

目次

0.1	H15 数学 A	1
0.2	H16 数学 A	2
0.3	H17 数学 A	3
0.4	H18 数学 A	4
0.5	H19 数学 A	5
0.6	H20 数学 A	6
0.7	H21 数学 A	6
0.8	H22 数学 A	8
0.9	H23 数学 A	9
0.10	H24 数学 A	10
0.11	H25 数学 A	12
0.12	H26 数学 A	13
0.13	H27 数学 A	15
0.14	H28 数学 A	17
0.15	H29 数学 A	19
0.16	H30 数学 A	20
0.17	H31 数学 A	22
0.18	R2 数学 A	24
0.19	R4 数学 A	25
0.20	R5 数学 A	27

0.1 H15 数学 A

[1] (1) $\{f(x) \mid x \in X\}$ が下に有界でないとする. すなわち任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) \leq -n$ なる $x \in X$ が存在する. これを x_n とおく. X は \mathbb{R}^n のコンパクト集合であるから有界閉集合である. よって X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ をもち, $x_{n_k} \rightarrow \alpha \in X$ となる. $f(\alpha) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = -\infty$ となりこれは矛盾. よって下に有界.

(2) 下に有界であるから $\inf\{f(x) \mid x \in X\} = M \in \mathbb{R}$ である. M が下限であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x_n) \leq M + \frac{1}{n}$ なる x_n が存在する. 数列 $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をもち, $x_{n_k} \rightarrow \alpha \in X$ となる. $M \leq f(\alpha) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (M + \frac{1}{n_k}) = M$ となり $f(\alpha) = M$. よって f は最小値をもつ.

[2] (1) $g(0) = 1$ であり g は連続関数であるから 0 を含むある开区間 I で $g(x) > 0$ となる. I 上で $h(x) = \sqrt[m]{g(x)}$ とする. I 上で h は C^1 級であり $h(x)^m = g(x)$, $h(x) > 0$ である.

(2) $f(\varphi(y)) = \varphi(y)^m g(\varphi(y)) = \varphi(y)^m h(\varphi(y))^m = y^m$ をみたとす $\varphi(y)$ を求める. $\varphi(y)h(\varphi(y)) = y$ をみたとす $\varphi(y)$ を求めればよい. $F(x, y) = xh(x) - y$ とおく. $\partial F / \partial x(0, 0) = h(0) + 0\varphi'(0) > 0$ である. 陰関数定理から $F(x, y) = 0$ をみたとす C^1 級関数 $x = \varphi(y)$ が 0 の近傍で存在する.

[3] (1) $T_A(cX + Y) = {}^t(cX + Y)A + A(cX + Y) = c{}^tXA + cAX + {}^tYA + AY = cT_A(X) + T_A(Y)$ である. よって線形.

(2) ${}^t({}^tXA + AX) = AX + {}^tXA$ より $\text{Im}T_A \subset S$ である. $Y \in S$ に対して $X = A^{-1}Y/2$ とすると,

${}^tXA + AX = {}^t(AX) + AX = {}^t(Y/2) + (Y/2) = Y$ となる. よって $S \subset \text{Im}T_A$ である.

(3) ${}^t(AX) + AX = O$ より AX が交代行列となる X を考える. よって $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. AX_1, AX_2, AX_3 は交代行列である. よって X_1, X_2, X_3 は $\ker T_A$ の基底となる.

[4] (1) $AB = BA$ のとき. $v \in V_j$ に対して $ABv = BAv = B\alpha_j v = \alpha_j Bv$ より, $Bv \in V_j$ である.

$BV_j \subset V_j$ ($j = 1, \dots, k$) のとき. A がエルミート行列であるから, \mathbb{C}^n を固有空間の直和に分解できる. したがって $\{v_1, \dots, v_n\}$ をそれぞれが A の固有ベクトルであるような基底とできる. $v_i \in V_{s_i}$ とする. $u \in \mathbb{C}^n$ に対して $u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ とできる. $ABu = A(a_1 Bv_1 + \dots + a_n Bv_n) = a_1 \alpha_{s_1} Bv_1 + \dots + a_n \alpha_{s_n} Bv_n$ である. また $BAu = B(a_1 \alpha_{s_1} v_1 + \dots + a_n \alpha_{s_n} v_n) = a_1 \alpha_{s_1} Bv_1 + \dots + a_n \alpha_{s_n} Bv_n$ である. よって $ABu = BAu$ である. すなわち $AB = BA$

(2) $v \in V_j$ に対して $A^m v_j = \alpha_j^m v_j$ である. A^m の固有値 α_j^m の固有空間を W_j とすると, $W_j \supset V_j$ である. A はエルミート行列であるから固有値は実数である. したがって異なる固有値 α_i, α_j にたいして $\alpha_i^m = \alpha_j^m$ となるには m が偶数であることが必要. 今 m は奇数であるから $\alpha_i^m \neq \alpha_j^m$ である. したがって $i \neq j$ なら $W_i \neq W_j$ である. よって $W_j = V_j$ である. A^m はエルミート行列であり $A^m C = C A^m$ であるから (1) より $CW_j \subset W_j$ である. よって $CV_j \subset V_j$ であるから $AC = CA$ である.

0.2 H16 数学 A

[1] λ, μ の固有空間をそれぞれ V_λ, V_μ とする. 対角化可能であるから $V = V_\lambda \oplus V_\mu$ である. $W_\lambda = W \cap V_\lambda, W_\mu = W \cap V_\mu$ とする. $W_\lambda \cap W_\mu = W \cap V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$ である. また $w \in W$ に対して $w = w_\lambda + w_\mu$ となる $w_\lambda \in V_\lambda, w_\mu \in V_\mu$ が一意的に存在する. $W \ni f(w) - \mu w = (\lambda - \mu)w_\lambda$ より $w_\lambda \in W_\lambda$ である. 同様に $w_\mu \in W_\mu$ である. よって $W = W_\lambda \oplus W_\mu$ である. W を f の固有空間の直和に分解できたから $f|_W$ は対角化可能である.

[2] (1) X のコンパクト集合 C をとる. $x \in X \setminus C$ を一つ固定する. 各 $y \in C$ に対して $x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となる開集合 U_y, V_y が存在する. $\{V_y \mid y \in C\}$ は C の開被覆であるから有限部分集合 $C' \subset C$ が存在して $C \subset \bigcup_{y \in C'} V_y$ となる. $U = \bigcap_{y \in C'} U_y$ とする. U は x の開近傍であり $U \subset X \setminus C$ であるから x は C の外点. 任意の x でなりたつから C は閉集合である.

(2) $A \cap B$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる. $S \cup \{X \setminus A\}$ は B の開被覆である. したがって有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \cup (X \setminus A)$ となる. $A \cap B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ である. したがって $A \cap B$ はコンパクト集合である.

[3] (1) $G(x) = \int_0^x f(x, y) dy$ とする.

$$\begin{aligned} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \int_0^{x+h} \frac{f(x+h, y)}{h} dy - \int_0^x \frac{f(x, y)}{h} dy = \int_x^{x+h} \frac{f(x, y)}{h} dy + \int_0^{x+h} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy \\ &= \int_0^h \frac{f(x, y+x)}{h} dy + \int_0^x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy + \int_x^{x+h} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy \end{aligned}$$

である. 第一項は $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \frac{f(x, y+x)}{h} dy = \frac{\partial}{\partial h} \int_0^h f(x, y+x) dy = f(x, x)$ である.

第二項は $\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y)$ となる $\theta \in (0, 1)$ が存在して $\int_0^x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy \leq \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y) dy \leq \infty$ であるから優収束定理より $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$ である.

第三項はある 0 の近傍で $\left| \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \right| \leq M$ であるから $\lim_{h \rightarrow 0} \int_x^{x+h} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} dy \leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_x^{x+h} M dy = 0$ である。よって $G'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$ である。

したがって $F'(x) = f(x, x) - f(x, -x) + \int_{-x}^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$ である。さらに $F''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) dy = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) - 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) dy$ である。

[4] 広義積分が収束することを示す。被積分関数の実部は $u(x) = \frac{x \cos x - \varepsilon \sin x}{x^2 + \varepsilon^2}$ で虚部は $v(x) = \frac{x \sin x + \varepsilon \cos x}{x^2 + \varepsilon^2}$ である。共に原点近傍で有界である。

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{-M} \frac{x \cos x}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| &= \left| \int_1^M \frac{x \cos x}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| = \left| \left[\frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2} \right]_1^M - \int_1^M \sin x \left(\frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} \right) dx \right| \\ &\leq \left| \frac{M \sin M}{M^2 + \varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1 + \varepsilon^2} \right| + \int_1^M \left| \frac{(-x^2 + \varepsilon^2) \sin x}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} \right| dx \leq \left| \frac{M \sin M}{M^2 + \varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1 + \varepsilon^2} \right| + \int_1^M \left| \frac{(x^2 + \varepsilon^2) \sin x}{x^4} \right| dx \end{aligned}$$

よって $\int_1^\infty \frac{x \cos x}{x^2 + \varepsilon^2} dx, \int_{-\infty}^{-1} \frac{x \cos x}{x^2 + \varepsilon^2} dx$ は収束する。から $u(x)$ の広義積分は収束する。同様に $v(x)$ の広義積分も収束する。したがって $u(x) + iv(x)$ の広義積分は収束する。

$f(z) = e^{iz}/(z - i\varepsilon)$ とすれば、 f は $z \neq i\varepsilon$ で正則である。積分経路 C を原点中心の半径 $R > 2\varepsilon$ の上半平面の半円板の周とする。 C_1 を実軸上の $-R$ から R までの部分、 C_2 を半円とする。 f の C での積分は留数定理から $\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\varepsilon) = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ である。 C_2 での積分は $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると、

$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{iRe^{i\theta}} Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - i\varepsilon} \right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{Re^{-R \sin \theta}}{R - \varepsilon} d\theta \leq \frac{\pi R}{R - \varepsilon} e^{-R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

である。したがって $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ より $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = e^{-\varepsilon}$ である。

0.3 H17 数学 A

[1] (1) AB が正則であるから $f \circ g$ は同型である。よって f は全射、 g は単射である。 $\dim C^n - \dim \operatorname{Ker} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim C^m$ より $\dim \operatorname{Ker} f = n - m$ である。 g は単射であるから $\dim \operatorname{Ker} g = 0$

(2) $ABv = \lambda v, v \neq 0$ とする。このとき $BABv = B\lambda v = \lambda Bv, Bv \neq 0$ であるから AB の固有値 λ は BA の固有値でもある。

$BAv = \lambda v, v \neq 0$ とする。 $ABAv = \lambda Av$ であるから、 $Av \neq 0$ なら λ は AB の固有値である。 $Av = 0$ なら $BAv = 0 = \lambda v$ より $\lambda = 0$ 。すなわち BA の零でない固有値は AB の固有値でもあるから BA の固有値は $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ である。

(3) C^m における AB の固有値 λ_i の固有空間を $W(\lambda_i)$ とする。対角化可能であるから $\sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = m$ である。 C^n における BA の固有値 λ_i の固有空間を $V(\lambda_i)$ とする。 $g(W(\lambda_i)) \subset V(\lambda_i)$ であり g は単射であるから $\dim W(\lambda_i) \leq \dim V(\lambda_i)$ である。また $V(\lambda_0) = \operatorname{Ker}(g \circ f)$ より $\dim V(\lambda_0) \geq n - m$ である。よって $\sum_{i=0}^k \dim V(\lambda_i) \geq n - m + \sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = n$ である。よって BA は対角化可能である。

[2] (1) f を商写像とする。 $f^{-1}(B)$ を閉集合とする。 $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus B)$ は開集合であるから $X \setminus B$ は開集合である。よって B は閉集合。

$f^{-1}(B)$ を開集合とする。 $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus B)$ は閉集合であるから $X \setminus B$ は閉集合である。よって B は開集合。

(2) $B \subset Y$ について $f^{-1}(B)$ が閉集合だとする。コンパクト空間の閉集合はコンパクトであるから $f^{-1}(B)$ はコンパクトである。 f は全射連続写像であるから $f(f^{-1}(B)) = B$ はコンパクトである。ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから B は閉集合である。よって f は商写像。

[3] (1) 任意の $x > 0$ について $x/N < 1$ なる N が存在する。 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ ($|x| < 1$) であ

るから $n \geq N$ のとき $\log(1+x/n) = (x/n) - \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3)$ である. したがって $\sum_{n=N}^{\infty} x/n - \log(1+x/n) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3) < \infty$ である. よって収束する.

(2) $I = (1/2, 2)$ とする. $x \in I$ に対して $(x/n - \log(1+x/n))' = 1/n - \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n(2n+1)}$ である. よって $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \log(1+1/n)$ は一様収束する. したがって $(\sum_{n=1}^{\infty} x/n - \log(1+x/n))'|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \frac{1}{n+1} = 1$ である.

[4] (1) $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ であるから $\frac{2z}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1}$ である.

(2) 整級数であるから項別積分ができて $|z| < 1$ で $f(z) = \log(1+z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+2}/(2n+2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k}/k$ である. よって $f(z)/z^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k-n}/k$ でありこのローラン級数の z^{-1} の係数は n が偶数か 1 のとき 0, それ以外のとき $(-1)^{\ell-1}/\ell$ ($n = 2\ell + 1$) である. 留数定理から $\int_C \frac{f(z)}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i (-1)^{\ell-1}/\ell & (n = 2\ell + 1) \\ 0 & (n \neq 2\ell + 1) \end{cases}$ である.

0.4 H18 数学 A

[1] (1) $\dim V = k \leq n-1$ として V の直交補空間 V^\perp をとると, $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$ より $\dim V^\perp = n-k \geq 1$ である. $0 \neq (a_1, \dots, a_n)^\top \in V^\perp$ をとると, $F(x_1, \dots, x_n)$ は $(a_1, \dots, a_n)^\top$ と (x_1, \dots, x_n) の内積だから V 上で F は 0.

(2) V と b で生成されるベクトル空間を V' とおけば $\dim V' \leq n-1$ であり, $V_b \subset V'$ である. (1) より V' 上で 0 となる F が存在し, F は V_b 上 0 である.

[2]

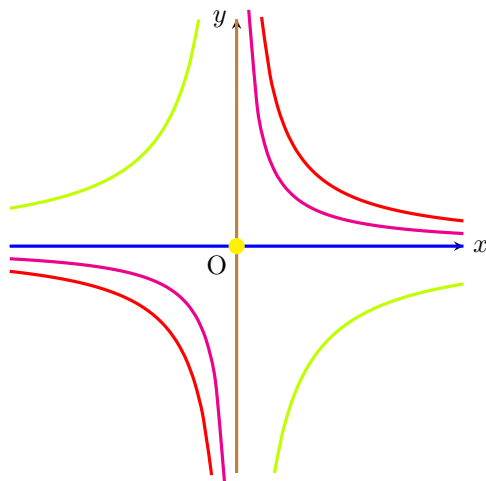
(1) 点 (x, y) の属す同値類を $[(x, y)]$ と表す. $x = y = 0$ なら (x, y) の同値類は $\{(0, 0)\}$ である. $x = 0, y \neq 0$ のとき $(0, y) \sim (0, ty)$ ($t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) である. $y = 0, x \neq 0$ のとき $(x, 0) \sim (tx, 0)$ ($t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) である. $x \neq 0 \neq y$ のとき $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow xy = x'y'$ である. したがって同値類は右のようになる. (異なる色は異なる同値類)

$x \neq 0 \neq y$ なる (x, y) が含まれる同値類は $g(x, y) = xy$ の逆像 $g^{-1}(xy)$ であるから閉集合. また $\{(0, 0)\}$ も閉集合である. $[(0, y \neq 0)]$ は $(0, 0)$ が集積点であるが同値類に含まれないから閉集合ではない. 同様に $[(0 \neq x, 0)]$ も閉集合ではない.

