0.1 H27 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$ である．任意の $\varepsilon>0$ に対して一様収束するから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば，$^\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ である．この N に対して f_N は一様連続であるから，ある $\delta>0$ が存在して，$|x-y|<\delta$ ならば $|f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon$ である．よって，$|x-y|<\delta$ ならば，$|f(x)-f(y)|<3\varepsilon$ である．すなわち，f は一様連続である．

(2) 一様収束するから任意の $\varepsilon>0$ について，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば，$^\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x)-\varepsilon<f(x)<f_n(x)+\varepsilon$ である．両辺の sup をとって $\sup A \leq \sup A_n+\varepsilon$ である．よって A は有界．$|\sup A-\sup A_n|<\varepsilon$ より $\limsup A_n=\sup A$

$\boxed{2}$ (1)$f_a(e_1)=a^te_1-e_1^ta=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-a_2&-a_3\\a_2&0&0\\a_3&0&0\end{pmatrix}=-a_2E_1-a_3E_2, f_a(e_2)=\begin{pmatrix}0&a_1&0\\-a_1&0&-a_3\\0&a_3&0\end{pmatrix}=a_1E_1-a_3E_3, f_a(e_3)=\begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&0&a_2\\-a_1&-a_2&0\end{pmatrix}=a_1E_2+a_2E_3$ である．

よって $T_a=\begin{pmatrix}-a_2&a_1&0\\-a_3&0&a_1\\0&-a_3&a_2\end{pmatrix}$ である．

(2)$\det T_a=-a_2(-a_1(-a_3))+a_3a_1a_2=0$ より $\operatorname{rank} f_a \leq 2$ である．

$a \neq 0$ よりある i について $a_i \neq 0$ である．T_a の部分小行列として $\begin{pmatrix}a_1&0\\0&a_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_2&0\\0&a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_3&0\\0&-a_3\end{pmatrix}$ がとれる．これらの行列式は何れかが 0 でないから $\operatorname{rank} f_a \geq 2$ である．よって $\operatorname{rank} f_a=2$ である．したがって $\dim \operatorname{Im} f_a=2, \dim \operatorname{Ker} f_a=1$ である．

(3)T_a の固有多項式を g_a とすると $g_a=\begin{vmatrix}-a_2-\lambda&a_1&0\\-a_3&-\lambda&a_1\\0&-a_3&a_2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+(a_2^2-2a_1a_3)\lambda=-\lambda(\lambda^2-(a_2^2-2a_1a_3))$ である．

よって $a_2^2-2a_1a_3 \neq 0$ ならば T_a の固有値は全て異なるから，対角化可能．$a_2^2-2a_1a_3=0$ ならば，T_a の固有値は 0 のみである．固有値 0 の固有空間は $\ker T_a$ であるから $a \neq 0$ なら固有空間の次元は 1 となり，対角化不可能．$a=0$ ならば $T_a=0$ であるから対角化可能.

以上より $a=0 \vee a_2^2-2a_1a_3 \neq 0$ が対角化可能性に関する必要十分条件である．

$\boxed{3}$ (1)$N_r(A)$ は開集合である．これを示す．$x \in N_r(A)$ を任意にとる．ある $a \in A$ が存在して $b:=r-d(x,a)>0$ である．$y \in B(x,b/2):=\{y \in X \mid d(x,y)<b/2\}$ について $d(a,y) \leq d(a,x)+d(x,y)<r-b+b/2<r$ である．よって $B(x,b/2) \subset N_r(A)$ である．よって $N_r(A)$ は開集合である．

$F_K=\{N_n(K) \mid n=1,2,\ldots\}, F_L=\{N_n(L) \mid n=1,2,\ldots\}$ とする．F_K, F_L は X の開被覆である．とくに K, L の開被覆である．よって L の被覆 $\{N_{n_1}(K), N_{n_2}(K), \ldots, N_{n_m}(K)\}$ と，K の被覆 $\{N_{m_1}(L), N_{m_2}(L), \ldots, N_{m_\ell}(L)\}$ がとれる．$r=n_m+m_\ell$ とすれば，$L \subset N_r(K), K \subset N_r(L)$ である．

