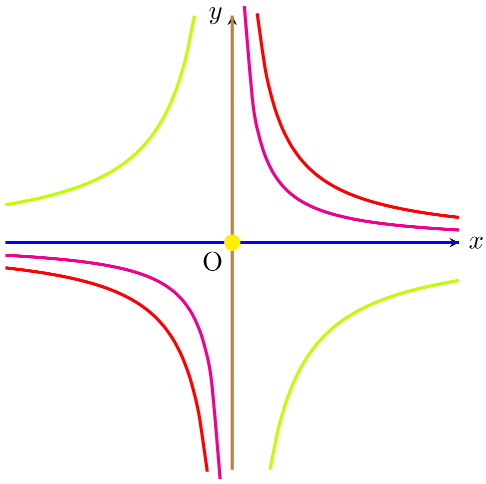
0.1 H18 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\dim V = k \leq n-1$ として V の直交補空間 $V^{\perp}$ をとると，$V \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^n$ より $\dim V^{\perp} = n-k \geq 1$ である．$0 \neq (a_1, \ldots, a_n)^{\top} \in V^{\perp}$ をとると，$F(x_1, \ldots, x_n)$ は $(a_1, \ldots, a_n)^{\top}$ と $(x_1, \ldots, x_n)$ の内積だから V 上で F は 0.

(2)V と b で生成されるベクトル空間を V' とおけば $\dim V' \leq n-1$ であり，$V_b \subset V'$ である．(1) より V' 上で 0 となる F が存在し，F は V_b 上 0 である．

$\boxed{2}$



(1) 点 (x, y) の属す同値類を $[(x, y)]$ と表す．$x = y = 0$ なら (x, y) の同値類は $\{(0, 0)\}$ である．$x = 0, y \neq 0$ のとき $(0, y) \sim (0, ty) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$y = 0, x \neq 0$ のとき $(x, 0) \sim (tx, 0) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$x \neq 0 \neq y$ のとき $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow xy = x'y'$ である．したがって同値類は右のようになる．(異なる色は異なる同値類)

$x \neq 0 \neq y$ なる (x, y) が含まれる同値類は $g(x, y) = xy$ の逆像 $g^{-1}(xy)$ であるから閉集合．また $\{(0, 0)\}$ も閉集合である．$[(0, y \neq 0)]$ は $(0, 0)$ が集積点であるが同値類に含まれないから閉集合ではない．同様に $[(0 \neq x, 0)]$ も閉集合ではない．

(2)$(0, 0)$ を含む R^2 の開集合 $\pi^{-1}(U)$ に対してある $\varepsilon_U > 0$ が存在して $B((0, 0), \varepsilon_U) \subset \pi^{-1}(U)$ となる．したがって $(x, 0) \in \pi^{-1}(U) \quad (x \neq 0)$ である．すなわち $[(0 \neq x, 0)] \in U$ である．したがって $[(0 \neq x, 0)]$ と $[(0, 0)]$ を分離する開集合は存在しないからハウスドルフでない．

(3)$i \leq j$ のとき同値類 $[(1, 1)]$ 上で $x^i y^j = y^{j-i}$ となるから定数となるには $i = j$ が必要．逆に $f(x, y) = \sum a_i (xy)^i$ とするとこれは全ての同値類の上で定数である．

(4)$D = [(x, y)] \quad (x \neq 0 \neq y)$ のとき，$D \neq D' = [(x', y')]$ に対して $xy \neq x'y'$ である．したがって $h(x, y) = xy \in E$ に対して $h(D) \neq h(D')$ となる．したがって $(*)$ を満たす D, D' は共に $[(0, 0)], [(0, 1)], [(1, 0)]$ の何れか．$f(x, y) = \sum a_i (xy)^i$ について $f([(0, 0)]) = a_0, f([(0, 1)]) = a_0, f([(1, 0)]) = a_0$ であるから求める対は $([(0, 0)], [(0, 1)]), ([(0, 0)], [(1, 0)]), ([(0, 1)], [(1, 0)])$ 及びこれらの順序を入れ替えたものである．

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから $Ax + b = \begin{pmatrix} -x + y + b \\ x - y + c \end{pmatrix}$ である．よって $\langle Ax + b, x \rangle = -(x-y)^2 + bx + cy$ である．

$x + y = s, x - y = t$ と変数変換すると $\langle Ax + b, x \rangle = -t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}$ で，ヤコビアンは $-1/2$ である．よって

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \exp\left(-t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}\right) \frac{1}{2} ds dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t - \frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b-c}{4})^2\right) dt \int_{0}^{\infty} \exp\left(\frac{b+c}{2} s\right) ds \end{aligned}$$

である．$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t - \frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b-c}{4})^2\right) dt$ は有限である．また $b + c < 0$ なら $\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{b+c}{2} s\right) ds$ も有限であり，$b + c \geq 0$ なら発散する．

$\boxed{4}$ $f(z)$ の 0 におけるローラン級数は 0 が極であることから正の整数 k を用いて $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ とかける．$z^k f(z)$ は $|z| < 2$ で正則であり $\lim_{z \to 0} z^k f(z) = a_{-k} \neq 0$ である．したがってある $\delta > 0$ が存在して $|z| < \delta$ で

$|z^k f(z)| > |a_{-k}|/2$ である．したがって

$$\iint_{\varepsilon<|z|<\delta} \frac{|a_{-k}|}{2|z|^k} dxdy \leq \iint_{\varepsilon<|z|<\delta} |f(z)| dxdy < \infty$$

である．$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換すると $\int_\varepsilon^\delta \int_0^{2\pi} \frac{|a_{-k}|}{2r^k} r dr d\theta = |a_{-k}|\pi \int_\varepsilon^\delta |r^{1-k}| dr < \infty$ である．$1-k \leq -1$ なら発散するから $k<2$ である．よって $k=1$ より一位の極.