目次

0.1　H15 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\{f(x) \mid x \in X\}$ が下に有界でないとする．すなわち任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) \leq -n$ なる $x \in X$ が存在する．これを x_n とおく．X は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合であるから有界閉集合である．よって X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$ となりこれは矛盾．よって下に有界．

(2) 下に有界であるから $\inf\{f(x) \mid x \in X\} = M \in \mathbb{R}$ である．M が下限であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x_n) \leq M + \frac{1}{m}$ なる x_n が存在する．数列 $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$M \leq f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty}(M + \frac{1}{n_k}) = M$ となり $f(\alpha) = M$．よって f は最小値をもつ．

$\boxed{2}$ (1)$g(0) = 1$ であり g は連続関数であるから 0 を含むある開区間 I で $g(x) > 0$ となる．I 上で $h(x) = \sqrt[m]{g(x)}$ とする．I 上で h は C^1 級であり $h(x)^m = g(x), h(x) > 0$ である．

(2)$f(\varphi(y)) = \varphi(y)^m g(\varphi(y)) = \varphi(y)^m h(\varphi(y))^m = y^m$ をみたす $\varphi(y)$ を求める．$\varphi(y)h(\varphi(y)) = y$ をみたす $\varphi(y)$ を求めればよい．$F(x,y) = xh(x) - y$ とおく．$\partial F/\partial x(0,0) = h(0) + 0\varphi'(0) > 0$ である．陰関数定理から $F(x,y) = 0$ をみたす C^1 級関数 $x = \varphi(y)$ が 0 の近傍で存在する．

$\boxed{3}$ (1)$T_A(cX+Y) = {}^t(cX+Y)A + A(cX+Y) = c{}^tXA + cAX + {}^tYA + AY = cT_A(X) + T_A(Y)$ である．よって線形．

(2)${}^t({}^tXA + AX) = AX + {}^tXA$ より $\mathrm{Im}T_A \subset S$ である．$Y \in S$ に対して $X = A^{-1}Y/2$ とすると，${}^tXA + AX = {}^t(AX) + AX = {}^t(Y/2) + (Y/2) = Y$ となる．よって $S \subset \mathrm{Im}T_A$ である．

(3)${}^t(AX) + AX = O$ より AX が交代行列となる X を考える．よって $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．AX_1, AX_2, AX_3 は交代行列である．よって X_1, X_2, X_3 は $\ker T_A$ の基底となる．

$\boxed{4}$ (1)$AB = BA$ のとき．$v \in V_j$ に対して $ABv = BAv = B\alpha_j v = \alpha_j Bv$ より，$Bv \in V_j$ である．

$BV_j \subset V_j \quad (j = 1, \dots, k)$ のとき．A がエルミート行列であるから，$\mathbb{C}^n$ を固有空間の直和に分解できる．したがって $\{v_1, \dots, v_n\}$ をそれぞれが A の固有ベクトルであるような基底とできる．$v_i \in V_{s_i}$ とする．$u \in \mathbb{C}^n$ に対して $u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ とできる．$ABu = A(a_1Bv_1 + \dots a_nBv_n) = a_1\alpha_{s_1}Bv_1 + \cdots + a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．また $BAu = B(a_1\alpha_{s_1}v_1 + \dots a_n\alpha_{s_n}v_n) = a_1\alpha_{s_1}Bv_1 + \cdots + a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．よって $ABu = BAu$ である．すなわち $AB = BA$

(2)$v \in V_j$ に対して $A^m v_j = \alpha_j^m v_j$ である．A^m の固有値 α_j^m の固有空間を W_j とすると，$W_j \supset V_j$ である．A はエルミート行列であるから固有値は実数である．したがって異なる固有値 α_i, α_j にたいして $\alpha_i^m = \alpha_j^m$ となるには m が偶数であることが必要．今 m は奇数であるから $\alpha_i^m \neq \alpha_j^m$ である．したがって $i \neq j$ なら $W_i \neq W_j$ である．よって $W_j = V_j$ である．A^m はエルミート行列であり $A^mC = CA^m$ であるから (1) より $CW_j \subset W_j$ である．よって $CV_j \subset V_j$ であるから $AC = CA$ である．

0.2 H16 数学 A

$\boxed{1}$ λ, μ の固有空間をそれぞれ V_λ, V_μ とする．対角化可能であるから $V = V_\lambda \oplus V_\mu$ である．$W_\lambda = W \cap V_\lambda, W_\mu = W \cap V_\mu$ とする．$W_\lambda \cap W_\mu = W \cap V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$ である．また $w \in W$ に対して $w = w_\lambda + w_\mu$ となる $w_\lambda \in V_\lambda, w_\mu \in V_\mu$ が一意的に存在する．$W \ni f(w) - \mu w = (\lambda - \mu)w_\lambda$ より $w_\lambda \in W_\lambda$ である．同様に $w_\mu \in W_\mu$ である．よって $W = W_\lambda \oplus W_\mu$ である．W を f の固有空間の直和に分解できたから $f|_W$ は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)X のコンパクト集合 C をとる．$x \in X \setminus C$ を一つ固定する．各 $y \in C$ に対して $x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となる開集合 U_y, V_y が存在する．$\{V_y \mid y \in C\}$ は C の開被覆であるから有限部分集合 $C' \subset C$ が存在して $C \subset \bigcup_{y \in C'} V_y$ となる．$U = \bigcap_{y \in C'} U_y$ とする．U は x の開近傍であり $U \subset X \setminus C$ であるから x は C の外点．任意の x でなりたつから C は閉集合である．

(2)$A \cap B$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．$S \cup \{X \setminus A\}$ は B の開被覆である．したがって有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \cup (X \setminus A)$ となる．$A \cap B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ である．したがって $A \cap B$ はコンパクト集合である．

$\boxed{3}$ (1)$G(x) = \int_0^x f(x,y)dy$ とする．

$$\begin{aligned}\frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \int_0^{x+h} \frac{f(x+h,y)}{h}dy - \int_0^x \frac{f(x,y)}{h}dy = \int_x^{x+h} \frac{f(x,y)}{h}dy + \int_0^{x+h} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}dy \\ &= \int_0^h \frac{f(x,y+x)}{h}dy + \int_0^x \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}dy + \int_x^{x+h} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}dy\end{aligned}$$

である．第一項は $\lim_{h \to 0} \int_0^h \frac{f(x,y+x)}{h}dy = \frac{\partial}{\partial h}\int_0^h f(x,y+x)dy = f(x,x)$ である．

第二項は $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)$ となる $\theta \in (0,1)$ が存在して $\int_0^x \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy \leq \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y)dy \leq \infty$ であるから優収束定理より $\lim_{h \to 0} \int_0^x \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．

第三項はある 0 の近傍で $\left|\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right| \leq M$ であるから $\lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy \leq \lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} Mdy = 0$ である．よって $G'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．

したがって $F'(x) = f(x,x) - f(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ である．さらに $F''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dy = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) +$

$\int_{-x}^{x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dy$ である．

$\boxed{4}$ $f(z) = e^{iz}/(z-i\varepsilon)$ とすれば，f は $z \neq i\varepsilon$ で正則である．積分経路 C を原点中心の半径 $R > 2\varepsilon$ の上半平面の半円とする．C_1 を実軸上の $-R$ から R までの部分，C_2 を半円とする．f の C での積分は留数定理から $\int_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i\varepsilon) = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ である．C_2 での積分は $z = Re^{i}\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると，$|\int_{C_2} f(z)dz| \leq \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}/Rd\theta \to 0 \quad (R \to \infty)$ である．したがって $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ より $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = e^{-\varepsilon}$ である．

0.3 H17 数学 A

$\boxed{1}$ (1)AB が正則であるから $f \circ g$ は同型である．よって f は全射，g は単射である．$\dim \mathrm{C}^n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{C}^m$ より $\dim \mathrm{Ker}\, f = n - m$ である．g は単射であるから $\dim \mathrm{Ker}\, g = 0$

(2)$ABv = \lambda v, v \neq 0$ とする．このとき $BABv = B\lambda v = \lambda Bv, Bv \neq 0$ であるから AB の固有値 λ は BA の固有値でもある．

$BAv = \lambda v, v \neq 0$ とする．$ABAv = \lambda Av$ であるから，$Av \neq 0$ なら λ は AB の固有値である．$Av = 0$ なら $BAv = 0 = \lambda v$ より $\lambda = 0$．すなわち BA の零でない固有値は AB の固有値でもあるから BA の固有値は $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ である．

(3)C^m における AB の固有値 λ_i の固有空間を $W(\lambda_i)$ とする．対角化可能であるから $\sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = m$ である．C^n における BA の固有値 λ_i の固有空間を $V(\lambda_i)$ とする．$g(W(\lambda_i)) \subset V(\lambda_i)$ であり g は単射であるから $\dim W(\lambda_i) \leq \dim V(\lambda_i)$ である．また $V(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$ より $\dim V(\lambda_0) \geq n - m$ である．よって $\sum_{i=0}^k \dim V(\lambda_i) \geq n - m + \sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = n$ である．よって BA は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)f を商写像とする．$f^{-1}(B)$ を閉集合とする．$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus B)$ は開集合であるから $X \setminus B$ は開集合である．よって B は閉集合．

$f^{-1}(B)$ を開集合とする．$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus B)$ は閉集合であるから $X \setminus B$ は閉集合である．よって B は開集合．

(2)$B \subset Y$ について $f^{-1}(B)$ が閉集合だとする．コンパクト空間の閉集合はコンパクトであるから $f^{-1}(B)$ はコンパクトである．f は全射連続写像であるから $f(f^{-1}(B)) = B$ はコンパクトである．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから B は閉集合である．よって f は商写像．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x > 0$ について $x/N < 1$ なる N が存在する．$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (|x| < 1)$ であるから $n \geq N$ のとき $\log(1+x/n) = (x/n) - \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3)$ である．したがって $\sum\limits_{n=N}^{\infty} x/n - \log(1+x/n) = \sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3) < \infty$ である．よって収束する．

