (\because \varphi(t) > 0 \quad (-1 < t < 1))$ である．

(3)(A)$\int_{-\infty}^{\infty} |n\varphi(n\sqrt{n}x)|dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx = 0$ である．$\int_{-\infty}^{\infty} |n\varphi(n\sqrt{n}x)|^2 dx = \sqrt{n}\int_{-1}^{1} \varphi(t)^2 dt$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx = \infty$.

(4)(B)$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\tfrac{1}{n}\varphi(nx)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)| = 0$ より一様収束する．$f_n'(x) = \varphi'(nx)$ であり

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(nx) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \varphi'(0) & (x = 0) \end{cases}$$

f_n の極限関数 f は $f \equiv 0$ で，f_n' の極限関数は 0 で非負値 $\varphi'(0)$ をとるから，$f' \neq g$ である．

$\boxed{4}$ (1) 距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $a \in X$ に収束するとは，$^{\forall}\varepsilon > 0, {^\exists}N \in \mathbb{N}, {^\forall}n \geq N, d(x_n, a) < \varepsilon$ が成り立つことである．

(2)$f\colon X \to Y$ が $a \in A$ で連続であるとは，$^{\forall}\varepsilon > 0, {^\exists}\delta > 0, {^\forall}x \in X, d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ が成り立つことである．

(3)$f(X)$ 内の任意の点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる．各 y_n に対して $f(x_n) = y_n$ となる $x_n \in X$ がとれる．よって数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を得る．X は点列コンパクトであるから $x_* \in X$ に収束する収束部分列 x_{n_k} が存在する．

このとき $y_{n_k}{}_{k=1}^{\infty}$ が $f(x_*)$ に収束することを示す．$^{\forall}\varepsilon > 0, {^\exists}\delta > 0, d(x_{n_k}, x_*) < \delta \Rightarrow d(f(x_{n_k}), f(x_*)) < \varepsilon$ この δ に対して，$\{x_{n_K}\}_{K=1}^{\infty}$ は収束するから，ある K_0 が存在して $k \geq K_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_*) < \delta$ である．よって $k \geq K_0 \Rightarrow d(f(x_{n_k}), f(x_*)) < \varepsilon$ である．すなわち $y_{n_k}{}_{k=1}^{\infty}$ は $f(x_*)$ に収束する．

(4) $A_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} U_k$ とする．有限部分被覆をもつならある A_n について $A_n = X$ となる．$\{U_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ が有限部分被覆を持たないと仮定する．すると $x_n \in A_n \setminus A_{n-1}$ がとれる．よって数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が得られる．X は点列コンパクトであるから $x_* \in X$ に収束する収束部分列 x_{n_k} が存在する．

$x_* \in U_m$ なる m が存在する．よってある $r > 0$ が存在して $d(x, x_*) < r \Rightarrow x \in U_m$ である．r に対してある K が存在して $k \geq K \Rightarrow d(x_{n_k}, x_*) < r$ である．すなわち $k \geq K \Rightarrow x_{n_k} \in U_m$ である．これは x_{n_k} の取り方に矛盾する．

0.9 H14 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ の基底である．

(2) $\phi_A(kX+\ell Y) = A(kX+\ell Y)-(kX+\ell Y)A = kAX+\ell YA-kXA-\ell YA = k(AX-XA)+\ell(AY-YA) = k\phi_A(X)+\ell\phi_A(Y)$ より ϕ_A は線形写像．

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -b\\ c & a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a & b\\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2b\\ 2c & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}c & -a\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c & 2a\\ 0 & c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b & 0\\ -a & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b & 0\\ -2a & -b\end{pmatrix}$$

よって ϕ_A の表現行列は $\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ -2b & 2a & 0\\ 2c & 0 & -2a\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix}0 & -2b & 2c\\ -c & 2a & 0\\ b & 0 & -2a\end{vmatrix} = c\begin{vmatrix}-2b & 2c\\ 0 & -2a\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}-2b & 2c\\ 2a & 0\end{vmatrix} = c(4ab)-b(4ac) = 0$．より ϕ_A の階数は 2 以下.

2×2 小行列式に着目すると，$\begin{vmatrix}0 & 2c\\ -c & 0\end{vmatrix} = 2c^2, \begin{vmatrix}0 & -2b\\ b & 0\end{vmatrix} = 2b^2, \begin{vmatrix}2a & 0\\ 0 & -2a\end{vmatrix} = -4a^2$ であるから，$a\neq 0 \vee b\neq 0 \vee c\neq 0$ のとき ϕ_A の階数は 2 である．

$a=b=c=0$ のとき $\phi_A = 0$ であり階数は 0 である．

$\boxed{2}$ (1) $a\in G$ に対して $aH = \{ah \mid h\in H\}$ は $ah = ah'$ ならば $h = h'$ であるから $|aH| = |H|$. よって剰余類 G/H の各同値類の大きさは $|H|$ である．すなわち $G = \displaystyle\bigsqcup_{aH\in G/H} aH$ であるから. $|G| = \displaystyle\sum_{aH\in G/H}|aH| = |H||G/H|$.

すなわち H の位数 $|H|$ および指数 $|G/H|$ は共に G の約数.

(2)$a\in G$ の位数が n とし，$f(a)\neq 0$ とする．このとき $0 = f(e) = f(a^n) = nf(a)$ となり矛盾する．よって a の位数は無限.

(3)φ は 1 の行き先で定まる．$1\neq\varphi(1) = \alpha\in\mathbb{C}^\times$ とする．

$\alpha = e^{2\pi i m/q}$ $(p/q$は既約分数$)$ のとき，$\ker\varphi = \{pn \mid n\in\mathbb{Z}\}$ である．

他の場合は $\varphi(n) = 1$ なら $\alpha^n = 1$ より $\alpha = e^{2\pi i m/n}$ となって矛盾するから，$\ker\varphi = \{0\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$\mathcal{O}_S = \{\emptyset, S, \{a,b\}, \{b,c\}, \{d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{b\}, \{b,d\}\}$ が最小の位相である．

(2)$S = \{a,b,c\}\cup\{d\}$ が連結成分への分解である．$\{a,b,c\}$ が連結でないなら，すくなくともただ一つの元からなる連結成分が存在する．位相を考えると $\{b\}$ のみが開集合である．このとき補集合 $\{a,c\}$ は開集合でないため，$\{a,b,c\}$ は連結である．

(3) ハウスドルフではない．a を含む開集合は全て b を含む.

(4) 開基の逆像を調べれば十分.

$f^{-1}(\{a,b\}) = \{b,c\}\in\mathcal{O}_S, f^{-1}(\{b,c\}) = \{a,b\}\in\mathcal{O}_S, f^{-1}(d) = \{d\}\in\mathcal{O}_S$ であるから f は連続.

$g^{-1}(\{a,b\}) = \{a,c\}\notin\mathcal{O}_S$ より g は連続でない.

$\boxed{4}$ $((a)\Rightarrow(b))C^1$ 級関数 $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が凸関数であるとする．このとき $x<y<z$ に対して $(g(y)-g(x))/(y-x)\leq(g(z)-g(x))/(z-x)\leq(g(z)-g(y))/(z-y)$ が成り立つ．これを示す.

$sx+(1-s)z=y$ なる $s\in(0,1)$ がただ一つ存在する．

$$g(y)-g(x)=g(sx+(1-s)z)-g(x)\leq sg(x)+(1-s)g(z)-g(x)=(1-s)(g(z)-g(x))$$

$(g(y)-g(x))/(y-x)\leq(1-s)(g(z)-g(x))/(y-x)=(g(z)-g(x))/((1-s)(z-x))=(g(z)-g(x))/(z-x)g(z)-g(y)\quad=$

$(g(z)-g(y))/(z-y)\geq s(g(z)-g(x))/(z-y)=s(g(z)-g(x))/s(z-x)=(g(z)-g(x))/(z-x)$

$x<z$ に対して，$g'(x)=\lim_{y\to x+0}(g(y)-g(x))/(y-x)\leq\lim_{y\to x+0}(g(z)-g(x))/(z-x)=(g(z)-g(x))/(z-x)$ 同様に $y\to z-0$ として $(g(z)-g(x))/(z-x)\leq g'(z)$．よって $g'(x)\leq g'(z)$．したがって g' は広義単調増加である．

$g(y)-g(x)-g'(x)(y-x)\geq 0$ を示す．

任意の $x,y\in\mathbb{R},x<y$ に対して平均値の定理から $g(y)-g(x)=g'(c)(y-x)$ となる $c\in(x,y)$ が存在する．$x<c$ より $g'(x)\leq g'(c)$ であるから，$g(y)-g(x)-g'(x)(y-x)=g'(c)(y-x)-g'(x)(y-x)=(g'(c)-g'(x))(y-x)\geq 0$ また $x>y$ の時も同様で $x=y$ の時は明らか．

f について (b) が成り立つことを示す．$x,y\in\mathbb{R}^n$ に対して $c\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n;t\mapsto x+t(y-x)$ とする．$f\circ c\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は C^1 級凸関数である．よって $f\circ c(1)-f\circ c(0)-(f\circ c)'(0)\geq 0$ である．$f\circ c(1)=f(y),f\circ c(0)=f(x),(f\circ c)'(0)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(c(0))(y_i-x_i)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i-x_i)$ であるから，$f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i-x_i)\geq 0$ である．

$((b)\Rightarrow(c))$ $0\leq E(x,y)+E(y,x)=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i-x_i)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)(x_i-y_i)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)(y_i-x_i)$

$((c)\Rightarrow(a))$ $z=(1-\theta)x+\theta y$ とする．f についてテイラーの定理をもちいると，$s=x+\alpha\theta(y-x),t=y+\beta(1-\theta)(x-y)$ となる $\alpha,\beta\in(0,1)$ が存在して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
f(z)&=f(x)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)(z_i-x_i)=f(x)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)(\theta(y_i-x_i))\\
f(z)&=f(y)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)(z_i-y_i)=f(y)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)((1-\theta)(y_i-x_i))\\
f(z)&=(1-\theta)f(z)+\theta f(z)\\
&=(1-\theta)f(x)+\theta f(y)+\theta(1-\theta)\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(y_i-x_i)
\end{aligned}$$

$s-t=(x-y)+\alpha\theta(y-x)-\beta(1-\theta)(x-y)=(\alpha\theta+\beta(1-\theta)-1)(y-x)$ である．ここで α,β,θ の範囲に注意すると $\alpha\theta+\beta(1-\theta)-1\leq 0$ である．

よって $0\leq\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(s_i-t_i)=(\alpha\theta+\beta(1-\theta)-1)\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(y_i-x_i)$ であるから，$\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(s)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)\right)(y_i-x_i)\leq 0$ である．

すなわち $f((1-\theta)x+\theta y)=f(z)\leq(1-\theta)f(x)+\theta f(y)$ である．

0.10 H15 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $\int_0^{1/2}(x-1/2)f(x)dx\geq\int_0^{1/2}(x-1/2)f(1/2)dx,\int_{1/2}^1(x-1/2)f(x)dx\geq\int_{1/2}^1(x-1/2)f(1/2)dx$ より $\int_0^1(x-1/2)f(x)dx\geq\int_0^1(x-1/2)f(1/2)dx=0$

(2) (a)$-\sup_{n\geq k}(-a_n)\leq a_k$ である．両辺について $\inf_{n\geq k}$ をとれば $-\sup_{n\geq k}(-a_n)\leq\inf_{n\geq k}a_k$ すなわち $\sup_{n\geq k}(-a_n)\geq-\inf_{n\geq k}a_k$ を得る．同様に $-a_k\leq-\inf_{n\geq k}a_k$ について $\sup_{n\geq k}$ をとることで $\sup_{n\geq k}(-a_n)\leq-\inf_{n\geq k}a_k$ を得る．以上より $\sup_{n\geq k}(-a_n)=-\inf_{n\geq k}a_k$．両辺は共に有界単調数列であるから収束して $\limsup(-a_n)=-\liminf a_n$

(b)$\inf_{n\geq k} a_n+b_k \leq a_k+b_k \leq \sup_{n\geq k} a_n+b_k$ であり $\inf_{n\geq k}$ をとることで, $\inf_{n\geq k} a_n+\inf_{n\geq k} b_k \leq \inf_{n\geq k}(a_k+b_k) \leq \sup_{n\geq k} a_n+\inf_{n\geq k} b_k$ を得る．有界単調数列であるから収束して $\liminf a_n + \liminf b_k \leq \liminf(a_k+b_k) \leq \limsup a_n + \liminf b_k$

$\boxed{2}$ (1) 全射連続写像 $f\colon X \to Y$ について X がコンパクトとする．Y の開被覆 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を任意にとる．$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開被覆である．したがって有限部分被覆 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(U_\lambda)$ をもつ．このとき $\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} (U_\lambda)$ は Y の開被覆となるから Y はコンパクト．

$\phi\colon X \to Y$ は全射連続であるから X がコンパクトなら Y はコンパクトである．また逆写像 ϕ^{-1} も全射連続であるから Y がコンパクトなら X はコンパクトである．

(2)$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が同相であることを示す．$\hat{\phi}\colon \hat{X} \to \hat{Y}; x \mapsto \phi(x)$ と定める．ϕ が全単射であることと，$\hat{X}, \hat{Y}$ の定義から $\hat{\phi}$ は全単射である．$\hat{Y}$ の開集合 $\hat{U}$ は Y の開集合 U を用いて $U \cap \hat{Y} = \hat{U}$ とかける．$\hat{\phi}^{-1}(\hat{U}) = \phi^{-1}(U\cap Y)\cap \hat{X} = \phi^{-1}(U)\cap\hat{X}$ より逆像が開集合であるから $\hat{\phi}$ は連続．$\hat{\phi}^{-1}$ の連続性も同様．したがって $\hat{\phi}$ は同相.

$\hat{X}$ が連結でないなら開集合 $\hat{X}$ の開集合 U, V をもちいて $\hat{X} = U\cup V, U\cap V = set$ とできる．このとき $\hat{\phi}$ が全単射であるから $\hat{Y} = \hat{\phi}(U)\cup\hat{\phi}(V), \hat{\phi}(U)\cap\hat{\phi}(V) = \emptyset$ であり，同相写像であるから $\hat{\phi}(U), \hat{\phi}(V)$ は $\hat{Y}$ の開集合である．すなわち $\hat{Y}$ は連結でない.

同様に $\hat{Y}$ が連結でないなら $\hat{X}$ も連結でない.

(3)M_1 はコンパクトでなく，一点をのぞくと連結でない．M_2 もコンパクトでなく，一点を除くと連結でない M_3 はコンパクトであり，一点を除いても連結．M_4 はコンパクトでなく，一点を除いても連結.

したがって $(M_1, M_3), (M_1, M_4), (M_2, M_3), (M_2, M_4), (M_3, M_4)$ は同相でない.

(4)M_1, M_2 は同相である．$f\colon M_2 \to M_1; x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ とすると，f は連続である．$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ であり $f'(x) = (1+1/\tan^2(\pi x-\pi/2))\pi > 0$ より f は狭義単調増加であるから f は全単射．$f^{-1}(y) = (\arctan y + \pi/2)/\pi$ も連続であるから f は同相写像.

$\boxed{3}$ (1)(a) $(x, cy) = x^T(\bar{c y}) = \bar{c}x^T\bar{y} = \bar{c}(x,y)$

(b)$(y,x) = y^T\bar{x} = \bar{x}^Ty = \overline{x^T\bar{y}} = \overline{(x,y)}$

(c)$(x,x) = x^T\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i\bar{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ ここで $x\neq 0$ ならある $x_i \neq 0$ より $(x,x) > 0$

(2)$(Ax, y) = (Ax)^T\bar{y} = x^TA^T\bar{y} = x^T\overline{\bar{A}^Ty} = (x, \bar{A}^Ty)$ である.

固有値 λ とその 0 でない固有ベクトル x に対して $\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, \bar{A}^Tx) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x,x)$ がなりたつ．$(x,x) > 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ すなわち λ は実数.

(3)B^TB の固有値 λ とその 0 でない固有ベクトル x をとる．$\lambda(x,x) = (B^TBx, x) = (Bx, \bar{B}x) = (Bx, Bx) \geq 0$ より $\lambda \geq 0$.

半正定値性を考える方法もある．(固有値が全て非負 $\Leftrightarrow$ 半正定値) $x^TB^TBx = ||Bx|| \geq 0$ であるから B^TB は半正定値.

$\boxed{4}$ (1)$A \in G$ について $A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$ である．$B = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix}$ とすると $BA^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma\bar{\alpha}+\bar{\delta}\bar{\beta} & -\gamma\beta+\delta\alpha \\ -\bar{\delta}\bar{\alpha}+\bar{\gamma}\bar{\beta} & \bar{\delta}\beta+\bar{\gamma}\alpha \end{pmatrix}$ である．$\overline{\gamma\bar{\alpha}+\bar{\delta}\bar{\beta}} = \bar{\gamma}\alpha+\delta\beta, -\overline{-\gamma\beta+\delta\alpha} = \bar{\gamma}\bar{\beta}-\bar{\delta}\bar{\alpha}$ であり，$\det BA^{-1} = \det B\det A^{-1} = 1$ より $BA^{-1}\in G$

すなわち G は $GL(2,\mathbb{C})$ の部分群である.

(2)(a)$\det A = \alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$ である．$\alpha = a+bi, \beta = c+di \quad (a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ より α, β は $1, -1, i, -i$ のいずれかである．さらに一方が 0 でないなら他方は 0 である．すなわち H の元は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix}$ の

いずれかの形をしていて α,β は $1,-1,i,-i$ のいずれかである．

$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$ であり，$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ なら $ac-bd, ad+bc\in\mathbb{Z}$ であるから，(1) の BA^{-1} の結果をふまえると, $A,B\in H$ なら BA^{-1} の各成分は $\mathbb{Z}[i]$ にふくまれる．すなわち H は G の部分群である．

H の位数は 8 である．

(b)$N=\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ とする．

$H/N=\left\{E=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right], C=\left[\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\right], D=\left[\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right], F=\left[\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\right]\right\}$ である．$[A]$ で A の同値類を表す．$CD=F=DC, C^2=D^2=E$ である．よって H/N はアーベル群.

交換子群は商群がアーベル群であるような最小の部分群であるから $N\geq[H,H]$ である．$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$ であるから H はアーベル群でない. よって交換子群は N である．

(c)$\varphi\colon H\to\mathbb{C}^\times$ を群準同型とする．$H/\ker\varphi\cong\mathrm{Im}\varphi\leq\mathbb{C}^\times$ より $H/\ker\varphi$ はアーベル群すなわち, $\ker\varphi\supset[H,H]$ である．

自然な全射 $\pi_\varphi\colon H/[H,H]\to H/\ker\varphi$ および φ から誘導される単射 $\tilde{\varphi}\colon H/\ker\varphi\to\mathbb{C}^\times$ によって群準同型 $F\colon \hom(H,\mathbb{C}^\times)\to\hom(H/[H,H],\mathbb{C}^\times);\varphi\mapsto\tilde{\varphi}\circ\pi_\varphi$ が定まる．

自然な全射 $H\to H/[H,H]$ を p とする．F の逆写像は $\phi\mapsto\phi\circ p$ である．よって F は同型写像.

$H/[H,H]=H/N$ であり，$C^2=D^2=E, CD=DC=F$ より $H/N\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．すなわち準同型は C,D の行き先で定まり，C,D の行き先は $1,-1$ のいずれかである．したがって $|\hom(H,\mathbb{C}^\times)|=4$

0.11 H16 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $v\in W_2^\perp$ は ${}^\forall w\in W_1\subset W_2, (v,w)=0$ であるから，$v\in W_1^\perp$

(2) $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間であるから W の正規直交基底 $\{w_1,\dots w_k\}\quad(k=\dim W)$ がとれる．これを V の基底へと延長して正規直交化することで V の基底 $\{w_1,\dots,w_k,w_{k+1},\dots,w_n\}$ を得る．このとき $(w_i,w_j)=0\quad(j=1,\dots,k, i=k+1,\dots,n)$ である．$\{w_1,\dots,w_k\}$ は W の基底であり内積は双線形であるから，$w_i\in W^\perp\quad(i=k+1,\dots,n)$ したがって $\{w_{k+1},\dots,w_n\}$ は $W^\perp$ の一次独立な集合である．

$W^\perp$ の元で $\{w_{k+1},\dots,w_n\}$ の線形結合で表されない x が存在するなら $x=\sum_{i=1}^n a_iw_i$ と表したときに $a_i\neq 0$ なる $1\leq i\leq k$ が存在する．$(x,w_i)=a_i$ となり $x\in W^\perp$ に矛盾.

