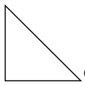
0.1 H8 数学必修

$\boxed{1}$ 求める体積を V とする．$V=\int\int\int_K 1dxdydz$ である．$x^a=u, y^b=v, z^c=w$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} \frac{1}{a}u^{\frac{1}{a}-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}v^{\frac{1}{b}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c}w^{\frac{1}{c}-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}u^{\frac{1}{a}-1}v^{\frac{1}{b}-1}w^{\frac{1}{c}-1}$．よって $V=\frac{1}{abc}\int\int\int_{u+v+w\le 1,u,v,w\ge 0} u^{\frac{1}{a}-1}v^{\frac{1}{b}-1}w^{\frac{1}{c}-1}dudvdw$．$(u,v,w)=r(\xi,\eta,\zeta), \xi+\eta+\zeta=1$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & 0 & \xi \\ 0 & r & \eta \\ -r & -r & \zeta \end{vmatrix} = r^2(\zeta+\eta)+r^2\xi=r^2$.

$V=\frac{1}{abc}\int_0^1 r^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}\int\int_{\xi+\eta+\zeta=1,\xi,\eta,\zeta\ge 0}\xi^{\frac{1}{a}-1}\eta^{\frac{1}{b}-1}\zeta^{\frac{1}{c}-1}d\xi d\eta dr$.

$\int_0^1 r^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}dr=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ である．

$\int\int_{\xi+\eta+\zeta=1,\xi,\eta,\zeta\ge 0}\xi^{\frac{1}{a}-1}\eta^{\frac{1}{b}-1}\zeta^{\frac{1}{c}-1}d\xi d\eta$.

うまく変数変換して Γ 関数あるいは，β関数の形にしたい．積分領域は上からみると (z 軸の正から負の方向)  のような形をしている．これを $[0,1]\times[0,1]$ の形に変換したいので，$s=\xi, t=\frac{\eta}{1-\xi}$ と変数変換する．

$s=\xi, (1-s)t=\eta$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1-s \end{vmatrix} = 1-s$．よって

$$\begin{aligned}
\int\int_{\xi+\eta+\zeta=1,\xi,\eta,\zeta\ge 0}\xi^{\frac{1}{a}-1}\eta^{\frac{1}{b}-1}\zeta^{\frac{1}{c}-1}d\xi d\eta &= \int_0^1\int_0^1 s^{\frac{1}{a}-1}(1-s)^{\frac{1}{b}-1}t^{\frac{1}{b}-1}(1-s)^{\frac{1}{c}-1}(1-t)^{\frac{1}{c}-1}(1-s)dsdt \\
&= \int_0^1 s^{\frac{1}{a}-1}(1-s)^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}ds\int_0^1 t^{\frac{1}{b}-1}(1-t)^{\frac{1}{c}-1}dt \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}
\end{aligned}$$

よって $V=\frac{1}{abc}\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$.

$\boxed{2}$ (1) $G=H\cup K$ と仮定する．$x\in G\setminus H\subset K, y\in G\setminus K\subset H$ に対して，$xy\in G=H\cup K$ より $xy\in H$ または $xy\in K$ である．$xy\in H$ ならば $xy=h\in H$ より，$x=yy^{-1}\in H$ となり矛盾．$xy\in K$ ならば $xy=k\in K$ より，$y=x^{-1}k\in K$ となり矛盾．

(2) $x\in H\cap K, x\notin L$ が存在すると仮定する．$\ell\in G\setminus(H\cup K)\subset L$ に対して，$x\ell\in H$ なら $x\ell=h\in H$ より $\ell=x^{-1}h\in H$ となり矛盾．$x\ell\in K$ も同様．よって $x\ell\in L$ だが，$\ell\in L$ より $x\in L$ となり矛盾．

$\boxed{3}$ $\mathrm{Cl}\,A$ で A の閉包を表す．

$x\in U\cap V$ に対して，$x\in B(x,r_x)\cap X\subset U\cap V$ なる $r_x>0$ が存在する．このとき，$x\in\mathrm{Cl}\,B(x,r_x/2)\cap X\subset U\cap V$ である．$x\in U\setminus V$ についても $x\in\mathrm{Cl}\,B(x,r_x/2)\cap X\subset U$ なる r_x が存在する．

$x\in V\setminus U$ についても同様．

r_x を x に対して一つ固定する．

$\bigcup_{x\in X}B(x,r_x/2)=X$ であるから，コンパクト性より有限部分集合 $X_0\subset X$ が存在して $\bigcup_{x\in X_0}B(x,r_x/2)=X$ となる．

$X_{0,U} = \{x \in X_0 \mid x_0 \in U\}, X_{0,V} = \{x \in X_0 \mid x_0 \in V\}$ とする．$K = \bigcup_{x \in X_{0,U}} \mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X, L = \bigcup_{x \in X_{0,V}} \mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X$ とする．

$\mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2)$ は有界閉集合だからコンパクトで，$\mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X$ も X のコンパクト集合である．K, L は有限個のコンパクト集合の和集合だからコンパクトである．$x \in X_{0,U}$ に対して，$\mathrm{Cl}\, B(x, r_x/2) \cap X \subset U$ であるから $K \subset U$．同様に $L \subset V$．

$\boxed{4}$ 行基本変形によって $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t & 2t \\ 1 & t & t & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2t-1 & -1 & 3t-1 \\ 0 & 0 & 2t & t \end{pmatrix}$ とできる．$t \neq 0$ ならさらに $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4t-2 & 0 & 6t-1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$f(t) = \det A(t) = 2(2t-1)2t$ であるから，$f(t_0) = 0$ ならば $t_0 = 1/2, 0$ である．$t \to 1/2 + 0$ のとき，$x(t) = \begin{pmatrix} -t/(2t-1) \\ (6t-1)/(4t-2) \\ 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ 1/2 \end{pmatrix}$ である．$t \to 1/2 - 0$ のとき，$x(t) \to \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ 1/2 \end{pmatrix}$ である．

$t \to 0$ のとき，$x(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ である．