(2) $(0, 0)$ を含む \mathbb{R}^2 の開集合 $\pi^{-1}(U)$ に対してある $\varepsilon_U > 0$ が存在して $B((0, 0), \varepsilon_U) \subset \pi^{-1}(U)$ となる. したがって $(x, 0) \in \pi^{-1}(U)$ ($x \neq 0$) である. すなわち $[(0 \neq x, 0)] \in U$ である. したがって $[(0 \neq x, 0)]$ と $[(0, 0)]$ を分離する開集合は存在しないからハウスドルフでない.

(3) $i \leq j$ のとき同値類 $[(1, 1)]$ 上で $x^i y^j = y^{j-i}$ となるから定数となるには $i = j$ が必要. 逆に $f(x, y) = \sum a_i (xy)^i$ とするとこれは全ての同値類の上で定数である.

(4) $D = [(x, y)]$ ($x \neq 0 \neq y$) のとき, $D \neq D' = [(x', y')]$ に対して $xy \neq x'y'$ である. したがって $h(x, y) = xy \in E$ に対して $h(D) \neq h(D')$ となる. したがって (*) を満たす D, D' は共に $[(0, 0)], [(0, 1)], [(1, 0)]$ の何れか. $f(x, y) = \sum a_i (xy)^i$ について $f([(0, 0)]) = a_0, f([(0, 1)]) = a_0, f([(1, 0)]) = a_0$ であるから求める対は $([(0, 0)], [(0, 1)]), [(0, 0)], [(1, 0)], [(0, 1)], [(1, 0)]$ 及びこれらの順序を入れ替えたものである.



$$\boxed{3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ であるから } Ax + b = \begin{pmatrix} -x + y + b \\ x - y + c \end{pmatrix} \text{ である. よって } \langle Ax + b, x \rangle = -(x - y)^2 + bx + cy$$

である.

$x + y = s, x - y = t$ と変数変換すると $\langle Ax + b, x \rangle = -t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}$ で, ヤコビアンは $-1/2$ である. よって

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}\right) \frac{1}{2} ds dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t - \frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b+c}{4})^2\right) dt \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{b+c}{2}s\right) ds \end{aligned}$$

である. $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(t - \frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b+c}{4})^2) dt$ は有限である. また $b+c < 0$ なら $\int_0^{\infty} \exp(\frac{b+c}{2}s) ds$ も有限であり, $b+c \geq 0$ なら発散する.

$\boxed{4}$ $f(z)$ の 0 におけるローラン級数は 0 が極であることから正の整数 k を用いて $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ とかける. $z^k f(z)$ は $|z| < 2$ で正則であり $\lim_{z \rightarrow 0} z^k f(z) = a_{-k} \neq 0$ である. したがってある $\delta > 0$ が存在して $|z| < \delta$ で $|z^k f(z)| > |a_{-k}|/2$ である. したがって

$$\iint_{\varepsilon < |z| < \delta} \frac{|a_{-k}|}{2|z|^k} dx dy \leq \iint_{\varepsilon < |z| < \delta} |f(z)| dx dy < \infty$$

である. $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ と極座標変換すると $\int_{\varepsilon}^{\delta} \int_0^{2\pi} \frac{|a_{-k}|}{2r^k} r dr d\theta = |a_{-k}| \pi \int_{\varepsilon}^{\delta} |r^{1-k}| dr < \infty$ である. $1-k \leq -1$ なら発散するから $k < 2$ である. よって $k = 1$ より一位の極.

0.5 H19 数学 A

$$\boxed{1} \quad (1) |f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \int_x^y |f'(t)| dt$$

(2)(i) $c > 1$ より $|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y A t^{-c} dt = \frac{A}{-c+1} (y^{-c+1} - x^{-c+1}) < \frac{A}{c-1} x^{1-c} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$ である. $x_n = f(n)$ とすれば $|x_n - x_m| \leq \frac{A}{1-c} m^{1-c} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$ である. したがって数列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ はコーシー列であるから, 収束列でその収束先を α とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $M > 0$ が存在して $x > M$ なら $|f(x) - f([x] + 1)| < \varepsilon$ である. ここで $[x]$ は x 以下の最大の整数. またある整数 N が存在して $n > N$ なら $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ である. したがって $x > N + M$ なら $|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f([x] + 1)| + |f([x] + 1) - \alpha| < 2\varepsilon$ となるから収束する.

$$(ii) |f(x) - \alpha| = \lim_{y \rightarrow \infty} |f(y) - f(x)| \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{A}{c-1} y^{1-c} = \frac{A}{c-1} x^{1-c}$$

$\boxed{2}$ $v \in \ker AC_1$ に対して $Cv \in \ker A$ であり C_1 が正則であるから $C_1: \ker AC_1 \rightarrow \ker A$ は同型写像. よって $\dim \ker AC_1 = \dim \ker A$ である. $v \in \ker AC_1$ に対して $B_1 v \in \ker B_1 AC$ である. B_1 が正則であるから $B_1: \ker AC_1 \rightarrow \ker B_1 AC$ は同型写像. よって $\dim \ker AC_1 = \dim \ker B_1 AC_1$ である. 以上より $\dim \ker A = \dim \ker B_1 AC_1 = m - r$ である. 同様に $\dim \ker A = \dim \ker B_2 AC_2 = m - s$ であるから $r = s$.

$\boxed{3}$ $f(x, y_0) \neq 0$ より $f(x, y_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であるから, $(x, y_0) \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ である. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は開集合であるから, $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ は開集合である. したがってある $X \times Y$ の開集合 $V_x \times U_x$ が存在して $(x, y_0) \in V_x \times U_x \subset f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ である. $\bigcup_{x \in X} V_x$ は X の開被覆であるから, 有限部分被覆 $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ が存在する. $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ とすれば $X \times U \subset f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ である.

$\boxed{4}$ $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}$ とすれば $f(z)$ は $z \neq 0$ で正則であり, $z = 0$ で極である. $z = 0$ での f のローラン級数は

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-z)^n \right) / z^4 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - (-1)^n \frac{1}{n!} \right) z^{n-4} \end{aligned}$$

である。 z^{-1} の係数は $1/3$ である。

$r < 1$ なら内部に特異点を持たないから $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0$ である。 $r > 1$ なら $z = 0$ が特異点となるから留数定理より $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i/3$ である。

0.6 H20 数学 A

1 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{3} \right) &= f_x \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) + f_y \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\end{aligned}$$

(2) F は $[0, 4\pi]$ 上で連続である。 よって $\theta \in [0, 4\pi]$ に対して $|F(\theta)| < M$ となる $M > 0$ が存在する。 $\tau \in \mathbb{R}$ に対して $t = 2n\pi + \theta$ をみたとす、 $n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, 2\pi)$ が存在する。 $F(\tau) = F(\theta)$ であるから $|F(\tau)| < M$ である。 したがって有界。 また F は $[0, 4\pi]$ 上で連続であるから一様連続である。 すなわち $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して任意の $\theta, \tau \in [0, 4\pi]$ に対して $|\theta - \tau| < \delta$ なら $|F(\theta) - F(\tau)| < \varepsilon$ である。

よって $s \geq t \in \mathbb{R}$ に対して、 $s = 2n\pi + p$ をみたとす $p \in [0, 2\pi)$ が存在する。 $|s - t| < \delta$ なら $|F(s) - F(t)| = |F(p) - F(p + s - t)| < \varepsilon$ であるから一様連続である。

2 (1) $\varphi_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m; x \mapsto Ax$ で定める。 A の階数が m であるから $\dim \varphi_A = m = \dim \mathbb{C}^m$ 。 したがって φ_A は全射である。 よって任意の $c \in \mathbb{C}^m$ に対して $\varphi_A(x) = Ax = c$ となる $x \in \mathbb{C}^n$ が存在する。

(2) φ_B が単射なら $\text{rank } \varphi_B = m$ である。 よって $\text{rank } B^T = m$ であるから φ_{B^T} は全射である。

(3) $B^T Q^T = P^T$ なる Q^T の存在を示す。 P^T の列ベクトル p_i ごとに $q_i \in \mathbb{C}^n$ が存在して $B^T q_i = p_i$ である。 よって $Q^T = (q_1, \dots, q_m)$ とすれば $B^T Q^T = P^T$ である。

3 (1) $(x, 0), (x, 1) \in Y$ について $(x, 1)$ が属す Y の開集合 U をとる。 U は開基の和集合でかけるから、 ある $W \subset U, W \in \mathcal{B}$ が存在して $(x, 1) \in W$ 。 すなわちある $V \in \mathcal{O}$ が存在して $W = V \times \{0, 1\}$ である。 よって $(x, 0) \in W \subset U$ であるから、 ハウスドルフでない。

(2) $X \times \{0\}$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる。 任意の $x \in X$ についてある λ_x が存在して $x \in U_{\lambda_x}$ である。 各 U_{λ_x} についてある開集合 $V_{\lambda_x} \in \mathcal{O}$ が存在して $x \in V_{\lambda_x} \times \{0\} \subset U_{\lambda_x}$ である。 したがって $X \subset \bigcup_{x \in X} V_{\lambda_x}$ である。 X はコンパクトであるから有限部分被覆 $\{V_{\lambda_{x_1}}, \dots, V_{\lambda_{x_n}}\}$ が存在する。 $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_{x_i}}$ であるから $X \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_{x_i}}$ である。 したがって $X \times \{0\}$ はコンパクトである。 (1) で示したように $(x, 1) \in Y \setminus (X \times \{0\})$ を含む開集合 U は $U \cap (X \times \{0\}) \neq \emptyset$ である。 したがって $X \times \{1\}$ は開集合でない。

4 (1) $\frac{1}{1-z^3} = 1 + z^3 + z^6 + \dots$ ($|z| < 1$) であるから、 $\varphi(z) = \frac{z^p}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+p}$ である。 収束半径は 1 である。

(2) φ の特異点は $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ で、 それ以外の点で正則である。 したがって $R < 1$ なら $\int_C \varphi(z)dz = 0$ である。

特異点での留数を計算する。 $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\varphi(z) = \frac{1}{3}$, $\lim_{z \rightarrow e^{2\pi i/3}} (z - e^{2\pi i/3})\varphi(z) = \frac{e^{2(p+1)\pi i/3}}{3}$, $\lim_{z \rightarrow e^{4\pi i/3}} (z - e^{4\pi i/3})\varphi(z) = \frac{e^{4(p+1)\pi i/3}}{3}$ である。 よって留数定理から $\int_C \varphi(z)dz = \frac{2\pi i}{3}(1 + e^{2(p+1)\pi i/3} + e^{4(p+1)\pi i/3})$ である。

0.7 H21 数学 A

1 (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right) = f'(0)$$

であるから $-f'(0)/2 > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $nf(\frac{1}{n}) < f'(0) + (-f'(0)/2) = f'(0)/2$ である。

(2) $\pi > x > 0$ で $\frac{1}{1+x} < 1$ より $\log(1+x) = \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt < \int_0^1 1 dt = t$ である。したがって $\log(1+x) < x$ である。またテイラーの定理から $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R(x)$ である。 $R(x) = \frac{(\cos^{(5)} s)}{5!} x^5$ ($0 < s < x < \pi$) である。 $(\cos^{(5)} s) = -\sin s < 0$ であるから $R(x) < 0$ である。したがって $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ である。

以上より

$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \log\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2}\right) \leq -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} < -\frac{1}{n}$$

であるから発散する。

[2] (1) 略

(2) $\sigma(u) = u - 2\frac{(u,u)}{(u,u)}u = -u$ より -1 は固有値である。 $\sigma(x) = -x$ とすると、 $x - 2\frac{(x,u)}{(u,u)}u = -x$ であるから $x = \frac{(x,u)}{(u,u)}u$ である。すなわち $x \in \text{span}(u)$ である。よって $W(-1) = \text{span}(u)$ である。

(3) $\sigma \circ f(u) = f \circ \sigma(u) = f(-u) = -f(u)$ であるから $f(u) \in W(-1) = \text{span}(u)$ である。したがって u は f の固有ベクトルである。

(4) $\sigma(e_1) = e_1 - 2\frac{(e_1,u)}{(u,u)}u = e_1 - \frac{2}{3}u = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_3 - \frac{2}{3}e_4$, $\sigma(e_2) = e_2$, $\sigma(e_3) = e_3 + \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_4$, $\sigma(e_4) = e_4 - \frac{2}{3}u = -\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{1}{3}e_4$ である。よって表現行列は
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
 である。

[3] (1) ハウスドルフ空間 (X, \mathcal{O}) のコンパクト部分集合 C をとる。 $y \in X \setminus C$ と $x \in C$ について $x \in U_x, y \in V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$ となる開集合 $U_x, V_x \in \mathcal{O}$ が存在する。 $\bigcup_{x \in C} U_x \supset C$ より有限部分集合 $X' \subset X$ が存在して $\bigcup_{x \in X'} U_x \supset C$ である。 $V = \bigcap_{x \in X'} V_x$ とすれば V は y の開近傍で $V \cap C = \emptyset$ である。したがって $X \setminus C$ は開集合である。

(2) $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x - y$ とすると f は連続である。よって $f^{-1}(0) = F$ は閉集合である。
 $g: F \rightarrow \mathbb{R}; (x, x) \mapsto x$ とすると g は連続である。 $\sup g(x) = 1$ より g は最大値をもたない。したがって F はコンパクトでない。

[4] (1) $zx + iy$ とする。 $e^z = -e^{-z}$ より $e^x = |e^z| = |-e^{-z}| = e^{-x}$ であるから $x = -x$ である。したがって $x = 0$ である。 $e^{iy} = -e^{-iy}$ より $\cos y = -\cos y$ である。よって $y = \frac{i\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) である。

(2) $|e^{-iz}| = |e^{s-i\pm R}| = e^s \leq e^\pi$ である。 $z = R + is$ のとき $|e^z + e^{-z}| \geq |e^z| - |e^{-z}| = e^R - e^{-R}$ であり、
 $z = -R + is$ のとき $|e^z + e^{-z}| \geq |e^{-z}| - |e^z| = e^R - e^{-R}$ である。よって $\sup_{z \in \Gamma_R} |e^{-iz}/(e^z + e^{-z})| \leq \frac{e^\pi}{e^R - e^{-R}}$ である。

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} \right| dx \leq \int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{-x}} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx < \infty$$

よって被積分関数は \mathbb{R} 上ルベグ可積分であり、連続であるから広義積分は収束する。 $f(z) = e^{-iz}/(e^z + e^{-z})$ とする。(1) で求めた点以外で f は正則である。したがって積分経路 C を 4 点 $-R, R, R + i\pi, -R + i\pi$ を結んでできる長方形を反時計回りに進むと、留数定理から $\int_C f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i\pi/2))$ である。

$\lim_{z \rightarrow i\pi/2} \frac{z - i\pi/2}{e^z + e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow i\pi/2} \frac{1}{e^z - e^{-z}} = \frac{1}{2i}$ であるから $\int_C f(z) dz = \pi e^{\pi/2}$ である。

また

$$\begin{aligned}\int_{R+i\pi}^{-R+i\pi} f(z)dz &= \int_R^{-R} \frac{e^{-i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}} dx = \int_{-R}^R \frac{e^{\pi} e^{-ix}}{e^x + e^{-x}} dx \\ \left| \int_R^{R+i\pi} f(z)dz \right| &\leq \int_R^{R+i\pi} \left| \frac{e^{-iz}}{e^z + e^{-z}} \right| dz \leq \pi e^{\pi} / (e^R - e^{-R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \\ \left| \int_{-R+i\pi}^{-R} f(z)dz \right| &\leq \int_{-R+i\pi}^{-R} \left| \frac{e^{-iz}}{e^z + e^{-z}} \right| dz \leq \pi e^{\pi} / (e^R - e^{-R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

である. よって $\pi e^{\pi/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x / (e^x + e^{-x}) dx + e^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} / (e^x + e^{-x}) dx$ である. よって $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x / (e^x + e^{-x}) dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$ である.

0.8 H22 数学 A

(1) f は一様連続であるから任意の ε に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ なら $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ である. また $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束するから $\delta(\varepsilon)$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $|g_n(x) - g(x)| < \delta(\varepsilon)$ である.