(2)$I = (1/2, 2)$ とする．$x \in I$ に対して $(x/n - \log(1+x/n))' = 1/n - \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n(2n+1)}$ である．よって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n - \log(1+1/n)$ は一様収束する．したがって $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x/n - \log(1+x/n))'|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n - \frac{1}{n+1} = 1$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{1}{1+z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ であるから $\frac{2z}{1+z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1}$ である．

(2) 整級数であるから項別積分ができて $|z| < 1$ で $f(z) = \log\bigl(1+z^2\bigr) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+2}/(2n+2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k}/k$ である．よって $f(z)/z^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k-n}/k$ でありこのローラン級数の z^{-1} の係数は n が偶数か 1 のとき 0，それ以外のとき $(-1)^{\ell-1}/\ell \quad (n = 2\ell+1)$ である．留数定理から $\int_C \frac{f(z)}{z^n}dz = \begin{cases} 2\pi i(-1)^{\ell-1}/\ell & (n = 2\ell+1) \\ 0 & (n \neq 2\ell+1) \end{cases}$ である．

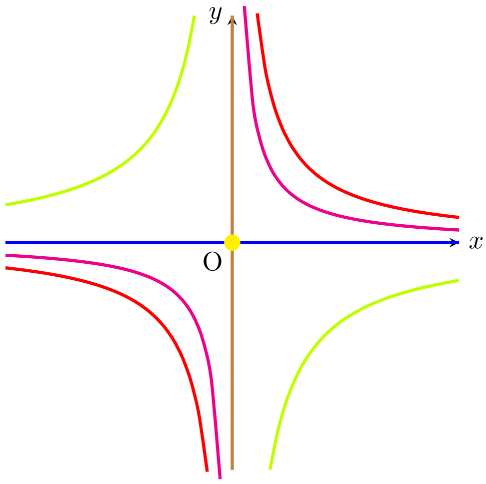
0.4　H18 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\dim V = k \leq n-1$ として V の直交補空間 $V^\perp$ をとると，$V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$ より $\dim V^\perp = n-k \geq 1$ である．$0 \neq (a_1, \ldots, a_n)^\top \in V^\perp$ をとると，$F(x_1, \ldots, x_n)$ は $(a_1, \ldots, a_n)^\top$ と $(x_1, \ldots, x_n)$ の内積だから V 上で F は 0.

(2)V と b で生成されるベクトル空間を V' とおけば $\dim V' \leq n-1$ であり，$V_b \subset V'$ である．(1) より V' 上で 0 となる F が存在し，F は V_b 上 0 である．

$\boxed{2}$

(1) 点 (x,y) の属す同値類を $[(x,y)]$ と表す．$x = y = 0$ なら (x,y) の同値類は $\{(0,0)\}$ である．$x = 0, y \neq 0$ のとき $(0,y) \sim (0,ty) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$y = 0, x \neq 0$ のとき $(x,0) \sim (tx,0) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$x \neq 0 \neq y$ のとき $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow xy = x'y'$ である．したがって同値類は右のようになる．(異なる色は異なる同値類)



$x \neq 0 \neq y$ なる (x,y) が含まれる同値類は $g(x,y) = xy$ の逆像 $g^{-1}(xy)$ であるから閉集合．また $\{(0,0)\}$ も閉集合である．$[(0, y \neq 0)]$ は $(0,0)$ が集積点であるが同値類に含まれないから閉集合ではない．同様に $[(0 \neq x, 0)]$ も閉集合ではない．

(2)$(0,0)$ を含む R^2 の開集合 $\pi^{-1}(U)$ に対してある $\varepsilon_U > 0$ が存在して $B((0,0), \varepsilon_U) \subset \pi^{-1}(U)$ となる．したがって $(x,0) \in \pi^{-1}(U) \quad (x \neq 0)$ である．すなわち $[(0 \neq x, 0)] \in U$ である．したがって $[(0 \neq x, 0)]$ と $[(0,0)]$ を分離する開集合は存在しないからハウスドルフでない．

(3)$i \leq j$ のとき同値類 $[(1,1)]$ 上で $x^i y^j = y^{j-i}$ となるから定数となるには $i = j$ が必要．逆に $f(x,y) = \sum a_i (xy)^i$ とするとこれは全ての同値類の上で定数である．

(4)$D = [(x,y)] \quad (x \neq 0 \neq y)$ のとき，$D \neq D' = [(x',y')]$ に対して $xy \neq x'y'$ である．したがって $h(x,y) = xy \in E$ に対して $h(D) \neq h(D')$ となる．したがって $(*)$ を満たす D, D' は共に $[(0,0)], [(0,1)], [(1,0)]$ の何れか．$f(x,y) = \sum a_i (xy)^i$ について $f([(0,0)]) = a_0, f([(0,1)]) = a_0, f([(1,0)]) = a_0$ であるから求める対は $([(0,0)], [(0,1)]), ([(0,0)], [(1,0)]), ([(0,1)], [(1,0)])$ 及びこれらの順序を入れ替えたものである．

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから $Ax + b = \begin{pmatrix} -x+y+b \\ x-y+c \end{pmatrix}$ である．よって $\langle Ax+b, x \rangle = -(x-y)^2 + bx + cy$ である．

$x + y = s, x - y = t$ と変数変換すると $\langle Ax+b, x \rangle = -t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}$ で，ヤコビアンは $-1/2$ である．よって

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}\right) \frac{1}{2} ds dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t - \frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b-c}{4})^2\right) dt \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{b+c}{2} s\right) ds
\end{aligned}
$$

である．$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t - \frac{b-c}{4})^2 + (\frac{b-c}{4})^2\right) dt$ は有限である．また $b + c < 0$ なら $\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{b+c}{2} s\right) ds$ も有限であり，$b + c \geq 0$ なら発散する．

$\boxed{4}$ $f(z)$ の 0 におけるローラン級数は 0 が極であることから正の整数 k を用いて $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ とかける．$z^k f(z)$ は $|z| < 2$ で正則であり $\lim_{z \to 0} z^k f(z) = a_{-k} \neq 0$ である．したがってある $\delta > 0$ が存在して $|z| < \delta$ で

$|z^k f(z)| > |a_{-k}|/2$ である．したがって

$$\iint_{\varepsilon<|z|<\delta} \frac{|a_{-k}|}{2|z|^k} dxdy \leq \iint_{\varepsilon<|z|<\delta} |f(z)| dxdy < \infty$$

である．$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換すると $\int_\varepsilon^\delta \int_0^{2\pi} \frac{|a_{-k}|}{2r^k} rdrd\theta = |a_{-k}|\pi \int_\varepsilon^\delta |r^{1-k}|dr < \infty$ である．$1-k \leq -1$ なら発散するから $k<2$ である．よって $k=1$ より一位の極．

0.5 H19 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(y)-f(x)| = |\int_x^y f'(t)dt| \leq \int_x^y |f'(t)|dt$

(2)(i)$c>1$ より $|f(y)-f(x)| \leq \int_x^y At^{-c}dt = \frac{A}{-c+1}(y^{-c+1}-x^{-c+1}) < \frac{A}{c-1}x^{1-c} \to 0 \quad (x\to\infty)$ である．$x_n = f(n)$ とすれば $|x_n - x_m| \leq \frac{A}{1-c}m^{1-c} \to 0 \quad (m\to\infty)$ である．したがって数列 $\{x_n\}_{n=2}^\infty$ はコーシー列であるから，収束列でその収束先を α とする．任意の $\varepsilon>0$ に対してある $M>0$ が存在して $x>M$ なら $|f(x)-f([x]+1)| < \varepsilon$ である．ここで $[x]$ は x 以下の最大の整数．またある整数 N が存在して $n>N$ なら $|x_n-\alpha| < \varepsilon$ である．したがって $x > N+M$ なら $|f(x)-\alpha| \leq |f(x)-f([x]+1)| + |f([x]+1)-\alpha| < 2\varepsilon$ となるから収束する．

(ii)$|f(x)-\alpha| = \lim_{y\to\infty}|f(y)-f(x)| \leq \lim_{y\to\infty} \frac{A}{c-1}x^{1-c} = \frac{A}{c-1}x^{1-c}$

$\boxed{2}$ $v \in \ker AC_1$ に対して $Cv \in \ker A$ であり C_1 が正則であるから $C_1\colon \ker AC_1 \to \ker A$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1 = \dim\ker A$ である．$v \in \ker AC_1$ に対して $B_1 v \in \ker B_1AC$ である．B_1 が正則であるから $B_1\colon \ker AC_1 \to \ker B_1AC$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1 = \dim\ker B_1AC_1$ である．以上より $\dim\ker A = \dim\ker B_1AC_1 = m-r$ である．同様に $\dim\ker A = \dim\ker B_2AC_2 = m-s$ であるから $r=s$.

