

0.1 H30 数学 A

[1] (1) $f(X)$ が連結でないを仮定する. このとき, $f(X) \subset U \cup V$ なる Y の開集合 U, V で $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ かつ $U \cap f(X) \neq \emptyset, V \cap f(X) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する. $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = X$ であり, $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は X の開集合である. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = \emptyset$ で, $f^{-1}(U) \neq \emptyset, f^{-1}(V) \neq \emptyset$ であるから, X は連結でない. これは矛盾. よって, $f(X)$ は連結である.

(2) $Y = \{0, 1\}$ で Y に密着位相をいれる. $X = \{0, 1\}$ で X に離散位相をいれる. このとき $f(x) = x$ は連続であり, X はハウスドルフ空間である. しかし $Y = f(X)$ はハウスドルフ空間でない.

(3) $f(X)$ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $T = \{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆である. X はコンパクトであるから, T の有限部分集合 $\{f^{-1}(U_{\lambda_i})\}_{i=1}^n$ が存在して, $X = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i})$ となる. $f(X) = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ であり, $f(X)$ はコンパクトである.

[2] (1) $f^d(V) = V^d$ とする. $V^{d+1} = f^{d+1}(V) = f^d(f(V)) \subset f^d(V) = V^d$ である. よって, ベクトル空間の降下列 $V = V^0 \supset V^1 \supset \dots \supset V^n \supset \dots$ が定まる. f^d が零写像であるから $V^d = 0$ である. 降下列であるから次元は単調減少する. $V^{i-1} = V^i$ なる i が存在したとき, $V^{i+1} = f^{i+1}(V) = f(V^i) = f(V^{i-1}) = V^i$ となるから, 以降すべて等しい. よって次元は小さくなり続けたのち, ある次元で以降不変になる.

$f^d = 0$ より, $V^d = 0 = V^{d+1}$ である. また $f^{d-1} \neq 0$ より $V^{d-1} \neq 0$ である. すなわち V^d までは次元は小さくなり続ける. $\dim V = n$ より $d \leq n$ である.

(2) $v \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$ について, ある $w \in V$ が存在して $f(w) = v$ である. $0 = f(v) = f(f(w)) = f(w) = v$ であるから, $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ である.

(3) 求める最大元は $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ である. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す.

V の基底を $\{v_1, \dots, v_n\}$ とする. $g(v_i) = \begin{cases} 0 & (i \leq m) \\ v_{i-m} & (i > m) \end{cases}$ とする. g は線形写像である. $\text{Im}(g) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$ であり, $\ker(g) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$ である. m の定義から $m \leq n - m$ であるから,

$\dim(\text{Im}(g) \cap \ker(g)) = \dim \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = m$ である. よって $m \in A$ である.

次元定理より $f: V \rightarrow V$ に対して $n = \dim V = \dim \text{Im}(f) + \dim \ker(f)$ である. よって $\dim(\text{Im}(f) \cap \ker(f)) \leq \min\{\dim \text{Im}(f), \dim \ker(f)\} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ である.

よって $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ は A の上界である. よって m は求める最大元である.

[3] (1) $2 - \cos x > 0$ より $0 \leq \int_0^x 2 - \cos t \, dt = 2x - \sin x$ である. よって $0 \leq \int_0^x 2t - \sin t \, dt = x^2 + \cos x - 1$ である. よって $0 \leq \int_0^x t^2 + \cos t - 1 \, dt = \frac{1}{3}x^3 + \sin x - x$ である.

よって $f_n(x) = n^{p+1}(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) \leq n^{p+1}(\frac{1}{3}(\frac{x}{n})^3) = \frac{x^3}{3n^{2-p}}$ である. $p < 2$ なら $0 < 2 - p$ より $n \rightarrow \infty$ で $f_n(x) \rightarrow 0$ である.

(2) 任意の有界閉区間 I について, $\forall x \in I, |x| \leq M$ とできる $M > 0$ が存在する. $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ が一様コーシー列であることを示す. $n > m$ に対して $|S_n(x) - S_m(x)| = |\sum_{k=m+1}^n f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{M^3}{3k^{2-p}} = \frac{M^3}{3} \sum_{k=m+1}^n k^{p-2}$ である. $p < 1$ より $p - 2 < -1$ であるから, $\sum_{k=m+1}^n k^{p-2} \leq \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k t^{p-2} \, dt = \int_m^n t^{p-2} \, dt = \frac{1}{p-1}(n^{p-1} - m^{p-1}) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$ である. よって一様コーシー列であるから, 一様収束する.