よって $W^\perp$ は $\{w_{k+1},\dots,w_n\}$ を基底にもち，$\dim W^\perp=\dim V-\dim W$

(3)$w\in W$ は任意の $v\in W^\perp$ に対して $(v,w)=0$ である．よって $w\in(W^\perp)^\perp$．よって $W\subset(W^\perp)^\perp$ である．

(2) の結果を $W^\perp$ に対して使うと $\dim(W^\perp)^\perp=\dim V-\dim W^\perp=\dim V-(\dim V-\dim W)=\dim W$ である．$(W^\perp)^\perp$ の部分空間 W の次元が $(W^\perp)^\perp$ の次元と等しいから $W=(W^\perp)^\perp$.

$\boxed{2}$ (1)$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, q(x,y)=(x/r(x,y), y/r(x,y))$ とすれば，$D^*=D\setminus\{(0,0)\}$ の点で $g(x,y)=r(x,y)f\circ q(x,y)$ と表せる．

D^* 上での連続性を確かめる．D^* 上で r は連続である．$(x,y)\mapsto x/r(x,y), (x,y)\mapsto y/r(x,y)$ は連続であるから q も連続である．よって合成関数 $f\circ q$ は連続で積 $g=r\cdot(f\circ q)$ も連続.

$\{0,0\}$ で連続であることを確かめる．$f(x,y)$ はコンパクト空間からの連続写像であるから最大値 M をもつよって $g(x,y)\leq M\sqrt{x^2+y^2}$ である．よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}M\sqrt{x^2+y^2}=0=g(0,0)$ である．すなわち g は連続関数.

(2) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta\quad(0\leq r\leq 1, 0\leq\theta<2\pi)$ と変数変換する．ヤコビアンは r である．

$\int_D g(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}r^2f(\cos\theta,\sin\theta)drd\theta=\int_0^1 r^2dr\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ である．

$\theta=\tau+\pi$ と変数変換すると $\int_{\pi}^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_0^{\pi} f(\cos(\tau+\pi),\sin(\tau+\pi))d\tau=\int_0^{\pi} f(-\cos\tau,-\sin\tau)d\tau=-\int_0^{\pi} f(\cos\tau,\sin\tau)d\tau$ である．

よって $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_0^{\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta+\int_{\pi}^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=0$ である．すなわち $\int_D g(x,y)dxdy=0$.

$\boxed{3}$ $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$ とする．$|b_m-\alpha|=|b_m-a_{m,n}+a_{m,n}-c_n+c_n-\alpha|\leq|b_m-a_{m,n}|+|a_{m,n}-c_n|+|c_n-\alpha|$ である．

$\lim_{n\to\infty} a_{m,n}=b_m$ の m に関する一様収束性から ${}^\forall\varepsilon>0,{}^\exists N_1\in\mathbb{N},{}^\forall n\geq N_1,{}^\forall m,|b_m-a_{m,n}|<\varepsilon$ である．また ${}^\forall\varepsilon>0,{}^\exists N_2\in\mathbb{N},{}^\forall n\geq N_2,,|c_n-\alpha|<\varepsilon$ である．

$N=N_1+N_2$ とすると，$n\geq N$ のとき $|b_m-\alpha|<2\varepsilon+|a_{m,n}-c_n|$ である．${}^\forall n,{}^\forall\varepsilon,{}^\exists M(n)\in\mathbb{N},{}^\forall m\geq M,|a_{m,n}-c_n|<\varepsilon$ である．

よって ${}^\forall\varepsilon>0,{}^\exists N\in\mathbb{N},{}^\exists M(N)\in\mathbb{N},{}^\forall m>M(N),|b_m-\alpha|<3\varepsilon$ である．

$\boxed{4}$ (1)$|S(1,2,3,4)|=4!=24$ である．

(2)G は正四面体の 4 頂点を入れ替える群 S_4 の部分群であるから G の位数は 24 の約数である．

ある頂点 α と，他の 3 つの頂点を結んでできる三角形の中心 β を考える．α,β を結んでできる直線を軸にして $\mathbb{R}^3$ を $2\pi/3$ ラジアン回転させると，α 以外の 3 頂点が一つずれる．すなわち G は 3 頂点による巡回置換を元にもつ．頂点を固定するごとに巡回置換があるから $|G|\geq 2\cdot 4+1=9$ である．したがって $|G|=12,24$ のいずれか.

二つの頂点を固定し残りを入れかえる置換を考える．頂点 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に対して α,β を固定して γ,δ を入れ替えるとする．

入れ替える前は 3 頂点 β,γ,δ によってできる三角形は四面体のうち側から見て反時計まわりに β,γ,δ の順に並んでいたとする．γ,δ を入れ替えると，β,δ,γ の順に並ぶがこれは回転では実現不可能なので，G は二つの頂点を固定し残りを入れかえる置換を含まない.

よって $|G|=12$ である．

(3)$x\in S(1,2,3,4)$ に対して，$\sigma\in G$ によって $\sigma(x)$ で x が回転によって移った置き方を表すことにすると，$\sigma(x)=x$ となるような σ は G の単位元以外に存在しないから，各同値類の大きさは 12 である．よって同値類の数は $24/2=12$ である．

(4)$|S(1,1,2,3)|=4!/2=12$ である．G の元は必ず 3 頂点以上を入れ替えるので $x\in S(1,1,2,3)$ に対しても $\sigma(x)=x$ となるような σ は単位元以外に存在しないから各同値類の大きさは 12 で同値類の数は 1.

$\boxed{5}$ (1)$x\in X\setminus A$ について $f(x)\neq g(x)\in Y$ より $U,V\in\mathcal{O}_Y,f(x)\in U,g(x)\in V,U\cap V=\emptyset$ なる U,V がとれる．$W=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ とすれば W は開集合で $x\in W$.

$x'\in W\cap A$ とすると，$U\ni f(x')=g(x')\in V$ であるから $U\cap V=\emptyset$ に矛盾．よって $W\subset X\setminus A$ である．

(2)X の空でない開集合 U,V であって $X=U\cup V,U\cap V=\emptyset$ となる U,V が存在しないとき X は連結である．

(3)$X\times Y$ が連結でないと仮定する．定義から空でない集合 $U,V\in\mathcal{O}_{X\times Y}$ であって $X\times Y=U\cup V,U\cap V=\emptyset$ となる U,V が存在する．

積位相の定義から $U=\bigcup_{i\in I}U_{X,i}\times U_{Y,i},V=\bigcup_{j\in J}V_{X,j}\times V_{Y,j}$ となる $U_{X,i},V_{X,j}\in\mathcal{O}_X,U_{Y,i},V_{Y,j}\in\mathcal{O}_Y$ が存在する．

$U_X=\bigcup_{i\in I}U_{X,i},V_X=\bigcup_{j\in J}V_{X,j}$ とすると $X=U_X\cup V_X$ であるから X の連結性より ${}^\exists x\in U_X\cap V_X$ である．したがって $x\in U_{X,i_x},x\in V_{X,j_x}$ となる i_x,j_x が存在する．同様に Y の連結性から ${}^\exists y\in U_{Y,i_y}\cap V_{Y,j_y}$ が存在する．このとき $(x,y)\in U_{X,i_x}\times U_{Y,i_y}\subset U,(x,y)\in V_{X,j_x}\times V_{Y,j_y}\subset V$ であるから $U\cap V\neq\emptyset$ に矛盾.

0.12 H17 数学必修

$\boxed{1}$ (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right))=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x=\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right))=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

x, y について対称だから

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right))=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

(2)$x/a=s, y/b=t$ と変数変換する．ヤコビアンは ab である．積分領域 D' は $D'=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le s, 0\le t, s^2+t^2\le 1\right\}$ である．よって $\int_D xdxdy = \int_{D'} saabdsdt = a^2b\int_{D'} sdsdt$ である．$s=r\cos\theta, t=r\sin\theta$ と変数変換する．ヤコビアンは r である．$\int_{D'} sdsdt=\int_0^1\int_0^{\pi/2} r^2\cos\theta rdrd\theta=\frac{1}{3}$ である．

よって $\int_D xdxdy=\frac{a^2b}{3}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\det A = a\begin{vmatrix} -3a+4 & -2a+3 \\ 4a-4 & 3a-3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -3a+4 & -2a+3 \\ a & a \end{vmatrix} = a^2(-a+1)$ である．

(2)$a\neq 0,1$ で $\mathrm{rank}A=3$ である．$a=1$ のとき $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で $\mathrm{rank}A=2$ である．

$a=0$ のとき $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ で $\mathrm{rank}A=1$ である．

(3)$a=1$ である．$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$ とすれば解を持つ．この連立方程式の解は $c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\quad (c_1, c_2\in\mathbb{R})$ である．

$\boxed{3}$ f の連続性から $f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha-0} f(x)\ge\lim_{x\to\alpha-0} x=\alpha, f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha+0} f(x)\le\lim_{x\to\alpha+0} x=\alpha$ である．よって $f(\alpha)=\alpha$ である．

$x_1<\alpha$ のとき．$x_n<\alpha$ なら $x_n<f(x_n)=x_{n+1}, f(x_n)<f(\alpha)=\alpha$ であるから数列 $\{x_n\}_{n\ge 1}$ は有界単調増加であり収束する．$\lim_{n\to\infty} x_n=\beta$ とする．$f(\beta)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\beta$ である．よって $\beta=\alpha$ である．

$x_1>\alpha$ のときも同様にして $\beta=\alpha$ である．

$\boxed{4}$ (1)$(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ の積位相とは，$\{U\times Y\mid U\in\mathcal{O}_X\}\cup\{X\times V\mid V\in\mathcal{O}_Y\}$ を開基とする位相である．

(2)$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ を任意にとる．X, Y は弧状連結であるから，連続写像 $c_X\colon[0,1]\to X, c_Y\colon[0,1]\to Y$ であって $c_X(0)=x_1, c_X(1)=x_2, c_Y(0)=y_1, c_Y(1)=y_2$ となるものが存在する．$c\colon[0,1]\to X\times Y$ を $c(t)=(c_X(t),c_Y(t))$ と定める．

$X\times Y$ の開集合 W は $W=\bigcup_{i\in I} U_i\times V_i\quad (U_i\in\mathcal{O}_X, V_i\in\mathcal{O}_Y)$ とできる．

$c^{-1}(W)=\bigcup_{i\in I} c^{-1}(U_i\times V_i)=\bigcup_{i\in I}(c_X^{-1}(U_i)\cap c_Y^{-1}(V_i))$ である．$c_X^{-1}(U_i)\cap c_Y^{-1}(V_i)$ は $[0,1]$ の開集合であるから $c^{-1}(W)$ は開集合である．よって c は連続であるから $X\times Y$ は弧状連結．

(3)$X\times Y=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ を開被覆とする．$W_\lambda=\bigcup_{i_\lambda\in I_\lambda} U_{i_\lambda}\times V_{i_\lambda}$ とできる．このとき $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{i_\lambda\in I_\lambda} U_{i_\lambda}, Y=$

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{i_\lambda\in I_\lambda} V_{i_\lambda}$ である．コンパクト性から有限部分集合 $S \subset \{i_\lambda \mid \lambda\in\Lambda, i_\lambda\in\lambda\}$ がとれて $X = \bigcup_{U_{i_\lambda}\in S} U_{i_\lambda}$ となる．Y についても同様の有限部分集合 T がとれる．$S\times T$ は有限であり，$\bigcup_{(i_\lambda,j_\lambda)\in S\times T} U_{i_\lambda}\times V_{j_\lambda}$ は $X\times Y$ の開被覆である．すなわち $X\times Y$ はコンパクトである．

$\boxed{5}$ (1) $f(x) = -x, g(x) = -x+1$ である．

(2) $f\circ g(x) = f(-x+1) = x-1$ より $f\circ g$ はマイナス方向に 1 ずらす変換である．

(3)$-x+2 = g(ax+b) = -(ax+b)+1 = -ax+1-b$ より $a=1, b=-1$ である．よって $g\circ f\circ g(x) = -x+2$

(4)$-x+n = g(ax+b) = -ax+1-b$ より $a=1, b=1-n$ である．よって $g\circ(f\circ g)^{n-1}(x) = g(x-(n-1)) = -x+n$ である．

(5)(2),(4) より $\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{Z}\} = H$ とわかる．$h(x) = ax+b\in H$ に対して $h^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ である．$h\circ(f\circ g)^n\circ h^{-1} = (h\circ f\circ g\circ h^{-1})^n$ より $h\circ f\circ g\circ h^{-1}\in\langle f\circ g\rangle$ を示せばよい．

$h\circ f\circ g\circ h^{-1}(x) = h\circ f\circ g(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}) = h\circ f(-\frac{x}{a}+\frac{b}{a}-1) = h(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}+1) = x-b+a+b = x-a = (f\circ g)^a\in\langle f\circ g\rangle$ である．

(6)$N = \langle x-3\rangle$ とする．$h\circ(x-3)\circ h^{-1}(x) = h(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}-3) = x-b-3a+b = x-3a$ より N は H の正規部分群．$H/N = \{[x],[x-1],[x-2],[-x],[-x-1],[-x-2]\}$ である．ここで $[f]$ は $f+N$ を表す．位数 6 の群であり，$[-x-2]\circ[-x] = [x-2], [-x]\circ[-x-2] = [x-1]$ より H/N は可換でない．すなわち $H/N\cong S_3$ である．

0.13 H18 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\begin{vmatrix}1-t & 0 & 0\\ 0 & 3-t & -1\\ 0 & -1 & 3-t\end{vmatrix} = (1-t)((3-t)^2-1) = (1-t)(t-2)(t-4) = 0$ である．

(2)$t=1$ のとき $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ である．

$t=2$ のとき $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ である．

$t=4$ のとき $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ である．

各固有ベクトルは互いに直交しているから，$P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ すれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ で P は直交行列．

(3)$x^2+3y^2+3z^2-2yz = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ より，最大値は固有値の最大値 4 である．最小値は固有値の最小値 1 である．

$\boxed{2}$ (1)$ab = ba = 1, cd = dc = 1$ とする．$acdb = dbac = 1$ であるから，$ac\in R^\times$ である．結合法則は成り立つ．$a\in R$ なら $b\in R$ であるから，逆元も存在する．単位元は 1 であるから，$R^\times$ は群．

(2)$\mathbb{Z}\ni n\neq 1,-1$ について $nm=1$ となる整数 m は存在しないから，$\mathbb{Z}^\times = \{1,-1\}$ である．

(3)$\mathbb{Z}_n$ の元は $0,1,\cdots,n-1$ であるから，$\mathbb{Z}_n^\times$ の元は $1,\cdots,n-1$ である．n が素数ならば，$1\le a\le n-1$ に

ついて $(a,n)=1$ であるから，$\mathbb{Z}_n^\times=\{1,\cdots,n-1\}$ である．

(3)E を単位行列とする．$A\in M_2(R)^\times$ なら $\det A\det A^{-1}=\det E=1$ であるから，$\det A\in R^\times$ である．逆に $\det A\in R^\times$ なら $B=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とすれば $AB=BA=E$ であるから $A\in M_2(R)^\times$ である．

(4)$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体であるから，$M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ はベクトル空間．$\det A\neq 0$ は列ベクトルが一次独立であることと同値である．$A=[v_1,v_2]$ とすると，$v_1\neq 0$ となる v_1 は p^2-1 個ある．各 v_1 に対して一次独立となる v_2 は p^2-p 個ある．よって $\det A\neq 0$ となる A は $(p^2-1)(p^2-p)=p^4-p^3-p^2+p$ 個ある．

$\boxed{3}$ (1)$d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ が次の 3 つ

$$(i)^\forall x,y\in X, d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$$
$$(ii)^\forall x,y\in X, d(x,y)=d(y,x)$$
$$(iii)^\forall x,y,z\in X, d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

をみたすとき，(X,d) を距離空間とする．

(2)(a)$y\in N(q;\varepsilon_2)$ とすると，$d(p,y)\leq d(p,q)+d(q,y)=d(q,y)+\varepsilon_1-\varepsilon_2<\varepsilon_1$ であるから，$y\in N(p;\varepsilon_1)$ である．すなわち $N(q;\varepsilon_2)\subset N(p;\varepsilon_1)$ である．

(b)$x\in N(p,\varepsilon_1)\cap N(p,\varepsilon_2)$ とする．$d(p,q)<d(p,x)+d(q,x)\leq\varepsilon_1+\varepsilon_2$

(3)(a) の逆は偽である．$X=\mathbb{R}$ とすると，$p=0,q=1,\varepsilon_1=2,\varepsilon_2=1$ とすれば，$N(0;2)\supset N(1;1)$ である．$d(p,q)+1=2$ より偽．

(b) の逆は偽である．$X=(-1,0)\cup(1,2)$ とし，$d(x,y)=|x-y|$ とすれば (X,d) は距離空間である．$p=-1/2,q=3/2,\varepsilon_1=11/10,\varepsilon=11/10$ とすれば，$11/10+11/10>d(3/2,-1/2)=2$ である．$x\in N(-1/2;11/10)\cap N(3/2;11/10)$ とすれば，$x<0$ である．よって $d(x,3/2)>d(0,3/2)=3/2>1$ であるから，$x\notin N(3/2;11/10)$ である．

$\boxed{4}$ (1)$1/n^2<\int_{n-1}^n x^{-2}dx$ より $\sum\limits_{n=2}^{\infty}1/n^2<\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n x^{-2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}[-1/x]_1^n=1-1/n=1$ より収束する．

(2)$f_n(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}(xy)^k=\frac{1-(xy)^{n+1}}{1-xy}\leq 1/(1-a^2)$ であり $1/(1-a^2)$ は $\int_0^a\int_0^a$ 上可積分．よって優収束定理より $\int_0^a\int_0^a\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(xy)^n dxdy=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^a[\frac{y^{n+1}}{n+1}]_0^a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n^2}$

(3)$\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a^{2k}}{k^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ である．

$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy$ は $\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy$ が $a\in(0,1)$ で一様収束するから，$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ である．

0.14 H19 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\det A=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2$ である．

(2)$a=-2$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$\mathrm{rank}A=2$ である．

$a=1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$\mathrm{rank}A=1$ である．

$a\neq -2,1$ のとき，A は正則であるから $\mathrm{rank}A=3$ である．

(3)$\mathrm{rank}A=2$ より $a=-2$ である．固有値は $g_A(t)=\begin{vmatrix}1-t & -2 & 1\\ -2 & 1-t & 1\\ 1 & 1 & -2-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-t & t-3 & 1\\ -2 & 3-t & 1\\ 1 & 0 & -2-t\end{vmatrix}=$ $(t-3)\begin{vmatrix}1-t & 1 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2-t\end{vmatrix}=(t-3)\begin{vmatrix}-1-t & 0 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2-t\end{vmatrix}=(t-3)(-1)\begin{vmatrix}-1-t & 2\\ 1 & -2-t\end{vmatrix}=-(t-3)((-1-t)(-2-t)-2)=-(t-3)t(t+3)$ より $-3,0,3$ である．

(4)$\mathrm{rank}A=1$ より $a=1$ である．固有値は $g_A(t)=\begin{vmatrix}1-t & 1 & 1\\ 1 & 1-t & 1\\ 1 & 1 & 1-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-t & t & 0\\ 1 & 1-t & 1\\ 0 & t & -t\end{vmatrix}=$ $t^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1-t & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=t^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2-t & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-t^2\begin{vmatrix}2-t & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-t^2(-(2-t)-1)=t^2(t-3)$ より $0,3$ である．

$A(A-3E)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=O$ より，最小多項式は $x(x-3)$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\theta=2\pi/3$ とすると，$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ である．よって $A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ であるから A の位数は 3 である．

(2)E を単位行列とする．$X=\{(1,0),(\cos 2\pi/3,\sin 2\pi/3),(\cos 4\pi/3,\sin 4\pi/3)\}$ とすれば，A,B は X の置換作用である．したがって $\langle A,B\rangle\le S_3$ である．$|\langle A,B\rangle|\ge|\{E,A,A^2,B\}|=4$ であるから，ラグランジュの定理より $\langle A,B\rangle=S_3$ である．すなわち位数は 6.

