0.1 H27 数学必修

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h27.pdf

$\boxed{1}$ (1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = a(a^2-cb)-c(ab-c^2)+b(b^2-ac) = a^3+b^3+c^3-3abc$

(2) (1) において a を $t-a$ に変えれば，固有方程式 $g_A(t)=(t-a)^3+b^3+c^3-3(t-a)bc$.

$A\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b\omega+c\omega^2 \\ c+a\omega+b\omega^2 \\ b+c\omega+a\omega^2 \end{pmatrix} = (a+b\omega+c\omega^2)\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$ より固有ベクトルで固有値は $a+b\omega+c\omega^2$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルであることは明らかで，固有値は $a+b+c$.

3 個めの固有値を λ とすれば，解と係数の関係から，$\lambda+(a+b\omega+c\omega^2)+(a+b+c)=3a$ である．$1+\omega+\omega^2=0$ より $\lambda=a+b\omega^2+c\omega$.

(3) $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b\omega+c\omega^2=1 \\ a+b\omega^2+c\omega=1 \end{cases}$ より，足し合わせて $3a=3$，すなわち $a=1$．よって $b+c\omega=b\omega+c=b+c=0$ より $b=c=0$．すなわち $A=I$ のみ．

$\boxed{2}$ (1) $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|=p$ より，$G=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の位数は p^3.

(2) 単位元以外の任意の元 $(a,b,c)\in G$ について，a,b,c のいずれかが 0 でない．0 以外の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の位数は p であるから (a,b,c) の位数は p．よって p^3-1

(3) H を位数 p の群とする．単位元でない元 $x\in H$ に対して，x で生成される部分群 $\langle x\rangle$ の位数はラグランジュの定理より $1,p$ のいずれか．x は単位元でないから位数は p で $\langle x\rangle=H$．よって x は H の生成元でもある．以上より位数 p の群は巡回群であり，生成元の個数は $p-1$.

(4) 位数 p の群は巡回群であるから，G の単位元でない各元を生成元とする異なる部分群の数を数えればよい．ただし各部分群に対して，生成元は $p-1$ 個存在するから，求める部分群の数は $(p^3-1)/(p-1)=p^2+p+1$.

バーンサイドの補題を使う方法もある．G に対して $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ が $n\cdot g=ng$ として作用する．1 の固定部分群は G，それ以外の固定部分群は $\{e\}$ である．よって軌道の個数は $\frac{p^3+(p-2)}{p-1}=p^2+p+2$．$e\in G$ の軌道は位数 p の部分群を作らないため，求める部分群の数は p^2+p+1.

$\boxed{3}$ (1) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-y^2}(-2)x^{-3}\sin x+e^{-y^2}x^{-2}\cos x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-y^2}(-2y)x^{-2}\sin x$.

(2) $g(x)=x-2\tan x$ とすると，$g'(x)=1-2\frac{1}{\cos^2 x}<-1\quad(n\pi<x<n\pi+\pi/2)$ より g は $(n\pi<x<n\pi+\pi/2)$ で狭義単調減少．$\lim_{h\to n\pi+0}g(h)=n\pi>0$, $\lim_{h\to n\pi+\pi/2-0}g(h)=-\infty$ より，g は $(n\pi<x<n\pi+\pi/2)$ で 0 をただ一点でとる．

$x\in(\pi/2,\infty)\setminus\{(n\pi,n\pi+\pi/2)\mid n=1,2,\cdots\}$ において，$\tan x<0$ より，$g(x)>0$．すなわち解は存在しない．

(3) $a_n\cos a_n-2\sin a_n=0$ である．$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a_n,0)}=-2a_n^{-3}\sin a_n+a_n^{-2}\cos a_n=a_n^{-3}\cos a_n(-2\tan a_n+a_n)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a_n,0)}=0$ である．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{-y^2}6x^{-4}\sin x + e^{-y^2}(-2)x^{-3}\cos x + e^{-y^2}(-2)x^{-3}\cos x - e^{-y^2}x^{-2}\sin x \\
&= e^{-y^2}(6x^{-4} - x^{-2})\sin x - 4e^{-y^2}x^{-3}\cos x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{-y^2}4y^2x^{-2}\sin x + e^{-y^2}(-2)x^{-2}\sin x \\
\frac{\partial f}{\partial x\partial y} &= e^{-y^2}4yx^{-3}\sin x + e^{-y^2}(-2y)x^{-2}\cos x
\end{aligned}
$$