(2) 任意の $r>0$ に対して $K \subset N_r(K)$ である．よって $D(K,K)=0$ である．逆に $D(K,L)=0$ とする．任意の $r>0$ について $K \subset N_r(L), L \subset N_r(K)$ である．$x \in K$ に対して，ある $y \in L$ が存在して $d(x,y)<r$ である．この r は任意にとれるから x は L の触点である．距離空間はハウスドルフ空間であり，ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから，L は閉集合である．よって $x \in L$ である．すなわち $K \subset L$ である．同様にして $L \subset K$ である．よって $K=L$ である．

定義から $D(K,L)=D(L,K)$ である．

K,L,M をコンパクト集合とする．$D(K,L)=r_1, D(L,M)=r_2, r:=r_1+r_2$ とする．任意の $\varepsilon>0$ を一つ固定する．$x\in K$ に対して，$y\in L$ が存在して $d(x,y)<r_1+\varepsilon$ である．$y\in L$ に対して，$z\in M$ が存在して $d(y,z)<r_2+\varepsilon$ である．よって $d(x,z)<r_1+r_2+2\varepsilon$ である．すなわち $K\subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(M)$ である．逆も同様に $M\subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(K)$ である．よって $D(K,M)\leq r_1+r_2+2\varepsilon$ である．ε は任意にとれるから $D(K,M)\leq r_1+r_2$ である．よって $D(K,M)\leq D(K,L)+D(L,M)$ である．

$\boxed{4}$ (1)$1+e^{2\pi z}=0$ とする．$z=x+iy \quad (x,y\in\mathbb{R})$ とすると，$e^{2\pi x}e^{2\pi iy}=-1$ である．よって $\sin 2\pi y=0$ であるから，$y=\frac{n}{2} \quad (n\in\mathbb{Z})$ である．よって $e^{2\pi z}=e^{2\pi x}(-1)^n=-1$ より $x=0$ で n は奇数である．S_R 内では $z=i/2$ が唯一の解である．すなわち $f(z)$ は $z=i/2$ を特異点にもつ．

$$\lim_{z\to\frac{i}{2}}(z-\frac{i}{2})\frac{e^{2\pi az}}{1+e^{2\pi z}}=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{e^{2\pi az}+(z-\frac{i}{2})2\pi ze^{2\pi az}}{2\pi e^{2\pi z}}=-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$$

より $\mathrm{Res}\{f(z),i/2\}=-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$ である．

したがって留数定理から $\int_{\gamma_R}f(z)dz=2\pi i(-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi})=-ie^{a\pi i}$ である．

(2)$|\int_{J_R^+}f(z)dz|=|\int_0^1\frac{e^{2\pi a(R+iy)}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}idy|\leq\int_0^1|\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}|dy$ である．

$$\left|\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}\right|=\left|\frac{1}{e^{-2\pi aR}+e^{2\pi R(1-a)}e^{2\pi iy}}\right|\leq\frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$$

であるから，$|\int_{J_R^+}f(z)dz|\leq\int_0^1\frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}dy=\frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$ である．$0<1-a<1$ より $|\int_{J_R^+}f(z)dz|\to 0 \quad (R\to\infty)$ である．同様に $|\int_{J_R^-}f(z)dz|\to 0 \quad (R\to\infty)$ である．

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{-2\pi ax}+e^{2\pi(1-a)x}}dx\leq\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi(1-a)x}}dx+\int_{-\infty}^0\frac{1}{e^{-2\pi ax}}dx<\infty$ である．よって広義積分は収束する．$R+i$ から $-R+i$ への向きのついた線分を C とする．$\int_C\frac{e^{2\pi az}}{1+e^{2\pi z}}dz=\int_R^{-R}\frac{e^{2\pi a(x+i)}}{1+e^{2\pi(x+i)}}dx=-e^{2\pi ai}\int_{-R}^R\frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}}dx$ である．よって $\int_{\gamma_R}f(z)dz=(1-e^{2\pi ai})\int_{-R}^Rf(z)dz+\int_{J_R^+}f(z)dz-\int_{J_R^-}f(z)dz$ である．すなわち $R\to\infty$ で $-ie^{a\pi i}=(1-e^{2\pi ai})\int_{-\infty}^{\infty}f(z)dz$ である．よって $\int_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=\frac{-ie^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}}=\frac{-i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}}=\frac{1}{2\sin a\pi}$ である．