(3)$\langle A,B\rangle=S_3$ より $\langle A,B\rangle=\{E,A,A^2,B,AB,A^2B\}$ である．また $A^2B=BA$ が成り立つ．

$E^{-1}BE=B, A^{-1}BA=A^2A^2B=AB, A^{-2}BA^2=A^{-2}A^4B=A^2B$ である．また置換とみなしたときに共役では置換の符号は変わらず，A は偶置換，B は奇置換であるから，B と置換の符号が等しいのは AB,A^2B のみ．よって B の共役は B,AB,A^2B である．

(4) 真部分群は 6 未満の 6 の約数を位数としてもつから $1,2,3$ のいずれかで巡回群．S_3 の位数 3 の元は二つあり，それは A,A^2 に対応することに注意すれば部分群は $E,\langle A\rangle,\langle B\rangle,\langle AB\rangle,\langle A^2B\rangle,\langle A,B\rangle$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\quad(r\ge 0, 0\le\theta<2\pi)$ とすると，$f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=rf(\cos\theta,\sin\theta)$ である．$S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ とすると，$f|_{S_1}$ は S_1 上の連続関数である．S_1 はコンパクトであるから，$f|_{S_1}$ は最大値 M，最小値 m をもつ．f は S_1 上で正の値をとるから，$M\ge m>0$ である．

よって $rm\le rf(\cos\theta,\sin\theta)\le rM$ であるから，$m\sqrt{x^2+y^2}\le f(x,y)\le M\sqrt{x^2+y^2}$ である．

(2)$f_x=3x^2+1-4y, f_y=-4x-4y, f_{xx}=6x, f_{yy}=-4, f_{xy}=-4$ である．$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる (x,y) は $(-1,1),(-1/3,1/3)$ である．

$(-1,1)$ でのヘッシアンは $\begin{pmatrix}-6 & -4\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ であるから，負定値である．よって極大値 $f(-1,1)=0$ である．

$(-1/3,1/3)$ でのヘッシアンは $\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ であるから，不定値である．よって極値をとらない．

(3) 体積は $B=\int_V dxdydz$ である．$x=s^2,y=t^2,z=u^2,s,t,u\ge 0$ とするとヤコビアンは $2s2t2u=8stu$ で

ある．積分領域は $\{(s,t,u)\mid 0\le s,t,u,s+t+u=1\}$ である．よって

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-s-u} 8studtdsdu\\
&= 4\int_0^1 u\int_0^{1-u} s(1-s-u)^2 dsdu\\
&= 4\int_0^1 u[s^4/4-2s^3(1-u)/4+(1-u)^2s^2/2]_0^{1-u}du\\
&= 4\int_0^1 u((1-u)^4/4-2(1-u)^4/4+(1-u)^4/2)du\\
&= \int_0^1 u(1-u)^4du = B(2,5)=\frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)}=\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (1)$\lim_{n\to\infty} n^2a_n=\alpha$ とする．$\lim_{n\to\infty}|n^2a_n-\alpha|=0$ より任意の $\varepsilon>0$ に対してある N が存在して $n>N$ ならば $|n^2a_n-\alpha|<\varepsilon$ である．すなわち $|a_n-\alpha/n^2|<\varepsilon/n^2$ より $|a_n|<\varepsilon/n^2+\alpha/n^2$ である．

よって $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon/n^2+\alpha/n^2)<\infty$ より $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する．すなわち収束する．

(2)$\lim_{n\to\infty} na_n=\alpha$ とする．$\alpha>0$ としても一般性を失わない．($\because \alpha<0$ なら $-a_n$ を考えればよい．)

したがってある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n\ge N$ ならば $na_n>\alpha/2$ である．よって $n>N$ ならば $a_n>\alpha/2n$ である．すなわち $\sum_{n=N}^{\infty}a_n\ge\sum_{n=N}^{\infty}\alpha/2n=\infty$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する．

$\boxed{5}$ (1)$A_t = f^{-1}(\{y\in\mathbb{R}\mid y<t\})$ である．$\{y\in\mathbb{R}\mid y<t\}$ は開集合であり，f は連続であるから A_t は開集合.

(2)$x\in X$ は $x\in A_{f(x)+1}$ であるから $X\subset\bigcup_{t\in\mathbb{R}}A_t$ である．

(3)X はコンパクトであるから，$f(X)$ はコンパクト，すなわち有界閉集合で最大値 M をもつ．よって $X\subset A_{M+1}$ である．

0.15　H20 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\det A=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&a^2\\1&a^2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&a^2\\0&a^2-a&0\end{vmatrix}=-(a^2-a)\begin{vmatrix}1&1\\a&a^2\end{vmatrix}=-a^2(a-1)^2$

(2)$a\ne 0,1$ なら $\det A\ne 0$ より A は正則で，$\mathrm{rank}A=3$

$a=1$ のとき，$A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}$ より $\mathrm{rank}A=1$

$a=0$ のとき，$A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$ より $\mathrm{rank}A=2$

(3)$\mathrm{rank}A=2$ より $a=0$ である．$g_A(t)=\begin{vmatrix}1-t&0&1\\0&1-t&0\\1&0&1-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}1-t&1\\1&1-t\end{vmatrix}=(1-t)((1-t)^2-1)=t(t-2)(1-t)$ より固有値は $0,1,2$ である．

固有値 0 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 固有値 2 に対する固有べ

クトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ (1) $[a]_n, [b]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ とする．それぞれ乗法に関する逆元 $[a]_n^{-1}, [b]_n^{-1}$ が存在して $[a]_n^{-1}, [b]_n^{-1} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ である．よって $([a]_n[b]_n)([b]_n^{-1}[a]_n^{-1}) = [1]_n$ より $[a]_n[b]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ である．

よって $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は乗法について閉じている．

$[1]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ より単位元を持ち，結合律は $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が環であることから成り立つ．逆元の存在もあきらか．

(2)n と互いに素な a について $ak + n\ell = 1$ となる k, ℓ が存在する．$[a]_n[k]_n = [1 - n\ell]_n = [1]_n$ より $[a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ である．逆に $[a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ なら $[a]_n[b]_n = [1]_n$ なる b が存在する．すなわち $ab = 1+nk$ なる k が存在する．これは a, n が互いに素であることを意味するから $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \mid a$ と n は互いに素$\}$ である．

(3)$\pi(c+d) = ([c+d]_m, [c+d]_n) = ([c]_m + [d]_m, [c]_n + [d]_n) = ([c]_m, [c]_n) + ([d]_m, [d]_n) = \pi(c) + \pi(d), \pi(cd) = ([cd]_m, [cd]_n) = ([c]_m[d]_m, [c]_n[d]_n) = ([c]_m, [c]_n)([d]_m, [d]_n) = \pi(c)\pi(d), \pi(1) = ([1]_m, [1]_n)$ より π は環準同型である．

$[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times, [b]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を任意にとる．n, m が互いに素であるから，$nk + m\ell = 1$ なる k, ℓ が存在する．$c = ank + bm\ell$ とおくと，$[c]_m = [ank]_m = [1]_m, [c]_n = [bm\ell]_n = [1]_n$ より $\pi(c) = ([a]_m, [b]_n)$ であるから，π は全射準同型である．

$\pi(c) = 0$ とすると，$c \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ であり，m, n が互いに素であるから $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$ である．よって $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である．

(4)$[c]_{mn} \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ が可逆であることと，$\pi(c)$ が可逆であることは同値である．したがって $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ によって誘導される同型写像 $\bar{\pi}\colon \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ から写像 $\bar{\pi}\colon (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ が誘導される．これが群同型写像であることは明らか．

$([a]_m, [b]_n) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は $[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times, [b]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ と同値であるから，$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

(5)$144 = 9 \cdot 16$ で $9, 16$ は互いに素であるから，$(\mathbb{Z}/144\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ である．

$|(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times|$ は 9 と互いに素な 9 以下の自然数の個数であるから，$|(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times| = 6$ である．$|(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times|$ は 16 と互いに素な 16 以下の自然数の個数であるから，$|(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times| = 8$ である．

よって $|(\mathbb{Z}/144\mathbb{Z})^\times| = |(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times||(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times| = 48$

$\boxed{3}$ (1)$\mathcal{U}$ が次の 3 条件を満たすとき，$(X, \mathcal{U})$ を位相空間という．

1. $\emptyset, X \in \mathcal{U}$
2. $\mathcal{U}$ の任意個の元の和集合が $\mathcal{U}$ に属する
3. $\mathcal{U}$ の有限個の元の共通部分が $\mathcal{U}$ に属する

(2)$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{U}_Y, Y = Y \cap X \in \mathcal{U}_Y$ である．$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(Y \cap U_\lambda) = Y \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_Y$ である．$\bigcap_{i=1}^n (Y \cap U_i) = Y \cap \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}_Y$ である．よって位相を与える．

(3)(i) 真．$y, y' \in Y \subset X$ に対して，$y \in U, y' \in V, U, V \in \mathcal{U}, U \cap V = \emptyset$ なる U, V が存在する．このとき $y \in Y \cap U, y' \in Y \cap V, (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = \emptyset$ であるから Y はハウスドルフ．

(ii) 偽．位相空間 X を $\mathbb{R}$ に標準の位相を入れたものとし，$Y = [0,1] \cup [2,3]$ とする．X は連結であるが，Y は連結でない．

(iii) 偽 $X = [0,1]$ に $\mathbb{R}$ の部分位相をいれたものとすると，X は有界閉集合であるからコンパクトである．$Y = (0,1)$ とすればこれは $U_n = (0, 1-1/n)$ として有限部分被覆を持たない開被覆 $\{U_n \mid n = 2, 3, \ldots\}$ を持つからコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$x=0$ のとき，$f(0)=\lim_{n\to\infty}e^{-n0}=1$ である．$x\neq 0$ のとき，$f(x)=\lim_{n\to\infty}e^{-nx}=0$ である．$\sup_{x\in[0,1]}|e^{-nx}-f(x)|=\sup_{x\in(0,1]}e^{-nx}$ であり，$x=1/n$ のとき $e^{-nx}=e^{-1}$ であるから，$\sup_{x\in(0,1]}e^{-nx}\geq e^{-1}$ である．よって $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|e^{-nx}-f(x)|\geq e^{-1}$ より一様収束しない．

(2)$x_0\in[0,1]$ を一つ固定すると，実数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ を得る．任意の ε に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $n,m>N$ に対して $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leq\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ が成り立つ．すなわち $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．よって $\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)$ は収束する．

(3) 任意の ε に対してある N_x が存在して $n\geq N_x$ ならば $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ である．よって $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\leq\sup_{x\in[0,1]}(|f_n(x)-f_{N_x+N}(x)|+|f_{N_x+N}(x)-f(x)|)\leq\sup_{x\in[0,1]}|f_{N_x+N}(x)-f(x)|+\varepsilon<2\varepsilon\quad(n>N)$ である．よって f_n は f に一様収束する．

$|f(x+h)-f(x)|\leq|f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|$ である．任意の ε に対して $n\geq N_{x+h}$ で $|f(x+h)-f_n(x+h)|<\varepsilon$ であり，$n\geq N_x$ で $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ である．任意の n について f_n の連続性からある δ_n が存在して $|h|<\delta_n$ ならば $|f_n(x+h)-f_n(x)|<\varepsilon$ である．よって $M=N_{x+h}+N_x$ とすれば $|h|<\delta_M$ に対して $|f(x+h)-f(x)|<3\varepsilon$ とできる．すなわち f は連続である．

0.16 H21 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h21.pdf

$\boxed{1}$ (1) $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-a&-3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&2&-1\\-a&-3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\a&0&-3\end{pmatrix}$ A の階数は一次独立な列ベクトルの数であるから，$a\neq-3$ で $\mathrm{rank}A=3$, $a=-3$ で $\mathrm{rank}A=2$ である．

(2)$a\neq-3$ なら A は正則，すなわち ϕ_a は全単射であるから，$\ker\phi_a=\{0\}$ である．$a=-3$ なら $\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-3&0&-3\end{pmatrix}$ より $\ker\phi_{-3}=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ である．

(3)$a\neq-3$ なら ϕ_a は全単射であるから，$\phi_a(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^3$ である．よって $\phi_a(\mathbb{R}^3)\cap L_\lambda=L_\lambda$ である．

$a=-3$ のとき，$\phi_{-3}(\mathbb{R}^3)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ である．$v\in\phi_{-3}(\mathbb{R}^3)\cap L_\lambda$ とすると，$v=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}=d_1\begin{pmatrix}\lambda\\0\\3\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}1\\\lambda\\0\end{pmatrix}$ となる．よって $c_1=d_1\lambda+d_2, c_2=d_2\lambda, -3c_2=3d_1$ である．

$\lambda=0$ のとき，$c_2=0=d_1, c_1=d_2$ より $v=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ である．すなわち $\phi_{-3}(\mathbb{R}^3)\cap L_0=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ である．

$\lambda\neq0$ のとき，$d_2\lambda=c_2=-d_1$ より $d_2=-d_1/\lambda, c_1=d_1\lambda-d_1/\lambda$ となる．よって $v=d_1\begin{pmatrix}\lambda\\0\\3\end{pmatrix}-d_1/\lambda\begin{pmatrix}1\\\lambda\\0\end{pmatrix}=d_1\begin{pmatrix}\lambda-1/\lambda\\-1\\3\end{pmatrix}$ である．すなわち $\phi_{-3}(\mathbb{R}^3)\cap L_\lambda=\left\langle\begin{pmatrix}\lambda-1/\lambda\\-1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$ である．

$\boxed{2}$ (1)$x\in\mathbb{Z}$ に対して，$p\mathbb{Z}$ による同値類を $[x]$ と表すことにする．$[x]\in F_p\setminus\{0\}$ にたいして x,p は互いに

素であるから，$kx+\ell p=1$ となる $k,\ell\in\mathbb{Z}$ が存在する．よって $[x][k]=[1-\ell p]=[1]$ より $[x]$ は可逆元である．よって F_p は体.

(2)F_p が体であるから $F_p[x]$ は PID となり次が成り立つ．$F_p[x]/(x^2+1)F_p[x]$ が体 $\Leftrightarrow$ $(x^2+1)F_p[x]$ が極大イデアル $\Leftrightarrow$ $(x^2+1)F_p[x]$ が素イデアル $\Leftrightarrow$ (x^2+1) が素元 $\Leftrightarrow$ x^2+1 が既約.

$p=3$ のとき，x^2+1 に $0,1,2$ を代入しても 0 にならないから，因数定理より x^2+1 は既約．よって体.

$p=5$ のとき，$[3^2+1]=[10]=[0]$ より x^2+1 は可約．よって体ではない.

(3) 列ベクトルが一次独立となるような a,b,c,d の選び方は．一列目が 0 でなく 2 列目が 1 列目の定数倍にならないように選べばよい．したがって位数は $(p^2-1)(p^2-p)$ 通り.

(4)$A,B\in H$ に対して，$ABe_1=Ae_1=e_1$ であり，$Ae_1=e_1$ に A^{-1} をかけて $e_1=A^{-1}e_1$ を得るから H は部分群.

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e_1$ より $a=1,c=0$ である．よって b,d の選び方は p^2-p 通りだから $|H|=p^2-p$ である.

$\boxed{3}$ (1)$A=\{\emptyset,X\},B=\{\emptyset,X,\{1\}\},C=\{\emptyset,X,\{2\}\},D=\{\emptyset,X,\{1\},\{2\}\}$ の 4 つが位相である.

(2)$f^{-1}(\{a\})=\{b\},f^{-1}(\{b\})=\{a\}$ である．よって f が連続となるのは A,D のみ.

(3)g は全単射であるから集合 X の大きさを $|X|$ と表すことにすれば,$|g^{-1}(A_k)|=|A_k|$ である．大きさ k の開集合は A_k のみであるから $g^{-1}(A_k)=A_k$ である．よって $g^{-1}(A_1)=g^{-1}(\{a_1\})=\{a_1\}$ より $g(a_1)=a_1$ である．$g(a_k)=a_k$ が $k\le m-1$ で成り立つとき，$g^{-1}(A_m)=g^{-1}(\{a_1,\dots,a_m\})=\{a_1,\dots,a_m\}$ より $g(a_m)=a_m$ である．帰納的に $g(a_m)=a_m$ が $m=1,\dots,n$ について成り立つ．よって g は恒等写像.

$\boxed{4}$ (1)$x\ge y$ とする．$|F(x)-F(y)|=|\int_a^x f(x)dx-\int_a^y f(x)dx|=|\int_y^x f(x)dx|\le\int_y^x|f(x)|dx$ である．f は有界閉集合上の連続関数であるから最大値 M をもつ．よって $\int_y^x|f(x)|dx\le M(x-y)$ である．すなわち $F(X)$ は M リプシッツ連続．よって一様連続.

(2)$|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx|=|\int_a^b(f_n(x)-f(x))dx|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx\le\int_a^b\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|dx\le(b-a)\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ である．一様収束するから $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$ である．よって $\lim_{n\to\infty}|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx|=\lim_{n\to\infty}(b-a)\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$ である.

(3)$G(x)=\int_a^x g(x)dx+f(a)$ とする．G は微分可能で $G'=g$ である．すなわち G は C^1 級である．$\int_a^x g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(x)dx=\lim_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(a))=f(x)-f(a)$ である．よって $G(x)=f(x)$ であるから f は C^1 級で $g=f'$ である.

$\boxed{5}$ (1)$s^{3/2}=x,t^{3/2}=y$ と変数変換する．ヤコビアンは $\begin{vmatrix}\frac{3}{2}s^{1/2}&0\\0&\frac{3}{2}t^{1/2}\end{vmatrix}=\frac{9}{4}\sqrt{st}$ である.

積分領域は $\{(s,t)\mid s\ge0,t\ge0,s+t\le1\}$ であるから，$\int\int_D x^{1/3}dxdy=\frac{9}{4}\int_0^1\int_0^{1-s}s\sqrt{t}dtds=\frac{9}{4}\int_0^1 s\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{1-s}ds=\frac{3}{2}\int_0^1 s(1-s)^{3/2}ds=\frac{3}{2}B(2,5/2)=\frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(9/2)}=\frac{3}{2}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\frac{6}{35}$ である.

(2)$f_x=-1+y+z+2x,f_y=-2+x+z+2y,f_z=-1+x+y+2z,f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=2,f_{xy}=f_{xz}=f_{yz}=1$ である．よって $f_x(x,y,z)=f_y(x,y,z)=f_z(x,y,z)=0$ とすると，$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ が唯一の解である．$(0,1,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ で $\begin{vmatrix}2\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}>0$ であるから極小値 $f(0,1,0)=-1$ をとる.

0.17 H22 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h22.pdf

$\boxed{1}$ (1) $W \subset V$ が V の部分空間であるとは，任意の $v, w \in W$ に対して $v + w \in W$ であり，任意の $r \in \mathbb{R}, w \in W$ に対して $rv \in W$ であることである．

(2)$x, y \in W$ なら $A(x+y) = AX + Ay = 0$ より $x + y \in W$ であり $k \in \mathbb{R}, x \in W$ に対して $A(kx) = kAx = 0$ より $kx \in W$ であるから W は部分空間.

(3)A が正則でないような a を求める． $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 \\ 1-a & a & a \\ a-1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 \\ -1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 \\ 0 & a+1 & 2a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ a+1 & 2a \end{vmatrix} = (a-1)(2a - a^2(a+1)) = -a(a-1)^2(a+2)$ より $a = 0, 1, -2$ のとき正則でない．

$a = 0$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は 2 であるから $\dim W = 1$

$a = 1$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の階数は 1 であるから $\dim W = 2$

$a = -2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ より階数は 2 であるから $\dim W = 1$

$\boxed{2}$ (1)$a, c \in F_p^\times, b, d \in F_p$ とする． $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$ac \in F_P^\times, ad + b \in F_p$ であるから G は乗法で閉じている．G の乗法が結合律を満たすことは明らか．また単位元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ も明らか．$a \in F_p^\times$ に対して逆元 $c \in F_p^{times}$ が唯一存在して $ac = 1$ である．$d = -cb$ と定めれば $ad = -b$ であるから $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が逆元である．よって G は群である．

(2)$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, X = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ を任意にとる．$ac = ca = 1$ として c を定める．

$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -cb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & -acb + ae + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ae \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ である．よって N は正規部分群.

(3)$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より X の位数は 2.

$Y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より Y の位数は 3.

$Z^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で $b \neq 0$ なら $2^n b = 0$ となる n は存在しないから位数は無限.

$b = 0$ なら位数は 1.

$\boxed{3}$ (1)$f(x) = x(x - 1/2)(x + 1)$ とすれば $f(0) = 0, f(1) = 1$ である．f が全射であることは明らか．$f(0) = f(1/2)$ より単射ではない．

(2)$f(x) = \arctan(x)/\arctan(1)$ とすると $f(0) = 0, f(1) = 1$ であり f は単射であるが $f(x) = 10$ をみたす x

は存在しないから全射でない.

(3)$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & 0\le x\le 1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$ とすると $f(0)=0,f(1)=1$ で f の像は $[0,1]$ だから有界閉集合，すなわちコンパクト.

$\boxed{4}$ (1)$n=1$ のとき，$f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt$ である．$\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!}f(t)dt$ より $n=1$ で成り立つ.

$n\le k-1$ で成り立つとする．$n=k$ のとき，

$$\begin{aligned}f_k(x)&=\int_0^x f_{k-1}(x)dx=\int_0^x\int_0^t \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!}f(s)dsdt\\&=\int_0^x\int_s^x \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!}f(s)dtds\\&=\int_0^x f(s)\int_s^x \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!}dtds\\&=\int_0^x f(s)\frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}ds\end{aligned}$$

より成り立つ.

(2)

$$\begin{aligned}|f_n(x)|&=\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt\right|\le\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|f(t)|dt\\&\le[-(x-t)^n/n!]_0^x\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|=\frac{1}{n!}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\end{aligned}$$

(3)x を固定すると $\sum_{k=0}^n f_k(x)\le\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}\to e\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\quad(n\to\infty)$ より各点収束する．よって $g(x)=\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ と定められる.

