0.1 H28 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|x| \leq \frac{1}{2}$ なら $5-1/(1+x)^2 > 0$ である．よって $0 < \int_0^x 5-1/(1+t)^2 dt = 5x+1/(1+x)-1$ である．よって $0 < \int_0^x 5t+1/(1+t)-1dt = 5x^2/2+\log(1+x)-x$ である．よって $-5x^2/2 < \log(1+x)-x$ である．

また $5+1/(1+x)^2 > 0$ である．よって $0 < \int_0^x 5+1/(1+t)^2 dt = 5x-1/(1+x)+1$ である．よって $0 < \int_0^x 5t-1/(1+t)+1dt = 5x^2/2-\log(1+x)+x$ である．よって $5x^2/2 > \log(1+x)-x$ である．

すなわち $|\log(1+x)-x| < 5x^2/2$ である．

(2)$\sum a_k$ が収束するから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば，$a_n < 1/2$ である．無限積の収束性は $k=N$ からの無限積の収束性と同じ．また (1) より $|\log(1+x)| \leq Cx^2+x$ である．log の連続性から

$$\log \lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} (1+a_k) = \lim_{n\to\infty} \log \prod_{k=N}^{n} (1+a_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} \log(1+a_k)$$

である．

絶対級数 $\sum |\log(1+a_k)|$ の収束性を考える．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} |\log(1+a_k)| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} Ca_k^2 + a_k = C \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} a_k^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} a_k$$

右辺は収束するから，$\sum \log(1+a_k)$ は絶対収束する．よって収束するので，$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n}(1+a_k)$ は収束する．

(3)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ と $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2$ の収束を示せばよい．$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ とする．$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3(2k-1)+1} - \frac{1}{3(2k)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k-1)+1} - \frac{1}{3(2k)+1} > 0$ より S_{2n} は単調増加する．同様に $S_{2n+1} = 1/4 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3(2k)+1} - \frac{1}{3(2k+1)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k)+1} - \frac{1}{3(2k+1)+1} > 0$ より S_{2n+1} は単調減少する．$S_{2n+1} - S_{2n} = 1/(3(2n+1)+1)$ であり，$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$ である．また $S_{2n+1} = 1/(3(2n+1)+1) + S_n > 0$ より S_{2n+1} は有界な単調数列であるから収束する．したがって S_{2n} も収束して $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ である．よって $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ は収束する．

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^2} < \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ である．ともに収束するから無限積も収束する．

$\boxed{2}$ (1)$y \in f_A(W^{\perp})$ を任意にとる．ある $x \in W^{\perp}$ が存在して $y = f_A(x)$ である．任意の $u \in W$ について $(u,y) = {}^t uAx = {}^t({}^tAu)x = ({}^tAu, x) = (f_A(u), x) = 0$ である．よって $y \in W^{\perp}$ である．

A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ と固有ベクトル $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ をとる．$x, y \in \mathbb{C}^n$ について標準エルミート内積 $(x,y) = {}^t x\overline{y}$ を定める．$\lambda(v,v) = (Av,v) = (v, \overline{{}^tA}v) = (v, \overline{\lambda}v) = \overline{\lambda}(v,v)$ である．$(v,v) > 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$ である．よって $\lambda \in \mathbb{R}$ である．

(2)A の固有空間全ての直和を W とする．$\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$ である．$f_A(W) \subset W$ となるから，$f_A|_{W^{\perp}} \colon W^{\perp} \to W^{\perp}$ を得る．$\mathbb{C}$ による定数倍を加えることで $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}$ 上線形空間 $\mathbb{C}^n$ に拡張する．$W, W^{\perp}$ も同様に $\overline{W}, \overline{W^{\perp}}$ に拡張する．$f_A|_{W^{\perp}}$ は $\overline{W^{\perp}}$ 上の線形変換に拡張できる．$W^{\perp} \neq \{0\}$ なら $f_A|_{\overline{W^{\perp}}}$ の固有値 λ と固有ベクトル $v \neq 0$ をとれる．$u = 0 + v \in \overline{W} \oplus \overline{W^{\perp}}$ とする．$Au = \lambda u$ である．λ は f_A の固有値であるから $\lambda \in \mathbb{R}$ である．よって $u \in \mathbb{R}^n$ としてよい．$u \in W^{\perp}$ となるがこれは W の定義に矛盾．よって $W^{\perp} = \{0\}$．

f_A の固有値 λ と固有ベクトル x について $\mathrm{Span}\{x\} = \mathrm{Span}\{x\}^{\perp\perp}$ であり，任意の $y \in \mathrm{Span}\{x\}^{\perp}$ について $(y, {}^tAx) = (Ay, x) = 0$ より ${}^tAx \in \mathrm{Span}\{x\}$ である．よって ${}^tAx = \mu x$ とできる．$\lambda(x,x) = (Ax,x) = (x, {}^tAx) = (x, \mu x) = \mu(x,x)$ である．$(x,x) > 0$ より $\lambda = \mu$ である．

