

0.1 H23 数学 A

[1] (1) V の基底として $\{1, x+1, (x+1)^2\}$ をとる. $F(1) = 0, F(x) = x+1, F((x+1)^2) = 2(x+1)^2$ であるから F の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(2) G の表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とし, F の表現行列を A とする. $G \circ F = F \circ G$ は $AB = BA$ と同値である. よって $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 2b_{31} & 2b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 2b_{13} \\ 0 & b_{22} & 2b_{23} \\ 0 & b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix}$ であるから, $b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = 0$ である. したがって $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ である. よって M の次元は 3 である.

[2] (1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $|f_N(x) - f(x)| < 1$ である. f_N は有界であるから $f_N(x) \leq M$ とするとよって $|f(x)| \leq 1 + |f_N(x)| < 1 + M$ である. よって f は有界.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して一様収束性から, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n, m > N$ なら $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ である. この n, m に対してある $M(n) > 0$ が存在して $x > M(n)$ なら $|a_n - f_n(x)| < \varepsilon$ であり, またある $M(m) > 0$ が存在して $x > M(m)$ なら $|a_m - f_m(x)| < \varepsilon$ である. $|a_n - a_m| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m|$ であるから $x > M(n) + M(m)$ をとることで $|a_n - a_m| < 4\varepsilon$ である. すなわち $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である.

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_1$ なら $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ である. またある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_2$ なら $|a_n - A| < \varepsilon$ である. $N = N_1 + N_2$ とする. ある $M > 0$ が存在して $x > M$ なら $|f_N(x) - a_n| < \varepsilon$ である. よって $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - A| < 3\varepsilon$ となる.

[3] (1) $(a, b) \notin G$ を任意にとる. $b \neq f(a)$ と Y がハウスドルフ空間であることから開集合 U, V が存在して $f(a) \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ である. $(a, b) \in f^{-1}(U) \times V$ である. ある $(x, y) \in f^{-1}(U) \times V$ について $f(x) = y$ と仮定する. $f(x) \in U, y \in V$ であるから $y \in U \cap V$ となり矛盾. よって $f^{-1}(U) \times V \cap G = \emptyset$ である. $f^{-1}(U) \times V$ は開集合であるから G は閉集合.

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1/x & (x > 0) \end{cases}$ とする. f は連続でないが G は閉集合である.

[4] (1) $|e^{iz}| = |\exp(ire^{it})| = |\exp(-r \sin t + ir \cos t)| = |\exp(-r \sin t)| \leq 1$ である. よって $|\int_{C_r} f(z) dz| \leq \int_{C_r} \frac{2}{z^2} |dz| = 2 \int_0^\pi \frac{1}{r} |dt| = 2\pi \frac{1}{r} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$ である.

$(1 - e^{iz})/z^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^{n-2} z^{n-2}$ である. よって $\int_{C_r} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^{n-2} \int_{C_r} z^{n-2} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^{n-1} \int_0^\pi r^{n-1} e^{i(n-1)t} dt$ である. $n = 1$ の項については $\int_0^\pi dt = \pi$ である. $n \geq 2$ なら $|\int_0^\pi r^{n-1} e^{i(n-1)t} dt| \leq \int_0^\pi r^{n-1} dt \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$ である. よって $\int_{C_r} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$ である.