0.1 R2 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$A, B \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$ より，$A+B \in S_2(\mathbb{R})$ である．また $k \in \mathbb{R}, A \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t(kA) = k{}^tA = kA$ より $kA \in S_2(\mathbb{R})$ である．よって $S_2(\mathbb{R})$ は部分空間.

(2)$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．それぞれ対称行列である．$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(R)$ に対して $A = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + a_{22}Q_3$ である．$c_1Q_1 + c_2Q_2 + c_3Q_3 = 0$ とする．$c_1Q_1 + c_2Q_2 + c_3Q_3 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = O$ より $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ である．よって Q_1, Q_2, Q_3 は線形独立である．すなわち $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ は $S_2(\mathbb{R})$ の基底である．

(3)$A \in S_2(\mathbb{R})$ に対して ${}^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA{}^t({}^tP) = {}^tPAP$ である．よって $f_p(S_2(\mathbb{R})) \subset S_2(\mathbb{R})$ である．

(4)$g_P(Q_1) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = a^2Q_1 + abQ_2 + b^2Q_3$ である．

$g_P(Q_2) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & cb+ad \\ cb+ad & 2bd \end{pmatrix} = 2acQ_1 + (cb+ad)Q_2 + 2bdQ_3$ である．

$g_P(Q_3) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix} = c^2Q_1 + cdQ_2 + d^2Q_3$ である．

よって表現行列は $X = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & cb+ad & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{pmatrix}$ である．

(5)g_P が全射なら ${}^tPAP = E$ を満たす $A \in S_2(\mathbb{R})$ が存在する．$\det{}^tP \det A \det P = 1$ であるから $(\det P)^2 \det A = 1$ である．よって $\det P \neq 0$ である．よって P は可逆行列.

P が可逆行列なら任意の $Q \in S_2(\mathbb{R})$ に対して $A = {}^tP^{-1}QP^{-1}$ とすれば，$A \in S_2(\mathbb{R})$ であり，$g_P(A) = Q$ である．よって g_P は全射である．

$\boxed{2}$ (1) G を非空集合，$\cdot : G \times G \to G$ を写像とする．$\langle G, \cdot \rangle$ が群であるとは，次の条件を満たすことである．

(i)任意の $a, b, c \in G$ に対して $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ である．

(ii)ある $e \in G$ がただ一つ存在して任意の $a \in G$ に対して $e \cdot a = a \cdot e = a$ である．

(iii)(ii) の e と任意の $a \in G$ に対して，ある $b \in G$ が存在して $a \cdot b = b \cdot a = e$ である．

(2)$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, (-1)^{x_2}y_1 + y_2) \cdot (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, (-1)^{x_3}((-1)^{x_2}y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, (-1)^{x_2+x_3}y_1 + (-1)^{x_3}y_2 + y_3)$ である．また $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, (-1)^{x_3}y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, (-1)^{x_3}y_1 + (-1)^{x_1}y_2 + y_3)$ である．よって (i) を満たす．

$(x_1, y_1) \cdot (0, 0) = (x_1, (-1)^0y_1) = (x_1, y_1)$ である．また $(0, 0) \cdot (x_1, y_1) = (0, (-1)^{x_1}y_1) = (x_1, y_1)$ である．逆に $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ なら $x_1 = x_1 + x_2$ であるから $x_2 = 0$ である．よって $(-1)^{x_2}y_1 + y_2 = y_1 + y_2 = y_1$ より $y_2 = 0$ である．よって (ii) を満たす．

(x_1, y_1) に対して $(x_1, y_1) \cdot (-x_1, (-1)^{-x_1+1}y_1) = (0, (-1)^{-x_1}y_1 + (-1)^{-x_1+1}y_1) = (0, 0), (-x_1, (-1)^{-x_1+1}y_1) \cdot (x_1, y_1) = (0, (-1)^{x_1}y_1 + (-1)^{-x_1+1}y_1) = (0, 0)$ である．よって (iii) を満たす．すなわち群である．

(3) 任意の $(x_1, y_1) \in G, (x, y) \in H$ に対して，$(-x_1, (-1)^{-x_1+1}y_1) \cdot (x, y) \cdot (x_1, y_1) = (-x_1 + x, (-1)^x(-1)^{-x_1+1}y_1 + y) \cdot (x_1, y_1) = (x, (-1)^{x_1}((-1)^{x-x_1+1}y_1 + y) + y_1) = (x, (-1)^{x+1-2x_1}y_1 + (-1)^{x_1}y + y_1)$ である．$x \in 2F$ であり，$(-1)^{x+1-2x_1}y_1 + (-1)^{x_1}y + y_1 = (-1)^{x_1}y \in 3\mathbb{Z}$ である．よって H は G の正規部分群.

$\boxed{3}$ (1)$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標変換する．ヤコビアンは r である．積分領域は $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq$

$r \leq 1, -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3\}$ である．よって

$$\iint_D x|\log(x^2+y^2)|dxdy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^1 r^2\cos\theta|\log r^2|drd\theta = [\sin\theta]_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^1 -r^2\log r^2 dr$$
$$= -2\sqrt{3}\left(\left[\frac{1}{3}r^3\log r\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{r^2}{3}dr\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

(2) 極座標変換して $0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta < 2\pi$ での $f(r,\theta) = r^2\cos\theta\sin\theta(3-r^2)$ の最大値，最小値を考える．

$0 \leq r \leq \sqrt{2}$ での $r^2(3-r^2) = -(r^2-3/2)^2 + 9/4$ は $r = \frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ をとり，$r = 0$ で最小値 0 をとる．$0 \leq \theta < 2\pi$ での $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ は $\theta = \pi/4$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとり，$\theta = 3\pi/4$ で最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる．

よって最大値は $\frac{9}{8}$，最小値は $-\frac{9}{8}$ である．

(3)$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示す．$n > m$ とする．$(f(n))_{n=1}^{\infty}$ は単調減少有界列であるから収束列である．よってコーシー列である．よって

$$|a_n - a_m| = \left|\int_m^n f(x)dx - \sum_{k=m+1}^{n} f(k)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x) - f(k)dx\right|$$
$$\leq \left|\sum_{k=m+1}^{n} f(k-1) - f(k)\right| = |f(m) - f(n)| \to 0 \ (n, m \to \infty)$$

となるからコーシー列である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の異なる二点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ をとる．$x_1 \neq x_2$ のとき，$x_1 \subset U_1, x_2 \subset U_2$ なる開集合 U_1, U_2 で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものが存在する．このとき $(x_1,y_1) \subset U_1 \times Y, (x_2,y_2) \subset U_2 \times Y$ であり，$U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = \emptyset$ である．$x_1 = x_2$ のとき，$y_1 \neq y_2$ であり，その場合も同様にできる．よって $X \times Y$ はハウスドルフである．

(2)$A \subset X$ が有限のとき，$S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の開被覆とする．各 $a \in A$ に対して $a \in U_{\lambda_a}$ なる $\lambda_a \in \Lambda$ が存在するからこれを固定する．このとき $A \subset \bigcup_{a\in A} U_{\lambda_a}$ より A はコンパクト．

A が無限集合なら A の開被覆として $S = \{\{a\} \mid a \in A\}$ とすればこれは有限部分被覆をもたないからコンパクトでない．対偶をとればコンパクトなら有限集合である．