$(a_n, 0)$ におけるヘッシアンは $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x\partial x}|_{(a_n,0)} & \frac{\partial f}{\partial x\partial y}|_{(a_n,0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y\partial x}|_{(a_n,0)} & \frac{\partial f}{\partial y\partial y}|_{(a_n,0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (6a_n^{-4} - a_n^{-2})\sin a_n - 8a_n^{-4}\sin a_n & 0 \\ 0 & -2a_n^{-2}\sin a_n \end{vmatrix} =$ $4a_n^{-6}\sin^2 a_n + 2a_n^2\sin^2 a_n > 0$ よって $(a_n, 0)$ は極値点である．

$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = 0, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} = 0$ を満たす (x_0, y_0) を考える．$e^{-y_0^2}(-2y_0)x_0^{-2}\sin x_0 = 0$ より $y_0 = 0$ または $x_0 = n\pi$．

$x_0 = n\pi$ なら $\cos x = \pm 1$ より $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(n\pi,y)} = e^{-y^2}x_0^{-2}(\pm 1) \neq 0$．

$y_0 = 0$ なら，$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = x_0^{-3}\cos x(-2\tan x_0 + x) = 0$．これは $x_0 = a_n$ の時のみ満たす．

$\boxed{4}$ (1) 角度 φ の回転行列は $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ である．

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と変数変換すると，ヤコビアンは $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$．積分範囲は $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ から $A = \{(r, \theta) \mid 0 \le r < 1, 0 \le \theta < 2\pi\}$ に変わる．

$$
\begin{aligned}
F(v) &= \int\int_B \frac{(ax+by)^2}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy \\
&= \int\int_A \frac{(ar\cos\theta + br\sin\theta)^2}{1+r^4}rdrd\theta \\
&= \int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)} \frac{r^3}{1+r^4}(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 drd\theta
\end{aligned}
$$

である．

$$
\begin{aligned}
F(R(\varphi)v) &= \int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)} \frac{r^3}{1+r^4}((a\cos\varphi - b\sin\varphi)\cos\theta + (a\sin\varphi + b\cos\varphi)\sin\theta)^2 drd\theta \\
&= \int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)} \frac{r^3}{1+r^4}(a\cos(\theta-\varphi) + b\sin(\theta-\varphi))^2 drd\theta
\end{aligned}
$$

$\theta - \varphi = \theta'$ と変数変換すると，$F(R(\varphi)v) = \int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)} \frac{r^3}{1+r^4}(a\cos\theta' + b\sin\theta')^2 drd\theta' = F(v)$．

(2)α を $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるように定めると，$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ となる．

よって $F(v) = F(R(\alpha)v) = \int_{[0,1)}\int_{[0,2\pi)} \frac{r^3}{1+r^4}(a^2+b^2)\cos^2\theta drd\theta = [\frac{1}{4}\log(1+r^4)]_0^1(a^2+b^2)[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}]_0^{2\pi} = \frac{a^2+b^2}{4}\pi\log 2$．

$\boxed{5}$ (1) (ア)$\frac{1}{2^n}$，(イ)U

(2) $U_n = (0, 1 - \frac{1}{n})$ は J の開集合．$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = (0, 1)$ より $\Lambda = \{U_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ は J の開被覆である．

Λ の有限部分集合 Λ' に対して，最大の添え字 λ' をとれば $\bigcup_{U_n \in \Lambda'} U_n = U_{\lambda'} \subsetneq (0,1)$．より J はコンパクトではない．

(3)$f\colon I \to J$ を同相写像とする．J の任意の開被覆 Λ に対して，$f^{-1}(\Lambda) = \left\{ f^{-1}(U) \mid U \in \Lambda \right\}$ は I の開被覆である．

I はコンパクトであるから有限部分被覆 $\left\{ f^{-1}(U) \mid U \in \Lambda' \right\}$ が存在する．f は全単射であるから，$f(\bigcup_{U \in \Lambda'} U) = \bigcup_{U \in \Lambda'} f(U) = J$ となり，J はコンパクトである．これは矛盾．