0.1 H15 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $\int_0^{1/2}(x-1/2)f(x)dx \geq \int_0^{1/2}(x-1/2)f(1/2)dx, \int_{1/2}^{1}(x-1/2)f(x)dx \geq \int_{1/2}^{1}(x-1/2)f(1/2)dx$ より $\int_0^1(x-1/2)f(x)dx \geq \int_0^1(x-1/2)f(1/2)dx = 0$

(2) (a)$-\sup_{n\geq k}(-a_n) \leq a_k$ である．両辺について $\inf_{n\geq k}$ をとれば $-\sup_{n\geq k}(-a_n) \leq \inf_{n\geq k} a_k$ すなわち $\sup_{n\geq k}(-a_n) \geq -\inf_{n\geq k} a_k$ を得る．同様に $-a_k \leq -\inf_{n\geq k} a_k$ について $\sup_{n\geq k}$ をとることで $\sup_{n\geq k}(-a_n) \leq -\inf_{n\geq k} a_k$ を得る．以上より $\sup_{n\geq k}(-a_n) = -\inf_{n\geq k} a_k$．両辺は共に有界単調数列であるから収束して $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

(b) $\inf_{n\geq k} a_n + b_k \leq a_k + b_k \leq \sup_{n\geq k} a_n + b_k$ であり $\inf_{n\geq k}$ をとることで，$\inf_{n\geq k} a_n + \inf_{n\geq k} b_k \leq \inf_{n\geq k}(a_k+b_k) \leq \sup_{n\geq k} a_n + \inf_{n\geq k} b_k$ を得る．有界単調数列であるから収束して $\liminf a_n + \liminf b_k \leq \liminf(a_k+b_k) \leq \limsup a_n + \liminf b_k$

$\boxed{2}$ (1) 全射連続写像 $f\colon X \to Y$ について X がコンパクトとする．Y の開被覆 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を任意にとる．$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開被覆である．したがって有限部分被覆 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(U_\lambda)$ をもつ．このとき $\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}(U_\lambda)$ は Y の開被覆となるから Y はコンパクト．

$\phi\colon X \to Y$ は全射連続であるから X がコンパクトなら Y はコンパクトである．また逆写像 ϕ^{-1} も全射連続であるから Y がコンパクトなら X はコンパクトである．

(2)$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が同相であることを示す．$\hat{\phi}\colon \hat{X} \to \hat{Y}; x \mapsto \phi(x)$ と定める．ϕ が全単射であることと，$\hat{X}, \hat{Y}$ の定義から $\hat{\phi}$ は全単射である．$\hat{Y}$ の開集合 $\hat{U}$ は Y の開集合 U を用いて $U \cap \hat{Y} = \hat{U}$ とかける．$\hat{\phi}^{-1}(\hat{U}) = \phi^{-1}(U\cap Y)\cap\hat{X} = \phi^{-1}(U)\cap\hat{X}$ より逆像が開集合であるから $\hat{\phi}$ は連続．$\hat{\phi}^{-1}$ の連続性も同様．したがって $\hat{\phi}$ は同相.

$\hat{X}$ が連結でないなら開集合 $\hat{X}$ の開集合 U, V をもちいて $\hat{X} = U\cup V, U\cap V = set$ とできる．このとき $\hat{\phi}$ が全単射であるから $\hat{Y} = \hat{\phi}(U)\cup\hat{\phi}(V), \hat{\phi}(U)\cap\hat{\phi}(V) = \emptyset$ であり，同相写像であるから $\hat{\phi}(U), \hat{\phi}(V)$ は $\hat{Y}$ の開集合である．すなわち $\hat{Y}$ は連結でない.

同様に $\hat{Y}$ が連結でないなら $\hat{X}$ も連結でない.

(3)M_1 はコンパクトでなく，一点をのぞくと連結でない．M_2 もコンパクトでなく，一点を除くと連結でない M_3 はコンパクトであり，一点を除いても連結．M_4 はコンパクトでなく，一点を除いても連結.

したがって $(M_1,M_3),(M_1,M_4),(M_2,M_3),(M_2,M_4),(M_3,M_4)$ は同相でない.

(4)M_1, M_2 は同相である．$f\colon M_2 \to M_1; x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ とすると，f は連続である．$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ であり $f'(x) = (1+1/\tan^2(\pi x - \pi/2))\pi > 0$ より f は狭義単調増加であるから f は全単射．$f^{-1}(y) = (\arctan y + \pi/2)/\pi$ も連続であるから f は同相写像.