$\boxed{3}$ $f(x,y_0) \neq 0$ より $f(x,y_0) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ であるから，$(x,y_0) \in f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は開集合であるから，$f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ は開集合である．したがってある $X\times Y$ の開集合 $V_x \times U_x$ が存在して $(x,y_0) \in V_x\times U_x \subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\bigcup_{x\in X} V_x$ は X の開被覆であるから，有限部分被覆 $\{V_{x_1},\cdots,V_{x_n}\}$ が存在する．$U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ とすれば $X\times U \subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．

$\boxed{4}$ $f(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{z^4}$ とすれば $f(z)$ は $z\neq 0$ で正則であり，$z=0$ で極である．$z=0$ での f のローラン級数は

$$\begin{aligned} f(z) &= (\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}z^n - \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(-z)^n)/z^4 \\ &= \sum_{n=0}^\infty (\frac{1}{n!} - (-1)^n\frac{1}{n!})z^{n-4} \end{aligned}$$

である．z^{-1} の係数は $1/3$ である．

$r<1$ なら内部に特異点を持たないから $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0$ である．$r>1$ なら $z=0$ が特異点となるから留数定理より $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i/3$ である．

0.6 H20 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f_x(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})(-\sin\frac{\pi}{3}) + f_y(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

(2)F は $[0,4\pi]$ 上で連続である．よって $\theta\in[0,4\pi]$ に対して $|F(\theta)| < M$ となる $M>0$ が存在する．$\tau\in\mathbb{R}$ に対して $t = 2n\pi+\theta$ をみたす，$n\in\mathbb{Z}, \theta\in[0,2\pi)$ が存在する．$F(\tau) = F(\theta)$ であるから $|F(\tau)| < M$ である．

したがって有界．また F は $[0,4\pi]$ 上で連続であるから一様連続である．すなわち $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して任意の $\theta,\tau\in[0,4\pi]$ に対して $|\theta-\tau|<\delta$ なら $|F(\theta)-F(\tau)|<\varepsilon$ である．

よって $s\geq t\in\mathbb{R}$ に対して，$s=2n\pi+p$ をみたす $p\in[0,2\pi)$ が存在する．$|s-t|<\delta$ なら $|F(s)-F(t)|=|F(p)-F(p+s-t)|<\varepsilon$ であるから一様連続である．

$\boxed{2}$ (1)$\varphi_A\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m;x\mapsto Ax$ で定める．A の階数が m であるから $\dim\varphi_A=m=\dim\mathbb{C}^m$．したがって φ_A は全射である．よって任意の $c\in\mathbb{C}^m$ に対して $\varphi_A(x)=Ax=c$ となる $x\in\mathbb{C}^n$ が存在する．

(2)φ_B が単射なら $\operatorname{rank}\varphi_B=m$ である．よって $\operatorname{rank}B^T=m$ であるから φ_{B^T} は全射である．

(3)$B^TQ^T=P^t$ なる Q^T の存在を示す．P^T の列ベクトル p_i ごとに $q_i\in\mathbb{C}^n$ が存在して $B^Tq_i=p_i$ である．よって $Q^T=(q_1,\cdots,q_m)$ とすれば $B^TQ^T=P^T$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x,0),(x,1)\in Y$ について $(x,1)$ が属す Y の開集合 U をとる．U は開基の和集合でかけるから，ある $W\subset U,W\in\mathcal{B}$ が存在して $(x,1)\in W$．すなわちある $V\in\mathcal{O}$ が存在して $W=V\times\{0,1\}$ である．よって $(x,0)\in W\subset U$ であるから，ハウスドルフでない．

(2)$X\times\{0\}$ の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を任意にとる．任意の $x\in X$ についてある λ_x が存在して $x\in U_{\lambda_x}$ である．各 U_{λ_x} についてある開集合 $V_{\lambda_x}\in\mathcal{O}$ が存在して $x\in V_{\lambda_x}\times\{0\}\subset U_{\lambda_x}$ である．したがって $X\subset\bigcup_{x\in X}V_{\lambda_x}$ である．X はコンパクトであるから有限部分被覆 $\{V_{\lambda_{x_1}},\cdots,V_{\lambda_{x_n}}\}$ が存在する．$X\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{\lambda_{x_i}}$ であるから $X\times\{0\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_{x_i}}$ である．したがって $X\times\{0\}$ はコンパクトである．(1) で示したように $(x,1)\in Y\setminus(X\times\{0\})$ を含む開集合 U は $U\cap(X\times\{0\})\neq\emptyset$ である．したがって $X\times\{1\}$ は開集合でない．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{1}{1-z^3}=1+z^3+z^6+\cdots\quad(|z|<1)$ であるから，$\varphi(z)=\frac{z^p}{1-z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{3n+p}$ である．収束半径は 1 である．

(2)φ の特異点は $1,e^{2\pi i/3},e^{4\pi i/3}$ で，それ以外の点で正則である．したがって $R<1$ なら $\int_C\varphi(z)dz=0$ である．

特異点での留数を計算する．$\lim_{z\to1}(z-1)\varphi(z)=\frac{1}{3}$，$\lim_{z\to e^{2\pi i/3}}(z-e^{2\pi i/3})\varphi(z)=\frac{e^{2(p+1)\pi i/3}}{3}$，$\lim_{z\to e^{4\pi i/3}}(z-e^{4\pi i/3})\varphi(z)=\frac{e^{4(p+1)\pi i/3}}{3}$ である．よって留数定理から $\int_C\varphi(z)dz=\frac{2\pi i}{3}(1+e^{2(p+1)\pi i/3}+e^{4(p+1)\pi i/3})$ である．

0.7 H21 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=f'(0)$$

であるから $-f'(0)/2>0$ に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $nf(\frac{1}{n})<f'(0)+(-f'(0)/2)=f'(0)/2$ である．

(2)$\pi>x>0$ で $\frac{1}{1+x}<1$ より $\log(1+x)=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt<\int_0^1 1dt=t$ である．したがって $\log(1+x)<x$ である．またテイラーの定理から $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+R(x)$ である．$R(x)=\frac{(\cos^{(5)}s)}{5!}x^5\quad(0<s<x<\pi)$ である．$(\cos^{(5)}s)=-\sin s<0$ であるから $R(x)<0$ である．したがって $\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ である．

以上より

$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\leq\log\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}\right)\leq-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}<-\frac{1}{n}$$

であるから発散する．

$\boxed{2}$ (1) 略

(2)$\sigma(u)=u-2\frac{(u,u)}{(u,u)}u=-u$ より -1 は固有値である．$\sigma(x)=-x$ とすると，$x-2\frac{(x,u)}{(u,u)}u=-x$ であるから $x=\frac{(x,u)}{(u,u)}u$ である．すなわち $x\in\mathrm{spam(u)}$ である．よって $W(-1)=\mathrm{spam(u)}$ である．

(3)$\sigma\circ f(u)=f\circ\sigma(u)=f(-u)=-f(u)$ であるから $f(u)\in W(-1)=\mathrm{spam(u)}$ である．したがって u は f の固有ベクトルである．

(4)$\sigma(e_1)=e_1-2\frac{(e_1,u)}{(u,u)}u=e_1-\frac{2}{3}u=\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_3-\frac{2}{3}e_4,\sigma(e_2)=e_2,\sigma(e_3)=e_3+\frac{2}{3}u=\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}e_3+\frac{2}{3}e_4,\sigma(e_4)=e_4-\frac{2}{3}u=-\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_3+\frac{1}{3}e_4$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&1&0&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1) ハウスドルフ空間 $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト部分集合 C をとる．$y\in X\setminus C$ と $x\in C$ について $x\in U_x,y\in V_x,U_x\cap V_x=\emptyset$ となる開集合 $U_x,V_x\in\mathcal{O}$ が存在する．$\bigcup\limits_{x\in C}U_x\supset C$ より有限部分集合 $X'\subset X$ が存在して $\bigcup\limits_{x\in X'}U_x\supset C$ である．$V=\bigcap\limits_{x\in X'}V_x$ とすれば V は y の開近傍で $V\cap C=\emptyset$ である．したがって $X\setminus C$ は開集合である．

(2)$f\colon X\times Y\to\mathbb{R};(x,y)\mapsto x-y$ とすると f は連続である．よって $f^{-1}(0)=F$ は閉集合である．$g\colon F\to\mathbb{R};(x,x)\mapsto x$ とすると g は連続である．$\sup g(x)=1$ より g は最大値をもたない．したがって F はコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$zx+iy$ とする．$e^z=-e^{-z}$ より $e^x=|e^z|=|-e^{-z}|=e^{-x}$ であるから $x=-x$ である．したがって $x=0$ である．$e^{iy}=-e^{-iy}$ より $\cos y=-\cos y$ である．よって $y=\frac{i\pi}{2}+n\pi\quad(n\in\mathbb{Z})$ である．

(2)$|e^{-iz}|=|e^{s-i\pm R}|=e^s\leq e^\pi$ である．$z=R+is$ のとき $|e^z+e^{-z}|\geq|e^z|-|e^{-z}|=e^R-e^{-R}$ であり，$z=-R+is$ のとき $|e^z+e^{-z}|\geq|e^{-z}|-|e^z|=e^R-e^{-R}$ である．よって $\sup\limits_{z\in\Gamma_R}|e^{-iz}/(e^z+e^{-z})|\leq\frac{e^\pi}{e^R-e^{-R}}$ である．

(3)$f(z)=e^{-iz}/(e^z+e^{-z})$ とする．(1) で求めた点以外で f は正則である．したがって積分経路 C を 4 点 $-R,R,R+i\pi,-R+i\pi$ を結んでできる長方形を反時計回りに進むとすると，留数定理から $\int_C f(z)dz=2\pi i(\mathrm{Res}(f,i\pi/2))$ である．$\lim\limits_{z\to i\pi/2}\frac{z-1\pi/2}{e^z+e^{-z}}=\lim\limits_{z\to i\pi/2}\frac{1}{e^z-e^{-z}}=\frac{1}{2i}$ であるから $\int_C f(z)dz=\pi e^{\pi/2}$ である．

