0.1 H22 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h22.pdf $\boxed{1}$ (1) $W \subset V$ が V の部分空間であるとは，任意の $v, w \in W$ に対して $v+w \in W$ であり，任意の $r \in \mathbb{R}, w \in W$ に対して $rv \in W$ であることである．

(2)$x, y \in W$ なら $A(x+y) = AX + Ay = 0$ より $x+y \in W$ であり $k \in \mathbb{R}, x \in W$ に対して $A(kx) = kAx = 0$ より $kx \in W$ であるから W は部分空間.

(3)A が正則でないような a を求める．$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 \\ 1-a & a & a \\ a-1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 \\ -1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 \\ 0 & a+1 & 2a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ a+1 & 2a \end{vmatrix} = (a-1)(2a - a^2(a+1)) = -a(a-1)^2(a+2)$ より $a = 0, 1, -2$ のとき正則でない.

$a = 0$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は 2 であるから $\dim W = 1$

$a = 1$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の階数は 1 であるから $\dim W = 2$

$a = -2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ より階数は 2 であるから $\dim W = 1$

$\boxed{2}$ (1)$a, c \in F_p^\times, b, d \in F_p$ とする．$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$ac \in F_P^\times, ad+b \in F_p$ であるから G は乗法で閉じている．G の乗法が結合律を満たすことは明らか．また単位元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ も明らか. $a \in F_p^\times$ に対して逆元 $c \in F_p^{times}$ が唯一存在して $ac = 1$ である．$d = -cb$ と定めれば $ad = -b$ であるから $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が逆元である．よって G は群である．

(2)$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, X = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ を任意にとる．$ac = ca = 1$ として c を定める．

$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -cb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & -acb+ae+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ae \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ である．よって N は正規部分群.

(3)$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より X の位数は 2.

$Y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より Y の位数は 3.

$Z^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で $b \neq 0$ なら $2^n b = 0$ となる n は存在しないから位数は無限.

$b = 0$ なら位数は 1.

$\boxed{3}$ (1)$f(x) = x(x-1/2)(x+1)$ とすれば $f(0)=0, f(1)=1$ である．f が全射であることは明らか．$f(0)=f(1/2)$ より単射ではない．

(2)$f(x)=\arctan(x)/\arctan(1)$ とすると $f(0)=0, f(1)=1$ であり f は単射であるが $f(x)=10$ をみたす x は存在しないから全射でない．

(3)$f(x)=\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$ とすると $f(0)=0, f(1)=1$ で f の像は $[0,1]$ だから有界閉集合，すなわちコンパクト．

$\boxed{4}$ (1)$n=1$ のとき，$f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt$ である．$\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f(t)dt$ より $n=1$ で成り立つ．

$n \le k-1$ で成り立つとする．$n=k$ のとき，

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \int_0^x f_{k-1}(x)dx = \int_0^x \int_0^t \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!} f(s)dsdt \\ &= \int_0^x \int_s^x \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!} f(s)dtds \\ &= \int_0^x f(s) \int_s^x \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!} dtds \\ &= \int_0^x f(s) \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} ds \end{aligned}$$

より成り立つ．

(2)

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt \right| \le \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f(t)|dt \\ &\le [-(x-t)^n/n!]_0^x \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \frac{1}{n!} \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \end{aligned}$$

(3)x を固定すると $\sum_{k=0}^n f_k(x) \le \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \to e \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad (n\to\infty)$ より各点収束する．よって $g(x)=\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ と定められる．

$|g(x)-g_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\right| \le \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k!}$ である．$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |g(x)-g_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k!} = 0$ より一様収束する．

(4)g_n が一様収束することから $\int_0^x g(t)+f(t)dt = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty f_k(t)dt = \sum_{k=0}^\infty \int_0^x f_k(t)dt = \sum_{k=0}^\infty f_{k+1}(x) = g(x)$ である．

よって $g(x)$ は微分可能であり $g'(x)=g(x)+f(x)$ である．

(5)

$$\left| e^{x-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(x-t)^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} \right| \le \sum_{k=n+1}^\infty \frac{x^k}{k!} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

より $\sum_{k=0}^n \frac{(x-t)^k}{k!}$ は $t\in[0,x]$ について一様収束する．したがって

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^\infty f_k(x) = \sum_{k=1}^\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dt = \int_0^x \sum_{k=1}^\infty \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dt \\ &= \int_0^x e^{x-t} f(t)dt \end{aligned}$$