$|g(x)-g_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\right|\le\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\sum_{k=n+1}^\infty\frac{1}{k!}$ である．$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g_n(x)|\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^\infty\frac{1}{k!}=0$ より一様収束する.

(4)g_n が一様収束することから $\int_0^x g(t)+f(t)dt=\int_0^x\sum_{k=0}^\infty f_k(t)dt=\sum_{k=0}^\infty\int_0^x f_k(t)dt=\sum_{k=0}^\infty f_{k+1}(x)=g(x)$ である.

よって $g(x)$ は微分可能であり $g'(x)=g(x)+f(x)$ である.

(5)

$$\left|e^{x-t}-\sum_{k=0}^n\frac{(x-t)^k}{k!}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^\infty\frac{(x-t)^k}{k!}\right|\le\sum_{k=n+1}^\infty\frac{x^k}{k!}\to 0\quad(n\to\infty)$$

より $\sum_{k=0}^n\frac{(x-t)^k}{k!}$ は $t\in[0,x]$ について一様収束する．したがって

$$\begin{aligned}g(x)&=\sum_{k=1}^\infty f_k(x)=\sum_{k=1}^\infty\int_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f(t)dt=\int_0^x\sum_{k=1}^\infty\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f(t)dt\\&=\int_0^x e^{x-t}f(t)dt\end{aligned}$$

0.18 H23 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h23.pdf

$\boxed{1}$ (1)$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x-1 & 1-x & 0 \\ x-1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(-1) \begin{vmatrix} 1+x & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(x-1)^2(-x-1-x) = (x-1)^2(2x+1)$ である．

(2)$x \neq 1, -1/2$ のとき，A は正則だから $\mathrm{rank}A = 3$ である．

$x = 1$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の階数は 1 であるから $\mathrm{rank}A = 1$

$x = -1/2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & -3/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ より階数は 2 であるから $\mathrm{rank}A = 2$

(3)$AB = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -x-1 & -x-1 \\ -x-1 & -2x & -x-1 \\ -x-1 & -x-1 & -2x \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -x-1 & -x-1 \\ -x-1 & -2x & -x-1 \\ -x-1 & -x-1 & -2x \end{pmatrix}$ であるから $AB = BA$ である．

(4)$g_B(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 & -1 \\ -1 & -t & -1 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t+1 & -1+t & 0 \\ -1 & -t & -1 \\ 0 & t-1 & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -t-1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(t-1)^2 \begin{vmatrix} -t-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(t-1)^2(t+1+1) = -(t-1)^2(t+2)$ である．

よって固有値は $1, -2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は明らかに固有値 1 の固有ベクトルで一次独立．固有方程式における 1 の重複度が 2 であるからこれらは固有空間の基底.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 -2 の固有ベクトルである．

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ である．

(5)$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1-x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (1-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2x+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2x+1 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$a, b \in R^\times$ の乗法的逆元を a^{-1}, b^{-1} とする，$ab(b^{-1}a^{-1}) = 1$ より ab は可逆である．すなわち $R^\times$ は乗法で閉じている．$1, a^{-1} \in R^\times$ は明らか．結合律も成り立つ．よって群.

(2)x の同値類を $[x]$ で表す．$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の可逆元は 0 以外のすべての元である．$[3], [3]^2 = [2], [3]^3 = [6], [3]^4 =$

$[4],[3]^5=[5],[3]^6=[1]$ であるから巡回群.

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の可逆元は 8 と互いに素な $1,3,5,7$ の 4 つである．$[1]^2=[3]^2=[5]^2=[7]^2=[1]$ であるから位数 4 の元は存在しない．よって巡回群でない.

(3) 素数 p に対する有限体 F_p は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型である．これは環準同型 $\varphi\colon \mathbb{Z}\to F_p; n\mapsto n\cdot 1_{F_p}$ が全射であるから $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong F_p$ となり位数から $n=p$ とわかる.

$[1],[2]\in F_3$ は共に $x^2+1=0$ を満たさないから x^2+1 は $F_3[x]$ の既約多項式である．$F_3[x]$ は PID であるからイデアル (x^2+1) は極大イデアルで $F_3[x]/(x^2+1)$ は体．よって $(F_3[x]/(x^2+1))^\times=\{[1],[2],[x],[x+1],[x+2],[2x],[2x+1],[2x+2]\}$ である．$[x+1]^2=[2x],[x+1]^3=[2x+1],[x+1]^4=[2],[x+1]^5=[2x+2]$ より $[x+1]$ の位数は 8 であり巡回群となる.

$p=5$ のとき，$x^2+1=(x-2)(x-3)$ でありイデアルとして $(x-2)+(x-3)=(1)$ が成り立つから，中国剰余定理より $F_5[x]/(x^2+1)\cong F_5[x]/(x-2)\times F_5[x]/(x-3)\cong F_5\times F_5$ である．よって $(F_5[x]/(x^2+1))^\times\cong(F_5\times F_5)^\times=F_5^\times\times F_5^\times$ である．すなわち位数は 16 であるが，任意の元は 4 乗すると 1 になるから巡回群でない.

$\boxed{3}$ (1) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるとは，任意の異なる 2 点 $x,y\in X$ に対して開集合 U,V が存在して $x\in U,y\in V,U\cap V=\emptyset$ となることである.

(2) 異なる $x_1,x_2\in X$ に対して $f(x_1),f(x_2)$ は異なる．よって $f(x_1)\in U,f(x_2)\in V$ となる Y の開集合 U,V で $U\cap V=\emptyset$ なるものがある．$f^{-1}(U),f^{-1}(V)$ は X の開集合であり $x_1\in f^{-1}(U),x_2\in f^{-1}(V),f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=\emptyset$ である．よって X はハウスドルフ.

(3)X をコンパクト空間，Y をハウスドルフとし $f\colon X\to Y$ を全単射連続とする．X の閉集合 C をとる．C の開被覆 $C\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ をとる．$X=(X\setminus C)\cup\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ は X の開被覆であるからコンパクト性より有限集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ が存在して $X=(X\setminus C)\cup\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda$ よって $C\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda$ となるから C はコンパクトである．f は連続であるから $f(C)$ はコンパクトである．$y\notin f(C)$ を一つとる．各 $a\in f(C)$ に対して $y\in U_a,a\in V_a,U_a\cap V_a=\emptyset$ となる Y の開集合 U_a,V_a が存在する．$f(C)\subset\bigcup_{a\in f(C)}U_a$ であり $f(C)$ はコンパクトであるから有限集合 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ が存在して $f(C)\subset\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$ となる．$\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ は y を含む Y の開集合で $f(C)\cap\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}=\emptyset$ となるから $f(C)$ は閉集合である．よって f は全単射連続閉写像であるから同相.

$\boxed{4}$ (1)$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})=1,\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}=e$ である．充分大きい n で $(1+\frac{1}{n^2})<3$ より $(1+\frac{1}{n^2})^{2n}<3^{\frac{2}{n}}\to 0\quad(n\to\infty)$．よって $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{(1+n)^2}=e$ である.

(2)$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}2x=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．よって $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ である.

(3)$x>0$ で $e^{-x^2}<e^{-x}$ であり $\int_0^\infty e^{-x}dx$ は収束するから $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ も収束する．e^{-x^2} は偶関数であるから $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ は存在しそれを I とおく.

$$I^2=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

である．$(x,y)=(rcos\theta,rsin\theta)$ と極座標変換するとヤコビアンは r であり $I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^\infty=\pi$ である．よって $I=\sqrt{\pi}$ である.

$\boxed{5}$ (1)$|a_n|$ が 0 に収束しないとする．このとき $^\exists\varepsilon>0,{}^\forall N\in\mathbb{N},{}^\exists n\geq N$ で $|a_n|>\varepsilon$ である．$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n a_n=\alpha$ とすればある N が存在して任意の $n\geq N$ について $|\sum_{k=0}^n a_n-\alpha|<\varepsilon/2$ がなりたつ．$m>N$ で $|a_m|>\varepsilon$ なる m をとる．$|\sum_{k=0}^{m-1}a_n-\alpha|<\varepsilon/2$ より $\alpha-\varepsilon/2<\sum_{k=0}^{m-1}a_n<\alpha+\varepsilon/2$ だが $\alpha-\varepsilon/2+a_m<\sum_{k=0}^m a_n<\alpha+\varepsilon/2+a_m$ となり $a_m>\varepsilon$ なら $\alpha+\varepsilon/2<\sum_{k=0}^m a_n$，$a_m<-\varepsilon$ なら $\alpha-\varepsilon/2>\sum_{k=0}^m a_n$ となり矛盾．よって $|a_n|$ は 0 に収束する.

(2)$\sup_{|x|\leq r}|a_nx^n|=|a_n|r^n$ である．また $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ より任意の n について $|a_n|\leq M$ となる定数 M が存在

する．$|x| \leq r < 1$ より $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M|r|^k = \frac{M}{1-r}$ である．優級数定理から $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は一様収束する．

0.19 H24 数学必修

`https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h24.pdf`

$\boxed{1}$ (1)$\begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ -a & 1 & -a \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 1-a & 1-a & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1+a & -a & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1+a & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2(1+a+a) = (a-1)^2(2a+1)$

(2)$a = 1$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の階数は 1 であるから $\mathrm{rank}A = 1$

$a = -1/2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ より階数は 2 であるから $\mathrm{rank}A = 2$

$a \neq 1, -1/2$ のとき，A は正則だから $\mathrm{rank}A = 3$

(3)$a = 1$ のとき $\ker A$ の次元は 2 であり，基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．

$a = -1/2$ のとき $\ker A$ の次元は 1 であり，基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$a \neq 1, -1/2$ のとき $\ker A$ の次元は 0 である．

(4) 固有方程式 $g_A(t) = (a-(1-t))^2(2a+1-t) = -(t+a-1)^2(t-2a-1)$ より固有値は $-a+1, 2a+1$ である．

(5)A が正定値となる必要十分条件は固有値が全て正であることである．よって $-a+1 > 0, 2a+1 > 0$ より $-1/2 < a < 1$ のとき，A は正定値．

$\boxed{2}$ (1)$(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ 極座標変換する．ヤコビアンは $r^2\sin\theta$ であり積分領域は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．よって $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^4 \sin^3\theta drd\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} -\sin\theta(\cos^2\theta - 1)\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = 2\pi[\cos^3\theta/3 - \cos\theta]_0^{\pi}\frac{1}{5} = \frac{8\pi}{15}$

(2)$\frac{\partial f}{\partial x} = y(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1) + \frac{xy}{a} = \frac{y^2}{b} + \frac{2xy}{a} - y, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{a} + \frac{2xy}{b} - x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{y}{b}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{x}{a}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{b} + \frac{2x}{a} - 1$ である．

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる (x, y) を求める．$\frac{y^2}{b} + \frac{2xy}{a} - y = 0 = \frac{x^2}{a} + \frac{2xy}{b} - x = 0$ である．$x = 0$ のとき $y = 0, y = b$ であり，$y = 0$ のとき $x = 0, x = a$ である．$x \neq 0 \neq y$ なら $\frac{y}{b} + \frac{2x}{a} - 1 = 0, \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 = 0$ より $y = \frac{b}{3}, x = \frac{a}{3}$ である．したがって極値点の候補は $(0,0), (0,b), (a,0), (\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$ である．

ヘッセ行列は $\begin{pmatrix} \frac{2y}{b} & \frac{2y}{b} + \frac{2x}{a} - 1 \\ \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 & \frac{2x}{a} \end{pmatrix}$ である．行列式は $\frac{4xy}{ab} - (\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} - 1)^2 = -\frac{4x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{b^2} + \frac{4x}{a} + \frac{4y}{b} - \frac{4xy}{ab} - 1$ である．$(0,0), (0,b), (a,0), (\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$ での行列式は $-1, -1, -1, \frac{1}{3}$ となる．

よって $(0,0), (0,b), (a,0)$ は鞍点である．$\frac{2y}{b}|_{(\frac{a}{3}, \frac{b}{3})} = \frac{2}{3} > 0$ より $(\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$ は極小値である．

(3)$\tan x$ の 0 でのテイラー展開を考える．tan は奇関数であるから偶数次の係数は 0 である．よって $\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)$ とできる．$\cos x \tan x = \sin x$ より $(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7))(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + o(x^8)) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$ である．よって $a_1 = 1, a_3 = 1/3, a_5 = 2/15$ である．よって

$f(x)=x+x^3/3+2x^5/15$ とすれば $\tan x-f(x)=o(x^6)$ となる．

$\boxed{3}$ (1)$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ である．

(2)$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$ である．すなわち第二成分の符号が反転するか成分が入れ替わるかの繰り返しが $P\in G$ である．よって $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ は G の元によって $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ のいずれかに移る．またそれぞれ A, BA, ABA によって移る．すなわちこれが P の行き先全て．

(3) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の移動先の候補は x がどちらの成分にどちらの符号であるかの 4 通りと，y がどちらの符号かの 2 通りの積の 8 通りある．それぞれに対応する G の元を考えれば $G=\{E,A,B,AB,BA,ABA,BAB,ABAB\}$ が分かる．よって $|G|=8$ である．

(4)$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, a_4=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ とする．$P\in G$ は $\{a_1,\dots,a_4\}$ の置換を引き起こす．これを $\varphi\colon G\to S_4$ と定める．準同型であることは明らか．$\varphi(P)=\mathrm{id}$ とすると，$Pa_1=a_1, Pa_2=a_2$ より $P=E$ であるから単射である．

(5)$G=\langle A,B|A^2=B^2=(AB)^4=E\rangle$ とかけるから G は二面体群 D_4 である．正方形に対する回転と反転による頂点の置換と二面体群は対応する．二面体群の元によって同一視したときの，頂点の並び方は頂点 1 の対角にある頂点の決め方であるから 3 通りある．したがって $G=D_4$ と同型な S_4 の部分群は 3 つある．

$\boxed{4}$ (1) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 C がコンパクトであるとは，C の任意の開被覆が有限部分被覆を持つことである．

(2) $C_1\cap C_2\neq\emptyset$ とき．$C_1\cap C_2$ の開被覆 $A=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を任意にとる．ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから $X\setminus C_1$ は開集合である．$A\cup X\setminus C_1$ は C_2 の開被覆であり，$X\setminus C_1$ は C_2 を部分集合に持たないから，有限部分集合 $A'\subset A$ が存在して $A'\cup X\setminus C_1$ が C_2 の有限部分被覆となる．よって A' が $C_1\cap C_2$ の有限部分被覆となる．

$C_1\cap C_2=\emptyset$ なら明らかにコンパクト集合．

(3)$C=\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ の開被覆 $A=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を任意にとる．C は閉集合の共通部分だから閉集合である．よって $(X\backslash C)\cup\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda=X$ は C_1 の開被覆であるから有限部分集合 $A'\subset A$ が存在して $C\subset C_1\subset(X\backslash C)\cup\bigcup_{\lambda\in A'}U_\lambda$ となる．よって $C\subset\bigcup_{\lambda\in A'}U_\lambda$ となるから C はコンパクト集合．

0.20 H25 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h25.pdf

$\boxed{1}$ (1)H_1 の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ である．H_2 の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}$ である．H_3 の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ である．

(2) 原点を O としてベクトル OA_1 が H_1 の法線ベクトルとなる．したがって $A_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ で $d_1=\sqrt{3}$.

同様にして $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ で $d_2 = 1$，$A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ で $d_3 = 1$ である．

(3)$A = (a_1, a_2, a_3)$ とする．$\det A \neq 0$ なら a_1, a_2, a_3 は一次独立である．$\det A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \\ 1 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta$ である．$1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta \geq \frac{1}{2}$ より θ に依らず一次独立．

(4)A の行列式の絶対値は $a_1, a_2 a_3$ によって張られる平行六面体の体積であるから $V(\theta) = \frac{1}{6}|\det A| = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\sin 2\theta$ である．$0 \leq \theta \leq \pi$ より $V(\theta)$ は $\theta = 3\pi/4$ のとき最大値 $1/4$ をとり，$\theta = \pi/4$ のとき最小値 $1/12$ をとる．

$\boxed{2}$ (1)G を位数 p の群，e を G の単位元とする．$x \in G \backslash \{e\}$ をとる．x で生成される部分群 $\langle x \rangle$ の位数はラグランジュの定理から p の約数である．よって $1, p$ のいずれか．1 なら $x = e$ となり矛盾．よって $x = p$ でありすなわち $G = \langle x \rangle$．

(2)G を位数 6 のアーベル群とする．

位数 3 の元 x が存在するとき $\langle x \rangle$ は指数が 2 であるから正規部分群である．よって $y \in g$ をもちいて $G = \langle x \rangle \cup y\langle x \rangle$ とでき，$y^2 \in \langle x \rangle$ である．$y^3 = e$ なら $y \in \langle x \rangle$ 取り矛盾．よって $y^2 = e$ である．$(xy)^i = x^i y^i = e$ となるのは $i \in 3\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ のとき．よって (xy) の位数は6．よって巡回群．

巡回群でないと仮定しさらに位数 3 の元が存在しないとき．単位元以外の元は位数が 2 である．$x \in G \setminus \{e\}$ をとる．$\langle x \rangle$ は正規部分群であるから剰余群 $G/\langle x \rangle$ を得る．これは位数が 3 であるから (1) より巡回群．よって $y \notin \langle x \rangle$ が存在して $G = \langle x \rangle \cup y\langle x \rangle \cup y^2\langle x \rangle$ である．これは y の位数が 2 でないことを示す．これは矛盾．

シローの定理を使えば簡単．シローの定理から 3 シロー部分群 H が存在しその生成元を x とする．2 シロー部分群も存在しその生成元を y とする．xy は位数が 6 である．

(3)G を位数 4 の群とする．位数 4 の元が存在すればアーベル群であるから，元の位数は高々 2 と仮定する．$G = \{e, x, y, z\}$ とかける．$xy = x$ なら $y = e$ となるから $xy \neq x$．同様に $xy \neq y$ である．$xy = e$ なら $y = x^{-1} = x$ となり矛盾．よって $xy = z$ である．yx についても同様に考えると $yx = z$ と分かる．同様にして $xz = y = zx, yz = x = zy$ である．よって G はアーベル群である．

(4) シローの定理からシロー 5 部分群 $\langle x \rangle$ が存在する．シロー 5 部分群の数を n とすると，n は 3 の約数であり，5 で割ると 1 あまるから $n = 1$．よって $\langle x \rangle$ は正規部分群である．同様にシロー 3 部分群 $\langle y \rangle$ も正規部分群である．$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ であり $G/\langle x \rangle = \{\langle x \rangle, y\langle x \rangle, y^2\langle x \rangle\}$ とできるから，$G \cong \langle x \rangle \times \langle y \rangle \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{15}$．

$\boxed{3}$ (1)(a)$0 \leq k \leq N-1$ のとき $|y_{k+1} - y_k| = |\delta(k+1)x/|x| - \delta kx/|x|| = \delta$ であるから成り立つ．

$k = N$ のとき $|y_{N+1} - y_N| = |x - \delta Nx/|x|| = ||x| - \delta N| < \delta$ より成り立つ．

(b)${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0, {}^\forall x, y \in \mathbb{R}, (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ が成り立つとき，f は一様連続であるという．

(c)$\varepsilon = 1$ に対して一様連続性から存在が分かる $\delta > 0$ をとる．この δ と $x \in \mathbb{R}$ に対して (1) のように $y_0, \ldots, y_{N+1}$ を定める．$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq \sum_{i=0}^N |f(y_{i+1}) - f(y_i)| < (N+1)\varepsilon \leq (|x|/\delta + 1)\varepsilon$ である．よって $|f(x)| \leq \varepsilon|x|/\delta + \varepsilon - |f(0)|$ となる．$C = \max\{\varepsilon/\delta, \varepsilon - |f(0)|\}$ とすれば $|f(x)| \leq C|x| + C = C(|x|+1)$ である．

(2)$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,dxdy < \infty$ である．フビニの定理から $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,dydx = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = [(x^3+1)^{3/2}]_0^1 2/9 = 2(2\sqrt{2}-1)/9$

$\boxed{4}$ (1) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフ空間であるとは，Y の任意の 2 点 x, y に対して $x \in U, y \in V$ なる $U, V \in \mathcal{O}_Y$ が存在し $U \cap V = \emptyset$ となることである．

(2)$x \in S_2$ に対して $f(x) \neq g(x) \in Y$ より開集合 $x \in U, y \in V$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ である．このとき $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = W$ とすると $x \in W$ である．$x' \in W$ について $f(x') \in U, g(x') \in V$ であるから $f(x') \neq g(x')$ である．よって $x' \in S_2$ となり $W \subset S_2$ である．