また

$$\int_{R+i\pi}^{-R+i\pi}f(z)dz=\int_R^{-R}\frac{e^{-i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi}+e^{-x-i\pi}}dx=\int_{-R}^R\frac{e^\pi e^{-ix}}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$\left|\int_R^{R+i\pi}f(z)dz\right|\leq\int_R^{R+i\pi}\left|\frac{e^{-iz}}{e^z+e^{-z}}\right|dz\leq\pi e^\pi/(e^R-e^{-R})\to0\quad(R\to\infty)$$
$$\left|\int_{-R+i\pi}^{-R}f(z)dz\right|\leq\int_{-R+i\pi}^{-R}\left|\frac{e^{-iz}}{e^z+e^{-z}}\right|dz\leq\pi e^\pi/(e^R-e^{-R})\to0\quad(R\to\infty)$$

である．よって $\pi e^{\pi/2}=\int_{-\infty}^\infty\cos x/(e^x+e^{-x})dx+e^\pi\int_{-\infty}^\infty e^{-ix}/(e^x+e^{-x})dx$ である．よって $\int_{-\infty}^\infty\cos x/(e^x+e^{-x})dx=\frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}$ である．

0.8 H22 数学 A

(1)f は一様連続であるから任意の ε に対して $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ なら $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ である．また $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ は一様収束するから $\delta(\varepsilon)$ に対して，$N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $|g_n(x)-g(x)|<\delta(\varepsilon)$ である．

以上より，$n>N$ なら $|f(g_n(x))-f(g(x))|<\varepsilon$ である．したがって $f\circ g_n$ は $f\circ g$ に一様収束する．

(2)$h_n(x)=\sum\limits_{k=1}^n\frac{\cos(kx)}{k^2}$ とする．$|h_n(x)-h(x)|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^\infty\frac{\cos(kx)}{k^2}\right|\leq\sum\limits_{k=n+1}^\infty\frac{1}{k^2}\to0\quad(n\to\infty)$ である．したがって一様収束．

また $\sin x$ は一様連続である．これは平均値の定理から $\sin x-\sin y=(x-y)\cos\xi\leq|(x-y)|\quad(\xi\in(x,y))$

より明らか．(1) より $\alpha_n(x)=\sin(h_n(x))$ は $\sin(h(x))$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (1)$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in V$ を任意にとる．$X=X^T$ であるから $b=c$ である．したがって $X=aE_1+bE_2+cE_3$ と表せる．また $c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3=O$ とすれば $c_1=c_2=c_3=0$ は一次独立．したがって V は $\{E_1,E_2,E_3\}$ を基底とする．

(2)$(A^TXA)^T=A^TX(A^T)^T=A^TXA$ であるから $f_A(X)\in V$ である．$f_A(cX+Y)=A^T(cX+Y)A=cA^TXA+A^TYA=cf_A(X)+f_A(Y)$ であるから線形写像である．

(3)$f_A(E_1)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}=E_1+aE_2+a^2E_3, f_A(E_2)=\begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ a^2+1 & 2a \end{pmatrix}=2aE_1+(a^2+1)E_2+2aE_3, f_A(E_3)=\begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}=a^2E_1+aE_2+E_3$ である．よって f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ a & a^2+1 & a \\ a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ である．

(4)f_A の表現行列を $G(a)$ とする．$\det G(a)=\begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & -a^2+1 & a-a^3 \\ 0 & -a^3+a & 1-a^2 \end{vmatrix}=-(1-a^2)^2-(a-a^3)^2=-(a^2+1)(1-a^2)^2$ である．

したがって $a\neq\pm1$ のとき $\det G(a)\neq0$ であるから $\operatorname{Im}f_A$ の基底は $\{f_A(E_1),f_A(E_2),f_A(E_3)\}$ である．

$a=1$ のとき $G(1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\operatorname{Im}f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$a=-1$ のとき $G(-1)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\operatorname{Im}f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$S=\{(-\infty,n)\cup\{p_1\}\mid n\in\mathbb{N}\}$ とする．S は X_1 の開被覆である．有限部分被覆を持たないからコンパクトでない．

(2) ユークリッド位相の入った位相空間 $\mathbb{R}$ を E で表す．E の開集合は X_2 の開集合であることを示す．E の開基として $\{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\mid x_0\in\mathbb{R},\varepsilon>0\}$ がとれる．$\frac{1}{n_1}\leq\varepsilon<\frac{1}{n_1+1}$ として n_1 を定める．n_i を $\frac{1}{n_i}\leq\varepsilon-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}<\frac{1}{n_i}$ として定める．ただし $\varepsilon-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}=0$ のとき n_i は定めない．n_i が定義される i を集めてできる $A\subset\mathbb{N}$ を定める． このとき数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\max A}$ を得る．$\bigcup_{i=1}^{\max A}(x_0-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n_j},x_0-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_i})\cup(x_0+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}-\frac{1}{n_i},x_0-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_i})=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ である．よって E の開集合は X_2 の開集合である．

$\varphi\colon X_2\to[0,1]$ を $\varphi(p_1)=0,\varphi(p_2)=1,\varphi(x)=(\arctan x+\pi/2)/\pi\quad(x\in\mathbb{R})$ とする．$\varphi|_{\mathbb{R}}\colon E\to(0,1)$ は同相写像であるから φ は全単射．$(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n})$ は E の開集合であるから $\varphi((x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}))$ は $[0,1]$ の開集合である．$\varphi((-\infty,n)\cup\{p_1\})=(0,\varphi(n))\cup\{0\}=(-1,\varphi(n))\cap[0,1]$ は開集合である．よって φ^{-1} は連続．$[0,1]$ の開集合 U について $U\subset(0,1)$ なら $\varphi^{-1}(U)$ は E の開集合．すなわち X_2 の開集合．$0\in U,1\notin U$ ならある $\varepsilon>0$ が存在して $U=[0,\varepsilon)\cup U\setminus\{0\}$ である．$\varphi^{-1}(U\setminus\{0\})$ は X_2 の開集合である．$\varphi^{-1}([0,\varepsilon))=(-\infty,\varphi^{-1}(\varepsilon))\cup\{p_1\}$ は X_2 の開集合である．よって $\varphi^{-1}(U)$ は X_2 の開集合．$0\notin U,1\in U$ のとき,$0,1\in U$ のときも同様．よって φ は連続．すなわち φ は同相.

(3)p_1 が属す開基は $\{(-\infty,n)\cup\{p_1\}\}\quad(n\in\mathbb{Z})$ である．任意の $m\in\mathbb{Z}$ について $\{(-\infty,m)\}\cup\{p_3\}$ も開基であるからそれぞれを含む任意の開基は共通部分をもつ．したがってハウスドルフ空間でない．

$\boxed{4}$ (1)

$$\left|\frac{\log z}{z^4+1}\right| = \frac{|\log r + i\theta|}{|r^4 e^{4i\theta}+1|} \leq \frac{|\log r| + \pi}{||r^4 e^{4i\theta}|-1|} = \frac{|\log r| + \pi}{|r^4 - 1|}$$

(2)

$$\int_{\alpha_2} \frac{\log z}{z^4+1}dz = \int_R^{\varepsilon} \frac{\log xe^{\pi i}}{(xe^{\pi i})^4+1}e^{i\pi}dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x + \pi i}{x^4+1}dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x}{x^4+1}dx + \pi i \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{x^4+1}dx$$

(3)$\partial D_{\varepsilon,R}$ の小さい円弧を C_1，大きい円弧を C_2 とする．$|\int_{C_1} \frac{\log z}{z^4+1}dz| = \int_0^{\pi} |\frac{\log re^{i\theta}}{r^4e^{4i\theta}+1} ire^{i\theta}|d\theta \leq \int_0^{\pi} \frac{r|\log r|+r\pi}{|r^4-1|}d\theta \leq \pi\frac{r|\log r|+r\pi}{|r^4-1|} \to 0 \quad (r \to 0)$ である．また $|\int_{C_2} \frac{\log z}{z^4+1}dz| \leq \int_0^{\pi} |\frac{\log Re^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}+1} iRe^{i\theta}|d\theta \leq \pi\frac{R|\log R|+R\pi}{|R^4-1|} \to 0 \quad (R \to \infty)$ である．

また $\int_{\alpha_1} \frac{\log z}{z^4+1}dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x}{x^4+1}dx$ である．

$\varepsilon < 1 < R$ とする．$D_{\varepsilon,R}$ 内で $\frac{\log z}{z^4+1}$ は $e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}$ を特異点にもつ．留数を求めると $\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1}, e^{\pi i/4}\right) = \pi e^{7i\pi/4}/16, \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1}, e^{3\pi i/4}\right) = 3\pi e^{i\pi/4}/16$ である．よって $\int_{\partial D_{\varepsilon,R}} \frac{\log z}{z^4+1}dz = \frac{i\pi^2}{8}(3e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4})$ である．よって $\lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_{1/R,R}} \frac{\log z}{z^4+1}dz = \frac{i\pi^2}{8}(3e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}), \lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_{1/R,R}} \frac{\log z}{z^4+1}dz = 2\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^4+1}dx + \pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ である．以上より $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^4+1}dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx = \pi/2\sqrt{2}$ である．

0.9 H23 数学 A

$\boxed{1}$ (1)V の基底として $\{1, x+1, (x+1)^2\}$ をとる．$F(1) = 0, F(x) = x+1, F((x+1)^2) = 2(x+1)^2$ であるから F の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(2)G の表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とし，F の表現行列を A とする．$G \circ F = F \circ G$ は $AB = BA$ と同値である．よって $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 2b_{31} & 2b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 2b_{13} \\ 0 & b_{22} & 2b_{23} \\ 0 & b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix}$ であるから，$b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = 0$ である．したがって $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ である．よって M の次元は 3 である．

