0.1　R4 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$g_A(t)=\begin{vmatrix}2-t & a & 0\\ a & 2-t & a\\ 0 & a & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)\begin{vmatrix}2-t & a\\ a & 2-t\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a & 0\\ a & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)((2-t)^2-a^2)-a^2(2-t)=$ $(2-t)(t^2-4t+4-a^2)$ である．$t^2-4t+4-a^2=0$ を満たす t の値は $t=2\pm\sqrt{2}a$ である．よって固有値は $2,\ 2+\sqrt{2}a,\ 2-\sqrt{2}a$ である．

(2)$\det A=\begin{vmatrix}2 & a & 0\\ a & 2 & a\\ 0 & a & 2\end{vmatrix}=2(2^2-a^2)-a^2 2=-4a^2+8$ である．よって $a\neq\pm\sqrt{2}$ のとき，A は正則であるから A の階数は 3 である．

$a=\sqrt{2}$ のとき，$A=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ より，A の階数は 2 である．

$a=-\sqrt{2}$ のとき，$A=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2} & -2\\ 0 & -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ より，A の階数は 2 である．

(3)$f(kv)={}^t(kv)Akv=k^2v^tAv=k^2f(v)$ であるから，f は線形写像でない．

(4) 固有値 λ に対する固有ベクトル空間を $W(\lambda)$ と表す．$a\neq 0$ のとき，A の固有値は全て異なる．ノルムが 1 となるベクトル $v_1\in W(2),v_2\in W(2+\sqrt{2}a),v_3\in W(2-\sqrt{2}a)$ をとる．A は対称行列であるから，固有ベクトルは直交し，$\mathbb{R}^3$ の基底となっている．$f(v+u)={}^t(v+u)A(v+u)=f(v)+f(u)+{}^tvAu+{}^tuAv=f(v)+f(u)+2({}^tv)Au$ である．よって $\mathbb{R}^3\ni v=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3$ とすると，$f(v)=c_1^2f(v_1)+f(c_2v_2+c_3v_3)+2c_1({}^tv_1)A(c_2v_2+c_3v_3)=c_1^2f(v_1)+c_2^2f(v_2)+c_3^2f(v_3)=2c_1^2+(2+\sqrt{2}a)c_2^2+(2-\sqrt{2}a)c_3^2$ である．よって $(2+\sqrt{2}a)<0\vee(2-\sqrt{2}a)<0$ のとき，f は全射である．よって $a\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ のとき f は全射である．

$a=0$ のとき $f(v)={}^tvAv=2v^tv=2\|v\|^2$ である．よって f は全射でない．

$\boxed{2}$ (1)G を $\mathbb{Z}$ の部分群とする．n を G に含まれる最小の正の整数とする．$\langle n\rangle\subset G$ である．$x\in G\backslash\langle x\rangle$ がとれると仮定する．$x<0$ なら $-x\in G\setminus\langle x\rangle$ であるから $x>0$ として一般性を失わない．$x=nq+r\ (0\leq r<n)$ とできる．$r\in G$ である．n の最小性から $r=0$ であるがこのとき，$x\in\langle n\rangle$ である．これは矛盾．よって $G=\langle x\rangle$．

(2) (a)$\sqrt{200}-3\sqrt{18}=10\sqrt{2}-9\sqrt{2}=\sqrt{2}$ である．したがって $\langle\sqrt{2}\rangle\subset G_1$ である．逆に $n\sqrt{18}+m\sqrt{200}=(3n+10m)\sqrt{2}$ であるから $G_1=\langle\sqrt{2}\rangle$ である．すなわち巡回群．

(b)G_2 が $\alpha\in\mathbb{R}$ によって生成される巡回群とする．このとき $n\alpha=\sqrt{20}=2\sqrt{5},m\alpha=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$ をみたす $n,m\in\mathbb{Z}$ が存在する．よって $2m\sqrt{5}=10n\sqrt{2}$ である．したがって $5m^2=5n^22$ である．左辺は 2 の偶数乗を因数にもち，右辺は奇数乗を因数にもつから矛盾．よって巡回群でない．

(c)$(1,2),(3,4)$ で生成される群は $(1,2),(3,4)$ が可換であり，位数が共に 2 であることから $G_3=\{e,(1,2),(3,4),(1,2)(3,4)\}$ である．位数 4 の元が存在しないから巡回群でない．

(d)$(1,1)\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の位数は 6 である．G_4 の位数も 6 であるから巡回群．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x\in A$ について $x<\sqrt{2}$ であるから，$\sup A\leq\sqrt{2}$ である．任意の $\varepsilon>0$ について $1/n<\varepsilon$ をみたす正の整数 n が存在する．このとき $n\sqrt{2}-n(\sqrt{2}-\varepsilon)=n\varepsilon>1$ より $n(\sqrt{2}-\varepsilon)\leq m\leq n\sqrt{2}$ をみたす整数 m が存在する．このとき $m/n\leq\sqrt{2}$ より $m/n\in A$ であり，$\sqrt{2}-\varepsilon\leq m/n$ であるから $\sqrt{2}=\sup A$ である．

(2)$a_n>\alpha$ なる整数 n が存在すると仮定する．このとき $\varepsilon=(a_n-\alpha)/2$ とすると，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $m>N$ について $\alpha-\varepsilon<a_{n_m}<\alpha+\varepsilon$ であるが，$n_m>n$ なる整数 m について $a_{n_m}<\alpha+\varepsilon<a_n$ とな

り，非減少であることに矛盾．よって $a_n < \alpha$ である．

$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall m > N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_{n_m}$ である．$N_1 = n_{N+1}$ とすると，$n > N_1$ なる n について $|\alpha - a_n| < |\alpha - a_{N_1}| < \varepsilon$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である．

(3)$x = v, x - y = u$ と変数変換する．ヤコビアンは $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ より 1 である．積分領域は $D'(t) = \{(v,u) \mid 0 \leq u \leq t, 0 \leq v \leq u\}$ となる．よって $\iint_{D(t)} e^{-(x-y)^2} dxdy = \int_0^t \int_0^u e^{-u^2} dvdu = \int_0^t ue^{-u^2} du = -\frac{1}{2}(e^{-t^2} - 1)$ である．よって $f(t) = te^{-t^2}$ である．$f'(t) = e^{-t^2} - 2t^2 e^{-t^2} = (1-2t^2)e^{-t^2}$ である．よって $f'(t) = 0$ なら $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である．$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}}, f(0) = 0, \lim f(t) = 0$ より最大値は $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ である．

$\boxed{4}$ (1) 任意の異なる二点 $x, y \in A \subset X$ について X の開集合 U, V で $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．このとき $U \cap A, V \cap A$ は A の開集合であり，$x \in U \cap A, y \in V \cap A, (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ であるから A はハウスドルフ空間.

(2)$X = 0,1$ に離散位相を入れる．$Y = \{0,1\}$ に密着位相を入れる．このとき $f\colon X \to Y$ を $f(0) = 0, f(1) = 1$ とする．f は全単射であり X に離散位相が入っているから連続である．$f(\{1\}) = \{1\}$ は Y の開集合でないから逆写像は連続でない.

(3) 連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトであるから射影をとれば，X, Y はコンパクト．