$\mathbb{R}^n$ の任意の元 x は固有ベクトル $v_1, \ldots, v_n$ の線形結合で表せる．$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ とする．$Ax = \sum_{i=1}^{n} a_i A v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i = {}^t Ax$ である．よって $A = {}^t A$ である．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x, y \in [0,1]^{\infty}$ に対して $|x_k - y_k| \leq 1$ である．よって $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ である．よって d は $[0,1]^{\infty} \times [0,1]^{\infty}$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

$x=y$ なら $d(x,y)=0$ である．また $d(x,y)=0$ なら $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-y_k|=0$ であるから $x_k=y_k$ である．よって $d(x,y)=0$ なら $x=y$ である．$d(x,y)=d(y,x)$ は明らか．

x,y,z について $\sum_{k=1}^{n}2^{-k}|x_k-z_k|\le\sum_{k=1}^{n}2^{-k}|x_k-y_k|+\sum_{k=1}^{n}2^{-k}|y_k-z_k|$ である．$n\to\infty$ とすると $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-z_k|\le\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-y_k|+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}|y_k-z_k|$ である．よって $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ である．

よって d は距離．

(2)$x_n\to a$ とする．$d(x_n,a)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_{n,k}-a_k|\ge 2^{-i}|x_{n,i}-a_i|\to 0\quad(n\to\infty)$ である．よって任意の k に対して $x_{n,k}\to a_k$．

任意の k に対して $x_{n,k}\to a_k$ とする．任意の ε に対して $2^{1-n_0}\le\varepsilon$ なる n_0 が存在する．このとき $\sum_{k=n_0}^{\infty}2^{-k}|x_{n,k}-a_k|\le 2^{1-n_0}\le\varepsilon$ である．1 から n_0-1 までの整数 k について，ある N_k が存在して $n\ge N_k$ なら $|x_{n,k}-a_k|\le\varepsilon$ である．$N=\max\{N_1,\dots,N_{n_0-1}\}$ とする．このとき $\sum_{k=1}^{n_0-1}2^{-k}|x_{n,k}-a_k|\le\sum_{k=1}^{n_0-1}2^{-k}\varepsilon\le 2\varepsilon$ である．よって $n\ge N$ なら $d(x_n,a)\le 3\varepsilon$ であるから $x_n\to a$ である．

(3)$\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ は有界閉区間 $[0,1]$ 内の点列であるから，収束部分列を必ずもつ．したがって収束部分列 $\{x_{n,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^{\infty}$ に対して数列 $\{x_{n+1,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^{\infty}$ も収束部分列 $\{x_{n+1,k_j^{(n+1)}}\}_{j=1}^{\infty}$ を持つ．このとき $\{k_j^{(n+1)}\}_{j=1}^{\infty}$ は $\{k_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列である．これが任意の n について成り立つから数列 $\{k_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty},\{k_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty},\dots$ を得て，それぞれ前の数列の部分列となっている．数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $s_n=k_n^{(n)}$ で定める．$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は全ての m について $n>m$ では $\{k_j^{(m)}\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列となっている．したがって $\{x_{s_n},k\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列になっている．よって $\{x_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である．

$\boxed{4}$ (1)$z=re^{i\theta}$ とする．

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{ire^{i\theta}}ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=\int_0^{\pi}ie^{ire^{i\theta}}d\theta=\int_0^{\pi}ie^{ir\cos\theta}e^{-r\sin\theta}d\theta$$
$$\int_{C_r}\left|\frac{e^{iz}}{z}\right|dz=\int_0^{\pi}\left|e^{-r\sin\theta}\right|d\theta\le\int_0^{\pi}d\theta=\pi$$

である．よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^{\pi}id\theta=\pi i,\quad \lim_{r\to\infty}\left|\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\le\lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi}\left|e^{-r\sin\theta}\right|d\theta=\int_0^{\pi}0d\theta=0$$

(2)$r>0$ に対して $z=1/r$ から $z=r$ までの積分経路を Γ_r^+ とする．$z=-r$ から $z=-1/r$ までの積分経路を Γ_r^- とする．

$$\int_{\Gamma_r^+}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{1/r}^{r}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{1/r}^{r}\frac{\cos x+i\sin x}{x}dx$$
$$\int_{\Gamma_r^-}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-r}^{-1/r}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{r}^{1/r}-\frac{\cos x-i\sin x}{-x}dx=\int_{1/r}^{r}\frac{-\cos x+i\sin x}{x}dx$$

である．積分経路 $\Gamma_r^+,C_r,\Gamma_r^-,-C_{1/r}$ によってできる閉曲線 Γ を考えると，被積分関数は原点を除いて正則であるから，$\int_\Gamma\frac{e^{iz}}{z}dz=0$ である．よって

$$\begin{aligned}0&=\int_{\Gamma_r^+}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\Gamma_r^-}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-C_{1/r}}\frac{e^{iz}}{z}dz\\&=\int_{1/r}^{r}\frac{\cos x+i\sin x}{x}dx+\int_{1/r}^{r}\frac{-\cos x+i\sin x}{x}dx+I(r)-I(1/r)\\&=2i\int_{1/r}^{r}\frac{\sin x}{x}dx+I(r)-I(1/r)\to 2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\pi i\quad(r\to\infty)\end{aligned}$$

したがって $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi/2$ である．