以上より, $n > N$ なら $|f(g_n(x)) - f(g(x))| < \varepsilon$ である. したがって $f \circ g_n$ は $f \circ g$ に一様収束する.

(2) $h_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{k^2}$ とする. $|h_n(x) - h(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ である. したがって一様収束.

また $\sin x$ は一様連続である. これは平均値の定理から $\sin x - \sin y = (x - y) \cos \xi \leq |(x - y)| \quad (\xi \in (x, y))$ より明らか. (1) より $\alpha_n(x) = \sin(h_n(x))$ は $\sin(h(x))$ に一様収束する.

[2] (1) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ を任意にとる. $X = X^T$ であるから $b = c$ である. したがって $X = aE_1 + bE_2 + cE_3$ と表せる. また $c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 = O$ とすれば $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ は一次独立. したがって V は $\{E_1, E_2, E_3\}$ を基底とする.

(2) $(A^T X A)^T = A^T X (A^T)^T = A^T X A$ であるから $f_A(X) \in V$ である. $f_A(cX + Y) = A^T(cX + Y)A = cA^T X A + A^T Y A = cf_A(X) + f_A(Y)$ であるから線形写像である.

(3) $f_A(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} = E_1 + aE_2 + a^2E_3$, $f_A(E_2) = \begin{pmatrix} 2a & a^2 + 1 \\ a^2 + 1 & 2a \end{pmatrix} = 2aE_1 + (a^2 + 1)E_2 + 2aE_3$, $f_A(E_3) = \begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = a^2E_1 + aE_2 + E_3$ である. よって f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ a & a^2 + 1 & a \\ a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ である.

(4) f_A の表現行列を $G(a)$ とする. $\det G(a) = \begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & -a^2 + 1 & a - a^3 \\ 0 & -a^3 + a & 1 - a^2 \end{vmatrix} = -(1 - a^2)^2 - (a - a^3)^2 = -(a^2 + 1)(1 - a^2)^2$ である.

したがって $a \neq \pm 1$ のとき $\det G(a) \neq 0$ であるから $\text{Im } f_A$ の基底は $\{f_A(E_1), f_A(E_2), f_A(E_3)\}$ である.

$a = 1$ のとき $G(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である. よって $\text{Im } f_A$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ である.

$a = -1$ のとき $G(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ である. よって $\text{Im } f_A$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ である.

[3] (1) $S = \{(-\infty, n) \cup \{p_1\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする. S は X_1 の開被覆である. 有限部分被覆を持たないからコン

パクトでない。

(2) ユークリッド位相の入った位相空間 \mathbb{R} を E で表す。 E の開集合は X_2 の開集合であることを示す。 E の開基として $\{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \mid x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ がとれる。 $\frac{1}{n_1} \leq \varepsilon < \frac{1}{n_1+1}$ として n_1 を定める。 n_i を $\frac{1}{n_i} \leq \varepsilon - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} < \frac{1}{n_i}$ として定める。 ただし $\varepsilon - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} = 0$ のとき n_i は定めない。 n_i が定義される i を集めてできる $A \subset \mathbb{N}$ を定める。 このとき数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\max A}$ を得る。
 $\bigcup_{i=1}^{\max A} (x_0 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{n_j}, x_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}) \cup (x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_i}, x_0 + \sum_{j=1}^i \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ である。 よって E の開集合は X_2 の開集合である。

$\varphi: X_2 \rightarrow [0, 1]$ を $\varphi(p_1) = 0, \varphi(p_2) = 1, \varphi(x) = (\arctan x + \pi/2)/\pi$ ($x \in \mathbb{R}$) とする。 $\varphi|_{\mathbb{R}}: E \rightarrow (0, 1)$ は同相写像であるから φ は全単射。 $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ は E の開集合であるから $\varphi((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}))$ は $[0, 1]$ の開集合である。 $\varphi((-\infty, n) \cup \{p_1\}) = (0, \varphi(n)) \cup \{0\} = (-1, \varphi(n)) \cap [0, 1]$ は開集合である。 よって φ^{-1} は連続。 $[0, 1]$ の開集合 U について $U \subset (0, 1)$ なら $\varphi^{-1}(U)$ は E の開集合。 すなわち X_2 の開集合。 $0 \in U, 1 \notin U$ ならある $\varepsilon > 0$ が存在して $U = [0, \varepsilon) \cup U \setminus \{0\}$ である。 $\varphi^{-1}(U \setminus \{0\})$ は X_2 の開集合である。 $\varphi^{-1}([0, \varepsilon)) = (-\infty, \varphi^{-1}(\varepsilon)) \cup \{p_1\}$ は X_2 の開集合である。 よって $\varphi^{-1}(U)$ は X_2 の開集合。 $0 \notin U, 1 \in U$ のとき、 $0, 1 \in U$ のときも同様。 よって φ は連続。 すなわち φ は同相。

(3) p_1 が属す開基は $\{(-\infty, n) \cup \{p_1\}\}$ ($n \in \mathbb{Z}$) である。 任意の $m \in \mathbb{Z}$ について $\{(-\infty, m)\} \cup \{p_3\}$ も開基であるからそれぞれを含む任意の開基は共通部分をもつ。 したがってハウスドルフ空間でない。

[4] (1)

$$\left| \frac{\log z}{z^4 + 1} \right| = \frac{|\log r + i\theta|}{|r^4 e^{4i\theta} + 1|} \leq \frac{|\log r| + \pi}{||r^4 e^{4i\theta}| - 1|} = \frac{|\log r| + \pi}{|r^4 - 1|}$$

(2)

$$\int_{\alpha_2} \frac{\log z}{z^4 + 1} dz = \int_R^\varepsilon \frac{\log x e^{\pi i}}{(x e^{\pi i})^4 + 1} e^{i\pi} dx = \int_\varepsilon^R \frac{\log x + \pi i}{x^4 + 1} dx = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{x^4 + 1} dx + \pi i \int_\varepsilon^R \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

(3) $\partial D_{\varepsilon, R}$ の小さい円弧を C_1 , 大きい円弧を C_2 とする。 $\left| \int_{C_1} \frac{\log z}{z^4 + 1} dz \right| = \int_0^\pi \left| \frac{\log \varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^4 e^{4i\theta} + 1} i \varepsilon e^{i\theta} \right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{\varepsilon |\log \varepsilon| + \varepsilon \pi}{|\varepsilon^4 - 1|} d\theta \leq \pi \frac{\varepsilon |\log \varepsilon| + \varepsilon \pi}{|\varepsilon^4 - 1|} \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) である。 また $\left| \int_{C_2} \frac{\log z}{z^4 + 1} dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\log R e^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta} + 1} i R e^{i\theta} \right| d\theta \leq \pi \frac{R |\log R| + R \pi}{|R^4 - 1|} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) である。

また $\int_{\alpha_1} \frac{\log z}{z^4 + 1} dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{x^4 + 1} dx$ である。

$\varepsilon < 1 < R$ である。 $D_{\varepsilon, R}$ 内で $\frac{\log z}{z^4 + 1}$ は $e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}$ を特異点にもつ。 留数を求めると $\text{Res}\left(\frac{\log z}{z^4 + 1}, e^{\pi i/4}\right) = \pi e^{7i\pi/4}/16, \text{Res}\left(\frac{\log z}{z^4 + 1}, e^{3\pi i/4}\right) = 3\pi e^{i\pi/4}/16$ である。 よって $\int_{\partial D_{\varepsilon, R}} \frac{\log z}{z^4 + 1} dz = \frac{i\pi^2}{8}(3e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8} + i\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$ である。 すなわち $\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_{\varepsilon, R}} \frac{\log z}{z^4 + 1} dz = 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^4 + 1} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx$ である。 以上より $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4 + 1} dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}, \int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ である。

0.9 H23 数学 A

[1] (1) V の基底として $\{1, x+1, (x+1)^2\}$ をとる。 $F(1) = 0, F(x) = x+1, F((x+1)^2) = 2(x+1)^2$ であるから

F の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。

(2) G の表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とし、 F の表現行列を A とする。 $G \circ F = F \circ G$ は $AB = BA$

と同値である. よって $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 2b_{31} & 2b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 2b_{13} \\ 0 & b_{22} & 2b_{23} \\ 0 & b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix}$ であるから, $b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = 0$ である. したがって $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ である. よって M の次元は 3 である.

[2] (1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束するから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $|f_N(x) - f(x)| < 1$ である. f_N は有界であるから $f_N(x) \leq M$ とするとよって $|f(x)| \leq 1 + |f_N(x)| < 1 + M$ である. よって f は有界.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して一様収束性から, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n, m > N$ なら $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ である. この n, m に対してある $M(n) > 0$ が存在して $x > M(n)$ なら $|a_n - f_n(x)| < \varepsilon$ であり, またある $M(m) > 0$ が存在して $x > M(m)$ なら $|a_m - f_m(x)| < \varepsilon$ である. $|a_n - a_m| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m|$ であるから $x > M(n) + M(m)$ をとることで $|a_n - a_m| < 4\varepsilon$ である. すなわち $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列である.

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_1$ なら $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ である. またある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_2$ なら $|a_n - A| < \varepsilon$ である. $N = N_1 + N_2$ とする. ある $M > 0$ が存在して $x > M$ なら $|f_N(x) - a_n| < \varepsilon$ である. よって $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - A| < 3\varepsilon$ となる.

[3] (1) $(a, b) \notin G$ を任意にとる. $b \neq f(a)$ と Y がハウスドルフ空間であることから開集合 U, V が存在して $f(a) \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ である. $(a, b) \in f^{-1}(U) \times V$ である. ある $(x, y) \in f^{-1}(U) \times V$ について $f(x) = y$ と仮定する. $f(x) \in U, y \in V$ であるから $y \in U \cap V$ となり矛盾. よって $f^{-1}(U) \times V \cap G = \emptyset$ である. $f^{-1}(U) \times V$ は開集合であるから G は閉集合.

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1/x & (x > 0) \end{cases}$ とする. f は連続でないが G は閉集合である.

[4] (1) $|e^{iz}| = |\exp(ire^{it})| = |\exp(-r \sin t + ir \cos t)| = |\exp(-r \sin t)| \leq 1$ である. よって $|\int_{C_r} f(z) dz| \leq \int_{C_r} \frac{2}{z^2} |dz| = 2 \int_0^\pi \frac{1}{r} |dt| = 2\pi \frac{1}{r} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$ である.

$(1 - e^{iz})/z^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} i^{n-2} z^{n-2}$ である. よって $\int_{C_r} f(z) dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} i^{n-2} \int_{C_r} z^{n-2} dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} i^{n-1} \int_0^\pi r^{n-1} e^{i(n-1)t} dt$ である. $n = 1$ の項については $\int_0^\pi dt = \pi$ である. $n \geq 2$ なら $|\int_0^\pi r^{n-1} e^{i(n-1)t} dt| \leq \int_0^\pi r^{n-1} dt \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$ である. よって $\int_{C_r} f(z) dz \rightarrow \pi \quad (r \rightarrow 0)$ である.

(2) 曲線 $\alpha_{\varepsilon, r}$ を $z = x \quad (-r \leq x \leq -\varepsilon)$ とする. $\int_{\alpha_{\varepsilon, r}} f(z) dz = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx = \int_\varepsilon^r \frac{1 - e^{-ix}}{x^2} dx = \int_\varepsilon^r \frac{1 - \cos x}{x^2} dx + i \int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x^2} dx$ である.

曲線 $\beta_{\varepsilon, r}$ を $z = x \quad (\varepsilon \leq x \leq r)$ とする. $\int_{\beta_{\varepsilon, r}} f(z) dz = \int_\varepsilon^r \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx = \int_\varepsilon^r \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - i \int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x^2} dx$ である.

$C_\varepsilon, \beta_{\varepsilon, r}, C_r, \alpha_{\varepsilon, r}$ をつないでできる積分曲線を C とすると, C の内部で f は正則であるから $\int_C f(z) dz = 0$ である. よって $\int_{-C_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\beta_{\varepsilon, r}} f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz + \int_{\alpha_{\varepsilon, r}} f(z) dz = 0$ である. $\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ とすると $2 \int_\varepsilon^r \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - \pi \rightarrow 0$ であるから $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ である.

0.10 H24 数学 A

[1] (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $\varepsilon < a_n < \varepsilon$ である.

よって $n > N$ で $(1 - \frac{\varepsilon}{n})^n \leq (1 + \frac{a_n}{n})^n \leq (1 + \frac{\varepsilon}{n})^n$ である. 極限をとれば $e^{-\varepsilon} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a_n}{n})^n \leq e^\varepsilon$ である. ε は任意であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a_n}{n})^n = 1$ である.

(2) $n \cos \frac{t}{\sqrt{n}} - n = -\frac{1}{2}t^2 + O(\frac{1}{n})$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} s \cos \frac{t}{\sqrt{n}} = s$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s - \frac{1}{2}t^2 = 0$ より $(s, t) = (\frac{t^2}{2}, t) \quad (t \in \mathbb{R})$ である.

(3) (2) の a_n をもちいると, $\cos \frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n+s} \frac{n+s}{n} \cos \frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n+s} (1 + \frac{a_n}{n})$ である. したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{t}{\sqrt{n}})^n =$

$e^{-\frac{t^2}{2}}$ である. よって $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ である.

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} -3-t & -2 & 1 \\ 4 & 3-t & -1 \\ -4 & -2 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t-1)^2 \text{ である. よって固有値は } 0, 1 \text{ である.}$$

$$t=0 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ であるから } V_0 \text{ の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$t=1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ であるから固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$(2) B A y = B A B x = B \alpha x = \alpha B x = \alpha y$$

(3) AB の rank は 2 であるから A の rank は 2 以上. $A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ であるから A の rank は 2 である. すなわち A は単射. 同様に B は全射である.

よって $\dim \operatorname{Im} g_1 = 2$ である.

$$(4) B \text{ は全射であるから任意の } y \in \mathbb{C} \text{ に対して } Bx = y \text{ となる } x \in \mathbb{C}^2 = V_1 \text{ が存在する. } B A y = y \text{ より } B A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$\boxed{3} \quad (1) f^{-1}([0, 1)) = [0, 1)$ は X の開集合でないから f は連続でない.

(2) X は $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ を開基とする位相空間である.

$$g^{-1}(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x - \frac{\varepsilon}{n}, x + \varepsilon) \text{ より } g \text{ は連続.}$$

(3) A^+ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ をとる. $0 \in U_{\lambda'}$ なる $\lambda' \in \Lambda$ が存在する. ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_{\lambda'}$ である. $\frac{1}{n} < \varepsilon$ となるような最大の n を N とする. N 以下の n に対して $\frac{1}{n}$ を含むような U_{λ_n} が存在する. したがって $\Lambda' = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \lambda'\}$ は A^+ の有限部分被覆である. よって A^+ はコンパクトである.

A^- は A^+ と同様にしてコンパクトである.

(4) A^+ は Y においてコンパクトである. 0 を含む開集合は開集合 $[0, x)$ を部分集合にもつ. x 以上の $\frac{1}{n}$ なる n は有限個なので (3) と同様にコンパクト.

A^- はコンパクトでない. $\{[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \mid n = 1, 2, \dots\} \cup \{[0, 1)\}$ は開被覆であるが有限部分被覆を持たない.

$$\boxed{4} \quad (1) z = e^{i\pi/5} \text{ は一位の極である. よって留数は } \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/5}} (z - e^{i\pi/5}) / (z^5 + 1) = e^{6i\pi/5} / 5 \text{ である.}$$

$$(2) \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \left| \frac{1}{z^5 + 1} \right| |dz| = \int_0^{2\pi/5} \left| \frac{1}{R^5 - 1} \right| R |d\theta| = \frac{2\pi}{5} \frac{R}{R^5 - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \text{ である.}$$

(3) 半径 R の扇形で偏角が 0 から $2\pi/5$ の曲線を反時計回りに進む積分曲線を C とする. $f(z) = \frac{1}{z^5 + 1}$ は C を含むある領域で C 内に孤立特異点を持ち, それ以外で正則であるから, 留数定理より $\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i\pi/5}) = 2\pi i e^{6i\pi/5} / 5$ である.

