0.1 H13 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$.

(2) $\det J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y+z & x-y & x-z \\ yz & zx-yz & xy-yz \end{vmatrix} = (x-y)(xy-yz)-(x-z)(xz-yz) = (x-y)(y-z)(x-z)$.

(3)$x \neq y \neq z \neq x$ のとき，$\det J \neq 0$ より J は正則であるから，$\mathrm{rank} J = 3$ である．

$x = y \neq z$ のとき，$\mathrm{rank} J = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+z & 0 & x-z \\ xz & 0 & x^2 \end{pmatrix} = 2$ である．$x = z \neq y$ および，$y = z \neq x$ のときも同様に $\mathrm{rank} J = 2$ である．

$x = y = z$ のとき，$\mathrm{rank} J = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2x & 2x \\ x^2 & x^2 & x^2 \end{pmatrix} = 1$ である．

$\boxed{2}$ (1) x, y で生成される巡回群 $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ に対して，$\varphi\colon \langle x \rangle \to \langle y \rangle$ を $x^i \mapsto y^i$ で定める．

$\varphi(x^i x^j) = \varphi(x^{i+j}) = y^{i+j} = y^i y^j = \varphi(x^i)\varphi(x^j)$ であるから，φ は群準同型．$y^i\varphi(x^i) = y^0$ なら $i = 0$ より φ は単射.

$y^i \in \langle y \rangle$ に対して，$y^i = \varphi(x^i)$ となる $x^i \in \langle x \rangle$ が存在する．よって φ は全射.

よって φ は同型写像であるから $\langle x \rangle \cong \langle y \rangle$ である．

(2)$G = \langle x \rangle$ を巡回群とし φ, ψ を G の自己同型とする．G が巡回群であるから，自己同型は x の行き先で定まる．$\varphi(x) = x^i, \psi(x) = x^j$ とする．

$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(x^j) = x^{ij} = \psi(x^i) = \psi \circ \varphi(x)$ より $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ である．

(3)H を $G = \langle x \rangle$ の部分群とする．$H = \{x^0\}$ なら H は巡回群である．$H \neq \{x^0\}$ とする．$\Lambda = \{i \in \mathbb{Z} \mid x^i \in H\}$ とする．$x^i \in H \quad (i \neq 0)$ より $x^i, x^{-i} \in H$ より Λ の最小の正の元 d がとれる．

$\langle x^d \rangle \subset H$ である．$x^k \in H$ について $k = dq + r \quad (0 \leq r < d)$ とすると $x^r = x^k x^{-dq} \in H$ であるから d の最小性より $r = 0$ である．よって $H = \langle x^d \rangle$ である．

(4) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $\varphi\colon G \to G; (m,n) \mapsto (n,m), \psi\colon G \to G; (m,n) \mapsto (-m,n)$ とする．

φ, ψ は共に G の自己同型である．$\varphi \circ \psi(m,n) = \varphi(-m,n) = (n,-m), \psi \circ \varphi(m,n) = \psi(n,m) = (-n,m)$ より $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ である．

よってアーベル群の自己同型群はアーベル群でない．

$\boxed{3}$ (1) (D) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x-n) = 0$ である．$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x-n)| \geq \lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(0)| \neq 0$ より各点収束だが，一様収束でない．

(2) (C) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |2^{-n}\varphi(2^{-n}x)| \leq \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} \sup\limits_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)| = 0$ より一様収束する．

$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-n}\varphi(2^{-n}x)dx = \int_{-2^n}^{2^n} 2^{-n}\varphi(2^{-n}x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt > 0 \quad (\because \varphi(t) > 0 \quad (-1 < t < 1))$ である．

(3)(A)$\int_{-\infty}^{\infty} |n\varphi(n\sqrt{n}x)|dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt$ より $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx = 0$ である．$\int_{-\infty}^{\infty} |n\varphi(n\sqrt{n}x)|^2 dx = \sqrt{n}\int_{-1}^{1} \varphi(t)^2 dt$ より $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx = \infty$.

(4)(B)$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\frac{1}{n}\varphi(nx)| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup\limits_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)| = 0$ より一様収束する．$f_n'(x) = \varphi'(nx)$ であり

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(nx) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \varphi'(0) & (x = 0) \end{cases}$$

f_n の極限関数 f は $f \equiv 0$ で，f'_n の極限関数は 0 で非負値 $\varphi'(0)$ をとるから，$f' \neq g$ である．

$\boxed{4}$ (1) 距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $a \in X$ に収束するとは，${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}, {}^{\forall}n \geq N, d(x_n, a) < \varepsilon$ が成り立つことである．

(2)$f\colon X \to Y$ が $a \in A$ で連続であるとは，${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\delta > 0, {}^{\forall}x \in X, d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ が成り立つことである．

(3)$f(X)$ 内の任意の点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる．各 y_n に対して $f(x_n) = y_n$ となる $x_n \in X$ がとれる．よって数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を得る．X は点列コンパクトであるから $x_* \in X$ に収束する収束部分列 x_{n_k} が存在する．

このとき $y_{n_k}{}_{k=1}^{\infty}$ が $f(x_*)$ に収束することを示す．${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\delta > 0, d(x_{n_k}, x_*) < \delta \Rightarrow d(f(x_{n_k}), f(x_*)) < \varepsilon$ この δ に対して，$\{x_{n_K}\}_{K=1}^{\infty}$ は収束するから，ある K_0 が存在して $k \geq K_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_*) < \delta$ である．よって $k \geq K_0 \Rightarrow d(f(x_{n_k}), f(x_*)) < \varepsilon$ である．すなわち $y_{n_k}{}_{k=1}^{\infty}$ は $f(x_*)$ に収束する．

(4) $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ とする．有限部分被覆をもつならある A_n について $A_n = X$ となる．$\{U_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ が有限部分被覆を持たないと仮定する．すると $x_n \in A_n \setminus A_{n-1}$ がとれる．よって数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が得られる．X は点列コンパクトであるから $x_* \in X$ に収束する収束部分列 x_{n_k} が存在する．

$x_* \in U_m$ なる m が存在する．よってある $r > 0$ が存在して $d(x, x_*) < r \Rightarrow x \in U_m$ である．r に対してある K が存在して $k \geq K \Rightarrow d(x_{n_k}, x_*) < r$ である．すなわち $k \geq K \Rightarrow x_{n_k} \in U_m$ である．これは x_{n_k} の取り方に矛盾する．