0.1　H16 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $v \in W_2^{\perp}$ は $^\forall w \in W_1 \subset W_2, (v,w)=0$ であるから，$v \in W_1^{\perp}$

(2) $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間であるから W の正規直交基底 $\{w_1, \dots w_k\}$　$(k = \dim W)$ がとれる．これを V の基底へと延長して正規直交化することで V の基底 $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ を得る．このとき $(w_i, w_j) = 0$　$(j = 1, \dots, k, i = k+1, \dots, n)$ である．$\{w_1, \dots, w_k\}$ は W の基底であり内積は双線形であるから，$w_i \in W^{\perp}$　$(i = k+1, \dots, n)$ したがって $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ は $W^{\perp}$ の一次独立な集合である．

$W^{\perp}$ の元で $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ の線形結合で表されない x が存在するなら $x = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ と表したときに $a_i \neq 0$ なる $1 \leq i \leq k$ が存在する．$(x, w_i) = a_i$ となり $x \in W^{\perp}$ に矛盾．

よって $W^{\perp}$ は $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ を基底にもち，$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$

(3)$w \in W$ は任意の $v \in W^{\perp}$ に対して $(v,w)=0$ である．よって $w \in (W^{\perp})^{\perp}$．よって $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ である．

(2) の結果を $W^{\perp}$ に対して使うと $\dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim W^{\perp} = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$ である．$(W^{\perp})^{\perp}$ の部分空間 W の次元が $(W^{\perp})^{\perp}$ の次元と等しいから $W = (W^{\perp})^{\perp}$．

$\boxed{2}$ (1)$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, q(x,y) = (x/r(x,y), y/r(x,y))$ とすれば，$D^* = D \setminus \{(0,0)\}$ の点で $g(x,y) = r(x,y) f \circ q(x,y)$ と表せる．

D^* 上での連続性を確かめる．D^* 上で r は連続である．$(x,y) \mapsto x/r(x,y), (x,y) \mapsto y/r(x,y)$ は連続であるから q も連続である．よって合成関数 $f \circ q$ は連続で積 $g = r \cdot (f \circ q)$ も連続．

$\{0,0\}$ で連続であることを確かめる．$f(x,y)$ はコンパクト空間からの連続写像であるから最大値 M をもつよって $g(x,y) \leq M\sqrt{x^2+y^2}$ である．よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} M\sqrt{x^2+y^2} = 0 = g(0,0)$ である．すなわち g は連続関数．

(2) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$　$(0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi)$ と変数変換する．ヤコビアンは r である．

$\int_D g(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 f(\cos\theta, \sin\theta) dr d\theta = \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ である．

$\theta = \tau + \pi$ と変数変換すると $\int_\pi^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int_0^\pi f(\cos(\tau+\pi), \sin(\tau+\pi))d\tau = \int_0^\pi f(-\cos\tau, -\sin\tau)d\tau = -\int_0^\pi f(\cos\tau, \sin\tau)d\tau$ である．

よって $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int_0^\pi f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta + \int_\pi^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 0$ である．すなわち $\int_D g(x,y)dxdy = 0$．

$\boxed{3}$ $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ とする．$|b_m - \alpha| = |b_m - a_{m,n} + a_{m,n} - c_n + c_n - \alpha| \leq |b_m - a_{m,n}| + |a_{m,n} - c_n| + |c_n - \alpha|$ である．

$\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = b_m$ の m に関する一様収束性から $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N_1 \in \mathbb{N}, ^\forall n \geq N_1, ^\forall m, |b_m - a_{m,n}| < \varepsilon$ である．また $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N_2 \in \mathbb{N}, ^\forall n \geq N_2, , |c_n - \alpha| < \varepsilon$ である．

$N = N_1 + N_2$ とすると，$n \geq N$ のとき $|b_m - \alpha| < 2\varepsilon + |a_{m,n} - c_n|$ である．$^\forall n, ^\forall\varepsilon, ^\exists M(n) \in \mathbb{N}, ^\forall m \geq M, |a_{m,n} - c_n| < \varepsilon$ である．

