0.1 H9 数学必修

$\boxed{1}$ (a) グリーンの定理から $\int_C(xdy-ydx)/2=\int\int_D(1-(-1))/2dxdy=\int\int_D dxdy$.
囲まれる領域を D，$\partial D=C$，求める面積を V とする．
$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta), r=1+\cos\theta$ より $dx=(-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)d\theta, dy=(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta$.

$$
\begin{aligned}
\int_C xdy &= \int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\theta+\cos^2\theta+\cos^3\theta+\cos^4\theta-\cos\theta\sin^2-\cos^2\theta\sin^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}2\cos^4\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\left(\frac{\cos^2 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{3}{4}d\theta=\frac{3\pi}{2} \\
\int_C ydx &= \int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta(-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\sin^2\theta+3\cos\theta\sin^2+2\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}d\theta=-\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

よって $V=(\frac{3\pi}{2}-\frac{-3\pi}{2})/2=\frac{3\pi}{2}$.
(b)
(A) 反例を与える．
$a=0,b=1,f_n(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1},g(x)=0$ とする．$x\in[0,1]$ について $|f_n(x)-g(x)|\le\frac{1}{n+1}$ より，$f_n(x)$ は $[0,1]$ で $g(x)$ に一様収束する．$f_n'(x)=x^n$ は $[0,1]$ で $h(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ に各点収束するから，$f_n'(x)$ は $[0,1]$ で $g'(x)=g(x)$ に一様収束しない．

(B)$f_n(x)=\int_{x_0}^x f_n'(t)dt$ とかける．$|f_n(x)-f(x)|=|\int_{x_0}^x(f_n'(t)-f'(t))dt|\le\int_{x_0}^x|f_n'(t)-f'(t)|dt$ より，$f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (a) は (b) において $T=S$ とすればよい．(b) を示す．$|S|+|T|>G$ のとき, $g\in G$ について $|gT^{-1}|=|T|$ であるから，$|S|+|gT^{-1}|>G$ より $S\cap gT^{-1}\ne\emptyset$．$S\cap gT^{-1}\ni s$ とすると，$s=gt^{-1}$ となる $t\in T$ が存在する．すなわち $g=st\in ST$.

$\boxed{3}$ (a)$x\in\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}/\sim$ における同値類を $[x]$ で表す．$[0]\ne[1]$ である．$R/\sim$ の開集合 $[0]\in U,[1]\in V$ で $U\cap V=\emptyset$ となるものが存在すると仮定する．自然な全射 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$ を π とする．

$0\in\pi^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}$ の開集合であるから，ある ε が存在して $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\pi^{-1}(U)$．任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $x/2^n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ となる n が存在する．よって $\pi^{-1}\pi(-\varepsilon,\varepsilon)=\mathbb{R}$ より $\pi(-\varepsilon,\varepsilon)$ は $\mathbb{R}/\sim$ の開集合である．$1/2^n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ なる n が存在するから $[1]\in\pi(-\varepsilon,\varepsilon)\subset U$．これは矛盾．

(b)$x,y'\in\mathbb{R}$ に対して，$|x-2^n y'|$ が最小となる n を n_0 として，$y=2^{n_0}y', |x-y|=d$ とする．$[x]\neq[y]$ と仮定する．必要なら x,y をいれかえることで $x\leq y$ としてよい．このとき $y=x+d$ となる．y の取り方から $2^{-1}y+d<x$ である．

$\mathbb{R}_+$ から $\mathbb{R}_+/\sim$ への自然な全射を π とする．$x\in U=\pi((x-d/2,x+d/2)), y\in V=\pi((y-d/2,y+d/2))$ とする．

$\pi^{-1}\pi((x-d/2,x+d/2))=\left\{z\in\mathbb{R}_+ \mid {}^{\exists}\alpha\in(x-d/2,x+d/2), {}^{\exists}m\in\mathbb{Z}, z=2^m\alpha\right\}=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(2^m(x-d/2),2^m(x+d/2))$．より U は開集合．同様に V も開集合．

$U\cap V\neq\emptyset$ とする．$[z]\in U\cap V$ とすると，$x-d/2<2^m z<x+d/2, y-d/2<2^n z<y+d/2$ なる $m,n\in\mathbb{Z}$ が存在する．

$2^m z<x+d/2=y-d/2<2^n z$ より $m\leq n-1$．$2^{n-1}z<2^{-1}y+d/4<x-3d/4<2^m z$ より $n-1\leq m$．よって $m=n-1$．

$2^m+1z<y+d/2$ より，$2^m z-d/4<2^{-1}y$ であり，$x-d/2<2^m z$ より，$x-2^{-1}y<3d/4<d$ となり，これは y の取り方に矛盾．よって $U\cap V=\emptyset$.

$\boxed{4}$ (a) $B_1,B_2\in V(A), c\in\mathbb{C}$ とすると，$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$ より $B_1+B_2\in V(A)$．$A(cB)=cAB=cBA$ より $cB\in V(A)$．よって $V(A)$ は $\mathbb{C}$ の部分空間.

(b) 固有方程式 $g_A(t)=\begin{vmatrix}-t&0&1\\1&-t&0\\0&1&-t\end{vmatrix}=-t^3+1=0$ より $\omega=e^{2\pi i/3}$ とすると，固有値は $1,\omega,\omega^2$.

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

固有値 ω に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-\omega&0&1\\1&-\omega&0\\0&1&-\omega\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\omega^2\\0&1&-\omega\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}\omega^2\\\omega\\1\end{pmatrix}$.

固有値 ω^2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-\omega^2&0&1\\1&-\omega^2&0\\0&1&-\omega^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\omega\\0&1&-\omega^2\\0&0&0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}\omega\\\omega^2\\1\end{pmatrix}$.

固有値 λ とその固有ベクトル x に対して $B\in V(A)$ は $ABx=BAx=B\lambda x=\lambda Bx$ より Bx も λ に対する固有ベクトル．$1,\omega,\omega^2$ に対応する 3 つの固有ベクトルからなる集合は $\mathbb{C}^3$ の基底であるから，B は 3 つ固有ベクトルの行き先から一意に決まる．各固有ベクトルは固有空間の次元が 1 であることから，$x\in W(\lambda)$ について $Bx=cx$ となる $c\in\mathbb{C}$ が存在する．

各固有空間について定数 c を定めれば，B が定まるから，$V(A)$ は 3 次元.