(3) $|x| < \pi/6$ のとき, $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$ である. よって $0 \leq \int_0^x \cos t - \frac{1}{2} \, dt = \sin x - \frac{x}{2}$ である. よって $0 \leq \int_0^x \sin t - \frac{t}{2} \, dt = -\cos x - \frac{x^2}{4} + 1$ である. よって $0 \leq \int_0^x -\cos t - \frac{t^2}{4} + 1 \, dt = -\sin x - \frac{x^3}{12} + x$ である. すなわち $\frac{x^3}{12} \leq x - \sin x \quad (|x| < \pi/6)$ である.

よってある x に対して $\frac{x}{n} < \frac{\pi}{6}$ なる n について $f_n(x) = n^{p+1}(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) \geq \frac{x^3}{12n^{2-p}}$ である. すなわち $p > 2$ なら $n \rightarrow \infty$ で $f_n(x) \rightarrow \infty$ である.

$p < 2$ のとき (1) より $f(x) = 0$ に各点収束する. $x = n\pi/2$ とすると, $f(n\pi/2) = 0, f_n(n\pi/2) = n^{p+1}(\frac{\pi}{2} - 1)$

であるから、 \mathbb{R} 上で一様収束しない。

$p = 2$ のとき、各 x について $f_n(x) = n^3(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) = n^3(\frac{1}{3!}(\frac{x}{n})^3 - \frac{1}{5!}(\frac{x}{n})^5 + \dots) \rightarrow \frac{x^3}{6}$ ($n \rightarrow \infty$) である。
よって $g(x) = \frac{x^3}{6}$ に各点収束する。 $g(n\pi/2) = \frac{(n\pi/2)^3}{6} = n^3 \frac{\pi^3}{48}$, $f_n(n\pi/2) = n^3(\frac{\pi}{2} - 1)$ より一様収束しない。

□ (1)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{iz}}{e^z - e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} + iz e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{(z - i\pi)e^{iz}}{e^z - e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^{iz} + i(z - i\pi)e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = -\frac{1}{2e^\pi}$$

である。よって $\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(f(z), i\pi) = -\frac{1}{2e^\pi}$ である。

(2)

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz \right| \leq \left| \int_0^\pi \frac{e^{i(R+it)}}{e^{R+it} - e^{-(R+it)}} i dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{-t}}{e^{R+it} - e^{-(R+it)}} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{||e^R| - |e^{-R}||} dt = \frac{1 - e^{-\pi}}{e^R - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\left| \int_{\Gamma_R^-} f(z) dz \right| \leq \left| \int_0^\pi \frac{e^{i(-R+it)}}{e^{-R+it} - e^{-(-R+it)}} i dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{-t}}{e^{-R+it} - e^{R-it}} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{||e^{-R}| - |e^R||} dt = \frac{1 - e^{-\pi}}{e^R - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

(3)

図のように積分経路 $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ とそれらをつなげてでき

る閉曲線 C を定める。 C 内で f は正則であるから $\int_C f(z) dz = 0$

である。

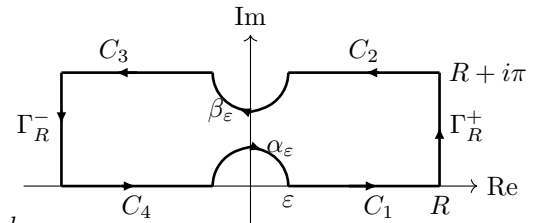


図 1 積分経路の図

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_\varepsilon^R \frac{\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx \\ \int_{C_4} f(z) dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_R^\varepsilon -\frac{e^{i(-x)}}{e^{-x} - e^x} dx = \int_\varepsilon^R \frac{-\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx \\ \int_{C_2} f(z) dz &= \int_R^\varepsilon \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}} dx = e^{-\pi} \int_R^\varepsilon \frac{e^{ix}}{-e^x + e^{-x}} dx = e^{-\pi} \int_\varepsilon^R \frac{\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx \\ \int_{C_3} f(z) dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}} dx = -e^{-\pi} \int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{e^x - e^{-x}} dx = e^{-\pi} \int_\varepsilon^R \frac{-\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx \end{aligned}$$

である。 $z = 0, z = i\pi$ は f の一位の極であるから、

$$\int_{\alpha_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\alpha_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{2z} dz + \int_\pi^0 \frac{1}{2\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -\frac{i\pi}{2}, \quad \int_{\beta_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\beta_\varepsilon} f(z) + \frac{1}{2e^\pi z} dz + \int_0^{-\pi} -\frac{1}{2e^\pi \varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = \frac{i\pi}{2e^\pi}$$

である。よって $0 = \int_C f(z) dz = 2i(1 + e^{-\pi}) \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} dx + \frac{i\pi}{2}(-1 + e^{-\pi}) + \int_{\gamma_R^+} f(z) dz + \int_{\gamma_R^-} f(z) dz$ である。

$R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ とすると、 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} dx = -\frac{\pi(e^{-\pi} - 1)}{4(e^{-\pi} + 1)}$ である。