$\Gamma_A = \{x e^{i2\pi/5} \mid 0 \leq x \leq R\}$ とする. ただし Γ_A の向きは C と同じ方向にとる.

$$\int_{\Gamma_A} \frac{1}{z^5 + 1} dz = - \int_0^R \frac{1}{x^5 + 1} e^{2\pi i/5} dx = - \cos \frac{2\pi}{5} \int_0^R \frac{1}{x^5 + 1} dx - i \sin \frac{2\pi}{5} \int_0^R \frac{1}{x^5 + 1} dx$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^5 + 1} dx - \cos \frac{2\pi}{5} \int_0^\infty \frac{1}{x^5 + 1} dx = - \frac{2\pi}{5} \sin \frac{6\pi}{5}$$

よって $\int_0^\infty \frac{1}{x^5 + 1} dx = \frac{2\pi}{5} \sin \frac{6\pi}{5} / (1 - \cos \frac{2\pi}{5})$ である.

$$\frac{\sin \frac{6\pi}{5}}{(1 - \cos \frac{2\pi}{5})} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}}$$

より $\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1} dx = \frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}}$ である.

0.11 H25 数学 A

[1] (1)

$$u(x) = \int_0^x \phi(x)\psi(y)f(y)dy + \int_x^\pi \psi(x)\phi(y)f(y)dy = \phi(x) \int_0^x \psi(y)f(y)dy + \psi(x) \int_x^\pi \phi(y)f(y)dy$$

である. $\phi(y)f(y), \psi(y)f(y)$ は $(0, \pi)$ 上連続であるから, $u(x)$ は $(0, \pi)$ 上で微分可能である.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \phi'(x) \int_0^x \psi(y)f(y)dy + \phi(x)\psi(x)f(x) + \psi'(x) \int_x^\pi \phi(y)f(y)dy - \psi(x)\phi(x)f(x) \\ &= \phi'(x) \int_0^x \psi(y)f(y)dy + \psi'(x) \int_x^\pi \phi(y)f(y)dy \end{aligned}$$

先ほどと同様の理由で $u'(x)$ は $(0, \pi)$ 上で微分可能である.

$$\begin{aligned} u''(x) &= \phi''(x) \int_0^x \psi(y)f(y)dy + \phi'(x)\psi(x)f(x) + \psi''(x) \int_x^\pi \phi(y)f(y)dy - \psi'(x)\phi(x)f(x) \\ &= -\phi(x) \int_0^x \psi(y)f(y)dy + \phi'(x)\psi(x)f(x) - \psi(x) \int_x^\pi \phi(y)f(y)dy + \psi'(x)\phi(x)f(x) \\ &= -u(x) + \phi'(x)\psi(x)f(x) - \psi'(x)\phi(x)f(x) \end{aligned}$$

よって u は C^2 級である.

(2) $u''(x) + u(x) = (\phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x))f(x)$ である. $h(x) = \phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x)$ とおくと $h'(x) = \phi''(x)\psi(x) + \phi'(x)\psi'(x) - \psi''(x)\phi(x) - \psi'(x)\phi'(x) = -\phi(x)\psi(x) + \psi(x)\phi(x) = 0$. より $h(x) = W$.

(3) ψ が C^2 級の実数値関数であることと $\psi''(x) + \psi(x) = 0$ より $\psi(x) = \operatorname{Re}(Ae^{ix} + Be^{-ix}) = C \cos x + D \sin x$. (A, B は, $C = A + B \in \mathbb{R}, D = (A - B)i \in \mathbb{R}$ を満たす任意定数) である.

$\phi(x) = \sin x, W = 1$ より $\cos x \psi(x) - \sin x \psi'(x) = 1$. とくに $x = 0$ で $\psi(0) = 1$ である. よって $C = 1$. また $\psi'(0) = 0$ より $D = 0$. よって $\psi(x) = \cos x$.

[2] (1) $v \in f^{n+1}(V) = f^n(f(V))$ に対して, ある $u \in f(V)$ が存在して, $v = f^n(u)$ である. すなわち $f^{n+1}(V) \subset f^n(V)$ である.

(2) $f^{n+1}(V) \subset f^n(V)$ より $f^k(V)$ の次元は単調減少である. V は有限次元であるから, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば $f^{n+1}(V) = f^n(V)$ である.

(3) $f|_W: W \rightarrow W$ は $f|_W(W) = f|_W(f^{n_0}(V)) = f^{n_0+1}(V) = W$ より全射である. 有限次元ベクトル空間の全射自己準同型は同型射であるから, $f|_W$ は同型.

[3] (1) $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ は R の開集合であるから, $\emptyset \in \mathcal{O}$ である. $\pi^{-1}(R/\sim) = R$ は R の開集合であるから, $R/\sim \in \mathcal{O}$ である.

$U, V \in \mathcal{O}$ に対して, $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ は R の開集合であるから, $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(U \cap V)$ は R の開集合である. よって $U \cap V \in \mathcal{O}$ である.

$U_\lambda \in \mathcal{O}$ に対して, $\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合であるから, $\pi^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda) = \bigcup_\lambda \pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合である. よって $\bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}$ である.

以上より R/\sim は \mathcal{O} を位相とする位相空間.

(2) ハウスドルフ空間であれば, 一点集合は閉集合である. $\{x_0\} \subset R/\sim$ について $\pi^{-1}(\{x_0\}) = D$ は R の閉集合ではない. よって $\{x_0\}$ は閉集合ではないから, ハウスドルフ空間でない.

(3) $\{x_0\}$ 以外の一点集合はすべて閉集合である．よって f が同相写像なら閉集合の像は閉集合であるから $f(x_0) = x_0$ である．

□ (1) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を z に収束する任意の複素数列とする．

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{z_n - z} \left(\frac{1}{e^{i\theta} - z_n} - \frac{1}{e^{i\theta} - z} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z_n)(e^{i\theta} - z)} d\theta\end{aligned}$$

ここで $|z| < 1$ より任意の $\theta \in [0, 2\pi]$ とある整数 N より大きい n に対して，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $|(e^{i\theta} - z_n)(e^{i\theta} - z)| \geq |1 - |z_n||1 - |z|| > \varepsilon$ である．したがって $\sup_{n > N} \left| \frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z_n)(e^{i\theta} - z)} \right| < \left| \frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{\varepsilon} \right| < M \in \mathbb{R}$ である．

よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z_n)(e^{i\theta} - z)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta)e^{i\theta} ((e^{i\theta} - z)^{-1})' d\theta$$

となり微分可能．よって f は $|z| < 1$ で正則である．

(2) $|z| < 1$ のとき $n!c_n = f^{(n)}(0)$ である． $f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(\theta)e^{i\theta})((e^{i\theta} - z)^{-1})^{(n)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(\theta)e^{i\theta})(n!(e^{i\theta} - z)^{-n-1}) d\theta$ である．よって $f^{(n)}(0) = n! \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta)e^{-ni\theta} d\theta$ である．

$$\begin{aligned}2\pi c_n &= \int_0^{2\pi} \phi(\theta)e^{-ni\theta} d\theta = \left[\phi(\theta) \frac{e^{-ni\theta}}{-ni} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \phi'(\theta) \frac{e^{-ni\theta}}{-ni} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \phi'(\theta) \frac{e^{-ni\theta}}{ni} d\theta = \left[\phi'(\theta) \frac{e^{-ni\theta}}{n^2 i^2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \phi''(\theta) \frac{e^{-ni\theta}}{-n^2 i^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \phi''(\theta) \frac{e^{-ni\theta}}{n^2} d\theta \leq 2\pi \max_{\theta \in \mathbb{R}} |\phi''(\theta)| \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

よって $n^2|c_n| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |\phi''(\theta)|$ である．

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \max_{\theta \in \mathbb{R}} |\phi''(\theta)| \frac{1}{n^2} < \infty$$

よって絶対収束するから， $|z| = 1$ で $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は収束する．

(4) ワイエルシュトラスの M 判定法と (3) での不等式から $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $|z| \leq 1$ で一様収束する．したがって一様収束先の関数は連続であるから， $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ である．

0.12 H26 数学 A

□ (1) $(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ より $(\arctan y + \arctan(1/y))' = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+(1/y)^2}(-1/y^2) = 0$ より $\arctan y + \arctan(1/y)$ は定数関数である．よって $\arctan x \in F$

(2) $f(x) + f(1/x) = c \in \mathbb{R}$ とする． $0 < a < 1$ に対して

$$\int_a^1 f(x) dx = \int_{1/a}^1 -\frac{f(1/t)}{t^2} dt = \int_1^{1/a} \frac{f(t) - c}{t^2} dt = \int_1^{1/a} \frac{f(t)}{t^2} dt + c \left[\frac{1}{t} \right]_1^{1/a} = \int_1^{1/a} \frac{f(t)}{t^2} dt + c(a-1)$$

したがって $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 f(x) dx$ の存在と $\lim_{a \rightarrow 0} \int_1^{1/a} \frac{f(t)}{t^2} dt$ の存在は同値である．

(3) g が $G \in \mathbf{F}$ に 拡張可能だとする. このとき $\lim_{x \rightarrow 1-0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} G'(x)$ は G が C^1 級であるから存在する.

逆に $\lim_{x \rightarrow 1-0} g'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ とする. 1 に収束する $(0, 1)$ 上の任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ をとる.

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $1 - \delta < x < 1$ ならば $\alpha - \varepsilon < g'(x) < \alpha + \varepsilon$ である. $\varepsilon\delta$ に対してある N が存在して $n > N$ ならば $1 - \varepsilon\delta < x_n < 1$ である. $n, m > N$ について平均値の定理から $g(x_n) - g(x_m) = g'(\xi)(x_n - x_m)$ となる $\xi \in (1 - \varepsilon\delta, 1)$ が存在する. よって $|g(x_n) - g(x_m)| < (\alpha + \varepsilon)\delta\varepsilon \rightarrow 0$ となるから $\{g(x_n)\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列. すなわち収束列. 以上より $\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x)$ は存在する. その収束先を β とする.

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in (0, 1)) \\ \beta - G(1/x) & (x \in (1, \infty)) \\ \beta & (x = 1) \end{cases} \text{ と定めると } G|_{(0,1)} = g \text{ であり, } G(x) + G(1/x) = \beta \text{ である.}$$

$G(x)$ は $x = 1$ 以外の点で微分可能であり, 導関数は連続である. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{G(x) - G(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{g'(x)}{1} = \alpha$ である. (ロピタルの定理) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{G(x) - G(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\beta - G(1/x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-g'(1/x)(-x^{-2})}{1} = \alpha$ である. よって G は $x = 1$ で微分可能.

$\lim_{x \rightarrow 1+0} G'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} -g'(1/x)(-x^{-2}) = \alpha$ である. よって導関数が $x = 1$ で連続であるから G は C^1 級.

[2] (1) 一次独立であることを示す. $c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x = 0$ とする. $x = 0$ とすると, $c_1 + c_3 = 0$ である. $x = \pi$ とすると, $-c_1 + c_3 = 0$ である. よって $c_1 = c_3 = 0$ である. $x = \frac{\pi}{2}$ とすると, $c_2 = 0$ である. よって $c_4 = 0$ より S は一次独立. よって V の基底

(2) $\Phi(\cos x) = -\sin x, \Phi(\sin x) = \cos x, \Phi(\cos 2x) = -2\sin 2x, \Phi(\sin 2x) = 2\cos 2x$ より Φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ である. $\Psi(\cos x) = \sin x, \Psi(\sin x) = \cos x, \Psi(\cos 2x) = -\cos 2x, \Psi(\sin 2x) = -\sin 2x$ より Ψ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である.

(3) $g(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$ とする.

$$\Phi(g(x)) - \Psi(g(x)) = \cos 2x \text{ より } \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$\text{すなわち } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ である. したがって } c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \text{ が解である. よって}$$

$g(x) = c_2 \sin x + \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{2}{5} \sin 2x$ である.

[3] (1) Q が連結でないとする. Q の非空開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset, U \cup V = Q$ となるものが存在する. このとき $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ は \mathbb{R}^2 の開集合であり, $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset, \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V) = \mathbb{R}^2$ となる. すなわち \mathbb{R}^2 が連結でないがこれは矛盾. よって Q は連結である.

(2) $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ の同値類は $A = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$ である. また $(0, 0)$ の同値類は $B = \{(0, 0)\}$ である. B を含む Q の開集合 U を任意にとる. $(0, 0) \in \pi^{-1}(Q)$ で $\pi^{-1}(Q)$ は開集合であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B((0, 0), \varepsilon) \subset \pi^{-1}(Q)$ である. $B((0, 0), \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である. よって B を含む任意の開集合は A を含むから,

ハウスドルフ空間でない。

(3) $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -n < xy < n\}$ とする。 A_n は \mathbb{R}^2 の開集合であり、 $\pi^{-1}\pi(A_n) = A_n$ である。
 $\{\pi(A_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ は Q の有限部分被覆を持たない開被覆である。 よってコンパクトでない。

[4] (1) $z \in D$ について、 z に収束する D 上の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとる。

$$\begin{aligned} 2\pi i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \left(\frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z_n} - \frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z} \right) \frac{1}{z_n - z} d\zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta \end{aligned}$$

ここで $\zeta \in C, z_n, z \in D$ より $\zeta(\zeta-2) - z_n > M, \zeta(\zeta-2) - z > M$ となる $M > 0$ が存在する。 よって $\frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} < \frac{1}{M^2}$ であるから $\int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta < 2\pi M^2$ である。 よってルベークの収束定理から

$$2\pi i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta = \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z)^2} d\zeta$$

よって $f(z)$ は D 上で正則。

(2) $\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^k$ とする。 $\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^{k+n+1}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = n!c_{-1}$ である。

$((\zeta-2)^{-n-1})^{(n)} = (-n-1)(-n-2)\dots(-n-n)(\zeta-2)^{-2n-1} = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!(\zeta-2)^{2n+1}}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n!2^{2n+1}}$ よって $c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)2^{2n+1}}$ である。

$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}$ は C 内で $\zeta = 0$ を特異点にもつ。 よって留数定理から $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} d\zeta = \text{Res}\left\{\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}, 0\right\} = c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)2^{2n+1}}$

(3) $\zeta(\zeta-2) - z = (\zeta - (1 + \sqrt{1+z}))(z - (1 - \sqrt{1+z}))$ である。 $|z| < 1$ より $-\pi/2 < \arg(1+z) < \pi/2$ である。 よって $-\pi/2 < \arg(\sqrt{1+z}) < \pi/2$ より $\text{Re}(1 + \sqrt{1+z}) > 1$ である。 すなわち $|1 + \sqrt{1+z}| > 1$ である。

$\zeta = 1 - \sqrt{1+z}$ は $\zeta^2 - 2\zeta - z = 0$ より $|\zeta||\zeta-2| = |z| < 1$ である。 よって $|\zeta| < 1/|\zeta-2| = 1/|1 - \sqrt{1+z} - 2| = 1/|1 + \sqrt{1+z}| < 1$ である。 よって $\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}$ は D 内で特異点 $\zeta = 1 - \sqrt{1+z}$ を持つ。 一位の極であるから留数は $\lim_{\zeta \rightarrow 1 - \sqrt{1+z}} (\zeta - (1 - \sqrt{1+z})) \frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z} = \frac{1}{-2\sqrt{1+z}}$ である。 よって $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z} d\zeta = \frac{-1}{2\sqrt{1+z}}$ である。

0.13 H27 数学 A

[1] (1) $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$ である。 任意の $\varepsilon > 0$ に対して一様収束するから、 ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq N$ ならば、 $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ である。 この N に対して f_N は一様連続であるから、 ある $\delta > 0$ が存在して、 $|x - y| < \delta$ ならば $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$ である。 よって、 $|x - y| < \delta$ ならば、 $|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$ である。 すなわち、 f は一様連続である。

(2) 一様収束するから任意の $\varepsilon > 0$ について、 ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq N$ ならば、 $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ である。 両辺の \sup をとって $\sup A \leq \sup A_n + \varepsilon$ である。 よって A は有界。 $|\sup A - \sup A_n| < \varepsilon$ より $\limsup A_n = \sup A$

$$\begin{aligned} [2] (1) f_a(e_1) &= a^t e_1 - e_1^t a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & -a_3 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -a_2 E_1 - \\ a_3 E_2, f_a(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ -a_1 & 0 & -a_3 \\ 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix} = a_1 E_1 - a_3 E_3, f_a(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ -a_1 & -a_2 & 0 \end{pmatrix} = a_1 E_2 + a_2 E_3 \text{ である。} \end{aligned}$$

よって $T_a = \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \end{pmatrix}$ である.

