0.1　H25 数学必修

`https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h25.pdf`

$\boxed{1}$ (1)H_1 の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ である．H_2 の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}$ である．H_3 の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ である．

(2) 原点を O としてベクトル OA_1 が H_1 の法線ベクトルとなる．したがって $A_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ で $d_1 = \sqrt{3}$.

同様にして $A_2 = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}$ で $d_2 = 1$，$A_3 = \begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ で $d_3 = 1$ である．

(3)$A = (a_1, a_2, a_3)$ とする．$\det A \neq 0$ なら a_1, a_2, a_3 は一次独立である．$\det A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1 & \cos\theta & 0\\1 & \sin\theta & \cos\theta\\1 & 0 & \sin\theta\end{vmatrix} = \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta$ である．$1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta \geq \frac{1}{2}$ より θ に依らず一次独立.

(4)A の行列式の絶対値は a_1, a_2a_3 によって張られる平行六面体の体積であるから $V(\theta) = \frac{1}{6}|\det A| = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\sin 2\theta$ である．$0 \leq \theta \leq \pi$ より $V(\theta)$ は $\theta = 3\pi/4$ のとき最大値 $1/4$ をとり，$\theta = \pi/4$ のとき最小値 $1/12$ をとる．

$\boxed{2}$ (1)G を位数 p の群，e を G の単位元とする．$x \in G\setminus\{e\}$ をとる．x で生成される部分群 $\langle x\rangle$ の位数はラグランジュの定理から p の約数である．よって $1, p$ のいずれか．1 なら $x = e$ となり矛盾．よって $x = p$ でありすなわち $G = \langle x\rangle$.

(2)G を位数 6 のアーベル群とする．

位数 3 の元 x が存在するとき $\langle x\rangle$ は指数が 2 であるから正規部分群である．よって $y \in g$ をもちいて $G = \langle x\rangle \cup y\langle x\rangle$ とでき，$y^2 \in \langle x\rangle$ である．$y^3 = e$ なら $y \in \langle x\rangle$ 取り矛盾．よって $y^2 = e$ である．$(xy)^i = x^iy^i = e$ となるのは $i \in 3\mathbb{Z}\cap 2\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ のとき．よって (xy) の位数は 6．よって巡回群.

巡回群でないと仮定しさらに位数 3 の元が存在しないとき．単位元以外の元は位数が 2 である．$x \in G \setminus \{e\}$ をとる．$\langle x\rangle$ は正規部分群であるから剰余群 $G/\langle x\rangle$ を得る．これは位数が 3 であるから (1) より巡回群．よって $y \notin \langle x\rangle$ が存在して $G = \langle x\rangle \cup y\langle x\rangle \cup y^2\langle x\rangle$ である．これは y の位数が 2 でないことを示す．これは矛盾.

シローの定理を使えば簡単．シローの定理から 3 シロー部分群 H が存在しその生成元を x とする．2 シロー部分群も存在しその生成元を y とする．xy は位数が 6 である．

(3)G を位数 4 の群とする．位数 4 の元が存在すればアーベル群であるから，元の位数は高々 2 と仮定する．$G = \{e, x, y, z\}$ とかける．$xy = x$ なら $y = e$ となるから $xy \neq x$．同様に $xy \neq y$ である．$xy = e$ なら $y = x^{-1} = x$ となり矛盾．よって $xy = z$ である．yx についても同様に考えると $yx = z$ と分かる．同様にして $xz = y = zx, yz = x = zy$ である．よって G はアーベル群である．

(4) シローの定理からシロー 5 部分群 $\langle x\rangle$ が存在する．シロー 5 部分群の数を n とすると，n は 3 の約数で

あり，5 で割ると 1 あまるから $n=1$．よって $\langle x\rangle$ は正規部分群である．同様にシロー 3 部分群 $\langle y\rangle$ も正規部分群である．$\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=\{e\}$ であり $G/\langle x\rangle=\{\langle x\rangle, y\langle x\rangle, y^2\langle x\rangle\}$ とできるから，$G\cong\langle x\rangle\times\langle y\rangle\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_3\cong\mathbb{Z}_{15}$．

