0.1 H29 数学必修

$\boxed{1}$ (1) 標準基底に関する f,g の表現行列を F,G とすると，$F=\begin{pmatrix}1&2&-2&1&5\\-4&1&-3&0&0\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}1&1\\-7&4\\-3&0\\5&2\\1&-2\end{pmatrix}$

である．よって $GF=A=\begin{pmatrix}-3&3&-5&1&5\\-23&-10&2&-7&-35\\-3&-6&6&-3&-15\\-3&12&-16&5&25\\9&0&4&1&5\end{pmatrix}, FG=B=\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}$ である．

(2)$g_B(t)=\begin{vmatrix}3-t&1\\-2&-t\end{vmatrix}=(3-t)(-t)-(-2)=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$ である．固有値 1 に対する固有ベクトルは $B-2E=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-2\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ である．

固有値 2 に対する固有ベクトルは $B-E=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ である．

よって $P=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ である．

(3)F の一列目と二列目は一次独立であるから $\mathrm{rank}F=2$ である．よって $\dim\ker f=5-\dim\mathrm{Im}f=5-2=3$ である．

(4)$g\circ f(g(v))=g\circ Bv=g(\lambda v)=\lambda g(v)$ より $g(v)$ は $g\circ f$ の固有値 λ の固有ベクトル．

(5)$x\in kerf$ に対して $g\circ f(x)=0\cdot x$ であるから固有値 0 で固有空間の次元は 3 である．よって固有空間の次元の和が 5 となるから対角化可能で対角行列は $\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$ である．$\boxed{2}$

(1)$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}$ とする．$ad-bc\neq 0, eh-fg\neq 0$ である．$AB=\begin{pmatrix}ae+bg&af+bh\\ce+dg&cf+dh\end{pmatrix}$ であり，$(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)=(ad-bc)(eh-fg)\neq 0$ である．よって積について閉じている．

$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ は明らかに $E\in G$ であり, G の単位元である．$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ であり，$A^{-1}\in G$ である．

(2)A の行列式が 0 でないとは列ベクトルが一次独立であることである．一列目の選び方は 0 ベクトルを除いた p^2-1 通り．二列目は一列目の定数倍を除いた p^2-p 通り．よって $|G|=(p^2-1)(p^2-p)$ である．

(3)$\det\colon G\to F_p^{\times}; A\to ad-bc$ は $b=c=0, d=1$ とすることで全射であると分かる．準同型であることは (1) での計算から明らか.

(4)$\{E\},G$ は G の正規部分群である．また $N=\ker\det=\{A\in G\mid \det A=1\}$ は $X\in N$ について $\det A^{-1}XA=\det A^{-1}\det X\det A=\det X=1$ より正規部分群である．

(5)$a \in \mathbb{Z}$ の F_p での同値類を $[a]$ で表す．$C = \begin{pmatrix} [1] & [1] \\ 0 & [1] \end{pmatrix}$ とすると，$C^n = \begin{pmatrix} [1] & [2]^n \\ 0 & [1] \end{pmatrix}$ である．2 と p は互いに素であるから $[2]^n = [1]$ となる最小の n は $p-1$ である．したがって C で生成される部分群は位数が p である．

$\boxed{3}$ (1) ダランベールの公式から $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} \frac{((n+1)!)^3}{(3(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{27}$ より $\rho = \frac{1}{27}$ である．

(2)$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ とする．$J_g = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ であるから $g^{-1}(0)$ の任意の点で全射である．よって 0 は g の正則値である．ラグランジュの未定乗数法より極値点では $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ なる λ が存在する．$J_f = \begin{pmatrix} y & x & 0 \end{pmatrix}$ であるから $2x = \lambda y, 2y = \lambda x, 2z = 0$ である．$x = 0$ なら $y = 0$ となり $x^2+y^2+z^2 = 0$ となるから $x \neq 0$．同様に $y \neq 0$ である．よって $4xy = \lambda^2 xy$ より $\lambda = \pm 2$ である．$x^2 + (\frac{\lambda x}{2})^2 + 0^2 = 2x^2 = 1$ より $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である．したがって極値点の候補は $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ である．それぞれの点での値は $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{2}$ である．単位球面はコンパクトであり f は実数値連続関数であるから必ず最大値，最小値を持つ．よって最大値は $\frac{1}{2}$，最小値は $-\frac{1}{2}$ である．

極座標変換する方法もある．$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ とすると $f(x,y) = xy = r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi$ である．単位球面上であるから $r = 1, \theta \in [0,\pi], \phi \in [0, 2\pi]$ である．最大値は $\theta = 0, \pi$ かつ $\phi = \pi/4, 5\pi/4$ であり，最小値は $\theta = 1/2$ である．最小値も同様にして $-\frac{1}{2}$ である．

(3)$x + y = s, \sqrt{2}y = t$ と変数変換するとヤコビアンは $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}$ であり，積分領域は $\left\{(s,t) \mid 0 \le s \le 1, 0 \le t \le \sqrt{2}\right\}$ である．よって

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+s^2} \frac{1}{\sqrt{2}} dt ds = \int_0^1 \frac{s}{1+s^2} ds \\
&= \left[\frac{1}{2}\log\left(1+s^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

である．

$\boxed{4}$ $U_{-\infty} = X, U_\infty = \emptyset$ と表すことにする．sup や max は拡大実数の順序で考える．(1)$\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$ である．$\bigcup_{a\in A} U_a = U_{\inf A}, \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_n} = U_{\max_{1\le i\le n} a_i}$ であるから $\mathcal{O}_X$ は位相空間の公理を満たす．

(2)0, 1 について 0 を含む開集合 U_a は $0 > a$ であるから $1 \in U_a$ となる．よってハウスドルフでない．

(3)$\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は X の開被覆であるが有限部分被覆を持たないのでコンパクトでない．

(4)$0 \in A$ を含む X の開集合 U_a について $0 > a$ より $U_a \cap A = A$ である．したがって A の開被覆は $0 > a$ なる U_a を用いて $U_a \cap A$ と表せる開集合をもち，それは A であるから有限部分被覆 $\{A\}$ をとれる．よってコンパクト．

(5)$f^{-1}(U_0) = \{x \mid x < 0\}$ である．これは開集合でないから連続写像でない．