$\boxed{2}$ (1)$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $|f_N(x) - f(x)| < 1$ である．f_N は有界であるから $f_N(x) \leq M$ とするとよって $|f(x)| \leq 1 + |f_N(x)| < 1 + M$ である．よって f は有界．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して一様収束性から，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n, m > N$ なら $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ である．この n, m に対してある $M(n) > 0$ が存在して $x > M(n)$ なら $|a_n - f_n(x)| < \varepsilon$ であり，またある $M(m) > 0$ が存在して $x > M(m)$ なら $|a_m - f_m(x)| < \varepsilon$ である．$|a_n - a_m| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m|$ であるから $x > M(n) + M(m)$ をとることで $|a_n - a_m| < 4\varepsilon$ である．すなわち $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_1$ なら $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ である．またある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_2$ なら $|a_n - A| < \varepsilon$ である．$N = N_1 + N_2$ とする．ある $M > 0$ が存在して $x > M$ なら $|f_N(x) - a_n| < \varepsilon$ である．よって $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - A| < 3\varepsilon$ となる．

$\boxed{3}$ (1)$(a, b) \notin G$ を任意にとる．$b \neq f(a)$ と Y がハウスドルフ空間であることから開集合 U, V が存在して $f(a) \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ である．$(a, b) \in f^{-1}(U) \times V$ である．ある $(x, y) \in f^{-1}(U) \times V$ について $f(x) = y$

と仮定する．$f(x)\in U, y\in V$ であるから $y\in U\cap V$ となり矛盾．よって $f^{-1}(U)\times V\cap G=\emptyset$ である．$f^{-1}(U)\times V$ は開集合であるから G は閉集合．

(2)$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ 1/x & (x>0)\end{cases}$ とする．f は連続でないが G は閉集合である．

$\boxed{4}$ (1)$|e^{iz}|=|\exp(ire^{it})|=|\exp(-r\sin t+ir\cos t)|=|\exp(-r\sin t)|\le 1$ である．よって $|\int_{C_r}f(z)dz|\le\int_{C_r}|\frac{2}{z^2}||dz=2\int_0^\pi|\frac{1}{r}|dt=2\pi\frac{1}{r}\to 0\quad(r\to\infty)$ である．

$(1-e^{iz})/z^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-2}z^{n-2}$ である．よって $\int_{C_r}f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-2}\int_{C_r}z^{n-2}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-1}\int_0^\pi r^{n-1}e^{i(n-1)t}dt$ である．$n=1$ の項については $\int_0^\pi dt=\pi$ である．$n\ge 2$ なら $|\int_0^\pi r^{n-1}e^{i(n-1)t}dt|\le\int_0^\pi r^{n-1}dt\to 0\quad(r\to 0)$ である．よって $\int_{C_r}f(z)dz\to 0\quad(r\to 0)$ である．

0.10 H24 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $\varepsilon<a_n<\varepsilon$ である．

よって $n>N$ で $(1-\frac{\varepsilon}{n})^n\le(1+\frac{a_n}{n})^n\le(1+\frac{\varepsilon}{n})^n$ である．極限をとれば $e^{-\varepsilon}\le\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{n})^n\le e^{\varepsilon}$ である．ε は任意であるから $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{n})^n=1$ である．

(2)$n\cos\frac{t}{\sqrt{n}}-n=-\frac{1}{2}t^2+O(\frac{1}{n})$ であり，$\lim_{n\to\infty}s\cos\frac{t}{\sqrt{n}}=s$ であるから，$\lim_{n\to\infty}a_n=s-\frac{1}{2}t^2=0$ より $(s,t)=(\frac{t^2}{2},t)\quad(t\in\mathbb{R})$ である．

(3)(2) の a_n をもちいると，$\cos\frac{t}{\sqrt{n}}=\frac{n}{n+s}\frac{n+s}{n}\cos\frac{t}{\sqrt{n}}=\frac{n}{n+s}(1+\frac{a_n}{n})$ である．したがって $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{t}{\sqrt{n}})^n=e^{-\frac{t^2}{2}}$ である．よって $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\begin{vmatrix}-3-t & -2 & 1\\ 4 & 3-t & -1\\ -4 & -2 & 2-t\end{vmatrix}=-t(t-1)^2$ である．よって固有値は $0,1$ である．

$t=0$ のとき，$\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 4 & 3 & -1\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ であるから V_0 の基底は $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ である．

$t=1$ のとき，$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ であるから固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ である．

(2)$BAy=BABx=B\alpha x=\alpha Bx=\alpha y$

(3)AB の rank は 2 であるから A の rank は 2 以上．$A\colon\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$ であるから A の rank は 2 である．すなわち A は単射．同様に B は全射である．

よって $\dim\operatorname{Im}g_1=2$ である．

(4)B は全射であるから任意の $y\in\mathbb{C}$ に対して $Bx=y$ となる $x\in\mathbb{C}^2=V_1$ が存在する．$BAy=y$ より $BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$f^{-1}([0,1))=[0,1)$ は X の開集合でないから f は連続でない．

(2) X は $\{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\mid x\in\mathbb{R},\varepsilon>0\}$ を開基とする位相空間である．

$g^{-1}(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[x-\frac{\varepsilon}{n},x+\varepsilon)$ より g は連続．

(3)A^+ の任意の開被覆 $S=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ をとる．$0\in U_{\lambda'}$ なる $\lambda'\in\Lambda$ が存在する．ある $\varepsilon>0$ が存在して $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset U_{\lambda'}$ である．$\frac{1}{n}<\varepsilon$ となるような最大の n を N とする．N 以下の n に対して $\frac{1}{n}$ を含むような U_{λ_n} が存在する．したがって $\Lambda'=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N,\lambda'\}$ は A^+ の有限部分被覆である．よって A^+ はコンパクトである．

A^- は A^+ と同様にしてコンパクトである．

(4)A^+ は Y においてコンパクトである．0 を含む開集合は開集合 $[0,x)$ を部分集合にもつ．x 以上の $\frac{1}{n}$ なる n は有限個なので (3) と同様にコンパクト．

A^- はコンパクトでない．$\{[-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1})\mid n=1,2,\dots\}\cup\{[0,1)\}$ は開被覆であるが有限部分被覆を持たない．

$\boxed{4}$ (1)$z=e^{i\pi/5}$ は一位の極である．よって留数は $\displaystyle\lim_{z\to e^{i\pi/5}}(z-e^{i\pi/5})/(z^5+1)=e^{6i\pi/5}/5$ である．

(2)$|\int_{\Gamma_R}f(z)dz|\leq\int_{\Gamma_R}|\frac{1}{z^5+1}|dz=\int_0^{2\pi/5}|\frac{1}{R^5-1}Ri|d\theta=\frac{2\pi}{5}\frac{R}{R^5-1}\to 0\quad(R\to\infty)$ である．

(3) 半径 R の扇形で偏角が 0 から $2\pi/5$ の曲線を反時計回りに進む積分曲線を C とする．$f(z)=\frac{1}{z^5+1}$ は C を含むある領域で C 内に孤立特異点をもち，それ以外で正則であるから，留数定理より $\int_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\big(f,e^{i\pi/5}\big)=2\pi i e^{6i\pi/5}/5$ である．

$\Gamma_A=\{xe^{i2\pi/5}\mid 0\leq x\leq R\}$ とする．ただし Γ_A の向きは C と同じ方向にとる．

$$\int_{\Gamma_A}\frac{1}{z^5+1}dz=-\int_0^R\frac{1}{x^5+1}e^{2\pi i/5}dx=-\cos\frac{2\pi}{5}\int_0^R\frac{1}{x^5+1}dx-i\sin\frac{2\pi}{5}\int_0^R\frac{1}{x^5+1}dx$$

よって

$$\int_0^\infty\frac{1}{x^5+1}dx-\cos\frac{2\pi}{5}\int_0^\infty\frac{1}{x^5+1}dx=-\frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}$$

よって $\int_0^\infty\frac{1}{x^5+1}dx=\frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}/(1-\cos\frac{2\pi}{5})$ である．

$$\frac{\sin\frac{6\pi}{5}}{(1-\cos\frac{2\pi}{5})}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin^2\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

より $\int_0^\infty\frac{1}{x^5+1}dx=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}$ である．

0.11 H25 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$u(x)=\int_0^x\phi(x)\psi(y)f(y)dy+\int_x^\pi\psi(x)\phi(y)f(y)dy=\phi(x)\int_0^x\psi(y)f(y)dy+\psi(x)\int_x^\pi\phi(y)f(y)dy$$

である．$\phi(y)f(y),\psi(y)f(y)$ は $(0,\pi)$ 上連続であるから，$u(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned}u'(x)&=\phi'(x)\int_0^x\psi(y)f(y)dy+\phi(x)\psi(x)f(x)+\psi'(x)\int_x^\pi\phi(y)f(y)dy-\psi(x)\phi(x)f(x)\\&=\phi'(x)\int_0^x\psi(y)f(y)dy+\psi'(x)\int_x^\pi\phi(y)f(y)dy\end{aligned}$$

先ほどと同様の理由で $u'(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned}u''(x)&=\phi''(x)\int_0^x\psi(y)f(y)dy+\phi'(x)\psi(x)f(x)+\psi''(x)\int_x^\pi\phi(y)f(y)dy-\psi'(x)\phi(x)f(x)\\&=-\phi(x)\int_0^x\psi(y)f(y)dy+\phi'(x)\psi(x)f(x)-\psi(x)\int_x^\pi\phi(y)f(y)dy+\psi'(x)\phi(x)f(x)\\&=-u(x)+\phi'(x)\psi(x)f(x)-\psi'(x)\phi(x)f(x)\end{aligned}$$

よって u は C^2 級である．

(2) $u''(x)+u(x)=(\phi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\phi(x))f(x)$ である．$h(x)=\phi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\phi(x)$ とおくと $h'(x)=\phi''(x)\psi(x)+\phi'(x)\psi'(x)-\psi''(x)\phi(x)-\psi'(x)\phi'(x)=-\phi(x)\psi(x)+\psi(x)\phi(x)=0$．より $h(x)=W$．

(3)ψ が C^2 級の実数値関数であることと $\psi''(x)+\psi(x)=0$ より $\psi(x)=\mathrm{Re}(Ae^{ix}+Be^{-ix})=C\cos x+D\sin x$. $(A,B$ は,$C=A+B\in\mathbb{R}, D=(A-B)i\in\mathbb{R}$ を満たす任意定数) である．

$\phi(x)=\sin x, W=1$ より $\cos x\psi(x)-\sin x\psi'(x)=1$．とくに $x=0$ で $\psi(0)=1$ である．よって $C=1$．また $\psi'(0)=0$ より $D=0$．よって $\psi(x)=\cos x$.