$\boxed{3}$ (1)(a)$0\le k\le N-1$ のとき $|y_{k+1}-y_k|=|\delta(k+1)x/|x|-\delta kx/|x||=\delta$ であるから成り立つ．

$k=N$ のとき $|y_{N+1}-y_N|=|x-\delta Nx/|x||=||x|-\delta N|<\delta$ より成り立つ．

(b)${}^\forall\varepsilon>0, {}^\exists\delta>0, {}^\forall x,y\in\mathbb{R}, (|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$ が成り立つとき，f は一様連続であるという．

(c)$\varepsilon=1$ に対して一様連続性から存在が分かる $\delta>0$ をとる．この δ と $x\in\mathbb{R}$ に対して (1) のように $y_0,\dots,y_{N+1}$ を定める．$|f(x)|-|f(0)|\le|f(x)-f(0)|\le\sum_{i=0}^N|f(y_{i+1})-f(y_i)|<(N+1)\varepsilon\le(|x|/\delta+1)\varepsilon$ である．よって $|f(x)|\le\varepsilon|x|/\delta+\varepsilon-|f(0)|$ となる．$C=\max\{\varepsilon/\delta,\varepsilon-|f(0)|\}$ とすれば $|f(x)|\le C|x|+C=C(|x|+1)$ である．

(2)$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dxdy<\infty$ である．フビニの定理から $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dxdy=\int_0^1\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dydx=\int_0^1x^2\sqrt{x^3+1}dx=[(x^3+1)^{3/2}]_0^1 2/9=2(2\sqrt{2}-1)/9$

$\boxed{4}$ (1) 位相空間 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフ空間であるとは，Y の任意の 2 点 x,y に対して $x\in U, y\in V$ なる $U,V\in\mathcal{O}_Y$ が存在し $U\cap V=\emptyset$ となることである．

(2)$x\in S_2$ に対して $f(x)\neq g(x)\in Y$ より開集合 $x\in U, y\in V$ が存在して $U\cap V=\emptyset$ である．このとき $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=W$ とすると $x\in W$ である．$x'\in W$ について $f(x')\in U, g(x')\in V$ であるから $f(x')\neq g(x')$ である．よって $x'\in S_2$ となり $W\subset S_2$ である．

よって S_2 は開集合．

(3)$n=2$ のときは (1) で示した．$n-1$ 以下で成立すると仮定する．$S_{f_1,\dots,\hat{f}_i,\dots,,f_n}=\{x\in X\mid f_1(x),\dots,f_i\hat{(x)},\dots,,f_n(x)\}$ と定める．ただし $\hat{f}_i$ で f_i を除いたものを表す．このとき $S_n=\bigcap_{i=1}^n S_{f_1,\dots,\hat{f}_i,\dots,,f_n}$ である．仮定から各 $S_{f_1,\dots,\hat{f}_i,\dots,,f_n}$ は開集合であるから S_n も開集合である．帰納法から全ての $n\ge3$ について証明できた．

(4)$X=Y=\mathbb{R}$ としそれぞれ標準的な位相を入れる．$T=\{px+q\mid p,q\in\mathbb{Q}\}$ とする．T は可算集合であるから $T=\{f_1,f_2,\dots\}$ と書ける．$px+q=p'x+q'$ となる p,q,p',q' が存在すると仮定する．このとき $(p-p')x=q'-q$ である．$p-p'=0$ なら $q'-q=0$ である．$p-p'\neq0$ なら $x=(q'-q)/(p-p')$ であるから x は有理数である．逆に x が有理数なら p,q を適当にとれば等式が成り立つ．よって $S_\infty=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ である．有理数の稠密性から S_∞ は開集合でない．