よって S_2 は開集合．

(3)$n = 2$ のときは (1) で示した．$n-1$ 以下で成立すると仮定する．$S_{f_1,\dots,\hat{f_i},\dots,,f_n} = \{x \in X \mid f_1(x),\dots,f_i\hat{(x)},\dots,,f_n(x)\}$ と定める．ただし $\hat{f_i}$ で f_i を除いたものを表す．このとき $S_n = \bigcap_{i=1}^{n} S_{f_1,\dots,\hat{f_i},\dots,,f_n}$ である．仮定から各 $S_{f_1,\dots,\hat{f_i},\dots,,f_n}$ は開集合であるから S_n も開集合である．帰納法から全ての $n \geq 3$ について証明できた．

(4)$X = Y = \mathbb{R}$ としそれぞれ標準的な位相を入れる．$T = \{px+q \mid p,q \in \mathbb{Q}\}$ とする．T は可算集合であるから $T = \{f_1, f_2, \dots\}$ と書ける．$px+q = p'x+q'$ となる p,q,p',q' が存在すると仮定する．このとき $(p-p')x = q'-q$ である．$p-p' = 0$ なら $q'-q = 0$ である．$p-p' \neq 0$ なら $x = (q'-q)/(p-p')$ であるから x は有理数である．逆に x が有理数なら p,q を適当にとれば等式が成り立つ．よって $S_\infty = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ である．有理数の稠密性から S_∞ は開集合でない．

0.21 H26 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h26.pdf

$\boxed{1}$ (1)$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y)/2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y)/2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．$x = y = 0$ でないなら一次従属である．$x = y = 0$ のときは $c \neq 0$ にたいして $c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ となるから一次独立でない．

(2)$\begin{vmatrix} 5 & -2 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 11 & z-5x \end{vmatrix} = -(z-5x) - 11y$ である．$5x - 11y = z$ が成り立つとき一次従属．

(3)$\{u_1\}$ は一次独立である．$\{u_1,\dots,u_{k-1}\}$ が一次独立と仮定する．このとき $c_1u_1 + \cdots + c_ku_k = 0$ とする．$\lambda_kc_1u_1 + \cdots + \lambda_kc_ku_k = 0$ である．また A をかけると $\lambda_1c_1u_1 + \cdots + \lambda_kc_ku_k = 0$ である．よって $\lambda_1c_1u_1 + \cdots + \lambda_kc_{k-1}u_{k-1} = \lambda_kc_1u_1 + \cdots + \lambda_kc_{k-1}u_{k-1}$ である．一次独立性から $\lambda_ic_i = \lambda_kc_i$ であり $\lambda_i \neq \lambda_k$ より $c_i = 0$ である．このとき $c_k = 0$ であるから $\{u_1,\dots,u_k\}$ は一次独立である．

(4)(a)$c_0x + c_1Ax + \dots c_{n-1}A^{n-1}x = 0$ とする．両辺に A^{n-1} をかけると $c_0A^{n-1}x = 0$ である．$A^{n-1}x \neq 0$ であるから $c_0 = 0$ である．次に A^{n-2} をかければ $c_1 = 0$ が分かる．これを繰り返して $c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0$ であるから一次独立．

(b)n 個のベクトル $\{x, Ax, \dots, A^{n-1}x\}$ が一次独立であるからこれは $\mathbb{R}^n$ の基底である．よって任意の $y \in \mathbb{R}^n$ は $y = c_0x + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}x$ とかける．$A^ny = c_0A^nx + \cdots + c_{n-1}A^{2n-1}x = 0$ であるから $A^n = O$ である．

$\boxed{2}$ (1)(a)$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+; x \mapsto e^x$ は全単射である．$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^xe^y = \varphi(x)\varphi(y)$ であるから φ は群の同型写像である．

(b)$\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$ が群同型写像とする．$\varphi(1) = \alpha$ とする．$\varphi(\sum_{i=1}^{n} 1/n) = \varphi(1/n)^n = \alpha$ である．すなわち $\varphi(1/n) = \alpha^{1/n}$ である．$\alpha^{1/n}$ が有理数にならないような n は存在するからこれは φ が同型写像であることに矛盾．

(2)(a)G' の単位元を e' とする．$f\colon G \to G'$ に対して $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ である．$g \in G, x \in \ker f$ に対して $f(g^{-1}xg) = f(g)^{-1}f(x)f(g) = f(g)^{-1}f(g) = e'$ より $g^{-1}xg \in \ker f$ であるから $\ker f$ は正規部分群．

(b)$f(g+g') = (f_1(g+g'), f_2(g+g')) = (f_1(g)+f_1(g'), f_2(g)+f_2(g')) = (f_1(g), f_2(g)) + (f_1(g'), f_2(g')) =$

$f(g)+f(g')$ である．よって f は準同型．

(3)$\pi_1\colon G\to G/N_1, \pi_2\colon G\to G/N_2$ を自然な全射とする．$\pi\colon G\to G/N_1\times G/N_2$ を $\pi(x)=(\pi_1(x),\pi_2(x))$ で定める．(2) から π は準同型である．$\ker\pi=\{x\in G\mid \pi(x)=(e_1,e_2)\}=\{x\in G\mid \pi_1(x)=e_1,\pi_2(x)=e_2\}=\{x\in G\mid x\in N_1, x\in N_2\}=N_1\cap N_2$ である．

よって $N_1\cap N_2$ は正規部分群で準同型定理から $G/(N_1\cap N_2)\cong G/N_1\times G/N_2$ である．右辺はアーベル群であるから，左辺もアーベル群である．

$\boxed{3}$ (1)(a)$x>0$ で $1-1/(1+x)>0$ である．よって $0<\int_0^x 1-1/(1+t)dt=x-\log(1+x)$ である．

$x>0$ で $x-1+1/(1+x)\geq 2\sqrt{(x+1)\frac{1}{1+x}}-2=0$ であるから $0<\int_0^x t-1+1/(1+t)dt=x^2/2-x+\log(1+x)$ である．すなわち $x-\log(1+x)<x^2/2$ である．

(b)$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n}))\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}<\infty$ であるから収束する．

(2)$f_x(x,y)=2xe^{x-y^2}+(x^2-8y)e^{x-y^2}=(x^2+2x-8y)e^{x-y^2}$ である．$f_y(x,y)=-8e^{x-y^2}-2y(x^2-8y)e^{x-y^2}=(16y^2-2x^2y-8)e^{x-y^2}$ である．$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ とすると，$x^2+2x-8y=0, 16y^2-2x^2y-8=0$ である．これを解く．$(x^2+2x)y=x^2y+4$ より $xy=2$ である．よって $x\neq 0$ であるから $8y^2-4/y-4=0$ である．よって $8y^3-4y-4=0$ である．$8y^3-4y-4=(y-1)(8y^2+8y+4)$ であり $2y^2+2y+1=2(y+1/2)^2+1/2>0$ であるから $x=2,y=1$ が唯一の実数解である．

$f_{xx}=(2x+2)e^{x-y^2}+(x^2+2x-8y)e^{x-y^2}=(x^2+4x-8y+2)e^{x-y^2}$，$f_{xy}=-8e^{x-y^2}-2y(x^2+2x-8y)e^{x-y^2}=(-2x^2y-4xy+16y^2-8)e^{x-y^2}$，$f_{yy}=(32y-2x^2)e^{x-y^2}-2y(16y^2-2x^2y-8)e^{x-y^2}=(-32y^3+4x^2y^2+48y-2x^2)e^{x-y^2}$ である．よって $(2,1)$ におけるヘッセ行列は $\begin{vmatrix} 6e & -8e \\ -8e & 24e \end{vmatrix}=80e^2>0$ であり $f_{xx}|_{(2,1)}=6e>0$ より f は $(2,1)$ で極小値 $f(2,1)=-4e$ をとる．

(3)$\sqrt{9-x^2-y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$ をみたすのは $x^2+y^2=4$ のときである．よって求める体積を V とする．$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$ とする．$V=\iint_D\sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$ である．$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\quad(0\leq r\leq 2, 0\leq 2\pi)$ と極座標変換するとヤコビアンは r である．

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{2\pi}\int_0^2(\sqrt{9-r^2}-\sqrt{1+r^2})rdrdd\theta\\
&=2\pi\int_0^2(\sqrt{9-r^2}-\sqrt{1+r^2})rdr\\
&=2\pi\left(\int_0^2 r\sqrt{9-r^2}dr-\int_0^2 r\sqrt{1+r^2}dr\right)\\
&=2\pi\left(\left[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{3/2}\right]_0^2-\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^2\right)\\
&=2\pi\left(-\frac{1}{3}(5^{3/2}-27)-\frac{1}{3}(5^{3/2}-1)\right)\\
&=4\pi\left(14-5\sqrt{5}\right)/3
\end{aligned}$$

(4) 任意の ε に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $n\geq N$ に対して $\alpha-\varepsilon<a_{n+1}-a_n<\alpha+\varepsilon$ である．よって $a_n+\alpha-\varepsilon<a_{n+1}<a_n+\alpha+\varepsilon$ である．すなわち任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $a_N+k\alpha-k\varepsilon<a_{N+1}+(k-1)\alpha+(k-1)\varepsilon<\cdots<a_{N+k}<a_N+k\alpha+k\varepsilon$ がなりたつ．よって $\frac{a_N+k\alpha-k\varepsilon}{N+k}<\frac{a_{N+k}}{N+k}<\frac{a_N+k\alpha+k\varepsilon}{N+k}$ である．$k\to\infty$ とすると $\alpha-\varepsilon<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}<\alpha+\varepsilon$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\alpha$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{2,3,4\}\subset A$ である．$0\in C\in\mathcal{O}$ に対して $X\setminus C$ が空集合，または有限集合であるから C は無限集合である．よって C は A の部分集合でない．よって $A^i=\{2,3,4\}$ である．$x\in X\setminus A$ は $x\neq 0$ であるから $x\in\{x\}\subset X\setminus A$ より $A^e=X\setminus A$ である．$0\in C\in\mathcal{O}$ は $C\cap X\setminus A\neq\emptyset$ となるから $A^f=\{0\}$．

(2)$x,y\in X\setminus\{0\}$ に対して $x\in\{x\}\in\mathcal{O}, y\in\{y\}\in\mathcal{O}, \{x\}\cap\{y\}=\emptyset$ である．$x=0, y\neq 0$ に対して $x\in X\setminus\{y\}\in\mathcal{O}$ であり $x\in\{x\}\cap(X\setminus\{y\})=\emptyset$ である．よってハウスドルフ．

(3)X の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．$0 \in U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する．$0 \in U_\lambda$ であるから $X \backslash U_\lambda$ は有限集合か空集合である．空集合なら $\{u_\lambda\}$ が有限部分被覆となる．有限集合なら $X \setminus U_\lambda = \{x_1, \dots, x_n\}$ とできる．$x_i \in U_{\lambda_i}$ となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在する．$\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}, U_\lambda\}$ が有限部分被覆となる．よってコンパクト．

(4)$f\colon X \to Y; n \to 1/n$ とする．f は全単射である．U を Y の開集合とする．$0 \notin U$ なら $0 \notin f^{-1}(U)$ より $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ である．$0 \in U$ ならある $\varepsilon > 0$ が存在して $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap Y \subset U$ である．$0 < 1/n < \varepsilon$ なる n は無限個存在するから U は無限集合である．よって $f^{-1}(U)$ は 0 を含まない無限集合であるから $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ である．よって f は連続.

$0 \in B \in \mathcal{O}$ に対して $Y \setminus f(B) = f(X \setminus A) = \{1/n_1, \dots, 1/n_m\}$ は閉集合．よって $f(B)$ は開集合．$0 \notin A \in \mathcal{O}$ に対して $f(A) = \{1/n \mid n \in A\}$ である．$1/(n+1) < 1/n - \varepsilon_n < 1/n < 1/n + \varepsilon_n < 1/(n-1)$ なる ε_n が存在する．よって $(1/n - \varepsilon_n, 1/n + \varepsilon_n) \cap Y = \{1/n\}$ より $f(A)$ は開集合．よって f は同相.

0.22　H27 数学必修

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h27.pdf

$\boxed{1}$ (1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = a(a^2 - cb) - c(ab - c^2) + b(b^2 - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(2) (1) において a を $t - a$ に変えれば，固有方程式 $g_A(t) = (t-a)^3 + b^3 + c^3 - 3(t-a)bc$.

$A \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b\omega + c\omega^2 \\ c + a\omega + b\omega^2 \\ b + c\omega + a\omega^2 \end{pmatrix} = (a + b\omega + c\omega^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$ より固有ベクトルで固有値は $a + b\omega + c\omega^2$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルであることは明らかで，固有値は $a + b + c$.

3 個めの固有値を λ とすれば，解と係数の関係から，$\lambda + (a + b\omega + c\omega^2) + (a + b + c) = 3a$ である．$1 + \omega + \omega^2 = 0$ より $\lambda = a + b\omega^2 + c\omega$.

(3) $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + b\omega + c\omega^2 = 1 \\ a + b\omega^2 + c\omega = 1 \end{cases}$ より，足し合わせて $3a = 3$，すなわち $a = 1$．よって $b + c\omega = b\omega + c = b + c = 0$ より $b = c = 0$．すなわち $A = I$ のみ.

$\boxed{2}$ (1) $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$ より，$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の位数は p^3.

(2) 単位元以外の任意の元 $(a, b, c) \in G$ について，a, b, c のいずれかが 0 でない．0 以外の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の位数は p であるから (a, b, c) の位数は p．よって $p^3 - 1$

(3) H を位数 p の群とする．単位元でない元 $x \in H$ に対して，x で生成される部分群 $\langle x \rangle$ の位数はラグランジュの定理より $1, p$ のいずれか．x は単位元でないから位数は p で $\langle x \rangle = H$．よって x は H の生成元でもある．以上より位数 p の群は巡回群であり，生成元の個数は $p - 1$.

(4) 位数 p の群は巡回群であるから，G の単位元でない各元を生成元とする異なる部分群の数を数えればよい．ただし各部分群に対して，生成元は $p - 1$ 個存在するから，求める部分群の数は $(p^3 - 1)/(p - 1) = p^2 + p + 1$.

バーンサイドの補題を使う方法もある．G に対して $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ が $n \cdot g = ng$ として作用する．1 の固定部分群は G，それ以外の固定部分群は $\{e\}$ である．よって軌道の個数は $\frac{p^3+(p-2)}{p-1} = p^2+p+2$．$e \in G$ の軌道は位数 p の部分群を作らないため，求める部分群の数は p^2+p+1．

$\boxed{3}$ (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-y^2}(-2)x^{-3}\sin x + e^{-y^2}x^{-2}\cos x$，$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-y^2}(-2y)x^{-2}\sin x$.

(2) $g(x) = x-2\tan x$ とすると，$g'(x) = 1-2\frac{1}{\cos^2 x} < -1 \quad (n\pi < x < n\pi+\pi/2)$ より g は $(n\pi < x < n\pi+\pi/2)$ で狭義単調減少．$\lim_{h\to n\pi+0} g(h) = n\pi > 0$, $\lim_{h\to n\pi+\pi/2-0} g(h) = -\infty$ より，g は $(n\pi < x < n\pi+\pi/2)$ で 0 をただ一点でとる．

$x \in (\pi/2, \infty) \setminus \{(n\pi, n\pi+\pi/2) \mid n = 1, 2, \cdots\}$ において，$\tan x < 0$ より，$g(x) > 0$．すなわち解は存在しない．

(3) $a_n \cos a_n - 2\sin a_n = 0$ である．$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a_n,0)} = -2a_n^{-3}\sin a_n + a_n^{-2}\cos a_n = a_n^{-3}\cos a_n(-2\tan a_n + a_n) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a_n,0)} = 0$ である．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{-y^2}6x^{-4}\sin x + e^{-y^2}(-2)x^{-3}\cos x + e^{-y^2}(-2)x^{-3}\cos x - e^{-y^2}x^{-2}\sin x \\
&= e^{-y^2}(6x^{-4} - x^{-2})\sin x - 4e^{-y^2}x^{-3}\cos x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{-y^2}4y^2x^{-2}\sin x + e^{-y^2}(-2)x^{-2}\sin x \\
\frac{\partial f}{\partial x \partial y} &= e^{-y^2}4yx^{-3}\sin x + e^{-y^2}(-2y)x^{-2}\cos x
\end{aligned}
$$

$(a_n, 0)$ におけるヘッシアンは $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x\partial x}|_{(a_n,0)} & \frac{\partial f}{\partial x\partial y}|_{(a_n,0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y\partial x}|_{(a_n,0)} & \frac{\partial f}{\partial y\partial y}|_{(a_n,0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (6a_n^{-4} - a_n^{-2})\sin a_n - 8a_n^{-4}\sin a_n & 0 \\ 0 & -2a_n^{-2}\sin a_n \end{vmatrix} = 4a_n^{-6}\sin^2 a_n + 2a_n^2\sin^2 a_n > 0$ よって $(a_n, 0)$ は極値点である．

$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = 0, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} = 0$ を満たす (x_0, y_0) を考える．$e^{-y_0^2}(-2y_0)x_0^{-2}\sin x_0 = 0$ より $y_0 = 0$ または $x_0 = n\pi$．

$x_0 = n\pi$ なら $\cos x = \pm 1$ より $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(n\pi,y)} = e^{-y^2}x_0^{-2}(\pm 1) \neq 0$.

$y_0 = 0$ なら，$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = x_0^{-3}\cos x(-2\tan x_0 + x) = 0$．これは $x_0 = a_n$ の時のみ満たす．

$\boxed{4}$ (1) 角度 φ の回転行列は $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ である．

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と変数変換すると，ヤコビアンは $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$．積分範囲は $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ から $A = \{(r, \theta) \mid 0 \le r < 1, 0 \le \theta < 2\pi\}$ に変わる．

$$
\begin{aligned}
F(v) &= \int\int_B \frac{(ax+by)^2}{1+(x^2+y^2)^2} dxdy \\
&= \int\int_A \frac{(ar\cos\theta + br\sin\theta)^2}{1+r^4} rdrd\theta \\
&= \int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)} \frac{r^3}{1+r^4}(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 drd\theta
\end{aligned}
$$

である．

$$\begin{aligned}F(R(\varphi)v)&=\int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)}\frac{r^3}{1+r^4}((a\cos\varphi-b\sin\varphi)\cos\theta+(a\sin\varphi+b\cos\varphi)\sin\theta)^2drd\theta\\&=\int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)}\frac{r^3}{1+r^4}(a\cos(\theta-\varphi)+b\sin(\theta-\varphi))^2drd\theta\end{aligned}$$

$\theta-\varphi=\theta'$ と変数変換すると，$F(R(\varphi)v)=\int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)}\frac{r^3}{1+r^4}(a\cos\theta'+b\sin\theta')^2drd\theta'=F(v)$.

(2)α を $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるように定めると，$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ となる.

よって $F(v)=F(R(\alpha)v)=\int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)}\frac{r^3}{1+r^4}(a^2+b^2)\cos^2\theta drd\theta=[\frac{1}{4}\log(1+r^4)]_0^1(a^2+b^2)[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}]_0^{2\pi}=\frac{a^2+b^2}{4}\pi\log 2$.

$\boxed{5}$ (1) (ア)$\frac{1}{2^n}$，(イ)U

(2) $U_n=(0,1-\frac{1}{n})$ は J の開集合. $\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n=(0,1)$ より $\Lambda=\{U_n\mid n=1,2,\dots\}$ は J の開被覆である.

Λ の有限部分集合 Λ' に対して，最大の添え字 λ' をとれば $\bigcup_{U_n\in\Lambda'}U_n=U_{\lambda'}\subsetneq(0,1)$. より J はコンパクトではない.

(3)$f\colon I\to J$ を同相写像とする. J の任意の開被覆 Λ に対して，$f^{-1}(\Lambda)=\{f^{-1}(U)\mid U\in\Lambda\}$ は I の開被覆である.

I はコンパクトであるから有限部分被覆 $\{f^{-1}(U)\mid U\in\Lambda'\}$ が存在する. f は全単射であるから，$f(\bigcup_{U\in\Lambda'}U)=\bigcup_{U\in\Lambda'}f(U)=J$ となり，J はコンパクトである. これは矛盾.

0.23 H28 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\begin{pmatrix}2&-1&1&1&0&0\\-1&2&-1&0&1&0\\1&-1&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&0&0&1\\0&1&1&0&1&1\\0&1&-3&1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&1&2\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-4&1&-1&-3\end{pmatrix}\to$ $\begin{pmatrix}1&0&0&3/4&1/4&-1/4\\0&1&0&1/4&3/4&1/4\\0&0&1&-1/4&1/4&3/4\end{pmatrix}$ よって逆行列は $\begin{pmatrix}3/4&1/4&-1/4\\1/4&3/4&1/4\\-1/4&1/4&3/4\end{pmatrix}$ である.

(2)$g_A(t)=\begin{vmatrix}2-t&-1&1\\-1&2-t&-1\\1&-1&2-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-t&-1&1\\0&1-t&1-t\\1&-1&2-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-t&-1&2\\0&1-t&0\\1&-1&3-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}2-t&2\\1&3-t\end{vmatrix}=$ $(1-t)((2-t)(3-t)-2)=-(t-1)^2(t-4)$ である.