$\boxed{2}$ (1)$v\in f^{n+1}(V)=f^n(f(V))$ に対して，ある $u\in f(V)$ が存在して，$v=f^n(u)$ である．すなわち $f^{n+1}(V)\subset f^n(V)$ である．

(2)$f^{n+1}(V)\subset f^n(V)$ より $f^k(V)$ の次元は単調減少である．V は有限次元であるから，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq n_0$ ならば $f^{n+1}(V)=f^n(V)$ である．

(3)$f|_W: W\to W$ は $f|_W(W)=f|_W(f^{n_0}(V))=f^{n_0+1}(V)=W$ より全射である．有限次元ベクトル空間の全射自己準同型は同型射であるから，$f|_W$ は同型.

$\boxed{3}$ (1)$\pi^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ は R の開集合であるから，$\emptyset\in\mathcal{O}$ である．$\pi^{-1}(R/\sim)=R$ は R の開集合であるから，$R/\sim\in\mathcal{O}$ である．

$U,V\in\mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U),\pi^{-1}(V)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)=\pi^{-1}(U\cap V)$ は R の開集合である．よって $U\cap V\in\mathcal{O}$ である．

$U_\lambda\in\mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda)=\bigcup_\lambda\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合である．よって $\bigcup_\lambda U_\lambda\in\mathcal{O}$ である．

以上より $R/\sim$ は $\mathcal{O}$ を位相とする位相空間.

(2) ハウスドルフ空間であれば，一点集合は閉集合である．$\{x_0\}\subset R/\sim$ について $\pi^{-1}(\{x_0\})=D$ は R の閉集合ではない．よって $\{x_0\}$ は閉集合ではないから，ハウスドルフ空間でない.

(3)$\{x_0\}$ 以外の一点集合はすべて閉集合である．よって f が同相写像なら閉集合の像は閉集合であるから $f(x_0)=x_0$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{z_n\}_{n=1}^\infty$ を z に収束する任意の複素数列とする．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}&=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{z_n-z}\left(\frac{1}{e^{i\theta}-z_n}-\frac{1}{e^{i\theta}-z}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta\end{aligned}$$

ここで $|z|<1$ より任意の $\theta\in[0,2\pi]$ とある整数 N より大きい n に対して，ある $\varepsilon>0$ が存在して $|(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)|\geq|1-|z_n||1-|z||>\varepsilon$ である．したがって $\sup_{n>N}\left|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}\right|<|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{\varepsilon}|<M\in\mathbb{R}$ である．

よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{i\theta}((e^{i\theta}-z)^{-1})'d\theta$$

となり微分可能．よって f は $|z|<1$ で正則である．

(2)$|z|<1$ のとき $n!c_n=f^{(n)}(0)$ である．$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})((e^{i\theta}-z)^{-1})^{(n)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})(n!(e^{i\theta}-z)^{-n-1})d\theta$ である．よって $f^{(n)}(0)=n!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta$ である．

$$\begin{aligned}2\pi c_n&=\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta=\left[\phi(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{ni}d\theta=\left[\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2i^2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-n^2i^2}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2}d\theta\leq 2\pi\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

よって $n^2|c_n| \le \max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|$ である．

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n| \le \sum_{n=0}^{\infty}|c_n| \le \sum_{n=0}^{\infty}\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2} < \infty$$

よって絶対収束するから，$|z|=1$ で $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は収束する．

(4) ワイエルシュトラスの M 判定法と (3) での不等式から $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $|z|\le 1$ で一様収束する．したがって一様収束先の関数は連続であるから，$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ である．

0.12 H26 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ より $(\arctan y + \arctan(1/y))' = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+(1/y)^2}(-1/y^2) = 0$ より $\arctan y + \arctan(1/y)$ は定数関数である。よって $\arctan x \in F$

(2)$f(x)+f(1/x) = c \in \mathbb{R}$ とする．$0<a<1$ に対して

$$\int_a^1 f(x)dx = \int_{1/a}^1 -\frac{f(1/t)}{t^2}dt = \int_1^{1/a}\frac{f(t)-c}{t^2}dt = \int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt + c\left[\frac{1}{t}\right]_1^{1/a} = \int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt + c(a-1)$$

したがって $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx$ の存在と $\lim\limits_{a\to 0}\int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt$ の存在は同値である。

(3)g が $G\in\mathbf{F}$ に 拡張可能だとする．このとき $\lim\limits_{x\to 1-0} g'(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} G'(x)$ は G が C^1 級であるから存在する．

逆に $\lim\limits_{x\to 1-0} g'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ とする．1 に収束する $(0,1)$ 上の任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $1-\delta < x < 1$ ならば $\alpha-\varepsilon < g'(x) < \alpha+\varepsilon$ である．$\varepsilon\delta$ に対してある N が存在して $n > N$ ならば $1-\varepsilon\delta < x_n < 1$ である．$n,m > N$ について平均値の定理から $g(x_n)-g(x_m) = g'(\xi)(x_n-x_m)$ となる $\xi\in(1-\varepsilon\delta,1)$ が存在する．よって $|g(x_n)-g(x_m)| < (\alpha+\varepsilon)\delta\varepsilon \to 0$ となるから $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列．すなわち収束列．以上より $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)$ は存在する．その収束先を β とする．

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & (x\in(0,1)) \\ \beta - G(1/x) & (x\in(1,\infty)) \\ \beta & (x=1)\end{cases}$$ と定めると $G|_{(0,1)} = g$ であり，$G(x)+G(1/x) = \beta$ である．

$G(x)$ は $x=1$ 以外の点で微分可能であり，導関数は連続である．$\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-0}\frac{g'(x)}{1} = \alpha$ である．(ロピタルの定理) $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\beta-G(1/x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{-g'(1/x)(-x^{-2})}{1} = \alpha$ である．よって G は $x=1$ で微分可能.

$\lim\limits_{x\to 1+0} G'(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} -g'(1/x)(-x^{-2}) = \alpha$ である．よって導関数が $x=1$ で連続であるから G は C^1 級.

$\boxed{2}$ (1) 一次独立であることを示す．$c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x = 0$ とする．$x=0$ とすると，$c_1+c_3=0$ である．$x=\pi$ とすると，$-c_1+c_3=0$ である．よって $c_1=c_3=0$ である．$x=\frac{\pi}{2}$ とすると，$c_2=0$ である．よって $c_4=0$ より S は一次独立．よって V の基底

(2)$\Phi(\cos x) = -\sin x, \Phi(\sin x) = \cos x, \Phi(\cos 2x) = -2\sin 2x, \Phi(\sin 2x) = 2\cos 2x$ より Φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．$\Psi(\cos x) = \sin x, \Psi(\sin x) = \cos x, \Psi(\cos 2x) = -\cos 2x, \Psi(\sin 2x) = -\sin 2x$ より

Ψ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

(3)$g(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$ とする．

$\Phi(g(x)) - \Psi(g(x)) = \cos 2x$ より $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

すなわち $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．したがって $c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ が解である．よって $g(x) = c_2 \sin x + \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{2}{5} \sin 2x$ である．

$\boxed{3}$ (1)Q が連結でないとすると，Q の非空開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset, U \cup V = Q$ となるものが存在する．このとき $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset, \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V) = \mathbb{R}^2$ となる．すなわち $\mathbb{R}^2$ が連結でないがこれは矛盾．よって Q は連結である．

(2)$(1,0) \in \mathbb{R}^2$ の同値類は $A = \{(x,0) \mid x \neq 0\}$ である．また $(0,0)$ の同値類は $B = \{(0,0)\}$ である．B を含む Q の開集合 U を任意にとる．$(0,0) \in \pi^{-1}(Q)$ で $\pi^{-1}(Q)$ は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B((0,0),\varepsilon) \subset \pi^{-1}(Q)$ である．$B((0,0),\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である．よって B を含む任意の開集合は A を含むから，ハウスドルフ空間でない．

(3)$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid -n < xy < n\}$ とする．A_n は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}\pi(A_n) = A_n$ である．$\{\pi(A_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ は Q の有限部分被覆を持たない開被覆である．よってコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$z \in D$ について，z に収束する D 上の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとる．

$$\begin{aligned} 2\pi i \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} &= \lim_{n\to\infty} \int_C \left(\frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z_n} - \frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z} \right) \frac{1}{z_n - z} d\zeta \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta \end{aligned}$$

ここで $\zeta \in C, z_n, z \in D$ より $\zeta(\zeta-2) - z_n > M, \zeta(\zeta-2) - z > M$ となる $M > 0$ が存在する．よって $\frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)} < \frac{1}{M^2}$ であるから $\int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)} d\zeta < 2\pi M^2$ である．よってルベーグの収束定理から

$$2\pi i \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \int_C \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta = \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z)^2} d\zeta$$

よって $f(z)$ は D 上で正則．

(2)$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^k$ とする．$\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^{k+n+1}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = n! c_{-1}$ である．