(2) $\det T_a = -a_2(-a_1(-a_3)) + a_3a_1a_2 = 0$ より $\text{rank } f_a \leq 2$ である.

$a \neq 0$ よりある i について $a_i \neq 0$ である. T_a の部分小行列として $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 \end{pmatrix}$ がとれる. これらの行列式は何れかが 0 でないから $\text{rank } f_a \geq 2$ である. よって $\text{rank } f_a = 2$ である. したがって $\dim \text{Im } f_a = 2, \dim \text{Ker } f_a = 1$ である.

(3) T_a の固有多項式を g_a とすると $g_a = \begin{vmatrix} -a_2 - \lambda & a_1 & 0 \\ -a_3 & -\lambda & a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\lambda = -\lambda(\lambda^2 - (a_2^2 - 2a_1a_3))$ である.

よって $a_2^2 - 2a_1a_3 \neq 0$ ならば T_a の固有値は全て異なるから, 対角化可能. $a_2^2 - 2a_1a_3 = 0$ ならば, T_a の固有値は 0 のみである. 固有値 0 の固有空間は $\ker T_a$ であるから $a \neq 0$ なら固有空間の次元は 1 となり, 対角化不可能. $a = 0$ ならば $T_a = 0$ であるから対角化可能.

以上より $a = 0 \vee a_2^2 - 2a_1a_3 \neq 0$ が対角化可能性に関する必要十分条件である.

[3] (1) $N_r(A)$ は開集合である. これを示す. $x \in N_r(A)$ を任意にとる. ある $a \in A$ が存在して $b := r - d(x, a) > 0$ である. $y \in B(x, b/2) := \{y \in X \mid d(x, y) < b/2\}$ について $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < r - b + b/2 < r$ である. よって $B(x, b/2) \subset N_r(A)$ である. よって $N_r(A)$ は開集合である.

$F_K = \{N_n(K) \mid n = 1, 2, \dots\}, F_L = \{N_n(L) \mid n = 1, 2, \dots\}$ とする. F_K, F_L は X の開被覆である. とくに K, L の開被覆である. よって L の被覆 $\{N_{n_1}(K), N_{n_2}(K), \dots, N_{n_m}(K)\}$ と, K の被覆 $\{N_{m_1}(L), N_{m_2}(L), \dots, N_{m_\ell}(L)\}$ がとれる. $r = n_m + m_\ell$ とすれば, $L \subset N_r(K), K \subset N_r(L)$ である.

(2) 任意の $r > 0$ に対して $K \subset N_r(K)$ である. よって $D(K, K) = 0$ である. 逆に $D(K, L) = 0$ とする. 任意の $r > 0$ について $K \subset N_r(L), L \subset N_r(K)$ である. $x \in K$ に対して, ある $y \in L$ が存在して $d(x, y) < r$ である. この r は任意にとれるから x は L の触点である. 距離空間はハウスドルフ空間であり, ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから, L は閉集合である. よって $x \in L$ である. すなわち $K \subset L$ である. 同様にして $L \subset K$ である. よって $K = L$ である.

定義から $D(K, L) = D(L, K)$ である.

K, L, M をコンパクト集合とする. $D(K, L) = r_1, D(L, M) = r_2, r := r_1 + r_2$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ を一つ固定する. $x \in K$ に対して, $y \in L$ が存在して $d(x, y) < r_1 + \varepsilon$ である. $y \in L$ に対して, $z \in M$ が存在して $d(y, z) < r_2 + \varepsilon$ である. よって $d(x, z) < r_1 + r_2 + 2\varepsilon$ である. すなわち $K \subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(M)$ である. 逆も同様に $M \subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(K)$ である. よって $D(K, M) \leq r_1 + r_2 + 2\varepsilon$ である. ε は任意にとれるから $D(K, M) \leq r_1 + r_2$ である. よって $D(K, M) \leq D(K, L) + D(L, M)$ である.

[4] (1) $1 + e^{2\pi z} = 0$ とする. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると, $e^{2\pi x} e^{2\pi iy} = -1$ である. よって $\sin 2\pi y = 0$ であるから, $y = \frac{n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) である. よって $e^{2\pi z} = e^{2\pi x}(-1)^n = -1$ より $x = 0$ で n は奇数である. S_R 内では $z = i/2$ が唯一の解である. すなわち $f(z)$ は $z = i/2$ を特異点にもつ.

$$\lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{e^{2\pi az}}{1 + e^{2\pi z}} = \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \frac{e^{2\pi az} + (z - \frac{i}{2})2\pi z e^{2\pi az}}{2\pi e^{2\pi z}} = -\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$$

より $\text{Res}\{f(z), i/2\} = -\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$ である.

したがって留数定理から $\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}) = -ie^{a\pi i}$ である.

$$(2) \left| \int_{J_R^+} f(z) dz \right| = \left| \int_0^1 \frac{e^{2\pi a(R+iy)}}{1+e^{2\pi(R+iy)}} i dy \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}} \right| dy \text{ である.}$$

$$\left| \frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}} \right| = \left| \frac{1}{e^{-2\pi aR} + e^{2\pi R(1-a)} e^{2\pi iy}} \right| \leq \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$$

であるから, $\left| \int_{J_R^+} f(z) dz \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}} dy = \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$ である. $0 < 1-a < 1$ より $\left| \int_{J_R^+} f(z) dz \right| \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) である. 同様に $\left| \int_{J_R^-} f(z) dz \right| \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) である.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-2\pi ax} + e^{2\pi(1-a)x}} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi(1-a)x}} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{-2\pi ax}} dx < \infty$ である. よって広義積分は収束する. $R+i$ から $-R+i$ への向きのついた線分を C とする. $\int_C \frac{e^{2\pi az}}{1+e^{2\pi z}} dz = \int_R^{-R} \frac{e^{2\pi a(x+i)}}{1+e^{2\pi(x+i)}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}} dx$ である. よって $\int_{\gamma_R} f(z) dz = (1-e^{2\pi ai}) \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{J_R^+} f(z) dz - \int_{J_R^-} f(z) dz$ である. すなわち $R \rightarrow \infty$ で $-ie^{a\pi i} = (1-e^{2\pi ai}) \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$ である. よって $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \frac{-ie^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}} = \frac{-i}{e^{-a\pi i} - e^{a\pi i}} = \frac{1}{2 \sin a\pi}$ である.

0.14 H28 数学 A

[1] (1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ なら $5 - 1/(1+x)^2 > 0$ である. よって $0 < \int_0^x 5 - 1/(1+t)^2 dt = 5x + 1/(1+x) - 1$ である. よって $0 < \int_0^x 5t + 1/(1+t) - 1 dt = 5x^2/2 + \log(1+x) - x$ である. よって $-5x^2/2 < \log(1+x) - x$ である. また $5 + 1/(1+x)^2 > 0$ である. よって $0 < \int_0^x 5 + 1/(1+t)^2 dt = 5x - 1/(1+x) + 1$ である. よって $0 < \int_0^x 5t - 1/(1+t) + 1 dt = 5x^2/2 - \log(1+x) + x$ である. よって $5x^2/2 > \log(1+x) - x$ である.

すなわち $|\log(1+x) - x| < 5x^2/2$ である.

(2) $\sum a_k$ が収束するから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $a_n < 1/2$ である. 無限積の収束性は $k = N$ からの無限積の収束性と同じ. また (1) より $|\log(1+x)| \leq Cx^2 + x$ である. \log の連続性から

$$\log \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^n (1+a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \prod_{k=N}^n (1+a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n \log(1+a_k)$$

である.

絶対級数 $\sum |\log(1+a_k)|$ の収束性を考える.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n |\log(1+a_k)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n Ca_k^2 + a_k = C \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n a_k^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n a_k$$

右辺は収束するから, $\sum \log(1+a_k)$ は絶対収束する. よって収束するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^n (1+a_k)$ は収束する.

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ と $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3k+1} \right)^2$ の収束を示せばよい. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{3k+1}$ とする. $S_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3(2k-1)+1} - \frac{1}{3(2k)+1} \right)$ であり, $\frac{1}{3(2k-1)+1} - \frac{1}{3(2k)+1} > 0$ より S_{2n} は単調増加する. 同様に $S_{2n+1} = 1/4 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3(2k)+1} - \frac{1}{3(2k+1)+1} \right)$ であり, $\frac{1}{3(2k)+1} - \frac{1}{3(2k+1)+1} > 0$ より S_{2n+1} は単調減少する. $S_{2n+1} - S_{2n} = 1/(3(2n+1)+1)$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$ である. また $S_{2n+1} = 1/(3(2n+1)+1) + S_n > 0$ より S_{2n+1} は有界な単調数列であるから収束する. したがって S_{2n} も収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$ である. よって $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ は収束する.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3k+1} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^2} < \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \text{ である. ともに収束するから無限積も収束する.}$$

[2] (1) $y \in f_A(W^\perp)$ を任意にとる. ある $x \in W^\perp$ が存在して $y = f_A(x)$ である. 任意の $u \in W$ について $(u, y) = {}^t u A x = {}^t ({}^t A u) x = ({}^t A u, x) = (f_A(u), x) = 0$ である. よって $y \in W^\perp$ である.

A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ と固有ベクトル $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ をとる. $x, y \in \mathbb{C}^n$ について標準エルミート内積 $(x, y) = {}^t x \bar{y}$ を定める. $\lambda(v, v) = (Av, v) = (v, \bar{A}v) = (v, \bar{\lambda}v) = \bar{\lambda}(v, v)$ である. $(v, v) > 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ である. よって $\lambda \in \mathbb{R}$ である.

(2) A の固有空間全ての直和を W とする. $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ である. $f_A(W) \subset W$ となるから, $f_A|_{W^\perp}: W^\perp \rightarrow W^\perp$ を得る. \mathbb{C} による定数倍を加えることで \mathbb{R}^n を \mathbb{C} 上線形空間 \mathbb{C}^n に拡張する. W, W^\perp も同様に $\overline{W}, \overline{W^\perp}$ に拡張する. $f_A|_{W^\perp}$ は $\overline{W^\perp}$ 上の線形変換に拡張できる. $W^\perp \neq \{0\}$ なら $f_A|_{\overline{W^\perp}}$ の固有値 λ と固有ベクトル $v \neq 0$ をとれる. $u = 0 + v \in \overline{W} \oplus \overline{W^\perp}$ とする. $Au = \lambda u$ である. λ は f_A の固有値であるから $\lambda \in \mathbb{R}$ である. よって $u \in \mathbb{R}^n$ としてよい. $u \in W^\perp$ となるがこれは W の定義に矛盾. よって $W^\perp = \{0\}$.

f_A の固有値 λ と固有ベクトル x について $\text{Span}\{x\} = \text{Span}\{x\}^{\perp\perp}$ であり, 任意の $y \in \text{Span}\{x\}^\perp$ について $(y, {}^tAx) = (Ay, x) = 0$ より ${}^tAx \in \text{Span}\{x\}$ である. よって ${}^tAx = \mu x$ とできる. $\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, {}^tAx) = (x, \mu x) = \mu(x, x)$ である. $(x, x) > 0$ より $\lambda = \mu$ である.

\mathbb{R}^n の任意の元 x は固有ベクトル v_1, \dots, v_n の線形結合で表せる. $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ とする. $Ax = \sum_{i=1}^n a_i A v_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i = {}^tAx$ である. よって $A = {}^tA$ である.

[3] (1) 任意の $x, y \in [0, 1]^\infty$ に対して $|x_k - y_k| \leq 1$ である. よって $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = 1$ である. よって d は $[0, 1]^\infty \times [0, 1]^\infty$ から \mathbb{R} への写像である.

$x = y$ なら $d(x, y) = 0$ である. また $d(x, y) = 0$ なら $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} |x_k - y_k| = 0$ であるから $x_k = y_k$ である. よって $d(x, y) = 0$ なら $x = y$ である. $d(x, y) = d(y, x)$ は明らか.

x, y, z について $\sum_{k=1}^n 2^{-k} |x_k - z_k| \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} |x_k - y_k| + \sum_{k=1}^n 2^{-k} |y_k - z_k|$ である. $n \rightarrow \infty$ とすると $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} |x_k - z_k| \leq \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} |x_k - y_k| + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} |y_k - z_k|$ である. よって $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ である. よって d は距離.

(2) $x_n \rightarrow a$ とする. $d(x_n, a) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} |x_{n,k} - a_k| \geq 2^{-i} |x_{n,i} - a_i| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である. よって任意の k に対して $x_{n,k} \rightarrow a_k$.

任意の k に対して $x_{n,k} \rightarrow a_k$ とする. 任意の ε に対して $2^{1-n_0} \leq \varepsilon$ なる n_0 が存在する. このとき $\sum_{k=n_0}^\infty 2^{-k} |x_{n,k} - a_k| \leq 2^{1-n_0} \leq \varepsilon$ である. 1 から $n_0 - 1$ までの整数 k について, ある N_k が存在して $n \geq N_k$ なら $|x_{n,k} - a_k| \leq \varepsilon$ である. $N = \max\{N_1, \dots, N_{n_0-1}\}$ とする. このとき $\sum_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k} |x_{n,k} - a_k| \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k} \varepsilon \leq 2\varepsilon$ である. よって $n \geq N$ なら $d(x_n, a) \leq 3\varepsilon$ であるから $x_n \rightarrow a$ である.

(3) $\{x_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ は有界閉区間 $[0, 1]$ 内の点列であるから, 収束部分列を必ずもつ. したがって収束部分列 $\{x_{n, k_j^{(n)}}\}_{j=1}^\infty$ に対して数列 $\{x_{n+1, k_j^{(n)}}\}_{j=1}^\infty$ も収束部分列 $\{x_{n+1, k_j^{(n+1)}}\}_{j=1}^\infty$ を持つ. このとき $\{k_j^{(n+1)}\}_{j=1}^\infty$ は $\{k_j^{(n)}\}_{j=1}^\infty$ の部分列である. これが任意の n について成り立つから数列 $\{k_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty, \{k_j^{(2)}\}_{j=1}^\infty, \dots$ を得て, それぞれ前の数列の部分列となっている. 数列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ を $s_n = k_n^{(n)}$ で定める. $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ は全ての m について $n > m$ では $\{k_j^{(m)}\}_{j=1}^\infty$ の部分列となっている. したがって $\{x_{s_n, k}\}_{n=1}^\infty$ は収束列になっている. よって $\{x_{s_n}\}_{n=1}^\infty$ は収束列である.

[4] (1) $z = re^{i\theta}$ とする.