よって固有値は $1,4$

(3) 各固有値の固有ベクトルをもとめる. $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ が 1 の固有ベクトル. 直交化すると $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-1&-2&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-3&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ が 4 の固有ベクトル.

よって $P=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 1\\ 1 & 1/2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ とすれば P は直交行列で $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

(4)A の固有値 λ とその固有ベクトル $x\neq 0$ をとる．$x,y\in\mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積を $(x,y)=x^T\bar{y}$ とする．$\lambda(x,x)=(\lambda x,x)=(Ax,x)=(x,\overline{A^T}x)=(x,Ax)=(x,\lambda x)=\bar{\lambda}(x,x)$．$(x,x)>0$ より $\lambda=\bar{\lambda}$ すなわち λ は実数.

$\boxed{2}$[1] (1)$x,y\in H\cap H'$ のとき $xy^{-1}\in H, xy^{-1}\in H'$ であるから $xy^{-1}\in H\cap H'$ である．よって $H\cap H'$ は部分群.

(2)$hn,h'n'\in HN$ とすると，$(hn)(h'n')^{-1}=hn(n')^{-1}h'^{-1}=h(n(n')^{-1})h'{-1}\in N$ であるから HN は部分群.

(3)$x,y\in f^{-1}(H')$ とすると $f(xy^{-1})=f(x)f(y)^{-1}\in H'$ より $xy^{-1}\in f^{-1}(H')$

[2] (1)$x\in\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ における剰余類を $[x]$ とする．$([x],[y])\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ とする．$5x-4y\equiv x\pmod 4, 5x-4y\equiv y\pmod 5$ より $(5x-4y)([1],[1])=([x],[y])$ となるから巡回群.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ が位数 20 の巡回群であるから $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ と同型.

よってその生成元の数は $0\leq i\leq 19$ のうち 20 と互いに素な整数の個数．すなわち 8 個.

(2)m,n の最小公倍数を d として $m=dm',n=dn'$ とする．$\ell=dm'n'$ とする．$([x],[y])\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする．$\ell([x],[y])=([0],[0])$ となるから $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の任意の元は位数は ℓ 以下である．$d\geq 2$ より $\ell<mn$ であるから生成元を持たない.

$\boxed{3}$ (1)f は C^∞ 級関数である.

$$f_x=6e^{3x}-6e^x\cos y, f_y=6e^x\sin y+3\sin 2y$$
$$f_{xx}=18e^{3x}-6e^x\cos y, f_{yy}=6e^x\sin y+6\cos 2y, f_{xy}=6e^x\sin y$$

$f_x=f_y=0$ となる (x,y) を求めると，$e^{2x}=\cos y, e^x\sin y+2\sin y\cos y=0$ より $\sin y(e^x+e^{2x})=0$ よって $y=n\pi\quad(n\in\mathbb{Z})$ すなわち $\cos y=\pm 1$．$e^{2x}=\cos y$ より $(0,2n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z})$ が求める点である.

これらの点でのヘッセ行列が正定値となる必要十分条件は $f_{xx}|_{(0,2n\pi)}>0, f_{xx}|_{(0,2n\pi)}f_{yy}|_{(0,2n\pi)}-f_{xy}^2|_{(0,2n\pi)}>0$ である.

$f_{xx}|_{(0,2n\pi)}=12, f_{yy}|_{(0,2n\pi)}=12, f_{xy}|_{(0,2n\pi)}=0$ よって常に正定値.

以上より f は $(0,2n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z})$ で極小値を持つ.

(2)$A=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\right\}, B=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\geq 1\right\}$ とする．$D=A-B$ である.

よって $\int\int_D x^3-3xy^2dxdy=\int\int_A x^3-3xy^2dxdy-\int\int_B x^3-3xy^2dxdy$ である.

x^3-3xy^2 は $f(x,y)=-f(-x,-y)$ であるから $\int\int_A x^3-3xy^2dxdy=0$ である.

$x-1=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と変数変換するとヤコビアンは r であり，$\int\int_B x^3-3xy^2dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}r(r\cos\theta+1)^3-3r^4\cos\theta\sin^2\theta d\theta dr$ である．$\sin,\cos$ の周期性を考えれば，$\int_0^1\int_0^{2\pi}r(r\cos\theta+1)^3-3r^3(r\cos\theta+1)\sin^2\theta d\theta dr$ $=\int_0^1\int_0^{2\pi}r(3r^2\cos^2\theta+1)-3r^3\sin^2\theta d\theta dr=\int_0^1 3r^3dr\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta+\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}d\theta=\pi$ である.

よって $\int\int_D x^3-3xy^2dxdy=-\pi$

(2)$\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$ であるから $\log(1+x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ である.

したがって $\frac{\log(1+x)}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ である.

$\frac{x}{\log(1+x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とすると，$\frac{x}{\log(1+x)}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ であり，テイラー展開の係数を比較すると，$a_0=1,(a_1+a_0\frac{-1}{2})=0,(a_2+a_1\frac{-1}{2}+a_0\frac{1}{3})=0,(a_3+a_2\frac{-1}{2}+a_1\frac{1}{3}+a_0\frac{-1}{4})=0$ より $a_0=1,a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{-1}{12},a_3=\frac{1}{24}$ である.

よって $f(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{24}x^3+O(x^4)$ である.

$\boxed{4}$ (1)$\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$

(2)$\{V_{\mu_1}, V_{\mu_2}, \ldots, V_{\mu_m}\}$

(3)p

(4)f は全単射であるから X の閉集合 F の像が Y の閉集合であることを示せばよい．F は (1) からコンパクトである．よって (2) から $f(F)$ はコンパクト．よって (3) から $f(F)$ は Y の閉集合．

0.24 H29 数学必修

$\boxed{1}$ (1) 標準基底に関する f, g の表現行列を F, G とすると，$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

である．よって $GF = A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ -23 & -10 & 2 & -7 & -35 \\ -3 & -6 & 6 & -3 & -15 \\ -3 & 12 & -16 & 5 & 25 \\ 9 & 0 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, FG = B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(2)$g_B(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ -2 & -t \end{vmatrix} = (3-t)(-t) - (-2) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ である．固有値 1 に対する固有ベクトルは $B - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．

固有値 2 に対する固有ベクトルは $B - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(3)F の一列目と二列目は一次独立であるから $\mathrm{rank} F = 2$ である．よって $\dim\ker f = 5 - \dim\mathrm{Im} f = 5 - 2 = 3$ である．

(4)$g \circ f(g(v)) = g \circ Bv = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ より $g(v)$ は $g \circ f$ の固有値 λ の固有ベクトル．

(5)$x \in ker f$ に対して $g \circ f(x) = 0 \cdot x$ であるから固有値 0 で固有空間の次元は 3 である．よって固有空間の次元の和が 5 となるから対角化可能で対角行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．$\boxed{2}$

(1)$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とする．$ad - bc \neq 0, eh - fg \neq 0$ である．$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$ であり，$(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = (ad - bc)(eh - fg) \neq 0$ である．よって積について閉じている．$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は明らかに $E \in G$ であり, G の単位元である．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であり，$A^{-1} \in G$ である．

(2)A の行列式が 0 でないとは列ベクトルが一次独立であることである．一列目の選び方は 0 ベクトルを除いた $p^2 - 1$ 通り．二列目は一列目の定数倍を除いた $p^2 - p$ 通り．よって $|G| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ である．

(3)$\det\colon G \to F_p^\times ; A \to ad-bc$ は $b=c=0, d=1$ とすることで全射であると分かる．準同型であることは (1) での計算から明らか．

(4)$\{E\}, G$ は G の正規部分群である．また $N = \ker\det = \{A \in G \mid \det A = 1\}$ は $X \in N$ について $\det A^{-1}XA = \det A^{-1}\det X\det A = \det X = 1$ より正規部分群である．

(5)$a \in \mathbb{Z}$ の F_p での同値類を $[a]$ で表す．$C = \begin{pmatrix} [1] & [1] \\ 0 & [1] \end{pmatrix}$ とすると，$C^n = \begin{pmatrix} [1] & [n] \\ 0 & [1] \end{pmatrix}$ である．2 と p は互いに素であるから $[2]^n = [1]$ となる最小の n は $p-1$ である．したがって C で生成される部分群は位数が p である．

$\boxed{3}$ (1) ダランベールの公式から $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}\frac{((n+1)!)^3}{(3(n+1))!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{27}$ より $\rho = \frac{1}{27}$ である．

(2)$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ とする．$J_g = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ であるから $g^{-1}(0)$ の任意の点で全射である．よって 0 は g の正則値である．ラグランジュの未定乗数法より極値点では $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ なる λ が存在する．$J_f = \begin{pmatrix} y & x & 0 \end{pmatrix}$ であるから $2x = \lambda y, 2y = \lambda x, 2z = 0$ である．$x = 0$ なら $y = 0$ となり $x^2+y^2+z^2 = 0$ となるから $x \neq 0$．同様に $y \neq 0$ である．よって $4xy = \lambda^2 xy$ より $\lambda = \pm 2$ である．$x^2 + (\frac{\lambda x}{2})^2 + 0^2 = 2x^2 = 1$ より $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である．したがって極値点の候補は $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ である．それぞれの点での値は $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{2}$ である．単位球面はコンパクトであり f は実数値連続関数であるから必ず最大値，最小値を持つ．よって最大値は $\frac{1}{2}$，最小値は $-\frac{1}{2}$ である．

極座標変換する方法もある．$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ とすると $f(x,y) = xy = r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi$ である．単位球面上であるから $r = 1, \theta \in [0,\pi], \phi \in [0, 2\pi]$ である．最大値は $\theta = 0, \pi$ かつ $\phi = \pi/4, 5\pi/4$ であり，最小値は $\theta = 1/2$ である．最小値も同様にして $-\frac{1}{2}$ である．

(3)$x+y = s, \sqrt{2}y = t$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}$ であり，積分領域は $\{(s,t) \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq \sqrt{2}\}$ である．よって

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+s^2}\frac{1}{\sqrt{2}}dtds = \int_0^1 \frac{s}{1+s^2}ds \\
&= \left[\frac{1}{2}\log(1+s^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

である．

$\boxed{4}$ $U_{-\infty} = X, U_\infty = \emptyset$ と表すことにする．sup や max は拡大実数の順序で考える．(1)$\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$ である．$\bigcup_{a\in A} U_a = U_{\inf A}, \bigcap_{i=1}^n U_{a_n} = U_{\max_{1\leq i\leq n} a_i}$ であるから $\mathcal{O}_X$ は位相空間の公理を満たす．

(2)0, 1 について 0 を含む開集合 U_a は $0 > a$ であるから $1 \in U_a$ となる．よってハウスドルフでない．

(3)$\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は X の開被覆であるが有限部分被覆を持たないのでコンパクトでない．

(4)$0 \in A$ を含む X の開集合 U_a について $0 > a$ より $U_a \cap A = A$ である．したがって A の開被覆は $0 > a$ なる U_a を用いて $U_a \cap A$ と表せる開集合をもち，それは A であるから有限部分被覆 $\{A\}$ をとれる．よってコンパクト．

(5)$f^{-1}(U_0) = \{x \mid x < 0\}$ である．これは開集合でないから連続写像でない．

0.25 H30 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $\det A = \begin{vmatrix} -a^2-1 & a & -1 \\ 1 & -2 & a \\ -a & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1+2a \\ 1-2a & 0 & a-4 \\ -a & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1+2a \\ 1-2a & a-4 \end{vmatrix} = (a-4)+(1-2a)(-1+2a) = -4a^2+5a-5$

(2)$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J = ^t J$ である．よって $J^tAJ^{-1} = A \Leftrightarrow^t (AJ) =^t J^tA = AJ$ である．よって AJ が対称行列となる a を求める．$AJ = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2-1 \\ a & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -a \end{pmatrix}$ である．AJ が対称行列となるから $-a^2-1=-2$ である．よって $a=\pm 1$ である．

(3)$^tA = A$ より $a=1$ である．(i) 固有方程式 $g_A(t) = \begin{vmatrix} -t-2 & 1 & -1 \\ 1 & -2-t & 1 \\ -1 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t-1 & -1-t & 0 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 0 & -1-t & -1-t \end{vmatrix} = (-1-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+1)^2(-3-t-1) = -(t+1)^2(t+4)$ よって固有値は $-1, -4$ である．

(ii) 固有ベクトルを求める．-1 に対しては $A+I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より固有ベクトル空間の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる．直交化すると $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる．

-4 に対しては $A+4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より固有ベクトル空間の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる．

よって $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば P は直交行列で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ である．

(iii) P^{-1} は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ より $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ である．$A =^t A$ より $AJ =^t (AJ) =^t J^tA = JA$ である．よって $(AJ)^{2n} = (AJJA)^n = (A^2)^n = A^2n$ である．$(AJ)^{2n} = A^{2n} =$

$P(P^{-1}AP)^{2n}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2n} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4^{2n} \\ 1 & -1 & -4^{2n} \\ -1 & -1 & 4^{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2+4^{2n}) & \frac{1}{3}(1-4^{2n}) & \frac{-1}{3}(1-4^{2n}) \\ \frac{1}{3}(1-4^{2n}) & \frac{1}{3}(2+4^{2n}) & \frac{1}{3}(1-4^{2n}) \\ \frac{1}{3}(-1+4^{2n}) & \frac{1}{3}(1-4^{2n}) & \frac{1}{3}(2+4^{2n}) \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$2 \in \mathbb{Z}'$ の乗法としての逆元は $1/2 \notin \mathbb{Z}'$ であるから群でない．

(2)$n \in \mathbb{Z}$ の F_7 に置ける同値類を $[n]$ で表す．$[3]^2 = [2], [3]^3 = [6], [3]^4 = [4], [3]^5 = [5], [3]^6 = [1]$ である．よって $F_7^{\times}$ は巡回群で $[3]$ は生成元である．

(3) 任意の $x \in N \cap H$ と $h \in H$ に対して N が G の正規部分群であるから $hxh^{-1} \in N$ であり，$x \in H$ より $hxh^{-1} \in H$ である．よって $hxh^{-1} \in N \cap H$ であるから正規部分群.

(4)$G = \mathbb{Z}/500\mathbb{Z}$ として一般性を失わない．$500 = 2^2 \cdot 5^3$ である．$0 \le n < 500$ を満たす整数 n に対して n が 4 の倍数なら位数は 2 と互いに素である．これは $n = 4k$ なら $[125n] = [0]$ より n の位数が 125 の約数となる事からわかる．逆に n が 4 の倍数でないときは位数が 2 で割り切れる．これは $n = 2^i k \quad (i = 0, 1, k$は奇数$)$ とすると $mn \in 500\mathbb{Z}$ なら m が 2 で割り切れることから分かる．よって求める個数は $0 \le n < 500$ を満たす 4 の倍数の数である．すなわち $500/4 = 125$ である．

(5)G/N での g の同値類を $[g]$ とする．指数が k であるから $|G/N| = k$ である．よって $[g^k] = [g]^k = [e]$ である．すなわち $g^k \in N$

(6)G の単位元を e とする．$a \in G$ について $a \sim a$ より $e = a^{-1}a \in S$ である．$a \in S$ なら $e^{-1}a \in S$ であるから $e \sim a$ である．よって $a \sim e$ であるから $a^{-1} = a^{-1}e \in S$ である．$a, b \in S$ なら $a^{-1} \sim e, e \sim b$ であるから $a^{-1} \sim b$ である．よって $ab \in S$ である．よって S は部分群である．

$\boxed{3}$ (1) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ として f が曲面上で最小の値をとる点とその値を求める．相加相乗平均より $x^2+y^2+z^2 \ge 3(xyz)^{2/3} = 3$ である．よって $f(x,y,z) \ge \sqrt{3}$ である．$f(1,1,1) = \sqrt{3}, 1\cdot1\cdot1-1 = 0$ であるから f の曲面上の最小値は $\sqrt{3}$ である．等号成立条件は $x^2 = y^2 = z^2$ である．すなわち $|x| = |y| = |z|$ である．$xyz = 1$ より $(x,y,z) = (1,1,1), (-1,-1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1)$ で最小値 $\sqrt{3}$ をとる．

(2)$A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y < \sqrt{x}\}, B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y^2, 0 \le y \le 1\}$ とすると，$A \cup B = D, A \cap B = \emptyset$ である．よって $\iint_D \frac{\min\{y,\sqrt{x}\}}{1+y^2}dxdy = \iint_A \frac{\min\{y,\sqrt{x}\}}{1+y^2}dxdy + \iint_B \frac{\min\{y,\sqrt{x}\}}{1+y^2}dxdy$ である．絶対値付きの各領域上での積分が有限値をとることは明らかだからフビニの定理より積分の順序を入れ替えることができる．

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{\min\{y,\sqrt{x}\}}{1+y^2}dxdy &= \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+y^2}dydx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\log(1+y^2)\right]_0^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1+x)dx = \frac{1}{2}\left[(x+1)\log(1+x) - x\right]_0^1 \\ &= \log 2 \\ \iint_B &= \int_0^1\int_0^{y^2} \frac{\sqrt{x}}{1+y^2}dxdy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{y^2} dy \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{y^3}{1+y^2}dy = \frac{2}{3}\int_0^1\left(y - \frac{y}{1+y^2}\right)dy \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\log(1+y^2)\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\log 2}{3}\end{aligned}$$

よって $\iint_D \frac{\min\{y,\sqrt{x}\}}{1+y^2}dxdy = \log 2 + \frac{1}{3} - \frac{\log 2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log 2$

(3) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が ρ であるとは $|x| < \rho$ で絶対収束し $|x| > \rho$ で発散することである．

(i)$a_{n+1}/a_n = \frac{\sqrt{4^{n+1}+3^{n+1}}}{\sqrt{4^n+3^n}} = \sqrt{\frac{4+3\frac{3}{4}^n}{1+\frac{3}{4}^n}}$ より $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{4} = 2$ である．よって収束半径は $1/2$ である．

(ii)

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}|a_n|^{1/n} &= \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\left|\sqrt{4^n+3^n}+(-1)^n\sqrt{4^n-3^n}\right|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\left|2^n(\sqrt{1+(\frac{3}{4})^n}+(-1)^n\sqrt{1-(\frac{3}{4})^n})\right|^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\left|2^{2n}(\sqrt{1+(\frac{3}{4})^{2n}}+\sqrt{1-(\frac{3}{4})^{2n}})\right|^{\frac{1}{2n}} \\
&\geq \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\left|2^{2n}2\sqrt{\sqrt{(1+(\frac{3}{4})^{2n})(1-(\frac{3}{4})^{2n})}}\right|^{\frac{1}{2n}} = 2
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}|a_n|^{1/n} &= \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\left|2^n(\sqrt{1+(\frac{3}{4})^n}+(-1)^n\sqrt{1-(\frac{3}{4})^n})\right|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\left|2^n(\sqrt{1+(\frac{3}{4})^n}+\sqrt{1-(\frac{3}{4})^n})\right|^{\frac{1}{n}} = 2
\end{aligned}
$$

である．よって収束半径は 1/2 である．

$\boxed{4}$ (1)$Y \in \mathcal{O}$ であり，$\emptyset \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であるから $\emptyset \in \mathcal{O}$ である．

$\mathcal{O}$ の開集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を任意にとる．ある $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda = Y$ なら $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = Y \in \mathcal{O}$ である．

全ての $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda \neq Y$ なら $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であるから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である．

$\mathcal{O}$ の開集合族 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ を任意にとる．$A = \{i \mid U_i = Y\}$ とする．$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i\notin A} U_i$ である．$i \notin A$ なら $U_i \in \mathcal{U}$ より $\bigcap_{i\notin A} U_i \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であるから $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}$ である．

(2)p を含む開集合は Y のみである．任意の X の元 q について $q \in Y$ より p, q を分離する開集合は存在しない．

(3)$\mathcal{U}$ の開集合 U を任意にとると $U \in \mathcal{O}$ であり，$U = U \cap X$ であるから $(X, \mathcal{O})$ は Y の部分空間である．

(4)Y の開被覆を任意にとる．開被覆の元のうち p を含む開集合がある．p を含む開集合は Y のみであるからその開集合は Y である．よって有限部分被覆 $\{Y\}$ が存在するからコンパクト．

0.26 H31 数学必修

$\boxed{1}$ (1) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．よって固有値は $0, 1, a^4$ である．

(2)$P = [p_{ij}]$ $(p_{ij} = p_{ji})$ とする．$AP = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ a^2p_{21} & a^2p_{22} & a^2p_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a^3 & a^4 & -a^4 \end{pmatrix}$ より $P = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & a^2 & -a^2 \\ a & -a^2 & b \end{pmatrix}$ $(b \in \mathbb{R})$ である．

