0.1　R6 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & b & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ 0 & b-4 & -21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3a+3 \\ 0 & 0 & -3b-9 \end{pmatrix}$ より $a=1, b=-3$ のとき次元は 2 である．$a \neq 1$ または $b \neq -3$ のとき次元は 3 である．

(2)(a)$g_A(t) = \begin{vmatrix} t+2 & 1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1 \\ -1 & 1 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -t^2-4t-3 & -t-3 \\ 1 & t+2 & 1 \\ 0 & t+3 & t+3 \end{vmatrix} = -(t+3)\begin{vmatrix} -t^2-4t-3 & -t-3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(t+3)(-t^2-4t-3+t+3) = t(t+3)^2$ である．(b) 各固有値の固有ベクトルをもとめる．固有値 0 に対して $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

固有値 -3 に対して $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．直交化して $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/21/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$T = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{2}$ (1)(a)$gh_1g^{-1}(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ である．よって部分群である．

(b)$\varphi\colon H \to gHg^{-1}; h \mapsto ghg^{-1}$ とする．$\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ とすると $gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1}$ である．$h_1 = h_2$ である．よって φ は単射である．H は有限であるから φ は全単射である．

(2)(a)x の選び方は 4 通り，y の選び方は 5 通り，よって位数は 20 である．

(b)$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆元は $\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$xy^{-1} \in \mathbb{F}_5^{\times}$ であるから，H は部分群である．

(c)$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$g_1 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1^{-1} = \begin{pmatrix} x & -x+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．$g_2 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2^{-1} = \begin{pmatrix} x & -2x+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $g_1Hg_1^{-1}, g_2Hg_2^{-1}$ は同じ部分群でないから，$H, g_1Hg_1^{-1}, g_2Hg_2^{-1}$ が求める 3 つの部分群である．

$\boxed{3}$ (1)$f_x(x,y) = (-x^2-2x+3-y^2)e^x, f_y(x,y) = -2ye^x$ である．$f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0$ を満たす x, y は $(x,y) = (1,0), (-3,0)$ である．

$f_{xx}(x,y) = (-x^2-4x+1-y^2)e^x, f_{yy}(x,y) = -2e^x, f_{xy}(x,y) = -2ye^x$ である．$(1,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} -4e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}$ である．負定値であるから極大値 $f(1,0) = 2e$ である．$(-3,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 4e^{-3} & 0 \\ 0 & -2e^{-3} \end{pmatrix}$ である．行列式が負であるから鞍点である．

(2)$a \leq 1$ のとき $a_n \leq \frac{1}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$ であるから収束する．

$a>1$ のとき $a=1+\varepsilon, \varepsilon>0$ と表せる．このとき $a^n=(1+\varepsilon)^n>\binom{n}{3}\varepsilon^3$ である．よって $\frac{a^n}{n^2}>\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^2}\varepsilon^3 \to \infty \quad (n\to\infty)$ であるから発散する．

(3)$A=\{(x,y)\mid (x,y)\in D, y\geq x\}, B=D\setminus A$ としてそれぞれの積分を計算する．

A での積分は $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta), 0\leq r\leq 1, \pi/4\leq\theta\leq\pi/2$ として変数変換するとヤコビアンは r である．$\iint_A 1/\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r}{r}drd\theta=\frac{\pi}{4}$ である．

B での積分は $\iint_B 1/\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{1/2}\frac{1}{x}\int_0^x 1/\sqrt{1+(y/x)^2}dydx=\int_0^{1/2}\left[\log\bigl(1+\sqrt{1+1}\bigr)\right]dx=\log\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)/2$ よって $\iint_D 1/\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}+(1+\sqrt{2})/2$ である．

$\boxed{4}$ (1) 位相空間 $(X,\mathcal{O}_1)$ がハウスドルフ空間であるとは，任意の異なる 2 点 $x,y\in X$ に対して開集合 $U,V\in\mathcal{O}_1$ が存在して $x\in U, y\in V, U\cap V=\emptyset$ となることである．

(2) 位相空間 $(X,\mathcal{O}_1)$ がコンパクトであるとは，任意の X の開被覆に対して，有限部分被覆が存在することである．

(3)$f\colon X\to Y$ が連続であるとは，任意の Y の開集合 $V\in\mathcal{O}_2$ に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることである．

(4)$y\in X\setminus C$ を任意にとる．各 $x\in C$ に対してハウスドルフ性から $x\in U_x, y\in V_x, U_x\cap V_x=\emptyset$ となる U_x, V_x が存在する．C はコンパクトであるから C の開被覆 $\{U_x\}_{x\in C}$ に対して有限部分被覆 $\{U_{x_1},\cdots,U_{x_n}\}$ が存在する．$V=\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ とすると $y\in V\in\mathcal{O}_1$ である．したがって y は C の外点である．

(5)$y\in X\setminus I$ について $f(p)\neq g(p)$ であり，Y のハウスドルフ性から $f(p)\in U, g(p)\in V, U\cap V=\emptyset$ となる開集合 U,V が存在する．f,g は連続であるから $f^{-1}(U), g^{-1}(V)$ は X の開集合である．$y\in f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ である．$x\in f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ について $f(x)=g(x)$ なら $f(x)\in U, g(x)\in V$ となり $U\cap V=\emptyset$ に矛盾．よって $f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)\cap I=\emptyset$ である．すなわち y は外点である．