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_0^\pi \frac{e^{ire^{i\theta}} ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi ie^{ire^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi ie^{ir \cos \theta} e^{-r \sin \theta} d\theta \\ \int_{C_r} \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| dz &= \int_0^\pi |e^{-r \sin \theta}| d\theta \leq \int_0^\pi d\theta = \pi \end{aligned}$$

である. よってルベークの収束定理から

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi i d\theta = \pi i, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi |e^{-r \sin \theta}| d\theta = \int_0^\pi 0 d\theta = 0$$

(2)

$r > \varepsilon > 0$ に対して $z = \varepsilon$ から $z = r$ までの積分経路を $\Gamma_{\varepsilon, r}^+$ とする. $z = -r$ から $z = -\varepsilon$ までの積分経路を

$\Gamma_{\varepsilon,r}^-$ とする.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{\varepsilon,r}^+} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^r \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx \\ \int_{\Gamma_{\varepsilon,r}^-} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_r^{\varepsilon} -\frac{\cos x - i \sin x}{-x} dx = \int_{\varepsilon}^r \frac{-\cos x + i \sin x}{x} dx\end{aligned}$$

である. 積分経路 $\Gamma_{\varepsilon,r}^+, C_r, \Gamma_{\varepsilon,r}^-, -C_{\varepsilon}$ によってできる閉曲線 Γ を考えると, 被積分関数は原点を除いて正則であるから, $\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ である. よって

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Gamma_{\varepsilon,r}^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma_{\varepsilon,r}^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-C_{\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= \int_{\varepsilon}^r \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^r \frac{-\cos x + i \sin x}{x} dx + I(r) - I(\varepsilon) \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin x}{x} dx + I(r) - I(\varepsilon) \rightarrow 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i \quad (r \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

したがって $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$ である.

0.15 H29 数学 A

[1] (1) $\sum_{k=1}^n |a_n|$ は n に関する単調増加数列であり, $\sum_{k=1}^n |a_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_n$ より, 有界である. よって $\sum |a_n|$ は収束する. したがって $\sum_{k=1}^n |a_n|$ はコーシー列である.

$S_n = \sum_{k=1}^n a_n$ とすると, $n \geq m$ に対して $|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_n \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_n| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$ である. よって S_n はコーシー列であるから, 収束列.

(2) $x \in (0, 1)$ で $|f(x)| < x$ より $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ である. $x = 0$ なら $\sum_{n=1}^{\infty} f(2^n x) = 0$ である. $0 < x < 1/2$ のとき, $2^{n_0} x \leq 1 < 2^{n_0+1} x$ となる正の整数 n_0 が存在する. $\sum_{n=1}^{n_0} |f(2^n x)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} 2^n x = x(2^{n_0+1} - 2) \leq 2$ である. また $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |f(2^n x)| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 1/(2^n x) = 1/(2^{n_0} x) \leq 2$ である. よって $\sum_{n=1}^{\infty} |f(2^n x)| \leq 4$ であるから $\sum_{n=1}^{\infty} f(2^n x)$ は収束する.

(3) $\sup_{x \in [0, \infty)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f(2^n x) \right| \leq 4$ である.

[2] (1) A は正則であるから $\det A \neq 0$ である. $\det A = \det(-A) = (-1)^n \det A$ であるから n は偶数である.

(2) \mathbb{C}^n における標準エルミート内積を $(x, y) = x \bar{y}$ で表す. A の固有値 λ とその固有ベクトル $v \neq 0$ をとる. $\lambda(v, v) = (Av, v) = (v, \bar{A}v) = (v, -Av) = -\bar{\lambda}(v, v)$ である. $v \neq 0$ より $(v, v) \neq 0$ であるから $\lambda = -\bar{\lambda}$ より λ の実部は 0. よって λ は純虚数である.

(3) $v \in W(B, \alpha)$ に対して $BAv = ABv = \alpha Av$ より $Av \in W(B, \alpha)$ である. よって $W(B, \alpha) \rightarrow W(B, \alpha); v \mapsto Av$ は $W(B, \alpha)$ 上の線形写像である. A は正則であるからこの線形写像は単射. 有限次元であるから全単射であるから $AW(B, \alpha) = W(B, \alpha)$ である.

(4) $i: W(B, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ を包含写像とする. $g: W(B, \alpha) \rightarrow W(B, \alpha); v \mapsto Av$ は $W(B, \alpha)$ 上の同型写像である. \mathbb{R}^n の標準内積に関する $W(B, \alpha)$ の正規直交基底 $\{w_1, \dots, w_k\}$ を一つ固定し, この基底に関する g の表現行列を G とする. $v \in W(B, \alpha)$ に対して $i(Gv) = Ai(v)$ である.

$x = \sum a_i w_i, y = \sum b_i w_i$ に対して $\langle x, y \rangle = \sum a_i b_i$ と定めれば $W(B, \alpha)$ の内積となり, $\langle x, y \rangle = (i(x), i(y))$ である. (\because 基底が正規直交基底)

よって $\langle Gx, y \rangle = (i(Gx), i(y)) = (Ai(x), i(y)) = -(i(x), Ai(y)) = -\langle x, Gy \rangle$ である. よって G は正則な交代行列. したがって k は偶数. B が対称行列であるから, 固有空間の次元は固有値の固有方程式における重複度である. したがって全ての固有値の重複度が偶数であるから, $g_B(t) = f(t)^2$ なら $f(t)$ が存在する.

$\langle x, y \rangle = (i(x), i(y))$ の証明

$w_i = \sum_j c_{i,j} e_j$ とする. $(i(x), i(y)) = \sum_j (\sum_i a_i c_{i,j}) (\sum_k b_k c_{k,j}) = \sum_{i,j,k} a_i b_k c_{i,j} c_{k,j} = \sum_{i,k} a_i b_k (w_i, w_j) = \sum_{i,k} a_i b_k \delta_{i,k} = \sum_i a_i b_i = \langle x, y \rangle$ である.

別解

$W = W(B, \alpha)$ の基底 $\{t_1, \dots, t_k\}$ をとり, \mathbb{R}^n に延長して $\{t_1, \dots, t_n\}$ を得る. シュミットの正規直交化法をつかって $\{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n\}$ を得る. k 個目までは W の元である. g の $\{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_k\}$ に関する表現行列を G とする. f の $\{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n\}$ に関する表現行列を F とする. G は F の首座小行列である. $\tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 & \dots & \tilde{t}_n \end{pmatrix}$ とすれば, $F = \tilde{T}^{-1} A T$ である. T は直交行列であるから F は交代行列. よって G は交代行列. (1) より k は偶数.

[3] X の開集合全体を \mathcal{O} とすると, $\mathcal{O} = 2^{\mathbb{Q}} \cup \{\mathbb{R}\}$ である. 実際これは位相の定義をみたとす.

(1) $A \in 2^{\mathbb{Q}}$ に対して $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \in A \subset \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}$ である. また $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ であるから, f は連続.

(2) $\sqrt{2}$ を含む開集合は \mathbb{R} のみである. $\sqrt{3}$ についても同様. よってハウスドルフでない.

(3) X の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{O}\}$ を任意にとる. $\sqrt{2}$ を含む開集合が S に存在する. $\sqrt{2}$ を含む開集合は \mathbb{R} のみであるから, $\mathbb{R} \in S$ である. よって有限部分被覆 $\{\mathbb{R}\}$ が存在するからコンパクト.

(4) $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$ である. $\{0\}$ は \mathbb{R} では閉集合であるから, f が連続なら \mathbb{Q} は X で閉集合である. すなわち, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は X で開集合であるがこれは矛盾. よって f は連続でない.

[4] (1) $1/(z^2+1)^{n+1}$ の $z = i$ まわりのローラン展開を $\sum_k a_k (z-i)^k$ とする. $1/(z+i)^{n+1} = \sum_k a_k (z-i)^{k+n+1}$ であるから, $k+n+1 < 0$ なら $a_k = 0$ である. 両辺の n 回微分に i を代入する. 左辺は $(-n-1)(-n-2)\dots(-2n)(2i)^{-2n-1} = (-1)^n (2i)^{-2n-1} (2n)!/n!$ である. 右辺は $a_{-1} n!$ であるから, $a_{-1} = (-1)^n (2i)^{-2n-1} (2n)!/(n!)^2$ である. これが留数.

(2)

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}} \right| = \left| \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}} dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{R}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}} \right| dz \leq \int_0^\pi \frac{R}{|R^2-1|^{n+1}} dz = \frac{\pi R}{|R^2-1|^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

(3) $\int_{-1}^1 1/(x^2+1)^{n+1} dx$ は有限値をとる. $\int_1^\infty 1/(x^2+1)^{n+1} dx, \int_{-\infty}^{-1} 1/(x^2+1)^{n+1} dx$ はそれぞれ収束する. よって $\int_{-\infty}^\infty 1/(x^2+1)^{n+1} dx$ は収束する. $\int_{-R}^R 1/(z^2+1)^{n+1} dz = \int_{C_R} 1/(z^2+1)^{n+1} dz - \int_{\Gamma_R} 1/(z^2+1)^{n+1} dz$ である. (C_R は $-R$ から R まで進み G_R 上を反時計まわりに進む経路) 留数定理と (2) より

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = 2\pi i \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 (2i)^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \pi = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \pi$$

0.16 H30 数学 A

[1] (1) $f(X)$ が連結でないと仮定する. このとき, $f(X) \subset U \cup V$ なる Y の開集合 U, V で $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ かつ $U \cap f(X) \neq \emptyset, V \cap f(X) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する. $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = X$ であり, $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は X の開集合である. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = \emptyset$ で, $f^{-1}(U) \neq \emptyset, f^{-1}(V) \neq \emptyset$ であるから, X は連結でない. これは矛盾. よって, $f(X)$ は連結である.

(2) $Y = \{0, 1\}$ で Y に密着位相をいれる. $X = \{0, 1\}$ で X に離散位相をいれる. このとき $f(x) = x$ は連続であり, X はハウスドルフ空間である. しかし $Y = f(X)$ はハウスドルフ空間でない.

(3) $f(X)$ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $T = \{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆である. X はコンパクトであるから, T の有限部分集合 $\{f^{-1}(U_{\lambda_i})\}_{i=1}^n$ が存在して, $X = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i})$ となる. $f(X) = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ であり, $f(X)$ はコンパクトである.

[2] (1) $f^d(V) = V^d$ とする. $V^{d+1} = f^{d+1}(V) = f^d(f(V)) \subset f^d(V) = V^d$ である. よって, ベクトル空間の降下列 $V = V^0 \supset V^1 \supset \dots \supset V^n \supset \dots$ が定まる. f^d が零写像であるから $V^d = 0$ である. 降下列であるから

次元は単調減少する. $V^{i-1} = V^i$ なる i が存在したとき, $V^{i+1} = f^{i+1}(V) = f(V^i) = f(V^{i-1}) = V^i$ となるから, 以降すべて等しい. よって次元は小さくなり続けたのち, ある次元で以降不変になる.

$f^d = 0$ より, $V^d = 0 = V^{d+1}$ である. また $f^{d-1} \neq 0$ より $V^{d-1} \neq 0$ である. すなわち V^d までは次元は小さくなり続ける. $\dim V = n$ より $d \leq n$ である.

(2) $v \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$ について, ある $w \in V$ が存在して $f(w) = v$ である. $0 = f(v) = f(f(w)) = f(w) = v$ であるから, $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ である.

(3) 求める最大元は $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ である. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す.

V の基底を $\{v_1, \dots, v_n\}$ とする. $g(v_i) = \begin{cases} 0 & (i \leq m) \\ v_{i-m} & (i > m) \end{cases}$ とする. g は線形写像である. $\text{Im}(g) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$ であり, $\ker(g) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$ である. m の定義から $m \leq n - m$ であるから,

$\dim(\text{Im}(g) \cap \ker(g)) = \dim \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = m$ である. よって $m \in A$ である.

次元定理より $f: V \rightarrow V$ に対して $n = \dim V = \dim \text{Im}(f) + \dim \ker(f)$ である. よって $\dim(\text{Im}(f) \cap \ker(f)) \leq \min\{\dim \text{Im}(f), \dim \ker(f)\} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ である.

よって $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ は A の上界である. よって m は求める最大元である.

[3] (1) $2 - \cos x > 0$ より $0 \leq \int_0^x 2 - \cos t dt = 2x - \sin x$ である. よって $0 \leq \int_0^x 2t - \sin t dt = x^2 + \cos x - 1$ である. よって $0 \leq \int_0^x t^2 + \cos t - 1 dt = \frac{1}{3}x^3 + \sin x - x$ である.

よって $f_n(x) = n^{p+1}(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) \leq n^{p+1}(\frac{1}{3}(\frac{x}{n})^3) = \frac{x^3}{3n^{2-p}}$ である. $p < 2$ なら $0 < 2 - p$ より $n \rightarrow \infty$ で $f_n(x) \rightarrow 0$ である.

(2) 任意の有界閉区間 I について, $\forall x \in I, |x| \leq M$ とできる $M > 0$ が存在する. $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ が一様コーシー列であることを示す. $n > m$ に対して $|S_n(x) - S_m(x)| = |\sum_{k=m+1}^n f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{M^3}{3k^{2-p}} = \frac{M^3}{3} \sum_{k=m+1}^n k^{p-2}$ である. $p < 1$ より $p - 2 < -1$ であるから, $\sum_{k=m+1}^n k^{p-2} \leq \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k t^{p-2} dt = \int_m^n t^{p-2} dt = \frac{1}{p-1}(n^{p-1} - m^{p-1}) \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) である. よって一様コーシー列であるから, 一様収束する.

(3) $|x| < \pi/6$ のとき, $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$ である. よって $0 \leq \int_0^x \cos t - \frac{1}{2} dt = \sin x - \frac{x}{2}$ である. よって $0 \leq \int_0^x \sin t - \frac{t}{2} dt = -\cos x - \frac{x^2}{4} + 1$ である. よって $0 \leq \int_0^x -\cos t - \frac{t^2}{4} + 1 dt = -\sin x - \frac{x^3}{12} + x$ である. すなわち $\frac{x^3}{12} \leq x - \sin x$ ($|x| < \pi/6$) である.

よってある x に対して $\frac{x}{n} < \frac{\pi}{6}$ なる n について $f_n(x) = n^{p+1}(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) \geq \frac{x^3}{12n^{2-p}}$ である. すなわち $p > 2$ なら $n \rightarrow \infty$ で $f_n(x) \rightarrow \infty$ である.

$p < 2$ のとき (1) より $f(x) = 0$ に各点収束する. $x = n\pi/2$ とすると, $f(n\pi/2) = 0, f_n(n\pi/2) = n^{p+1}(\frac{\pi}{2} - 1)$ であるから, \mathbb{R} 上で一様収束しない.

$p = 2$ のとき, 各 x について $f_n(x) = n^3(\frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n}) = n^3(\frac{1}{3!}(\frac{x}{n})^3 - \frac{1}{5!}(\frac{x}{n})^5 + \dots) \rightarrow \frac{x^3}{6}$ ($n \rightarrow \infty$) である. よって $g(x) = \frac{x^3}{6}$ に各点収束する. $g(n\pi/2) = \frac{(n\pi/2)^3}{6} = n^3 \frac{\pi^3}{48}, f_n(n\pi/2) = n^3(\frac{\pi}{2} - 1)$ より一様収束しない.

[4] (1)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{iz}}{e^z - e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} + iz e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{(z - i\pi)e^{iz}}{e^z - e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^{iz} + i(z - i\pi)e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = -\frac{1}{2e^\pi}$$

である. よって $\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{2}, \text{Res}(f(z), i\pi) = -\frac{1}{2e^\pi}$ である.

(2)

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz \right| \leq \left| \int_0^\pi \frac{e^{i(R+it)}}{e^{R+it} - e^{-(R+it)}} i dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{-t}}{e^{R+it} - e^{-(R+it)}} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{||e^R| - |e^{-R}||} dt = \frac{1 - e^{-\pi}}{e^R - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\left| \int_{\Gamma_R^-} f(z) dz \right| \leq \left| \int_0^\pi \frac{e^{i(-R+it)}}{e^{-R+it} - e^{-(-R+it)}} i dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{-t}}{e^{-R+it} - e^{R-it}} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{||e^{-R}| - |e^R||} dt = \frac{1 - e^{-\pi}}{e^R - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

(3)

図のように積分経路 $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ とそれらをつなげてできる閉曲線 C を定める. C 内で f は正則であるから $\int_C f(z)dz = 0$ である.