(3)P が直交行列なら列ベクトル全体は正規直交基底をなすから，$a^2 - a^4 - a^2b = 0, -a^3 + ab = 0$ である．よって $a = 0, \pm 1/\sqrt{2}$ である．$a = 0$ なら一列目が零ベクトルとなるから基底をなさない．よって $a \neq 0$ である．$a = \pm 1/\sqrt{2}$ とすると $b = 1/2$ である．このとき正規直交基底をなすことが確認できる．よって $a = \pm 1/\sqrt{2}$

(4)(3) より $a=\pm 1/\sqrt{2}$ である．$AP=B$ より ${}^t(AP)AP={}^tBB$ である．${}^tAA$ の固有値 λ とその固有ベクトル v に対して ${}^tBB(P^{-1}v)={}^tP{}^tAAv=P^{-1}\lambda v=\lambda(P^{-1}v)$ である．よって ${}^tBB$ の固有値は $0,1,1/4$ である．

$\boxed{2}$ (1) $BA=\begin{pmatrix}0 & -\omega_p\\ -\omega_p & 0\end{pmatrix}$ である．$B^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B^3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, AB^3=\begin{pmatrix}0 & -\omega_p\\ -\omega_p & 0\end{pmatrix}$ である．よって $AB^3=BA$ である．

(2) 単位行列を E とする．$B^4=E$ であるから B の位数は 4．$A^n=\begin{pmatrix}\omega_p^n & 0\\ 0 & (-1)^n\omega_p^n\end{pmatrix}$ である．ω_p は 1 の原始 p 乗根であり p は奇数であるから，A の位数は $2p$ である．

(3)G は A,B で生成されるから G の任意の元は $P=A^{i_1}B^{j_1}A^{i_2}\dots A^{i_n}B^{j_n}\quad(i_1,j_1,\dots,i_n,j_n\in\mathbb{Z})$ と表せる．A,B は共に位数が有限であるから $i_k,j_k\geq 0$ と仮定して一般性を失わない．$BA=AB^3$ より $B^{j_{k-1}}A^{i_k}=B^{j_{k-1}-1}AB^3A^{i_k-1}=AB^{3j_k}A^{i_k-1}=A^2B^{9j_k}A^{i_k-2}=\cdots=A^{i_k}B^{3^{i_k}j_k}$ である．P に繰り返しこれを適用することで $A^iB^j\quad(i,j\geq 0)$ とできる．

(4)A^i は対角成分以外が 0 であるから $A^i=B^j\neq E$ とすると，$j=2$ である．$\omega_p^i=-1$ なら $\omega_p^{2i}=1$ より $2i=pq$ なる整数 q が存在する．2 は p を因数にもたないから i は p の倍数である．これは $\omega_p^p=1$ に矛盾．よって $H_1\cap H_2=\{E\}$ である．

(5)$A^iB^j\in G, B^n\in H_2$ を任意にとると，$(A^iB^j)^{-1}B^n(A^iB^j)=B^{4-j}A^{2p-i}B^nA^iB^j=B^{4-j}A^{2p-i}A^iB^{3n}B^j=B^{3n}\in H_2$ より H_2 は G の正規部分群である．$H_2H_1=G$ も明らかである．したがって $G\cong H_2\rtimes H_1$ である．すなわち G の位数は $2p\cdot 4=8p$ である．

$A^iB^j=A^sB^t$ とすると，$A^{i-s}=B^{t-j}$ であり，(4) より $i=s, j=t$ である．よって $G=\{A^iB^j\mid 0\leq i\leq 2p-1, 0\leq j\leq 3\}$ である．よって G の位数は $8p$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換する．ヤコビアンは r である．積分領域は $D'=\{(r,\theta)\mid 0\leq r\leq 1, -\pi/4\leq\theta\leq\pi/4\}$ である．

$$\iint_D\frac{x}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_{D'}\frac{r\cos\theta}{1+r^2}rdrd\theta=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta d\theta\int_0^1 1-\frac{1}{1+r^2}dr$$
$$=[\sin\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4}[r-\arctan r]_0^1=\sqrt{2}(1-\frac{\pi}{4})$$

(2)

$$f_x=2xe^{-x^2-y^2}+(x^2-y^2)(-2x)e^{-x^2-y^2}=2(-x^3+xy^2+x)e^{-x^2-y^2}$$
$$f_y=-2ye^{-x^2-y^2}+(x^2-y^2)(-2y)e^{-x^2-y^2}=2(y^3-x^2y-y)e^{-x^2-y^2}$$
$$f_{xx}=2(-3x^2+y^2+1)e^{-x^2-y^2}+2(-x^3+xy^2+x)(-2x)e^{-x^2-y^2}=2(2x^4-5x^2-2x^2y^2+y^2+1)e^{-x^2-y^2}$$
$$f_{yy}=2(3y^2-x^2-1)e^{-x^2-y^2}+2(y^3-x^2y-y)(-2y)e^{-x^2-y^2}=2(-2y^4+5y^2+2x^2y^2-x^2-1)e^{-x^2-y^2}$$
$$f_{xy}=2(xy)e^{-x^2-y^2}+2(-x^3+xy^2+x)(-2y)e^{-x^2-y^2}=4(x^3y-xy^3)e^{-x^2-y^2}$$

である．$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ とすると，$(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$ である．各点におけるヘッシアンを考える．$(0,0)$ において $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ で，行列式が負であるから鞍点．$(0,\pm1)$ において $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ で，行列式が正で 1,1 成分が正であるから極小点．$(\pm1,0)$ において $\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ で，行列式が正であり，1,1 成分が負であるから極大点である．

(3)$|a_n|\leq|a_{n-1}|/c\leq|a_{n-2}|/c^2\leq\cdots\leq|a_0|/c^n$ である．よって $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|\leq|a_0|\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{|x|}{c})^n$ である．右辺は $|x|/c<1$ で収束するから $|x|<c$ で収束する．よって絶対収束するから収束する．

$\boxed{4}$ (1)$p, q \in X, p \neq q$ を任意にとる．$d(p,q) > 0$ である．$r = d(p,q)/2$ とする．$x \in X$ に対して $B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ とすると，$B(x,\varepsilon)$ は開集合である．$y \in B(p,r) \cap B(q,r)$ とすると，$d(p,y) < r, d(q,y) < r$ であるが，$d(p,q) < d(p,y) + d(y,q) = 2r = d(p,q)$ となり矛盾．よって $B(p,r) \cap B(q,r) = \emptyset$ であるからハウスドルフ．

(2)$n \in \mathbb{Z}$ に対して開集合 $(-1/2+n, n+1/2)$ に対して $(-1/2+n, n+1/2) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$ であるから離散位相．

(3)$f(A)$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ より有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} f^{-1}(U_\lambda)$ である．よって $f(A) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ であるからコンパクト．

0.27 R2 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$A, B \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$ より，$A+B \in S_2(\mathbb{R})$ である．また $k \in \mathbb{R}, A \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t(kA) = k{}^tA = kA$ より $kA \in S_2(\mathbb{R})$ である．よって $S_2(\mathbb{R})$ は部分空間．

(2)$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．それぞれ対称行列である．$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(R)$ に対して $A = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{22}Q_3$ である．$c_1Q_1 + c_2Q_2 + c_3Q_3 = 0$ とする．$c_1Q_1 + c_2Q_2 + c_3Q_3 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = O$ より $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ である．よって Q_1, Q_2, Q_3 は線形独立である．すなわち $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ は $S_2(\mathbb{R})$ の基底である．

(3)$A \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA{}^t({}^tP) = {}^tPAP$ である．よって $f_p(S_2(\mathbb{R})) \subset S_2(\mathbb{R})$ である．

(4)$g_P(Q_1) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = a^2Q_1 + abQ_2 + b^2Q_3$ である．

$g_P(Q_2) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & cb+ad \\ cb+ad & 2bd \end{pmatrix} = 2acQ_1 + (cb+ad)Q_2 + 2bdQ_3$ である．

$g_P(Q_3) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix} = c^2Q_1 + cdQ_2 + d^2Q_3$ である．

よって表現行列は $X = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & cb+ad & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{pmatrix}$ である．

(5)g_P が全射なら ${}^tPAP = E$ を満たす $A \in S_2(\mathbb{R})$ が存在する．$\det{}^tP \det A \det P = 1$ であるから $(\det P)^2 \det A = 1$ である．よって $\det P \neq 0$ である．よって P は可逆行列．

P が可逆行列なら任意の $Q \in S_2(\mathbb{R})$ に対して $A = {}^tP^{-1}QP^{-1}$ とすれば，$A \in S_2(\mathbb{R})$ であり，$g_P(A) = Q$ である．よって g_P は全射である．

$\boxed{2}$ (1) G を非空集合，$\cdot : G \times G \to G$ を写像とする．$\langle G, \cdot \rangle$ が群であるとは，次の条件を満たすことである．

(i)任意の $a, b, c \in G$ に対して $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ である．

(ii)ある $e \in G$ がただ一つ存在して任意の $a \in G$ に対して $e \cdot a = a \cdot e = a$ である．

(iii)(ii) の e と任意の $a \in G$ に対して，ある $b \in G$ が存在して $a \cdot b = b \cdot a = e$ である．

(2)$((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2))\cdot(x_3,y_3) = (x_1+x_2, (-1)^{x_2}y_1+y_2)\cdot(x_3,y_3) = (x_1+x_2+x_3, (-1)^{x_3}((-1)^{x_2}y_1+y_2)+y_3) = (x_1+x_2+x_3, (-1)^{x_2+x_3}y_1+(-1)^{x_3}y_2+y_3)$ である．また $(x_1,y_1)\cdot((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)) = (x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3, (-1)^{x_3}y_2+y_3) = (x_1+x_2+x_3, (-1)^{x_3}y_1+(-1)^{x_1}y_2+y_3)$ である．よって (i) を満たす．

$(x_1,y_1)\cdot(0,0) = (x_1, (-1)^0y_1) = (x_1,y_1)$ である．また $(0,0)\cdot(x_1,y_1) = (0, (-1)^{x_1}y_1) = (x_1,y_1)$ である．逆に $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1,y_1)$ なら $x_1 = x_1+x_2$ であるから $x_2 = 0$ である．よって $(-1)^{x_2}y_1+y_2 = y_1+y_2 = y_1$ より $y_2 = 0$ である．よって (ii) を満たす．

(x_1,y_1) に対して $(x_1,y_1)\cdot(-x_1,(-1)^{-x_1+1}y_1)=(0,(-1)^{-x_1}y_1+(-1)^{-x_1+1}y_1)=(0,0),(-x_1,(-1)^{-x_1+1}y_1)\cdot(x_1,y_1)=(0,(-1)^{x_1}y_1+(-1)^{-x_1+1}y_1)=(0,0)$ である．よって (iii) を満たす．すなわち群である．

(3) 任意の $(x_1,y_1)\in G,(x,y)\in H$ に対して，$(-x_1,(-1)^{-x_1+1}y_1)\cdot(x,y)\cdot(x_1,y_1)=(-x_1+x,(-1)^x(-1)^{-x_1+1}y_1+y)\cdot(x_1,y_1)=(x,(-1)^{x_1}((-1)^{x-x_1+1}y_1+y)+y_1)=(x,(-1)^{x+1-2x_1}y_1+(-1)^{x_1}y+y_1)$ である．$x\in 2F$ であり，$(-1)^{x+1-2x_1}y_1+(-1)^{x_1}y+y_1=(-1)^{x_1}y\in 3\mathbb{Z}$ である．よって H は G の正規部分群.

$\boxed{3}$ (1)$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と極座標変換する．ヤコビアンは r である．積分領域は $D'=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1,-\pi/3\le\theta\le\pi/3\}$ である．よって

$$\iint_D x|\log(x^2+y^2)|dxdy=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^1 r^2\cos\theta|\log r^2|drd\theta=[\sin\theta]_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^1 -r^2\log r^2dr$$
$$=-2\sqrt{3}\left(\left[\frac{1}{3}r^3\log r\right]_0^1-\int_0^1\frac{r^2}{3}dr\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

(2) 極座標変換して $0\le r\le\sqrt{2},0\le\theta<2\pi$ での $f(r,\theta)=r^2\cos\theta\sin\theta(3-r^2)$ の最大値，最小値を考える．

$0\le r\le\sqrt{2}$ での $r^2(3-r^2)=-(r^2-3/2)^2+9/4$ は $r=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ をとり，$r=0$ で最小値 0 をとる．$0\le\theta<2\pi$ での $\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ は $\theta=\pi/4$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとり，$\theta=3\pi/4$ で最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる．

よって最大値は $\frac{9}{8}$，最小値は $-\frac{9}{8}$ である．

(3)$(a_n)_{n=1}^\infty$ がコーシー列であることを示す．$n>m$ とする．$(f(n))_{n=1}^\infty$ は単調減少有界列であるから収束列である．よってコーシー列である．よって

$$|a_n-a_m|=\left|\int_m^n f(x)dx-\sum_{k=m+1}^n f(k)\right|=\left|\sum_{k=m+1}^n\int_{k-1}^k f(x)-f(k)dx\right|$$
$$\le\left|\sum_{k=m+1}^n f(k-1)-f(k)\right|=|f(m)-f(n)|\to 0\ (n,m\to\infty)$$

となるからコーシー列である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の異なる二点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ をとる．$x_1\ne x_2$ のとき，$x_1\subset U_1,x_2\subset U_2$ なる開集合 U_1,U_2 で $U_1\cap U_2=\emptyset$ を満たすものが存在する．このとき $(x_1,y_1)\subset U_1\times Y,(x_2,y_2)\subset U_2\times Y$ であり，$U_1\times Y\cap U_2\times Y=\emptyset$ である．$x_1=x_2$ のとき，$y_1\ne y_2$ であり，その場合も同様にできる．よって $X\times Y$ はハウスドルフである．

(2)$A\subset X$ が有限のとき，$S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を A の開被覆とする．各 $a\in A$ に対して $a\in U_{\lambda_a}$ なる $\lambda_a\in\Lambda$ が存在するからこれを固定する．このとき $A\subset\bigcup_{a\in A}U_{\lambda_a}$ より A はコンパクト．

A が無限集合なら A の開被覆として $S=\{\{a\}\mid a\in A\}$ とすればこれは有限部分被覆をもたないからコンパクトでない．対偶をとればコンパクトなら有限集合である．

0.28　R3 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$f_1'(x)=\cos x,f_2'(x)=-\sin x,f_3'(x)=\sin x+x\cos x,f_4'(x)=\cos x-x\sin x$ である．したがって $F(f_1)=f_2,F(f_2)=-f_1,F(f_3)=f_1+f_4,F(f_4)=f_2-f_3$ である．

(2)W の任意の元は $f_1,\dots f_4$ の線形結合で表され，F は線形写像であるから，$F(f_i)\in W\quad(i=1,2,3,4)$ なら $F(W)\subset W$ である．(1) から $F(f_i)\in W$ は明らか.

(3)W の定義から $\{f_1,\dots,f_4\}$ は W を生成する．よって一次独立であれば基底である．$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3+c_4f_4=0$ とする．これは任意の $x\in\mathbb{R}$ について成り立つ恒等式である．$x=0$ とすると $c_2=0$ である．$x=2\pi$ とすれば，$c_42\pi=0$ より $c_4=0$ である．よって $c_1\sin x+c_3x\sin x=0$ である．両辺を x で微分すると $c_1\cos x+c_3\sin x+c_3x\cos x=0$ である．この式も恒等式であり，$x=\pi/2$ とすると $c_3=0$ である．よって

$x=0$ とすれば $c_1=0$ であるから一次独立.

(4)(1) より表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(5) 表現行列の固有多項式は $\begin{vmatrix} -t & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-t^2 & 1 & t \\ 1 & -t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1-t^2 & 1 & t \\ 0 & 0 & -1-t^2 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} =$ $(1+t^2)\begin{vmatrix} -1-t^2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1+t^2)^2$ である．よって固有値は実数でない.

$\boxed{2}$ (1)G の単位元を e とする．$a \in G$ に対して $a = e^{-1}ae$ より $a \sim a$ である．$a \sim b$ なら $a = g^{-1}bg$ となる $g \in G$ が存在する．このとき $b = (g^{-1})^{-1}a(g^{-1})$ であるから $b \sim a$ である.

$a \sim b, b \sim c$ なら $a = g^{-1}bg, b = h^{-1}ch$ となる $g, h \in G$ が存在する．このとき $a = g^{-1}h^{-1}chg = (hg)^{-1}chg$ であるから $a \sim c$ である．よって同値関係.

(2) 同値類が n 個あるとする．任意の $a, g \in G$ について $g^{-1}ag = a$ である．よって $ag = ga$ となるから，G はアーベル群．逆にアーベル群なら $a \sim b$ のとき，$a = g^{-1}bg$ より $a = bg^{-1}g = b$ より $a = b$．よって $m = n$

(3)$g, h \in N(a)$ なら $(gh^{-1})^{-1}a(gh^{-1}) = hg^{-1}agh^{-1} = hah^{-1} = a$ であるから $gh^{-1} \in N(a)$ である．よって部分群.

(4) 有限集合 X に対して X の元の個数を $|X|$ で表す．$g, h \in G$ に対して $gag^{-1}, hah^{-1} \in [a]$ である．$gag^{-1} = hah^{-1} \Leftrightarrow a = (h^{-1}g)^{-1}a(h^{-1}g) \Leftrightarrow h^{-1}g \in N(a) \Leftrightarrow hN(a) = gN(a)$ である．よって $\varphi\colon [a] \to G/N(a); x \mapsto gN(a) \quad (x = gag^{-1})$ とすると，φ は well-defined であるから写像である．また単射であることも明らか．よって φ は全単射であるから $|[a]|$ と $|G/N(a)|$ は等しい.

(5)$\sim$ による商集合を $\{[e], [a_1], \ldots, [a_k]\}$ とする．$|[e]| = 1$ である．$|[e]| + |[a_1]| + \cdots + |[a_k]| = |G| = p^2$ が成り立つ．$|[a_i]| = p \quad (i = 1, \ldots, k)$ なら $p^2 = 1 + pk$ となり矛盾する．よってある i について $|[a_i]| = 1$ である．$|[a_1]| = 1$ として一般性を失わない．$|[a_1]| = 1$ より $N(a_1) = G$ である．よって $a_1 \in N(a_i)$ である．$i \geq 2$ なら $\langle a_i \rangle \subset N(a_i)$ であるから $|N(a_i)| \geq p+1$ である．よって $N(a_i) = G$ である．すなわち $|[a_i]| = 1$ である．よって $|G/\sim| = |G|$ であるからアーベル群.

$\boxed{3}$ (1)$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ とする．ヤコビアンは $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$ である．積分領域は $D' = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$ である.

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{dxdydz}{(1+z(x^2+y^2))^2} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{(1+zr^2)^2} drd\theta dz \\ &= \int_0^1 2\pi \left[\frac{-1}{2z} \frac{1}{1+zr^2} \right]_0^1 dz \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{1+z} dz = \pi[\log(1+z)]_0^1 = \pi \log 2 \end{aligned}$$

(2)$x > 1$ のとき $\frac{1}{x^\alpha+1} < \frac{1}{x^\alpha}$ である．よって $\int_1^M \frac{1}{x^\alpha+1}dx < \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{-\alpha+1}(M^{-\alpha+1}-1) \to \frac{1}{\alpha-1} \quad (M \to \infty)$ である．よって左辺は収束する.

(3)$f_x = 2x + 2\sin y, f_y = 2x\cos y - \sin 2y, f_{xx} = 2, f_{yy} = -2x\sin y - 2\cos 2y, f_{xy} = 2\cos y$ である．よってヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 2 & 2\cos y \\ 2\cos y & -2x\sin y - 2\cos 2y \end{pmatrix}$ でその行列式は $-4x\sin y - 4\cos 2y - 4\cos^2 y$ である.

$f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ を解くと $2x + 2\sin y = 0, 2x\cos y - \sin 2y = 0$ であるから，$x = -\sin y, 2x\cos y =$

$2\sin y\cos y$ である．よって $x=-\sin y, x\cos y=0$ である．$x=0$ のとき $y=n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$ である．$\cos y=0$ なら $y\in\pi/2+n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$ であり，$x=-\sin(\pi/2+n\pi)=(-1)^{n+1}$ である．これらが極値点の候補である．各点についてヘッセ行列式を考えると $(0,n\pi)$ のとき，-8 であるから極値点でない．$((-1)^{n+1},\pi/2+n\pi)$ のとき，8 であるから極小点.

$\boxed{4}$ (1)(i) 正しい．$x\in A\cap B$ に対して $f(x)\in f(A)\cap f(B)$.

(ii) 正しくない．$f\colon\{1,2\}\to\{1\}$ を $f(1)=f(2)=1$ とする．$A=\{1\}, B=\{2\}$ とすれば，$A\cap B=\emptyset$ であるが，$f(A)\cap f(B)=\{1\}$

(2)$U\in\mathcal{O}'$ について $a\in U$ なら $f^{-1}(U)=X\in\mathcal{O}$ である．$a\notin U$ なら $f^{-1}(X)=\emptyset\in\mathcal{O}$ である．よって f は連続写像である.

