0.1 R4 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$[0,\frac{\pi}{4}]$ と $[\frac{\pi}{4},\infty)$ にわけて収束をしらべる．

$x\in[0,\pi/4]$ で $\frac{1}{2}\le\cos x\le 1$ である．不等式を 0 から x まで積分すると，$\frac{1}{2}x\le\sin x\le x$ を得る．

$\int_0^{\pi/4}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|dx\le\int_0^{\pi/4}\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx=\begin{cases}\left[\frac{1}{2-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right]_0^{\pi/4} & (\alpha\ne 2)\\ [\log x]_0^{\pi/4} & (\alpha=2)\end{cases}$ であるから $\alpha<2$ で絶対収束する．

$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\ge\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2x^{\alpha-1}}dx$ であるから，$\alpha\ge 2$ で発散する．

$1<\alpha<2$ のとき，$\int_{\pi/4}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|dx\le\int_{\pi/4}^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{\pi/4}^{\infty}$ であるから $\alpha>1$ で絶対収束する．

$\alpha\le 1$ のとき，$p>q\ge\pi/4$ に対して

$$\left|\int_q^p\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\right|=\left|\left[\frac{-\cos x}{x^\alpha}\right]_q^p-\int_q^p\frac{\cos x}{\alpha x^{\alpha+1}}dx\right|\le\frac{1}{q^\alpha}+\frac{1}{p^\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_q^p\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx\le\frac{1}{q^\alpha}+\frac{1}{p^\alpha}+\left[-\frac{1}{x^\alpha}\right]_q^p\to 0\quad(p,q\to\infty)$$

であるから，$\alpha\le 1$ で収束する．

以上より $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ は $\alpha<2$ で収束する．

(2)(1) の計算から $1<\beta<2$ で収束し，$\beta\ge 2$ で発散することがわかる．

$\beta\le 1$ のとき，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\beta}dx=\int_0^\pi\frac{\sin x}{(x+n\pi)^\beta}dx\ge\frac{1}{((n+1)\pi)^\beta}\int_0^\pi\sin x dx=\frac{2}{((n+1)\pi)^\beta}$$
$$\int_1^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{n=1}^\infty\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\ge\sum_{n=1}^\infty\frac{2}{((n+1)\pi)^\beta}$$

よって $\beta\le 1$ で発散する．

以上より $1<\beta<2$ で収束し，$\beta\le 1, 2\le\beta$ で発散する．

$\boxed{2}$ (1)$b(x,y)=x^TAy=x^T(-A^T)y=-((Ax)^Ty)^T=-y^T(Ax)=-b(y,x)$.

(2)(1) より $y\in\ker f$ のときに示せば十分．$b(x,y)=x^TAy=x^T0=0$.

(3)$Ax=v+u, v\in V, u\in\ker f$ と一意に表せる．$B(x,v)=b(x,Ax-u)=x^TA(Ax-u)=x^TA^2x=-x^TA^TAx=-(Ax)^TAx$ である．$x\in V$ より $Ax\ne 0$ であるあから，$(Ax)^TAx\ne 0$．よって $B(x,v)\ne 0$.

(4)$\det A=\det -A^T=(-1)^n\det A$ より n が奇数なら $\det A=0$.

(5)V の基底 $\{v_1,\dots,v_k\}$ を一つ固定する．$b_{ij}=B(v_i,v_j)$ として行列 $M=(b_{ij})$ を定める．$x=\sum x_iv_i, y=\sum y_iv_i\in V$ に対して $B(x,y)=(\sum_i x_iv_i)^TA(\sum_j y_jv_j)=\sum_{i,j}x_iy_jv_i^TAv_j=\sum_{i,j}x_iy_jb_{ij}=x^TMy$ である．(この転置は $\mathbb{R}^n$ の標準基底による座標の転置ではなく，固定した V の基底による座標の転置) (1) から $b_{ij}=b(v_i,v_j)=-b(v_j,v_i)=-b_{ji}$ であるから M は交代行列．M が正則でないとする．このときある $x\in V$ について $Mx=0$ であるが任意の y について $B(x,y)=-B(y,x)=-y^TBx=0$ となり (3) に矛盾．よって M は正則．$\det M\ne 0$ だから (4) より k は偶数．$\operatorname{rank}A=n-\dim\ker f=\dim V=k$ より $\operatorname{rank}A$ は偶数.

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x\in X$ について $(x,y)\in U$ より $x\in S_x, y\in V_x, S_x\times V_x\subset U$ なる開集合 S_x, V_x が存在する．$\{S_x \mid x\in X\}$ は X の開被覆であるから有限部分被覆 $\{S_{x_i} \mid i=1,\dots,n\}$ が存在する．$V=\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ とすると任意の $x\in X, y\in V$ について $x\in S_{x_i}$ なる x_i が存在して $y\in V_{x_i}$ であるから $(x,y)\in U$．よって $X\times V\subset U$ である．

(2)$X\times Y$ の閉集合 C を任意にとる．$U:=X\times Y\setminus C$ とする．$y\notin P_Y(C)$ について $X\times y\subset U$ であるから (1) より $X\times V_y\subset U$ なる開集合 V_y が存在する．$V:=\bigcup_{y\in P_Y(C)}V_y$ とすると，$Y\setminus P_Y(C)\subset V$ である．$v\in V$ に対して $X\times\{v\}\subset U$ であるから ${}^\forall x\in X, (x,v)\notin C$ である．よって $v\notin P_Y(C)$ であるから $Y\setminus P_Y(C)=V$ より P_Y は閉写像.

$\boxed{4}$ (1)f の極は $z=i,-i$ である．$z=i$ の留数は $\lim(z-i)f(z)=\frac{e^{xi}}{2i}$ である．$z=-i$ の留数は $\lim(z+i)f(z)=\frac{e^{-xi}}{-2i}$ である．

(2)$i,-i$ は共に D の内部の点である．留数定理から $\int_C f(z)dz=2\pi i(\frac{e^{xi}}{2i}+\frac{e^{-xi}}{-2i})=\pi(e^{xi}-e^{-xi})=2\pi i\sin x$ である．

(3)C_1 を $1+Ri$ から Ri への有向線分，C_2 を半径 R の円の実部が負の部分を反時計回りに周る曲線，C_3 を $-Ri$ から $1-Ri$ への有向線分とする．C_1,C_2,C_3,L_R を合わせると C となる．$R>2$ のとき

$$\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| = \left|\int_1^0 \frac{e^{x(t+Ri)}}{(t+Ri)^2+1}dt\right| \le \int_0^1 \left|\frac{e^{xt}}{t^2-R^2+1+tRi}\right| dt \le \int_0^1 \frac{e^x}{R^2}dt \to 0 \quad (R\to\infty)$$
$$\left|\int_{C_3} f(z)dz\right| = \left|\int_0^1 \frac{e^{x(t-Ri)}}{(t-Ri)^2+1}dt\right| \le \int_0^1 \left|\frac{e^{xt}}{t^2-R^2+1-tRi}\right| dt \le \int_0^1 \frac{e^x}{R^2}dt \to 0 \quad (R\to\infty)$$
$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{xRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}+1}Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\frac{e^{xR\cos\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}R\right| d\theta \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{R}{R^2-1}d\theta \to 0 \quad (R\to\infty)$$

よって $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} f(z)dz=\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sin x$ である．