$((\zeta-2)^{-n-1})^{(n)} = (-n-1)(-n-2)\dots(-n-n)(\zeta-2)^{-2n-1} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!(\zeta-2)^{2n+1}}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n! 2^{2n+1}}$ よって $c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ である．

$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}$ は C 内で $\zeta = 0$ を特異点にもつ．よって留数定理から $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} d\zeta = \mathrm{Res}\left\{ \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}, 0 \right\} = c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$

(3)$\zeta(\zeta-2) - z = (\zeta - (1 + \sqrt{1+z}))(z - (1 - \sqrt{1+z}))$ である．$|z| < 1$ より $-\pi/2 < \arg(1+z) < \pi/2$ である．よって $-\pi/2 < \arg(\sqrt{1+z}) < \pi/2$ より $\mathrm{Re}(1 + \sqrt{1+z}) > 1$ である．すなわち $|1 + \sqrt{1+z}| > 1$ である．

$\zeta=1-\sqrt{1+z}$ は $\zeta^2-2\zeta-z=0$ より $|\zeta||\zeta-2|=|z|<1$ である．よって $|\zeta|<1/|\zeta-2|=1/|1-\sqrt{1+z}-2|=1/|1+\sqrt{1+z}|<1$ である．よって $\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}$ は D 内で特異点 $\zeta=1-\sqrt{1+z}$ を持つ．一位の極であるから留数は $\lim\limits_{\zeta\to 1-\sqrt{1+z}}(\zeta-(1-\sqrt{1+z}))\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}=\frac{1}{-2\sqrt{1+z}}$ である．よって $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}d\zeta=\frac{-1}{2\sqrt{1+z}}$ である．

0.13 H27 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$ である．任意の $\varepsilon>0$ に対して一様収束するから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば，$^\forall x\in\mathbb{R},|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ である．この N に対して f_N は一様連続であるから，ある $\delta>0$ が存在して，$|x-y|<\delta$ ならば $|f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon$ である．よって，$|x-y|<\delta$ ならば，$|f(x)-f(y)|<3\varepsilon$ である．すなわち，f は一様連続である．

(2) 一様収束するから任意の $\varepsilon>0$ について，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば，$^\forall x\in\mathbb{R},f_n(x)-\varepsilon<f(x)<f_n(x)+\varepsilon$ である．両辺の sup をとって $\sup A\leq\sup A_n+\varepsilon$ である．よって A は有界．$|\sup A-\sup A_n|<\varepsilon$ より $\limsup A_n=\sup A$

$\boxed{2}$ (1)$f_a(e_1)=a^te_1-e_1^ta=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-a_2&-a_3\\a_2&0&0\\a_3&0&0\end{pmatrix}=-a_2E_1-a_3E_2,f_a(e_2)=\begin{pmatrix}0&a_1&0\\-a_1&0&-a_3\\0&a_3&0\end{pmatrix}=a_1E_1-a_3E_3,f_a(e_3)=\begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&0&a_2\\-a_1&-a_2&0\end{pmatrix}=a_1E_2+a_2E_3$ である．

よって $T_a=\begin{pmatrix}-a_2&a_1&0\\-a_3&0&a_1\\0&-a_3&a_2\end{pmatrix}$ である．

(2)$\det T_a=-a_2(-a_1(-a_3))+a_3a_1a_2=0$ より $\operatorname{rank}f_a\leq 2$ である．

$a\neq 0$ よりある i について $a_i\neq 0$ である．T_a の部分小行列として $\begin{pmatrix}a_1&0\\0&a_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_2&0\\0&a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_3&0\\0&-a_3\end{pmatrix}$ がとれる．これらの行列式は何れかが 0 でないから $\operatorname{rank}f_a\geq 2$ である．よって $\operatorname{rank}f_a=2$ である．したがって $\dim\operatorname{Im}f_a=2,\dim\operatorname{Ker}f_a=1$ である．

(3)T_a の固有多項式を g_a とすると $g_a=\begin{vmatrix}-a_2-\lambda&a_1&0\\-a_3&-\lambda&a_1\\0&-a_3&a_2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+(a_2^2-2a_1a_3)\lambda=-\lambda(\lambda^2-(a_2^2-2a_1a_3))$ である．

よって $a_2^2-2a_1a_3\neq 0$ ならば T_a の固有値は全て異なるから，対角化可能．$a_2^2-2a_1a_3=0$ ならば，T_a の固有値は 0 のみである．固有値 0 の固有空間は $\ker T_a$ であるから $a\neq 0$ なら固有空間の次元は 1 となり，対角化不可能．$a=0$ ならば $T_a=0$ であるから対角化可能.

以上より $a=0\vee a_2^2-2a_1a_3\neq 0$ が対角化可能性に関する必要十分条件である．

$\boxed{3}$ (1)$N_r(A)$ は開集合である．これを示す．$x\in N_r(A)$ を任意にとる．ある $a\in A$ が存在して $b:=r-d(x,a)>0$ である．$y\in B(x,b/2):=\{y\in X\mid d(x,y)<b/2\}$ について $d(a,y)\leq d(a,x)+d(x,y)<r-b+b/2<r$ である．よって $B(x,b/2)\subset N_r(A)$ である．よって $N_r(A)$ は開集合である．

$F_K=\{N_n(K)\mid n=1,2,\dots\},F_L=\{N_n(L)\mid n=1,2,\dots\}$ とする．F_K,F_L は X の開被覆である．とくに K,L の開被覆である．よって L の被覆 $\{N_{n_1}(K),N_{n_2}(K),\dots,N_{n_m}(K)\}$ と，K の被覆 $\{N_{m_1}(L),N_{m_2}(L),\dots,N_{m_\ell}(L)\}$ がとれる．$r=n_m+m_\ell$ とすれば，$L\subset N_r(K),K\subset N_r(L)$ である．

(2) 任意の $r>0$ に対して $K\subset N_r(K)$ である．よって $D(K,K)=0$ である．逆に $D(K,L)=0$ とする．任

意の $r>0$ について $K\subset N_r(L), L\subset N_r(K)$ である．$x\in K$ に対して，ある $y\in L$ が存在して $d(x,y)<r$ である．この r は任意にとれるから x は L の触点である．距離空間はハウスドルフ空間であり，ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから，L は閉集合である．よって $x\in L$ である．すなわち $K\subset L$ である．同様にして $L\subset K$ である．よって $K=L$ である．

定義から $D(K,L)=D(L,K)$ である．

K,L,M をコンパクト集合とする．$D(K,L)=r_1, D(L,M)=r_2, r:=r_1+r_2$ とする．任意の $\varepsilon>0$ を一つ固定する．$x\in K$ に対して，$y\in L$ が存在して $d(x,y)<r_1+\varepsilon$ である．$y\in L$ に対して，$z\in M$ が存在して $d(y,z)<r_2+\varepsilon$ である．よって $d(x,z)<r_1+r_2+2\varepsilon$ である．すなわち $K\subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(M)$ である．逆も同様に $M\subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(K)$ である．よって $D(K,M)\leq r_1+r_2+2\varepsilon$ である．ε は任意にとれるから $D(K,M)\leq r_1+r_2$ である．よって $D(K,M)\leq D(K,L)+D(L,M)$ である．

$\boxed{4}$ (1)$1+e^{2\pi z}=0$ とする．$z=x+iy\quad(x,y\in\mathbb{R})$ とすると，$e^{2\pi x}e^{2\pi iy}=-1$ である．よって $\sin 2\pi y=0$ であるから，$y=\frac{n}{2}\quad(n\in\mathbb{Z})$ である．よって $e^{2\pi z}=e^{2\pi x}(-1)^n=-1$ より $x=0$ で n は奇数である．S_R 内では $z=i/2$ が唯一の解である．すなわち $f(z)$ は $z=i/2$ を特異点にもつ．

$$\lim_{z\to\frac{i}{2}}(z-\frac{i}{2})\frac{e^{2\pi az}}{1+e^{2\pi z}}=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{e^{2\pi az}+(z-\frac{i}{2})2\pi ze^{2\pi az}}{2\pi e^{2\pi z}}=-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$$

より $\mathrm{Res}\{f(z),i/2\}=-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$ である．

したがって留数定理から $\int_{\gamma_R}f(z)dz=2\pi i(-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi})=-ie^{a\pi i}$ である．

(2)$|\int_{J_R^+}f(z)dz|=|\int_0^1\frac{e^{2\pi a(R+iy)}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}idy|\leq\int_0^1|\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}|dy$ である．

$$\left|\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}\right|=\left|\frac{1}{e^{-2\pi aR}+e^{2\pi R(1-a)}e^{2\pi iy}}\right|\leq\frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$$

であるから，$|\int_{J_R^+}f(z)dz|\leq\int_0^1\frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}dy=\frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$ である．$0<1-a<1$ より $|\int_{J_R^+}f(z)dz|\to 0\quad(R\to\infty)$ である．同様に $|\int_{J_R^-}f(z)dz|\to 0\quad(R\to\infty)$ である．

(3)$R+i$ から $R-i$ への向きのついた線分を C とする．$\int_C dz=\int_C\frac{e^{2\pi az}}{1+e^{2\pi z}}dz=\int_R^{-R}\frac{e^{2\pi a(x+i)}}{1+e^{2\pi(x+i)}}dx=-e^{2\pi ai}\int_{-R}^R\frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}}dx$ である．よって $\alpha=\int_{-R}^R f(z)dz$ とすれば，$\int_{\gamma_R}f(z)dz=(1-e^{2\pi ai})\alpha+\int_{J_R^+}f(z)dz-\int_{J_R^-}f(z)dz$ である．よって $R\to\infty$ で $-ie^{a\pi i}=(1-e^{2\pi ai})\alpha$ である．よって $\alpha=\frac{-ie^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}}=\frac{-i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}}=\frac{1}{2\sin a\pi}$ である．