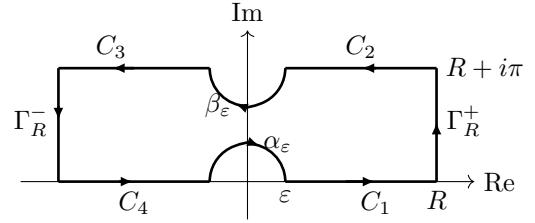


図 1 積分経路の図

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z)dz &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx \\ \int_{C_4} f(z)dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_R^{\varepsilon} -\frac{e^{i(-x)}}{e^{-x} - e^x} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{-\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx \\ \int_{C_2} f(z)dz &= \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}} dx = e^{-\pi} \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{ix}}{-e^x + e^{-x}} dx = e^{-\pi} \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx \\ \int_{C_3} f(z)dz &= \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}} dx = -e^{-\pi} \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{e^x - e^{-x}} dx = e^{-\pi} \int_{\varepsilon}^R \frac{-\cos x + i \sin x}{e^x - e^{-x}} dx\end{aligned}$$

である. $z = 0, z = i\pi$ は f の一位の極であるから, 原点近傍で有界になるように, $f(z)$ から主要部を引けば $\varepsilon \rightarrow 0$ で 0 になる.

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_\varepsilon} f(z)dz &= \int_{\alpha_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{2z} dz + \int_{\pi}^0 \frac{1}{2\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \rightarrow -\frac{i\pi}{2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \\ \int_{\beta_\varepsilon} f(z)dz &= \int_{\beta_\varepsilon} f(z) + \frac{1}{2e^\pi z} dz + \int_0^{-\pi} -\frac{1}{2e^\pi \varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \rightarrow \frac{i\pi}{2e^\pi} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)\end{aligned}$$

である. よって $0 = \int_C f(z)dz = 2i(1 + e^{-\pi}) \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} dx + \int_{\alpha_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\beta_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_R^+} f(z)dz + \int_{\gamma_R^-} f(z)dz$ である. $R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ とすると, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} dx = -\frac{\pi(e^{-\pi} - 1)}{4(e^{-\pi} + 1)}$ である.

0.17 H31 数学 A

[1] (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ である. また f_N は連続であるから, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ である. 以上より, $\forall x_* \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_*)| + |f_N(x_*) - f(x_*)| < 3\varepsilon$ であるから, f は連続である.

(2) $a \geq x > 0$ のとき, 平均値の定理から $u(\frac{x}{n}) - u(0) = \frac{x}{n} u'(\alpha_n), u(-\frac{x}{n}) - u(0) = -\frac{x}{n} u'(\beta_n)$ となる $-\frac{x}{n} < \beta_n < 0 < \alpha_n < \frac{x}{n}$ が存在する. よって $u_n(x) = \frac{x}{n}(u'(\alpha_n) - u'(\beta_n))$ である. 平均値の定理から $u'(\alpha_n) - u'(\beta_n) = u''(\gamma_n)(\alpha_n - \beta_n)$ となる $-\frac{x}{n} < \beta_n < \gamma_n < \alpha_n < \frac{x}{n}$ が存在する. よって $u_n(x) = \frac{x}{n}(u''(\gamma_n)(\alpha_n - \beta_n))$ である. $\alpha_n - \beta_n \leq \frac{2x}{n}$ であり, また u'' は $[-a, a]$ 上連続であるから, 有界である. よって $\forall n, u''(\gamma_n) < M$ とできる $M > 0$ が存在する. 以上より $|u_n(x)| \leq \frac{2x^2}{n} |u''(\gamma_n)| \leq \frac{2a^2 M}{n^2}$ である. よって $\sum |f_n(x)| \leq 2a^2 M \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ である. これは $-a \leq x < 0$ でも成立し, また $x = 0$ なら $u_n(x) = 0$ であるから $x = 0$ でも成立する. ワイエルシュトラスの M 判定法より, $u_n(x)$ は絶対一様収束する. また (1) より収束先の関数は連続である.

[2] (1) $N^2 \neq O$ より $N^2 u \neq 0$ なる $u \in \mathbb{C}^3$ が存在する. この u について $c_1 u + c_2 Nu + c_3 N^2 u = 0$ とすると, N^2 を左からかければ, $c_1 N^2 u = 0$ より $c_1 = 0$ である. よって N をかければ $c_2 N^2 u = 0$ より $c_2 = 0$ である. よって $c_3 = 0$ である. よって $u, Nu, N^2 u$ は一次独立である.

$$(2)(1) \text{ の } P = \begin{pmatrix} N^2 u & Nu & u \end{pmatrix} \text{ とすれば } P \text{ は正則で } J := P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$g: V \rightarrow V$ を $g(X) = JX - XJ$ とする. $f(PXP^{-1}) = NPXP^{-1} - PXP^{-1}N = Pg(X)P^{-1}$ である. $f^2(PXP^{-1}) = f(Pg(X)P^{-1}) = Pg(g(X))P^{-1} = Pg^2(X)P^{-1}$ である. 繰り返して $f^k(PXP^{-1}) = Pg^k(X)P^{-1}$ である. P は正則であるから, $f^k = 0 \Leftrightarrow g^k = 0$ である. また $g^k = 0$ ならば $g^{k+1} = 0$ である.

$g^2(X) = J(JX - XJ) - (JX - XJ)J = J^2X - 2JXJ + XJ^2, g^3(X) = J^2(JX - XJ) - 2J(JX - XJ)J + (JX - XJ)J^2 = -3J(JX - XJ)J, g^4(X) = -3J(J^2 - 2JXJ + XJ^2)J = 6J^2XJ^2, g^5(X) = 6J^2(JX - XJ)J^2 = 0$ である。よって $g^5 = 0$ である。

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $J^2XJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ であるから、 $g^4 \neq 0$ である。よって $g^k = 0$ となる最小の k は 5 である。

[3] (1) $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ が距離関数であるとは次の条件を満たすことである。

$$(i) \forall x, y \in A, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(ii) \forall x, y \in A, d(x, y) = d(y, x)$$

$$(iii) \forall x, y, z \in A, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

(2) 任意の異なる二点 $x, y \in A$ について $d(x, y) > 0$ である。 $\varepsilon = d(x, y)/2$ とすれば、 $x \in B(x, \varepsilon) := \{a \in A \mid d(x, a) < \varepsilon\}, y \in B(y, \varepsilon), B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ である。よって A はハウスドルフ空間である。

(3) $x \in A$ を一つ固定する。 $S = \{B(x, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は A の開被覆である。コンパクトであるから、有限部分集合 $\{B(x, n_i) \mid i = 1, \dots, m\}$ が存在して、 $A \subset \bigcup_{i=1}^m B(x, n_i)$ となる。 $n = \max_{i=1, \dots, m} n_i$ とすれば $A \subset B(x, n)$ である。したがって任意の二点 $y, z \in A$ について $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < 2n$ である。

(4) $x \in U_{x,y}, y \in V_{x,y}, U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ となる開集合対 $(U_{x,y}, V_{x,y})$ を各 $(x, y) \in C_1 \times C_2$ ごとに定める。

$S_y = \{U_{x,y} \mid x \in C_1\}$ は C_1 の開被覆であるから、有限部分集合 $C'_{1,y} \subset C_1$ が存在して、 $S'_y = \{U_{x,y} \mid x \in C'_{1,y}\}$ が C_1 の開被覆となる。また $V_y = \bigcap_{x \in C'_{1,y}} V_{x,y}$ とする。有限個の共通部分であるから V_y は開集合である。

$T = \{V_y \mid y \in C_2\}$ は C_2 の開被覆であるから、有限部分集合 $C'_2 \subset C_2$ が存在して、 $T' = \{V_y \mid y \in C'_2\}$ が C_2 の開被覆となる。 $U = \bigcap_{y \in C'_2} \left(\bigcup_{S'_y} U_{x,y} \right), V = \bigcup_{y \in C'_2} V_y$ とする。 C'_2 は有限集合であるから、 U, V は開集合である。

S'_y は C_1 の開被覆であるから、 $C_1 \subset U$ であり、また $C_2 \subset V$ も明らか。 $z \in U \cap V$ とすると、ある $y' \in C'_2$ について $z \in V_{y'} \subset V_{x,y'} \quad (\forall x \in C'_{1,y'})$ である。また $z \in U$ より $\forall y \in C'_2$ について $z \in \bigcup_{S'_y} U_{x,y}$ である。とくに $z \in \bigcup_{S'_{y'}} U_{x,y'}$ である。したがってある $x' \in C'_{1,y'}$ について $z \in U_{x',y'}$ である。よって $z \in U_{x',y'} \cap V_{x',y'}$ となり矛盾。よって $U \cap V = \emptyset$ である。

[4] (1) $zf(z)$ は $z = 0$ で正則であるから、 $z = 0$ は f の一位の極である。よって $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \frac{1}{a^2}$ より主要部は $\frac{1}{a^2z}$ である。

(2) $f(z) - \frac{1}{a^2z}$ は原点近傍で有界である。よって $\int_{C_r} f(z) - \frac{1}{a^2z} dz \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$ である。よって $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{1}{a^2z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{1}{a^2 r e^{i\theta}} r i e^{i\theta} d\theta = \frac{i\pi}{a^2}$ である。

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\exp(i e^{i\theta})}{r e^{i\theta} (r^2 e^{2i\theta} + a^2)} r i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\exp(-\sin \theta)}{(r^2 e^{2i\theta} + a^2)} \right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{1}{|r^2 - a^2|} d\theta = \frac{\pi}{|r^2 - a^2|} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

(3) $D_{r,R}$ の内部に f は $z = ia$ を特異点にもち、 $z = ia$ を除いて f は $D_{r,R}$ で正則であるから留数定理より $\int_{\partial D_{r,R}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia)$ である。 $\lim_{z \rightarrow ia} (z - ia)f(z) = \frac{e^{ia}}{ia(ia+ia)} = -\frac{1}{2a^2 e^a}$ より $\int_{\partial D_{r,R}} f(z) dz = -\frac{\pi i e^{-a}}{a^2}$ である。

(4) $\partial D_{r,R}$ と実軸の正の部分との共通部分を α_1 、負の部分との共通部分を α_2 とする。向きは $\partial D_{r,R}$ と同じ向きを入れる。 $\int_{\alpha_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)} dx = \int_r^R \frac{\cos x + i \sin x}{x(x^2+a^2)} dx$ である。また $\int_{\alpha_2} f(z) dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)} dx =$

$\int_R^r \frac{e^{-ix}}{-x(x^2+a^2)}(-1)dx = \int_r^R \frac{-\cos x + i \sin x}{x(x^2+a^2)}dx$ である. よって

$$\begin{aligned} -\frac{\pi i e^{-a}}{a^2} &= \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\partial D_{r,R}} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left(\int_{-C_r} f(z) dz + \int_{\alpha_1} f(z) dz + \int_{\alpha_2} f(z) dz \right) \\ &= -\frac{i\pi}{a^2} + \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left(\int_r^R \frac{2i \sin x}{x(x^2+a^2)} dx \right) = -\frac{i\pi}{a^2} + 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx \\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx &= \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a}) \end{aligned}$$

0.18 R2 数学 A

[1] (1) 一様連続でないを仮定する. このとき $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [0, 1], |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ である. $\delta = \frac{1}{n}$ として, x_n, y_n を定める. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は有界閉区間 $[0, 1]$ に含まれるので, 収束部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}_{n=1}^\infty$ を持つ. $|y_{\varphi(n)} - x_*| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - x_*| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - x_*| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) より, $y_{\varphi(n)} \rightarrow x_*$ である.

よって $\varepsilon \leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \rightarrow |f(x_*) - f(x_*)| = 0$ となり矛盾する.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 一様収束性からある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall x \in [0, 1], \forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ である. この N について f_N の連続性から, $\exists \delta > 0, \forall x \in [0, 1], |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_*)| < \varepsilon$ である. よって $|x - x_*| < \delta$ なら $|f(x) - f(x_*)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_*)| + |f_N(x_*) - f(x_*)| < 3\varepsilon$ となるから連続.

$|f(x)|$ は有界閉区間の連続関数だから最大値 M が存在する. また一様収束するから, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| < M$ である. すなわち $|f_n(x)| < 2M$ ($n > N, x \in [0, 1]$) である.

f_n の最大値を M_n とし, $L := \max\{M, M_1, \dots, M_N\}$ とする. このとき $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq L$ ($x \in [0, 1]$) である.

有界閉区間の定数関数はルベグ可積分であるから, ルベグの収束定理より, $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ である.

[2] (1) $|PQ|$ で線分 PQ の長さを表す. $|PQ| = \sqrt{54}$ である. よって $|PR| = \sqrt{(m+4)^2 + (n+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{54}$ である. $\overrightarrow{PQ} = (5, 5, -2), \overrightarrow{PR} = (m+4, n+1, -1)$ で内積は $\sqrt{54}^2 \cos \frac{\pi}{3} = 27$ であるから, $5(m+4) + 5(n+1) + 2 = 27$ である. よって $m+n=0$ である. $54 = (m+4)^2 + (-m+1)^2 + 1$ より, $m=3, -6$ である. よって $(m, n) = (3, -3), (-6, 6)$ である.

(2) $\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\}$ は線形独立である. よってこの基底からつくられる全ての内積が, f で保たれることが f が直交変換であることの必要十分条件.

$m=3, n=-3$ のとき, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -9, (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) = -9, (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}) = -9$ である. よって (*) を満たす全ての f は直交変換だから, $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OR}$ より 2 個.

$m=-6, n=6$ のとき, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -9, (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) = 18, (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}) = 18$ である. $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OR}$ より (*) を満たす直交変換は存在しない.

[3] (1) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ が x, y に収束するとする. $x \neq y$ ならハウスドルフであるから, 開集合 U, V が存在して $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ である. x に収束するから, ある N_1 が存在して $\forall n > N_1, x_n \in U$ である. 同様に y に収束するから, ある N_2 が存在して $\forall n > N_2, x_n \in V$ である. $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると, $x_n \in U \cap V$ となり矛盾する. よって $x=y$ である.

(2) $X = \{0, 1\}$ として X に密着位相をいれる. $x_n = 0$ とする数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は $0, 1$ に収束する.

(3) $f(x)$ を含む任意の開集合 V をとる. $x \in f^{-1}(V) = U$ であるから, ある N が存在して $\forall n > N, x_n \in U$ である. よって $\forall n > N, f(x_n) \in V$ であるから $f(x_n)$ は $f(x)$ に収束する.

[4] (1) $f(z) = \frac{\exp(-z^2/2)}{z}$ とする. $z=0$ は f の一位の極で, 主要部は $\frac{1}{z}$ である. よって $f(z) - \frac{1}{z}$ は原点近傍で正則であるから, 有界である. よって $\int_{C_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{z} dz \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) である. $\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = \frac{i\pi}{4}$

であるから, $\int_{C_\varepsilon} f(z)dz \rightarrow \frac{i\pi}{4}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) である.

(2)

$$\left| \int_{S_R} \frac{\exp(-z^2/2)}{z} dz \right| = \left| \int_0^R \frac{\exp\left(\frac{y^2-R^2}{2}\right) e^{iRy}}{R+iy} idy \right| \leq \frac{1}{Re^{\frac{R^2}{2}}} \int_0^R e^{\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{Re^{\frac{R^2}{2}}} \int_0^R e^{\frac{y^2}{2}} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{R^2}{2}} + R^2 e^{\frac{R^2}{2}}} e^{\frac{R^2}{2}} = 0$$

よって $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{\exp(-z^2/2)}{z} dz = 0$ である.

(3) $I_{\varepsilon,R}$ を ε から R までの実軸上の積分経路とする. $D_{\varepsilon,R}$ を $R+Ri$ から $(\varepsilon+\varepsilon i)/\sqrt{2}$ までの積分経路とする.

$-C_\varepsilon, I_{\varepsilon,R}, S_R, D_{\varepsilon,R}$ を結んでできる閉曲線を C とする. f は原点以外で正則であるか, $\int_C f(z)dz = 0$ である.

$$\int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_R^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2(1+i)^2}{2}\right)}{x(1+i)} (1+i)dx = - \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\exp(-ix^2)}{x} dx = - \int_\varepsilon^R \frac{\cos x^2}{x} dx - \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{\cos x^2}{x} dx + i \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\sin x^2}{x} dx$$

$$\int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x} dx, \quad \int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \cos x^2}{x} dx - \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{\cos x^2}{x} dx + i \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^R \frac{\sin x^2}{x} dx$$

ここで $\frac{\cos x^2}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x^4}{2x} + \dots$ であるから, $\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{\cos x^2}{x} dx - \frac{1}{x} dx \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) である. また $\int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}^\varepsilon \frac{1}{x} dx = \log \sqrt{2}$ である.

