0.1　H17 数学 A

$\boxed{1}$ (1)AB が正則であるから $f\circ g$ は同型である．よって f は全射，g は単射である．$\dim \mathrm{C}^n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{C}^m$ より $\dim \mathrm{Ker}\, f = n-m$ である．g は単射であるから $\dim \mathrm{Ker}\, g = 0$

(2)$ABv = \lambda v, v \neq 0$ とする．このとき $BABv = B\lambda v = \lambda Bv, Bv \neq 0$ であるから AB の固有値 λ は BA の固有値でもある．

$BAv = \lambda v, v \neq 0$ とする．$ABAv = \lambda Av$ であるから，$Av \neq 0$ なら λ は AB の固有値である．$Av = 0$ なら $BAv = 0 = \lambda v$ より $\lambda = 0$．すなわち BA の零でない固有値は AB の固有値でもあるから BA の固有値は $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ である．

(3)C^m における AB の固有値 λ_i の固有空間を $W(\lambda_i)$ とする．対角化可能であるから $\sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = m$ である．C^n における BA の固有値 λ_i の固有空間を $V(\lambda_i)$ とする．$g(W(\lambda_i)) \subset V(\lambda_i)$ であり g は単射であるから $\dim W(\lambda_i) \leq \dim V(\lambda_i)$ である．また $V(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(g\circ f)$ より $\dim V(\lambda_0) \geq n-m$ である．よって $\sum_{i=0}^k \dim V(\lambda_i) \geq n - m + \sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = n$ である．よって BA は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)f を商写像とする．$f^{-1}(B)$ を閉集合とする．$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus B)$ は開集合であるから $X \setminus B$ は開集合である．よって B は閉集合.

$f^{-1}(B)$ を開集合とする．$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus B)$ は閉集合であるから $X \setminus B$ は閉集合である．よって B は開集合.

(2)$B \subset Y$ について $f^{-1}(B)$ が閉集合だとする．コンパクト空間の閉集合はコンパクトであるから $f^{-1}(B)$ はコンパクトである．f は全射連続写像であるから $f(f^{-1}(B)) = B$ はコンパクトである．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから B は閉集合である．よって f は商写像.

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x > 0$ について $x/N < 1$ なる N が存在する．$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (|x| < 1)$ であるから $n \geq N$ のとき $\log(1+x/n) = (x/n) - \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3)$ である．したがって $\sum\limits_{n=N}^{\infty} x/n - \log(1+x/n) = \sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3) < \infty$ である．よって収束する．

(2)$I = (1/2, 2)$ とする．$x \in I$ に対して $(x/n - \log(1+x/n))' = 1/n - \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n(2n+1)}$ である．よって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n - \log(1+1/n)$ は一様収束する．したがって $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x/n - \log(1+x/n))'|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n - \frac{1}{n+1} = 1$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{1}{1+z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ であるから $\frac{2z}{1+z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1}$ である．

(2) 整級数であるから項別積分ができて $|z| < 1$ で $f(z) = \log\bigl(1+z^2\bigr) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+2}/(2n+2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k}/k$ である．よって $f(z)/z^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k-n}/k$ でありこのローラン級数の z^{-1} の係数は n が偶数か 1 のとき 0，それ以外のとき $(-1)^{\ell-1}/\ell \quad (n = 2\ell+1)$ である．留数定理から $\int_C \frac{f(z)}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i(-1)^{\ell-1}/\ell & (n = 2\ell+1) \\ 0 & (n \neq 2\ell+1) \end{cases}$ である．