0.14　H28 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|x|\leq\frac{1}{2}$ なら $5-1/(1+x)^2>0$ である．よって $0<\int_0^x 5-1/(1+t)^2dt=5x+1/(1+x)-1$ である．よって $0<\int_0^x 5t+1/(1+t)-1dt=5x^2/2+\log(1+x)-x$ である．よって $-5x^2/2<\log(1+x)-x$ である．

また $5+1/(1+x)^2>0$ である．よって $0<\int_0^x 5+1/(1+t)^2dt=5x-1/(1+x)+1$ である．よって $0<\int_0^x 5t-1/(1+t)+1dt=5x^2/2-\log(1+x)+x$ である．よって $5x^2/2>\log(1+x)-x$ である．

すなわち $|\log(1+x)-x|<5x^2/2$ である．

(2)$\sum a_k$ が収束するから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば，$a_n<1/2$ である．無限積の収束性は $k=N$ からの無限積の収束性と同じ．また (1) より $|\log(1+x)|\leq Cx^2+x$ である．$\log$ の連続性から

$$\log\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^n(1+a_k)=\lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=N}^n(1+a_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n\log(1+a_k)$$

である．

絶対級数 $\sum |\log(1+a_k)|$ の収束性を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}|\log(1+a_k)| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}Ca_k^2+a_k = C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}a_k^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}a_k$$

右辺は収束するから，$\sum\log(1+a_k)$ は絶対収束する．よって収束するので，$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^{n}(1+a_k)$ は収束する．

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ と $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2$ の収束を示せばよい．$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ とする．$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1}>0$ より S_{2n} は単調増加する．同様に $S_{2n+1}=1/4-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1}>0$ より S_{2n+1} は単調減少する．$S_{2n+1}-S_{2n}=1/(3(2n+1)+1)$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}-S_{2n}=0$ である．また $S_{2n+1}=1/(3(2n+1)+1)+S_n>0$ より S_{2n+1} は有界な単調数列であるから収束する．したがって S_{2n} も収束して $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$ である．よって $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ は収束する．

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^2}<\frac{1}{9}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$ である．ともに収束するから無限積も収束する．

$\boxed{2}$ (1)$y\in f_A(W^\perp)$ を任意にとる．ある $x\in W^\perp$ が存在して $y=f_A(x)$ である．任意の $u\in W$ について $(u,y)={}^t uAx={}^t({}^tAu)x=({}^tAu,x)=(f_A(u),x)=0$ である．よって $y\in W^\perp$ である．

A の固有値 $\lambda\in\mathbb{C}$ と固有ベクトル $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ をとる．$x,y\in\mathbb{C}^n$ について標準エルミート内積 $(x,y)={}^t x\overline{y}$ を定める．$\lambda(v,v)=(Av,v)=(v,\overline{{}^tA}v)=(v,\overline{\lambda}v)=\overline{\lambda}(v,v)$ である．$(v,v)>0$ より $\lambda=\overline{\lambda}$ である．よって $\lambda\in\mathbb{R}$ である．

(2)A の固有空間全ての直和を W とする．$\mathbb{R}^n=W\oplus W^\perp$ である．$f_A(W)\subset W$ となるから，$f_A|_{W^\perp}\colon W^\perp\to W^\perp$ を得る．$\mathbb{C}$ による定数倍を加えることで $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}$ 上線形空間 $\mathbb{C}^n$ に拡張する．$W,W^\perp$ も同様に $\overline{W},\overline{W^\perp}$ に拡張する．$f_A|_{W^\perp}$ は $\overline{W^\perp}$ 上の線形変換に拡張できる．$W^\perp\neq\{0\}$ なら $f_A|_{\overline{W^\perp}}$ の固有値 λ と固有ベクトル $v\neq 0$ をとれる．$u=0+v\in\overline{W}\oplus\overline{W^\perp}$ とする．$Au=\lambda u$ である．λ は f_A の固有値であるから $\lambda\in\mathbb{R}$ である．よって $u\in\mathbb{R}^n$ としてよい．$u\in W^\perp$ となるがこれは W の定義に矛盾．よって $W^\perp=\{0\}$．

f_A の固有値 λ と固有ベクトル x について $\mathrm{Span}\{x\}=\mathrm{Span}\{x\}^{\perp\perp}$ であり，任意の $y\in\mathrm{Span}\{x\}^\perp$ について $(y,{}^tAx)=(Ay,x)=0$ より ${}^tAx\in\mathrm{Span}\{x\}$ である．よって ${}^tAx=\mu x$ とできる．$\lambda(x,x)=(Ax,x)=(x,{}^tAx)=(x,\mu x)=\mu(x,x)$ である．$(x,x)>0$ より $\lambda=\mu$ である．

$\mathbb{R}^n$ の任意の元 x は固有ベクトル $v_1,\dots,v_n$ の線形結合で表せる．$x=\sum_{i=1}^n a_iv_i$ とする．$Ax=\sum_{i=1}^n a_iAv_i=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_iv_i={}^tAx$ である．よって $A={}^tA$ である．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x,y\in[0,1]^\infty$ に対して $|x_k-y_k|\leq 1$ である．よって $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-y_k|\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}=1$ である．よって d は $[0,1]^\infty\times[0,1]^\infty$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

$x=y$ なら $d(x,y)=0$ である．また $d(x,y)=0$ なら $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-y_k|=0$ であるから $x_k=y_k$ である．よって $d(x,y)=0$ なら $x=y$ である．$d(x,y)=d(y,x)$ は明らか．

x,y,z について $\sum\limits_{k=1}^{n}2^{-k}|x_k-z_k|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}2^{-k}|x_k-y_k|+\sum\limits_{k=1}^{n}2^{-k}|y_k-z_k|$ である．$n\to\infty$ とすると $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-z_k|\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-y_k|+\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}|y_k-z_k|$ である．よって $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ である．

よって d は距離．

(2)$x_n\to a$ とする．$d(x_n,a)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_{n,k}-a_k|\geq 2^{-i}|x_{n,i}-a_i|\to 0\quad(n\to\infty)$ である．よって任意の k に対して $x_{n,k}\to a_k$．

任意の k に対して $x_{n,k}\to a_k$ とする．任意の ε に対して $2^{1-n_0}\leq\varepsilon$ なる n_0 が存在する．このとき $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}2^{-k}|x_{n,k}-a_k|\leq 2^{1-n_0}\leq\varepsilon$ である．1 から n_0-1 までの整数 k について，ある N_k が存在して $n\geq N_k$ なら $|x_{n,k}-a_k|\leq\varepsilon$ である．$N=\max\{N_1,\dots,N_{n_0-1}\}$ とする．このとき $\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}2^{-k}|x_{n,k}-a_k|\leq\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}2^{-k}\varepsilon\leq 2\varepsilon$ である．よって $n\geq N$ なら $d(x_n,a)\leq 3\varepsilon$ であるから $x_n\to a$ である．

(3)$\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ は有界閉区間 $[0,1]$ 内の点列であるから，収束部分列を必ずもつ．したがって収束部分列 $\{x_{n,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^{\infty}$ に対して数列 $\{x_{n+1,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^{\infty}$ も収束部分列 $\{x_{n+1,k_j^{(n+1)}}\}_{j=1}^{\infty}$ を持つ．このとき $\{k_j^{(n+1)}\}_{j=1}^{\infty}$ は $\{k_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列である．これが任意の n について成り立つから数列 $\{k_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}, \{k_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}, \dots$ を得て，それぞれ前の数列の部分列となっている．数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $s_n = k_n^{(n)}$ で定める．$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は全ての m について $n > m$ では $\{k_j^{(m)}\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列となっている．したがって $\{x_{s_n}, k\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列になっている．よって $\{x_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である．

$\boxed{4}$ (1)$z = re^{i\theta}$ とする．

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{i\theta}} ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} ie^{ire^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} ie^{ir\cos\theta} e^{-r\sin\theta} d\theta$$

$$\int_{C_r} \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| dz = \int_0^{\pi} \left| e^{-r\sin\theta} \right| d\theta \le \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

である．よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} i d\theta = \pi i, \quad \lim_{r\to\infty} \left| \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \le \lim_{r\to\infty} \int_0^{\pi} \left| e^{-r\sin\theta} \right| d\theta = \int_0^{\pi} 0 d\theta = 0$$

(2)$r > 0$ に対して $z = 1/r$ から $z = r$ までの積分経路を Γ_r^+ とする．$z = -r$ から $z = -1/r$ までの積分経路を Γ_r^- とする．

$$\int_{\Gamma_r^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{1/r}^{r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{1/r}^{r} \frac{\cos x + i\sin x}{x} dx$$

$$\int_{\Gamma_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-r}^{-1/r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{r}^{1/r} -\frac{\cos x - i\sin x}{-x} dx = \int_{1/r}^{r} \frac{-\cos x + i\sin x}{x} dx$$

である．積分経路 $\Gamma_r^+, C_r, \Gamma_r^-, -C_{1/r}$ によってできる閉曲線 Γ を考えると，被積分関数は原点を除いて正則であるから，$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ である．よって

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma_r^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-C_{1/r}} \frac{e^{iz}}{z} dz \\
&= \int_{1/r}^{r} \frac{\cos x + i\sin x}{x} dx + \int_{1/r}^{r} \frac{-\cos x + i\sin x}{x} dx + I(r) - I(1/r) \\
&= 2i \int_{1/r}^{r} \frac{\sin x}{x} dx + I(r) - I(1/r) \to 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i \quad (r \to \infty)
\end{aligned}$$

したがって $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$ である．