$\boxed{3}$ (1)(a) $(x, cy) = x^T(\bar{cy}) = \bar{c}x^T\bar{y} = \bar{c}(x,y)$

(b)$(y,x) = y^T\bar{x} = \bar{x}^T y = \overline{x^T\bar{y}} = \overline{(x,y)}$

(c)$(x,x) = x^T\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x_i} = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$ ここで $x \neq 0$ ならある $x_i \neq 0$ より $(x,x) > 0$

(2)$(Ax,y) = (Ax)^T\bar{y} = x^TA^T\bar{y} = x^T\overline{\bar{A}^Ty} = (x, \bar{A}^Ty)$ である．

固有値 λ とその 0 でない固有ベクトル x に対して $\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, \bar{A}^Tx) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x,x)$ がなりたつ．$(x,x) > 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ すなわち λ は実数.

(3)B^TB の固有値 λ とその 0 でない固有ベクトル x をとる．$\lambda(x,x) = (B^TBx, x) = (Bx, \bar{B}x) = (Bx, Bx) \geq 0$ より $\lambda \geq 0$.

半正定値性を考える方法もある．(固有値が全て非負 $\Leftrightarrow$ 半正定値) $x^TB^TBx = ||Bx|| \geq 0$ であるから B^TB は半正定値.

$\boxed{4}$ (1)$A \in G$ について $A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$ である．$B = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix}$ とすると $BA^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma\bar{\alpha}+\bar{\delta}\bar{\beta} & -\gamma\beta+\delta\alpha \\ -\bar{\delta}\bar{\alpha}+\bar{\gamma}\bar{\beta} & \bar{\delta}\beta+\bar{\gamma}\alpha \end{pmatrix}$ である．$\overline{\gamma\bar{\alpha}+\bar{\delta}\bar{\beta}} = \bar{\gamma}\alpha+\delta\beta, -\overline{-\gamma\beta+\delta\alpha} = \bar{\gamma}\bar{\beta}-\bar{\delta}\bar{\alpha}$ であり，$\det BA^{-1} = \det B \det A^{-1} = 1$ より $BA^{-1} \in G$

すなわち G は $GL(2,\mathbb{C})$ の部分群である．

(2)(a)$\det A = \alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$ である．$\alpha = a+bi, \beta = c+di \quad (a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ より α, β は $1,-1,i,-i$ のいずれかである．さらに一方が 0 でないなら他方は 0 である．すなわち H の元は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix}$ のいずれかの形をしていて α, β は $1,-1,i,-i$ のいずれかである．

$(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$ であり，$a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ なら $ac-bd, ad+bc \in \mathbb{Z}$ であるから，(1) の BA^{-1} の結果をふまえると, $A, B \in H$ なら BA^{-1} の各成分は $\mathbb{Z}[i]$ にふくまれる．すなわち H は G の部分群である．

H の位数は 8 である．

(b)$N = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ とする．

$H/N = \left\{ E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], C = \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right], D = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right], F = \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \right\}$ である．$[A]$ で A の同値類を表す．$CD = F = DC, C^2 = D^2 = E$ である．よって H/N はアーベル群.

交換子群は商群がアーベル群であるような最小の部分群であるから $N \geq [H,H]$ である．$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ であるから H はアーベル群でない.
よって交換子群は N である．

(c)$\varphi\colon H \to \mathbb{C}^\times$ を群準同型とする．$H/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi \leq \mathbb{C}^\times$ より $H/\ker\varphi$ はアーベル群すなわち，$\ker\varphi \supset [H,H]$ である．

自然な全射 $\pi_\varphi\colon H/[H,H] \to H/\ker\varphi$ および φ から誘導される単射 $\tilde{\varphi}\colon H/\ker\varphi \to \mathbb{C}^\times$ によって群準同型 $F\colon \hom(H,\mathbb{C}^\times) \to \hom(H/[H,H],\mathbb{C}^\times); \varphi \mapsto \tilde{\varphi}\circ\pi_\varphi$ が定まる．

自然な全射 $H \to H/[H,H]$ を p とする．F の逆写像は $\phi \mapsto \phi\circ p$ である．よって F は同型写像.

$H/[H,H] = H/N$ であり，$C^2 = D^2 = E, CD = DC = F$ より $H/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．すなわち準同型は C, D の行き先で定まり，C, D の行き先は $1,-1$ のいずれかである．したがって $|\hom(H,\mathbb{C}^\times)| = 4$