(3)$p\in U_{p,q}, q\in V_{p,q}, U_{p,q}\cap V_{p,q}=\emptyset$ なる開集合 $U_{p,q}, V_{p,q}$ が存在する．同様にして $U_{p,r}, V_{q,r}, W_{p,r}, W_{q,r}$ が存在する．$U=U_{p,q}\cap U_{p,r}, V=V_{p,q}\cap V_{q,r}, W=W_{p,r}\cap W_{q,r}$ とすると，U,V,W は開集合であり，$p\in U, q\in V, r\in W$ である．$U\cap V\cap W=\emptyset$ である.

0.29 R4 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$g_A(t)=\begin{vmatrix}2-t & a & 0\\ a & 2-t & a\\ 0 & a & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)\begin{vmatrix}2-t & a\\ a & 2-t\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a & 0\\ a & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)((2-t)^2-a^2)-a^2(2-t)=$ $(2-t)(t^2-4t+4-a^2)$ である．$t^2-4t+4-a^2=0$ を満たす t の値は $t=2\pm\sqrt{2}a$ である．よって固有値は 2, $2+\sqrt{2}a$, $2-\sqrt{2}a$ である.

(2)$\det A=\begin{vmatrix}2 & a & 0\\ a & 2 & a\\ 0 & a & 2\end{vmatrix}=2(2^2-a^2)-a^2 2=-4a^2+8$ である．よって $a\neq\pm\sqrt{2}$ のとき，A は正則であるから A の階数は 3 である.

$a=\sqrt{2}$ のとき，$A=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ より，A の階数は 2 である.

$a=-\sqrt{2}$ のとき，$A=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2} & -2\\ 0 & -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ より，A の階数は 2 である.

(3)$f(kv)={}^t(kv)Akv=k^2v^tAv=k^2f(v)$ であるから，f は線形写像でない.

(4) 固有値 λ に対する固有ベクトル空間を $W(\lambda)$ と表す．$a\neq 0$ のとき，A の固有値は全て異なる．ノルムが 1 となるベクトル $v_1\in W(2), v_2\in W(2+\sqrt{2}a), v_3\in W(2-\sqrt{2}a)$ をとる．A は対称行列であるから，固有ベクトルは直交し，$\mathbb{R}^3$ の基底となっている．$f(v+u)={}^t(v+u)A(v+u)=f(v)+f(u)+{}^tvAu+{}^tuAv=f(v)+f(u)+2({}^tv)Au$ である．よって $\mathbb{R}^3\ni v=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3$ とすると，$f(v)=c_1^2f(v_1)+f(c_2v_2+c_3v_3)+2c_1({}^tv_1)A(c_2v_2+c_3v_3)=c_1^2f(v_1)+c_2^2f(v_2)+c_3^2f(v_3)=2c_1^2+(2+\sqrt{2}a)c_2^2+(2-\sqrt{2}a)c_3^2$ である．よって f は全射である.

$a=0$ のとき $f(v)={}^tvAv=2v^tv=2\|v\|^2$ である．よって f は全射でない.

$\boxed{2}$ (1)G を $\mathbb{Z}$ の部分群とする．n を G に含まれる最小の正の整数とする．$\langle n\rangle\subset G$ である．$x\in G\backslash\langle x\rangle$ がとれると仮定する．$x<0$ なら $-x\in G\setminus\langle x\rangle$ であるから $x>0$ として一般性を失わない．$x=nq+r\ (0\leq r<n)$ とできる．$r\in G$ である．n の最小性から $r=0$ であるがこのとき，$x\in\langle n\rangle$ である．これは矛盾．よって $G=\langle x\rangle$.

(2) (a)$\sqrt{200}-3\sqrt{18}=10\sqrt{2}-9\sqrt{2}=\sqrt{2}$ である．したがって $\langle\sqrt{2}\rangle\subset G_1$ である．逆に $n\sqrt{18}+m\sqrt{200}=(3n+10m)\sqrt{2}$ であるから $G_1=\langle\sqrt{2}\rangle$ である．すなわち巡回群.

(b)G_2 が $\alpha \in \mathbb{R}$ によって生成される巡回群とする．このとき $n\alpha = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, m\alpha = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ をみたす $n, m \in \mathbb{Z}$ が存在する．よって $2m\sqrt{5} = 10n\sqrt{2}$ である．したがって $5m^2 = 5n^2 2$ である．左辺は 2 の偶数乗を因数にもち，右辺は奇数乗を因数にもつから矛盾．よって巡回群でない．

(c)$(1,2),(3,4)$ で生成される群は $(1,2),(3,4)$ が可換であり，位数が共に 2 であることから $G_3 = \{e,(1,2),(3,4),(1,2)(3,4)\}$ である．位数 4 の元が存在しないから巡回群でない．

(d)$(1,1) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の位数は 6 である．G_4 の位数も 6 であるから巡回群．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x \in A$ について $x < \sqrt{2}$ であるから，$\sup A \le \sqrt{2}$ である．任意の $\varepsilon > 0$ について $1/n < \varepsilon$ をみたす正の整数 n が存在する．このとき $n\sqrt{2} - n(\sqrt{2}-\varepsilon) = n\varepsilon > 1$ より $n(\sqrt{2}-\varepsilon) \le m \le n\sqrt{2}$ をみたす整数 m が存在する．このとき $m/n \le \sqrt{2}$ より $m/n \in A$ であり，$\sqrt{2}-\varepsilon \le m/n$ であるから $\sqrt{2} = \sup A$ である．

(2)$a_n > \alpha$ なる整数 n が存在すると仮定する．このとき $\varepsilon = (a_n - \alpha)/2$ とすると，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $m > N$ について $\alpha - \varepsilon < a_{n_m} < \alpha + \varepsilon$ であるが，$n_m > n$ なる整数 m について $a_{n_m} < \alpha + \varepsilon < a_n$ となり，非減少であることに矛盾．よって $a_n < \alpha$ である．

$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall m > N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_{n_m}$ である．$N_1 = n_{N+1}$ とすると，$n > N_1$ なる n について $|\alpha - a_n| < |\alpha - a_{N_1}| < \varepsilon$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である．

(3)$x - y = u, \sqrt{2}x = v$ と変数変換する．ヤコビアンは $\begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1/\sqrt{2}$ である．積分領域は $D'(t) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le u \le t, 0 \le v \le \sqrt{2}u\}$ である．よって

$$\begin{aligned} f(t) &= t\left(1 - 2\iint_{D'(t)} e^{-u^2}/\sqrt{2}dudv\right) = t\left(1 - \sqrt{2}\int_0^t \int_0^{\sqrt{2}u} e^{-u^2} dvdu\right) \\ &= t\left(1 - \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{2}ue^{-u^2}du\right) = t\left(1 + [e^{-u^2}]_0^t\right) = te^{-t^2} \end{aligned}$$

$f'(t) = e^{-t^2}(1-t^2)$ である．よって最大値は $1/e$ である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の異なる二点 $x, y \in A \subset X$ について X の開集合 U, V で $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．このとき $U \cap A, V \cap A$ は A の開集合であり，$x \in U \cap A, y \in V \cap A, (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ であるから A はハウスドルフ空間．

(2)$X = 0, 1$ に離散位相を入れる．$Y = \{0, 1\}$ に密着位相を入れる．このとき $f \colon X \to Y$ を $f(0) = 0, f(1) = 1$ とする．f は全単射であり X に離散位相が入っているから連続である．$f(\{1\}) = \{1\}$ は Y の開集合でないから逆写像は連続でない．

(3)$X \times Y$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．X の開集合 V_λ，Y の開集合 W_λ を用いて $U_\lambda = V_\lambda \times W_\lambda$ とかける．$\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の開被覆である．よって有限部分集合 $\Lambda_X \subset \Lambda$ が存在して $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_X} V_\lambda$ である．同様に Y についても有限部分集合 $\Lambda_Y \subset \Lambda$ が存在して $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_Y} W_\lambda$ である．よって $X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_X \cup \Lambda_Y} U_\lambda$ である．したがって $X \times Y$ はコンパクト．

0.30 R5 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $I(x) = x^{-1}\int_0^x (y+1)^2 dy = x^{-1}\left[\frac{1}{3}(y+1)^3\right]_0^x = \frac{1}{3}x^2 + x + 1, I(x) = x^{-1}\int_0^x y + 1dy = x^{-1}\left[\frac{1}{2}y^2 + y\right]_0^x = \frac{1}{2}x + 1, I(1) = x^{-1}\int_0^x 1dy = 1$ である．

(2) 表現行列は $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(3)A の固有値は $1/3, 1/2, 1$ である．$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 0 \\ 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/15 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，固有値 $1/3$ に対応する固

有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2/15 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって $f=c(\frac{2}{15}x^2-\frac{4}{5}x+1)\quad (c\in\mathbb{R})$ に対して $I(f)=\frac{1}{3}f$ である．

$\begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，固有値 1/2 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって $f=c(-\frac{1}{2}x+1)\quad (c\in\mathbb{R})$ に対して $I(f)=\frac{1}{2}f$ である．

$\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，固有値 1/3 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって $f=c\quad (c\in\mathbb{R})$ に対して $I(f)=f$ である．

(4)$P=\begin{pmatrix} 2/15 & 0 & 0 \\ -4/5 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$P^{-1}=\begin{pmatrix} 15/2 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 0 \\ 9/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}=P\begin{pmatrix} 1/3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{15\cdot 3^n} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5\cdot 3^n} & -\frac{1}{2\cdot 2^n} & 0 \\ \frac{1}{3^n} & \frac{1}{2^n} & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & 0 & 0 \\ \frac{6}{2^n}-\frac{6}{3^n} & \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{15}{2\cdot 3^n}-\frac{12}{2^n}+\frac{9}{2} & -\frac{2}{2^n}+2 & 1 \end{pmatrix}$ である．$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} \\ \frac{7}{2^n}-\frac{6}{3^n} \\ \frac{15}{2\cdot 3^n}-\frac{14}{2^n}+\frac{15}{2} \end{pmatrix}$ である．すなわち $I^n(x^2+x+1)=\frac{1}{3^n}x^2+(\frac{7}{2^n}-\frac{6}{3^n})x+(\frac{15}{2\cdot 3^n}-\frac{14}{2^n}+\frac{15}{2})$ である．

$\boxed{2}$ (1)$f(e)=f(e\cdot e)=f(e)\cdot f(e)$ より，$e=f(e)^{-1}f(e)=f(e)^{-1}f(e)f(e)=f(e)$ である．$e=f(e)=f(yy^{-1})=f(y)f(y^{-1})$ である．よって $f(y^{-1})=f(y)^{-1}$ である．

(2)$(x,f(x)),(y,f(y))\in G_f$ に対して $(x,f(x))\cdot(y,f(y))=(xy,f(x)f(y))=(xy,f(xy))\in G_f$ より演算で閉じている．$(x,f(x))\cdot(x^{-1},f(x^{-1}))=(xx^{-1},f(x)f(x^{-1}))=(e,f(e))\in G_f$ より逆元を持つ．よって部分群をなす．

(3)$F\colon G\to G_f; x\mapsto(x,f(x))$ とする．F は同型写像.

(4)G がアーベル群なら $G\times G$ はアーベル群である．よって部分群 G_f は正規部分群である．

f が全射準同型であるとする．G_f が正規部分群であるから, $x,y\in G$ に対して $(y,e)\cdot(x,f(x))\cdot(y,e)^{-1}\in G_f$ である．すなわち $(yxy^{-1},f(x))\in G_f$ である．よって $f(yxy^{-1})=f(x)$ より $yx(xy)^{-1}\in\ker f$ である．したがって $x\ker f\cdot y\ker f=y\ker f\cdot x\ker f$ より $G/\ker f$ はアーベル群．よって群準同型定理から G はアーベル群.

$\boxed{3}$ (1)$f_x=(y-x^2y)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, f_y=(x-y^2x)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ である．ともに 0 となる点 (x,y) は $(0,0)$ と $(\pm1,\pm1)$ である．$f_{xx}=(x^3y-3xy)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, f_{yy}=(y^3x-3yx)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, f_{xy}=(x^2y^2-y^2-x^2+1)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ である．$(0,0)$ では $x=0$ として y 軸方向の増減を考えれば極値点でない．$(\pm1,\pm1)\quad$ (複号同順) ではヘッシアンは $\begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -2/e \end{pmatrix}$ である．これは負定値行列であるから極大値 $f(1,1)=1/e$ をとる．

$(\pm1,\mp1)\quad$ (複号同順) ではヘッシアンは $\begin{pmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}$ である．これは正定値行列であるから極小値 $f(-1,1)=-1/e$ をとる．

(2)$A=\{x\mid |x|\geq 1\}$ と $B=\{x\mid |x|\leq 2\}$ のそれぞれで一様連続なら $\mathbb{R}$ 上一様連続である．B は有界閉区間であるから f の連続性より一様連続である．A 上で考える．ある $\delta>0$ と任意の $x\in A, y\in(x-\delta,x+\delta)$ に対して $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{y^2-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|\leq\frac{|y-x||x+y|}{x^2}\leq\delta|\frac{2}{x}+\frac{\delta}{x^2}|\leq\delta(2+\delta)$ である．したがって任意の $\varepsilon>0$ に

対して $\delta^2+2\delta<\varepsilon$ となる $\delta>0$ をとれば，$\forall x,y\in A, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ であるから A 上一様連続である．

(3)$(1-x)+(x-y)=s, (1-x)-(x-y)=t$ と変数変換すると，$y=1-s, x=(1+y-t)/2=1-(s+t)/2$ である．よってヤコビアンは $|\begin{vmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}|=1/2$ である．積分領域は $0\le 1-s\le 1-(s+t)/2\le 1$ より $0\le s\le 1, -s\le t\le s$ である．よって

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\text{Arctan}y}{\sqrt{(1-x)(x-y)}}dxdy &= \int_0^1\int_{-s}^s \frac{\text{Arctan}(1-s)}{\sqrt{s^2-t^2}}dtds = \int_0^1 \text{Arctan}(1-s)\left[\text{Arcsin}\frac{t}{s}\right]_{-s}^s ds \\ &= \pi\int_0^1 \text{Arctan}(1-s)ds = \pi\int_0^1 \text{Arctan}sds = \pi(1\cdot\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\tan xdx) \\ &= \pi(\frac{\pi}{4}+[\log|\cos x|]_0^{\pi/4}) = \pi(\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2})\end{aligned}$$

である．

$\boxed{4}$ (1)(a)Y の開集合全体を $\mathcal{O}_Y$ とし，X の開集合全体を $\mathcal{O}_X$ とする．$f\colon X\to Y$ が連続写像であるとは，$\forall V\in\mathcal{O}_Y, f^{-1}(V)\in\mathcal{O}_X$ であることである．

(b)$W\in\mathcal{O}_Z$ に対して $(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$ である．g は連続であるから $g^{-1}(W)\in\mathcal{O}_Y$ である．f は連続であるから $f^{-1}(g^{-1}(W))\in\mathcal{O}_X$ である．よって $g\circ f$ は連続である．

(2)(a) 位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ がハウスドルフ空間であるとは，$\forall x,y\in X, x\neq y$ に対して開集合 $U,V\in\mathcal{O}_X$ が存在して $x\in U, y\in V, U\cap V=\emptyset$ であることである．

(b) 任意の $y\in X\setminus\{x\}$ に対して，$U_y,V_y\in\mathcal{O}_X$ で $x\in U_y, y\in V_y, U_y\cap V_y=\emptyset$ となる開集合が存在する．$\bigcup_{y\in X\setminus\{x\}} V_y = X\setminus\{x\}$ は開集合であるから，$\{x\}$ は閉集合．

(3)(a)A がコンパクトであるとは，A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつことである．

(b)$A\cup B$ の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を任意にとる．S は A の開被覆でもあるから有限部分集合 $\Lambda_A\subset\Lambda$ が存在して $A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda_A}U_\lambda$ である．同様に B の開被覆でもあるから有限部分集合 $\Lambda_B\subset\Lambda$ が存在して $B\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda_B}U_\lambda$ である．よって $A\cup B\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda_A\cup\Lambda_B}U_\lambda$ である．

0.31 R6 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & b & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ 0 & b-4 & -21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3a+3 \\ 0 & 0 & -3b-9 \end{pmatrix}$ より $a=1, b=-3$ のとき次元は 2 である．$a\neq 1$ または $b\neq -3$ のとき次元は 3 である．

(2)(a)$g_A(t)=\begin{vmatrix} t+2 & 1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1 \\ -1 & 1 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -t^2-4t-3 & -t-3 \\ 1 & t+2 & 1 \\ 0 & t+3 & t+3 \end{vmatrix} = -(t+3)\begin{vmatrix} -t^2-4t-3 & -t-3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(t+3)(-t^2-4t-3+t+3) = t(t+3)^2$ である．(b) 各固有値の固有ベクトルをもとめる．固有値 0 に対して $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

固有値 -3 に対して $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．直交化

して $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/21/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$T = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1)(a)$gh_1g^{-1}(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ である．よって部分群である．

(b)$\varphi \colon H \to gHg^{-1}; h \mapsto ghg^{-1}$ とする．$\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ とすると $gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1}$ である．$h_1 = h_2$ である．よって φ は単射である．H は有限であるから φ は全単射である．

(2)(a)x の選び方は 4 通り，y の選び方は 5 通り，よって位数は 20 である．

(b)$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆元は $\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$xy^{-1} \in \mathbb{F}_5^{\times}$ であるから，H は部分群である．

(c)$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$g_1 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1^{-1} = \begin{pmatrix} x & -x+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$g_2 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2^{-1} = \begin{pmatrix} x & -2x+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $g_1Hg_1^{-1}, g_2Hg_2^{-1}$ は同じ部分群でないから，$H, g_1Hg_1^{-1}, g_2Hg_2^{-1}$ が求める 3 つの部分群である．

$\boxed{3}$ (1)$f_x(x,y) = (-x^2 - 2x + 3 - y^2)e^x, f_y(x,y) = -2ye^x$ である．$f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0$ を満たす x, y は $(x,y) = (1,0), (-3,0)$ である．

$f_{xx}(x,y) = (-x^2 - 4x + 1 - y^2)e^x, f_{yy}(x,y) = -2e^x, f_{xy}(x,y) = -2ye^x$ である．$(1,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} -4e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}$ である．負定値であるから極大値 $f(1,0) = 2e$ である．$(-3,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 4e^{-3} & 0 \\ 0 & -2e^{-3} \end{pmatrix}$ である．行列式が負であるから鞍点である．

(2)$a \leq 1$ のとき $a_n \leq \frac{1}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$ であるから収束する．

$a > 1$ のとき $a = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$ と表せる．このとき $a^n = (1+\varepsilon)^n > \binom{n}{3}\varepsilon^3$ である．よって $\frac{a^n}{n^2} > \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^2}\varepsilon^3 \to \infty \quad (n \to \infty)$ であるから発散する．

(3)$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, y \geq x\}, B = D \setminus A$ としてそれぞれの積分を計算する．

A での積分は $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), 0 \leq r \leq 1, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ として変数変換するとヤコビアンは r である．$\iint_A 1/\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r}{r} drd\theta = \frac{\pi}{4}$ である．

B での積分は $\iint_B 1/\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{1/2} \frac{1}{x}\int_0^x 1/\sqrt{1+(y/x)^2}dydx = \int_0^{1/2}\left[\log\left(1+\sqrt{1+1}\right)\right]dx = \log\left(1+\sqrt{2}\right)/2$ よって $\iint_D 1/\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{\pi}{4} + (1+\sqrt{2})/2$ である．

$\boxed{4}$ (1) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ がハウスドルフ空間であるとは，任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して開集合 $U, V \in \mathcal{O}_1$ が存在して $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となることである．

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ がコンパクトであるとは，任意の X の開被覆に対して，有限部分被覆が存在することである．

(3)$f \colon X \to Y$ が連続であるとは，任意の Y の開集合 $V \in \mathcal{O}_2$ に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることである．

(4)$y \in X \setminus C$ を任意にとる．各 $x \in C$ に対してハウスドルフ性から $x \in U_x, y \in V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$ となる U_x, V_x が存在する．C はコンパクトであるから C の開被覆 $\{U_x\}_{x \in C}$ に対して有限部分被覆 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$ が存在する．$V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ とすると $y \in V \in \mathcal{O}_1$ である．したがって y は C の外点である．

(5)$y \in X \setminus I$ について $f(p) \neq g(p)$ であり，Y のハウスドルフ性から $f(p) \in U, g(p) \in V, U \cap V = \emptyset$ となる開

集合 U, V が存在する．f, g は連続であるから $f^{-1}(U), g^{-1}(V)$ は X の開集合である．$y \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ である．$x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ について $f(x) = g(x)$ なら $f(x) \in U, g(x) \in V$ となり $U \cap V = \emptyset$ に矛盾．よって $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \cap I = \emptyset$ である．すなわち y は外点である．