0.1 H28 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ よって逆行列は $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ である.

(2)$g_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 1 \\ 0 & 1-t & 1-t \\ 1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & -1 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} =$
$(1-t)((2-t)(3-t)-2) = -(t-1)^2(t-4)$ である.

よって固有値は $1, 4$

(3) 各固有値の固有ベクトルをもとめる. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が 1 の固有ベクトル. 直交化すると $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が 4 の固有ベクトル.

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば P は直交行列で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(4)A の固有値 λ とその固有ベクトル $x \neq 0$ をとる. $x, y \in \mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積を $(x, y) = x^T\bar{y}$ とする. $\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, \overline{A^T}x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x,x)$. $(x,x) > 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ すなわち λ は実数.

$\boxed{2}$[1] (1)$x, y \in H \cap H'$ のとき $xy^{-1} \in H, xy^{-1} \in H'$ であるから $xy^{-1} \in H \cap H'$ である. よって $H \cap H'$ は部分群.

(2)$hn, h'n' \in HN$ とすると, $(hn)(h'n')^{-1} = hn(n')^{-1}h'^{-1} = h(n(n')^{-1})h'-1 \in N$ であるから HN は部分群.

(3)$x, y \in f^{-1}(H')$ とすると $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H'$ より $xy^{-1} \in f^{-1}(H')$

[2] (1)$x \in \mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ における剰余類を $[x]$ とする. $([x],[y]) \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ とする. $5x - 4y \equiv x \pmod 4, 5x - 4y \equiv y \pmod 5$ より $(5x-4y)([1],[1]) = ([x],[y])$ となるから巡回群.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ が位数 20 の巡回群であるから $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ と同型.

よってその生成元の数は $0 \leq i \leq 19$ のうち 20 と互いに素な整数の個数. すなわち 8 個.

(2)m, n の最小公倍数を d として $m = dm', n = dn'$ とする. $\ell = dm'n'$ とする. $([x],[y]) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする. $\ell([x],[y]) = ([0],[0])$ となるから $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の任意の元は位数は ℓ 以下である. $d \geq 2$ より $\ell < mn$ であるから生成元を持たない.

$\boxed{3}$ (1)f は C^∞ 級関数である．

$$f_x = 6e^{3x} - 6e^x \cos y, f_y = 6e^x \sin y + 3\sin 2y$$
$$f_{xx} = 18e^{3x} - 6e^x \cos y, f_{yy} = 6e^x \sin y + 6\cos 2y, f_{xy} = 6e^x \sin y$$

$f_x = f_y = 0$ となる (x, y) を求めると，$e^{2x} = \cos y, e^x \sin y + 2\sin y \cos y = 0$ より $\sin y(e^x + e^{2x}) = 0$ よって $y = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ すなわち $\cos y = \pm 1$．$e^{2x} = \cos y$ より $(0, 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z})$ が求める点である．

これらの点でのヘッセ行列が正定値となる必要十分条件は $f_{xx}|_{(0,2n\pi)} > 0, f_{xx}|_{(0,2n\pi)} f_{yy}|_{(0,2n\pi)} - f_{xy}^2|_{(0,2n\pi)} > 0$ である．

$f_{xx}|_{(0,2n\pi)} = 12, f_{yy}|_{(0,2n\pi)} = 12, f_{xy}|_{(0,2n\pi)} = 0$ よって常に正定値.

以上より f は $(0, 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z})$ で極小値を持つ．

(2)$A = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}, B = \left\{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \geq 1\right\}$ とする．$D = A - B$ である．

よって $\int\int_D x^3 - 3xy^2 dxdy = \int\int_A x^3 - 3xy^2 dxdy - \int\int_B x^3 - 3xy^2 dxdy$ である．

$x^3 - 3xy^2$ は $f(x, y) = -f(-x, -y)$ であるから $\int\int_A x^3 - 3xy^2 dxdy = 0$ である．

$x - 1 = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換するとヤコビアンは r であり，$\int\int_B x^3 - 3xy^2 dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r\cos\theta + 1)^3 - 3r^4 \cos\theta \sin^2\theta d\theta dr$ である．$\sin, \cos$ の周期性を考えれば，$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r\cos\theta + 1)^3 - 3r^3(r\cos\theta + 1)\sin^2\theta d\theta dr$ $= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(3r^2\cos^2\theta + 1) - 3r^3 \sin^2\theta d\theta dr = \int_0^1 3r^3 dr \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta + \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$ である．

よって $\int\int_D x^3 - 3xy^2 dxdy = -\pi$

(2)$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ であるから $\log(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ である．

したがって $\frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ である．

$\frac{x}{\log(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とすると，$\frac{x}{\log(1+x)} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ であり，テイラー展開の係数を比較すると，$a_0 = 1, (a_1 + a_0 \frac{-1}{2}) = 0, (a_2 + a_1 \frac{-1}{2} + a_0 \frac{1}{3}) = 0, (a_3 + a_2 \frac{-1}{2} + a_1 \frac{1}{3} + a_0 \frac{-1}{4}) = 0$ より $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{-1}{12}, a_3 = \frac{1}{24}$ である．

よって $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + O(x^4)$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$

(2)$\{V_{\mu_1}, V_{\mu_2}, \ldots, V_{\mu_m}\}$

(3)p

(4)f は全単射であるから X の閉集合 F の像が Y の閉集合であることを示せばよい．F は (1) からコンパクトである．よって (2) から $f(F)$ はコンパクト．よって (3) から $f(F)$ は Y の閉集合.