よって $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\exists M(N) \in \mathbb{N}, ^\forall m > M(N), |b_m - \alpha| < 3\varepsilon$ である．

$\boxed{4}$ (1)$|S(1,2,3,4)| = 4! = 24$ である．

(2)G は正四面体の 4 頂点を入れ替える群 S_4 の部分群であるから G の位数は 24 の約数である．

ある頂点 α と，他の 3 つの頂点を結んでできる三角形の中心 β を考える．α, β を結んでできる直線を軸にして $\mathbb{R}^3$ を $2\pi/3$ ラジアン回転させると，α 以外の 3 頂点が一つずれる．すなわち G は 3 頂点による巡回置換を元にもつ．頂点を固定するごとに巡回置換があるから $|G| \geq 2 \cdot 4 + 1 = 9$ である．したがって $|G| = 12, 24$ のいずれか．

二つの頂点を固定し残りを入れかえる置換を考える．頂点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対して α, β を固定して γ, δ を入れ替えるとする．

入れ替える前は 3 頂点 β, γ, δ によってできる三角形は四面体のうち側から見て反時計まわりに β, γ, δ の順

に並んでいたとする．γ, δ を入れ替えると，β, δ, γ の順に並ぶがこれは回転では実現不可能なので，G は二つの頂点を固定し残りを入れかえる置換を含まない．

よって $|G| = 12$ である．

(3)$x \in S(1,2,3,4)$ に対して，$\sigma \in G$ によって $\sigma(x)$ で x が回転によって移った置き方を表すことにすると，$\sigma(x) = x$ となるような σ は G の単位元以外に存在しないから，各同値類の大きさは 12 である．よって同値類の数は $24/2 = 12$ である．

(4)$|S(1,1,2,3)| = 4!/2 = 12$ である．G の元は必ず 3 頂点以上を入れ替えるので $x \in S(1,1,2,3)$ に対しても $\sigma(x) = x$ となるような σ は単位元以外に存在しないから各同値類の大きさは 12 で同値類の数は 1.

$\boxed{5}$ (1)$x \in X \setminus A$ について $f(x) \neq g(x) \in Y$ より $U, V \in \mathcal{O}_Y, f(x) \in U, g(x) \in V, U \cap V = \emptyset$ なる U, V がとれる．$W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ とすれば W は開集合で $x \in W$.

$x' \in W \cap A$ とすると，$U \ni f(x') = g(x') \in V$ であるから $U \cap V = \emptyset$ に矛盾．よって $W \subset X \setminus A$ である．

(2)X の空でない開集合 U, V であって $X = U \cup V, U \cap V = \emptyset$ となる U, V が存在しないとき X は連結である．

(3)$X \times Y$ が連結でないと仮定する．定義から空でない集合 $U, V \in \mathcal{O}_{X \times Y}$ であって $X \times Y = U \cup V, U \cap V = \emptyset$ となる U, V が存在する．

積位相の定義から $U = \bigcup_{i \in I} U_{X,i} \times U_{Y,i}, V = \bigcup_{j \in J} V_{X,j} \times V_{Y,j}$ となる $U_{X,i}, V_{X,j} \in \mathcal{O}_X, U_{Y,i}, V_{Y,j} \in \mathcal{O}_Y$ が存在する．

$U_X = \bigcup_{i \in I} U_{X,i}, V_X = \bigcup_{j \in J} V_{X,j}$ とすると $X = U_X \cup V_X$ であるから X の連結性より ${}^{\exists}x \in U_X \cap V_X$ である．したがって $x \in U_{X,i_x}, x \in V_{X,j_x}$ となる i_x, j_x が存在する．同様に Y の連結性から ${}^{\exists}y \in U_{Y,i_y} \cap V_{Y,j_y}$ が存在する．このとき $(x,y) \in U_{X,i_x} \times U_{Y,i_y} \subset U, (x,y) \in V_{X,j_x} \times V_{Y,j_y} \subset V$ であるから $U \cap V \neq \emptyset$ に矛盾．