よって

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow 0} \int_{-C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz + \int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)dz$$

$$= -\frac{i\pi}{4} + \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \cos x^2}{x} dx - \log \sqrt{2} + i \int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \cos x^2}{x} dx = \log \sqrt{2}$$

0.19 R4 数学 A

[1] (1) $[0, \frac{\pi}{4}]$ と $[\frac{\pi}{4}, \infty)$ にわけて収束をしらべる.

$x \in [0, \pi/4]$ で $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ である. 不等式を 0 から x まで積分すると, $\frac{1}{2}x \leq \sin x \leq x$ を得る.

$$\int_0^{\pi/4} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-2}} \right]_0^{\pi/4} & (\alpha \neq 2) \\ [\log x]_0^{\pi/4} & (\alpha = 2) \end{cases} \quad \text{であるから } \alpha < 2 \text{ で絶対収束する.}$$

$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2x^{\alpha-1}} dx$ であるから, $\alpha \geq 2$ で発散する.

$1 < \alpha < 2$ のとき, $\int_{\pi/4}^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \leq \int_{\pi/4}^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{\pi/4}^\infty$ であるから $\alpha > 1$ で絶対収束する.

$\alpha \leq 1$ のとき, $p > q \geq \pi/4$ に対して

$$\left| \int_q^p \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \left| \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha} \right]_q^p - \int_q^p \frac{\cos x}{\alpha x^{\alpha+1}} dx \right| \leq \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{p^\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_q^p \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx \leq \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{p^\alpha} + \left[-\frac{1}{x^\alpha} \right]_q^p \rightarrow 0 \quad (p, q \rightarrow \infty)$$

であるから, $\alpha \leq 1$ で収束する.

以上より $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ は $\alpha < 2$ で収束する.

(2)(1) の計算から $1 < \beta < 2$ で収束し, $\beta \geq 2$ で発散することがわかる.

$\beta \leq 1$ のとき, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\beta} dx &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{(x+n\pi)^\beta} dx \geq \frac{1}{((n+1)\pi)^\beta} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{((n+1)\pi)^\beta} \\ \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{((n+1)\pi)^\beta} \end{aligned}$$

よって $\beta \leq 1$ で発散する.

以上より $1 < \beta < 2$ で収束し, $\beta \leq 1, 2 \leq \beta$ で発散する.

[2] (1) $b(x, y) = x^T A y = x^T (-A^T) y = -((Ax)^T y)^T = -y^T (Ax) = -b(y, x)$.

(2)(1) より $y \in \ker f$ のときに示せば十分. $b(x, y) = x^T A y = x^T 0 = 0$.

(3) $Ax = v + u, v \in V, u \in \ker f$ と一意に表せる. $B(x, v) = b(x, Ax - u) = x^T A(Ax - u) = x^T A^2 x = -x^T A^T A x = -(Ax)^T A x$ である. $x \in V$ より $Ax \neq 0$ であるあから, $(Ax)^T A x \neq 0$. よって $B(x, v) \neq 0$.

(4) $\det A = \det -A^T = (-1)^n \det A$ より n が奇数なら $\det A = 0$.

(5) V の基底 $\{v_1, \dots, v_k\}$ を一つ固定する. $b_{ij} = B(v_i, v_j)$ として行列 $M = (b_{ij})$ を定める. $x = \sum x_i v_i, y = \sum y_j v_j \in V$ に対して $B(x, y) = (\sum_i x_i v_i)^T A (\sum_j y_j v_j) = \sum_{i,j} x_i y_j v_i^T A v_j = \sum_{i,j} x_i y_j b_{ij} = x^T M y$ である. (この転置は \mathbb{R}^n の標準基底による座標の転置ではなく, 固定した V の基底による座標の転置) (1) から $b_{ij} = b(v_i, v_j) = -b(v_j, v_i) = -b_{ji}$ であるから M は交代行列. M が正則でないとする. このときある $x \in V$ について $Mx = 0$ であるが任意の y について $B(x, y) = -B(y, x) = -y^T Bx = 0$ となり (3) に矛盾. よって M は正則. $\det M \neq 0$ だから (4) より k は偶数. $\text{rank } A = n - \dim \ker f = \dim V = k$ より $\text{rank } A$ は偶数.

[3] (1) 任意の $x \in X$ について $(x, y) \in U$ より $x \in S_x, y \in V_x, S_x \times V_x \subset U$ なる開集合 S_x, V_x が存在する. $\{S_x \mid x \in X\}$ は X の開被覆であるから有限部分被覆 $\{S_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$ が存在する. $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ とすると任意の $x \in X, y \in V$ について $x \in S_{x_i}$ なる x_i が存在して $y \in V_{x_i}$ であるから $(x, y) \in U$. よって $X \times V \subset U$ である.

(2) $X \times Y$ の閉集合 C を任意にとる. $U := X \times Y \setminus C$ とする. $y \notin P_Y(C)$ について $X \times y \subset U$ であるから (1) より $X \times V_y \subset U$ なる開集合 V_y が存在する. $V := \bigcup_{y \in P_Y(C)} V_y$ とすると, $Y \setminus P_Y(C) \subset V$ である. $v \in V$ に対して $X \times \{v\} \subset U$ であるから $\forall x \in X, (x, v) \notin C$ である. よって $v \notin P_Y(C)$ であるから $Y \setminus P_Y(C) = V$ より P_Y は閉写像.

[4] (1) f の極は $z = i, -i$ である. $z = i$ の留数は $\lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{e^{xi}}{2i}$ である. $z = -i$ の留数は $\lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \frac{e^{-xi}}{-2i}$ である.

(2) $i, -i$ は共に D の内部の点である. 留数定理から $\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{e^{xi}}{2i} + \frac{e^{-xi}}{-2i} \right) = \pi(e^{xi} - e^{-xi}) = 2\pi i \sin x$ である.

(3) C_1 を $1+Ri$ から Ri への有向線分, C_2 を半径 R の円の実部が負の部分を実時計回りに周る曲線, C_3 を $-Ri$ から $1-Ri$ への有向線分とする. C_1, C_2, C_3, L_R を合わせると C となる. $R > 2$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} f(z) dz \right| &= \left| \int_1^0 \frac{e^{x(t+Ri)}}{(t+Ri)^2 + 1} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{xt}}{t^2 - R^2 + 1 + tRi} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{e^x}{R^2} dt \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \\ \left| \int_{C_3} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^1 \frac{e^{x(t-Ri)}}{(t-Ri)^2 + 1} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{xt}}{t^2 - R^2 + 1 - tRi} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{e^x}{R^2} dt \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \\ \left| \int_{C_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{xRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} Ri e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| \frac{e^{xR \cos \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} R \right| d\theta \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{R}{R^2 - 1} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

よって $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sin x$ である.

0.20 R5 数学 A

[1] (1) $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{2n}$ である. $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ とする. $S_{2n}(0) = \sum_{k=1}^{2n} f_k(0) = \sum_{k=1}^n f_{2k-1}(0) + f_{2k}(0) = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2(2k-1)} + \frac{1}{2(2k)} = \sum_{k=1}^n \frac{-2}{4k(4k-2)}$ である. よって $S_{2n}(0)$ は単調減少である. $S_{2n+1}(0) = \frac{-1}{2} + \sum_{k=1}^n f_{2k}(0) + f_{2k+1}(0) = \frac{-1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(2k)} - \frac{1}{2(2k+1)} = \frac{-1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{2}{4k(4k+2)}$ である. よって $S_{2n+1}(0)$ は単調増加である. $S_{2n+1}(0) = S_{2n}(0) + \frac{-1}{2(2n+1)}$ より $S_{2n+1}(0) < S_{2n}(0)$ である. よって共に有界数列であるから, 収束する. また $\lim S_{2n+1}(0) = \lim(S_{2n}(0) + \frac{-1}{2(2n+1)}) = \lim S_{2n}(0)$ より極限值は一致する. よって $S_n(0)$ は収束する.

(2) $|f_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{2n+\sin x} \right| = \frac{1}{2n+\sin x} \geq \frac{1}{2n+1}$ である. よって $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1} dx$ より発散する.

(3) まずは各点収束することを示す. (1) と同様に $S_{2n}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2(2k-1)+\sin x} + \frac{1}{2(2k)+\sin x} = \sum_{k=1}^n \frac{-2}{(4k+\sin x)(4k-2+\sin x)}$ である. よって $S_{2n}(x)$ は単調減少である. $S_{2n+1}(x) = \frac{-1}{2+\sin x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(2k)+\sin x} - \frac{1}{2(2k+1)+\sin x} = \frac{-1}{2+\sin x} + \sum_{k=1}^n \frac{2}{(4k+\sin x)(4k+2+\sin x)}$ である. よって $S_{2n+1}(x)$ は単調増加である. $S_{2n+1}(x) = S_{2n}(x) + \frac{-1}{2(2n+1)+\sin x}$ より $S_{2n+1}(x) < S_{2n}(x)$ である. よって共に有界数列であるから, 収束する. また $\lim S_{2n+1}(x) = \lim(S_{2n}(x) + \frac{-1}{2(2n+1)+\sin x}) = \lim S_{2n}(x)$ より極限值は一致する. よって $S_n(x)$ は収束する. $S_n(x)$ が $S(x)$ に各点収束するとする.

$$|S(x) - S_{2n}(x)| = \left| \sum_{k=2n+1}^{\infty} f_{2k-1}(x) + f_{2k}(x) \right| = \left| \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{-2}{(4k+\sin x)(4k-2+\sin x)} \right| \leq \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{2}{(4k-3)(4k-1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$|S(x) - S_{2n+1}(x)| = \left| \sum_{k=2n+2}^{\infty} f_{2k}(x) + f_{2k+1}(x) \right| = \left| \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{2}{(4k+\sin x)(4k+2+\sin x)} \right| \leq \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{2}{(4k-1)(4k+1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

共に x について一様収束する. よって $S_n(x)$ は $S(x)$ に一様収束する.

[2] (1) $\{w, f(w), f^2(w), \dots, f^m(w)\}$ が一次独立であり $\{w, f(w), f^2(w), \dots, f^{m+1}(w)\}$ が一次従属となるような最小の m をとる. $m = n - 1$ なら V の次元が n であることより条件をみたすから, このような m は存在する.

一次従属であるから, $f^{m+1}(w) = a_0 w + a_1 f(w) + \dots + a_m f^m(w)$ となる $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ が存在する. このとき $f^{m+2}(w) = a_0 f(w) + a_1 f^2(w) + \dots + a_m f^{m+1}(w) = a_0 w + (a_1 + a_0) f(w) + \dots + (a_m + a_{m-1}) f^m(w)$ と表せる. f^{m+3}, f^{m+4}, \dots も同様に表せる.

よって $f^n(w)$ は $w, f(w), f^2(w), \dots, f^{m-1}(w)$ の線形結合で表せるから $f^n(w) \in W$.

(2)(1) で定めた m について, W は $\{w, f(w), \dots, f^m(w)\}$ で生成されるから, m 次元ベクトル空間. よって $k = m$ である.

(3) $\dim W = n$ より $W = V$ である. よって $\{w, f(w), \dots, f^{n-1}(w)\}$ は V の基底である. この基底に関する

る, f の表現行列は $f^n(w) = \alpha w$ より
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 である. よって固有方程式は

$$\det \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -t \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\alpha + (-t)^n$$

である.

[3] (1) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ とする. ある正の実数 r が存在して, $rx_1 = x_2, r^{-1}y_1 = y_2$ である. よって $x_1 = r^{-1}x_2, y_1 = ry_2$ で r^{-1} は正の実数であるから, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ である.

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2), (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ とする. ある正の実数 r_1, r_2 が存在して, $r_1x_1 = x_2, r_1^{-1}y_1 = y_2, r_2x_2 = x_3, r_2^{-1}y_2 = y_3$ である. よって $r_2r_1x_1 = x_3, (r_2r_1)^{-1}y_1 = y_3$ であるから, $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$ である.

よって \sim は同値関係である.

(2) $a \neq 0, b \neq 0$ のとき $A_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = ab, ax > 0\}$ である. 実際, $(x, y) \sim (a, b)$ なら $rx = a, r^{-1}y = b$ より $xy = ab$ であり, $r > 0$ より a と x は同符号である. また $xy = ab \neq 0$ より $x \neq 0, y \neq 0$ であるから $ax > 0$ である. 逆に (x, y) が $xy = ab, ax > 0$ を満たすとする. $x/a = r > 0$ とすれば, $ar = x, r^{-1}b = y$ であり $(x, y) \sim (a, b)$ である.

$a < 0, b \neq 0$ のとき $A_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y = 0\}$ である. これは明らか. よって $B = \bigcup_{(a,b) \in I} A_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -1 \leq xy \leq 1, x < 0\}$ である. したがって $\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -1 \leq xy \leq 1, x \leq 0\}$ より $\overline{B} \setminus B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$ である.

(3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ から X への標準射影を p とする. $A_{-1,0}$ と $A_{0,1}$ について考える. $A_{-1,0} \in U \subset X$ なる開集合 U について $(-1, 0) \in A_{-1,0} \subset p^{-1}(U)$ よりある $\varepsilon > 0$ が存在して $(-1, 0)$ を中心とする半径 ε の開球 $B((-1, 0), \varepsilon) \subset p^{-1}(U)$ である. 同様に $A_{0,1} \in V \subset X$ なる開集合 V について $(0, 1) \in A_{0,1} \subset p^{-1}(V)$ よりある $\delta > 0$ が存在して $B((0, 1), \delta) \subset p^{-1}(V)$ である. $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\}$ とする. $(-1, \gamma) \in p^{-1}(U), (-1, -\gamma) \in p^{-1}(V)$ である. $p(-1, \gamma) \sim p(-1, -\gamma)$ であるから $A_{-1,\gamma} \in U, A_{-1,-\gamma} \in V$ である. よって $U \cap V \neq \emptyset$ である.

任意の開集合 U, V について成り立つから, X はハウスドルフでない.

[4] (1) $1 < |z| < 2$ なら $\frac{|z|}{2} < 1, \frac{1}{|z|} < 1$ である. よって共に有界数列であるから $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots) - \frac{1}{z}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots)$ である.

(2) $\sin z$ の零点は $z = n\pi$ である. $(\sin z)'|_{n\pi} = (-1)^n$ であるから, $z = n\pi$ は $\sin z$ の一位の零点である. すなわち $\sin z = (z - n\pi)g(z), g(n\pi) \neq 0$ となる正則関数 $g(z)$ が存在する. また $|f(n\pi)| \leq |\sin n\pi| = 0$ より $f(n\pi) = 0$ である. $h(z) = \frac{f(z)}{\sin z}$ とする. $\lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi)h(z) = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$ である. すなわち $z = n\pi$ は $h(z)$ の除去可能な特異点である. $|h(z)| \leq 1$ となるから, リュービルの定理より h は定数関数で $h(z) \equiv \alpha \in \mathbb{C}$ とできる. したがって $f(z) = \alpha \sin z$ である.

(3) 実数値関数 u, v を用いて $g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表せる. g は正則関数であるから, u, v は C^∞ 級関数である. またコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ を満たす.

実数値関数 s, t を用いて $\overline{g(x + iy)} = s(x, y) + it(x, y)$ と表せる. $\overline{g(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$ であるから, $s(x, y) = u(x, -y), t(x, y) = -v(x, -y)$ である. したがって s, t は C^∞ 級関数である. $s_x = u_x = v_y = t_y, s_y = -u_y = v_x = -t_x$ であるから, s, t はコーシー・リーマンの方程式を満たす. よって $\overline{g(\bar{z})}$ は正則関数である.