0.1　H21 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=f'(0)$$

であるから $-f'(0)/2>0$ に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $nf(\frac{1}{n})<f'(0)+(-f'(0)/2)=f'(0)/2$ である．

(2)$\pi>x>0$ で $\frac{1}{1+x}<1$ より $\log(1+x)=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt<\int_0^1 1dt=t$ である．したがって $\log(1+x)<x$ である．またテイラーの定理から $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+R(x)$ である．$R(x)=\frac{(\cos^{(5)}s)}{5!}x^5\quad(0<s<x<\pi)$ である．$(\cos^{(5)}s)=-\sin s<0$ であるから $R(x)<0$ である．したがって $\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ である．

以上より

$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\le\log\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}\right)\le-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}<-\frac{1}{n}$$

であるから発散する．

$\boxed{2}$ (1) 略

(2)$\sigma(u)=u-2\frac{(u,u)}{(u,u)}u=-u$ より -1 は固有値である．$\sigma(x)=-x$ とすると，$x-2\frac{(x,u)}{(u,u)}u=-x$ であるから $x=\frac{(x,u)}{(u,u)}u$ である．すなわち $x\in\mathrm{spam(u)}$ である．よって $W(-1)=\mathrm{spam(u)}$ である．

(3)$\sigma\circ f(u)=f\circ\sigma(u)=f(-u)=-f(u)$ であるから $f(u)\in W(-1)=\mathrm{spam(u)}$ である．したがって u は f の固有ベクトルである．

(4)$\sigma(e_1)=e_1-2\frac{(e_1,u)}{(u,u)}u=e_1-\frac{2}{3}u=\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_3-\frac{2}{3}e_4,\sigma(e_2)=e_2,\sigma(e_3)=e_3+\frac{2}{3}u=\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}e_3+\frac{2}{3}e_4,\sigma(e_4)=e_4-\frac{2}{3}u=-\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_3+\frac{1}{3}e_4$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&1&0&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1) ハウスドルフ空間 $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト部分集合 C をとる．$y\in X\setminus C$ と $x\in C$ について $x\in U_x,y\in V_x,U_x\cap V_x=\emptyset$ となる開集合 $U_x,V_x\in\mathcal{O}$ が存在する．$\bigcup_{x\in C}U_x\supset C$ より有限部分集合 $X'\subset X$ が存在して $\bigcup_{x\in X'}U_x\supset C$ である．$V=\bigcap_{x\in X'}V_x$ とすれば V は y の開近傍で $V\cap C=\emptyset$ である．したがって $X\setminus C$ は開集合である．

(2)$f\colon X\times Y\to\mathbb{R};(x,y)\mapsto x-y$ とすると f は連続である．よって $f^{-1}(0)=F$ は閉集合である．$g\colon F\to\mathbb{R};(x,x)\mapsto x$ とすると g は連続である．$\sup g(x)=1$ より g は最大値をもたない．したがって F はコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$zx+iy$ とする．$e^z=-e^{-z}$ より $e^x=|e^z|=|-e^{-z}|=e^{-x}$ であるから $x=-x$ である．したがって $x=0$ である．$e^{iy}=-e^{-iy}$ より $\cos y=-\cos y$ である．よって $y=\frac{i\pi}{2}+n\pi\quad(n\in\mathbb{Z})$ である．

(2)$|e^{-iz}|=|e^{s-i\pm R}|=e^s\le e^\pi$ である．$z=R+is$ のとき $|e^z+e^{-z}|\ge|e^z|-|e^{-z}|=e^R-e^{-R}$ であり，$z=-R+is$ のとき $|e^z+e^{-z}|\ge|e^{-z}|-|e^z|=e^R-e^{-R}$ である．よって $\sup_{z\in\Gamma_R}|e^{-iz}/(e^z+e^{-z})|\le\frac{e^\pi}{e^R-e^{-R}}$ である．

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\right|dx\le\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{e^{-x}}dx+\int_0^\infty\frac{1}{e^x}dx<\infty$$

よって被積分関数は $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分であり, 連続であるから広義積分は収束する. $f(z) = e^{-iz}/(e^z+e^{-z})$ とする. (1) で求めた点以外で f は正則である. したがって積分経路 C を 4 点 $-R, R, R+i\pi, -R+i\pi$ を結んでできる長方形を反時計回りに進むとすると, 留数定理から $\int_C f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f, i\pi/2))$ である. $\lim_{z\to i\pi/2} \frac{z-1\pi/2}{e^z+e^{-z}} = \lim_{z\to i\pi/2} \frac{1}{e^z-e^{-z}} = \frac{1}{2i}$ であるから $\int_C f(z)dz = \pi e^{\pi/2}$ である.

　また

$$\int_{R+i\pi}^{-R+i\pi} f(z)dz = \int_R^{-R} \frac{e^{-i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi}+e^{-x-i\pi}}dx = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\pi}e^{-ix}}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$\left|\int_R^{R+i\pi} f(z)dz\right| \leq \int_R^{R+i\pi} \left|\frac{e^{-iz}}{e^z+e^{-z}}\right| dz \leq \pi e^{\pi}/(e^R - e^{-R}) \to 0 \quad (R\to\infty)$$
$$\left|\int_{-R+i\pi}^{-R} f(z)dz\right| \leq \int_{-R+i\pi}^{-R} \left|\frac{e^{-iz}}{e^z+e^{-z}}\right| dz \leq \pi e^{\pi}/(e^R - e^{-R}) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である. よって $\pi e^{\pi/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x/(e^x+e^{-x})dx + e^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}/(e^x+e^{-x})dx$ である. よって $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x/(e^x + e^{-x})dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}$ である.