目次

0.1 H15 数学 A 1
0.2 H16 数学 A 2
0.3 H17 数学 A 3
0.4 H18 数学 A 4
0.5 H19 数学 A 5
0.6 H20 数学 A 6
0.7 H21 数学 A 6
0.8 H22 数学 A 8
0.9 H23 数学 A 9
0.10 H24 数学 A 10
0.11 H25 数学 A 12
0.12 H26 数学 A 13
0.13 H27 数学 A 15
0.14 H28 数学 A 17
0.15 H29 数学 A 19
0.16 H30 数学 A 20

0.1 H15 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\{f(x) \mid x \in X\}$ が下に有界でないとする．すなわち任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) \leq -n$ なる $x \in X$ が存在する．これを x_n とおく．X は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合であるから有界閉集合である．よって X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$ となりこれは矛盾．よって下に有界．

(2) 下に有界であるから $\inf\{f(x) \mid x \in X\} = M \in \mathbb{R}$ である．M が下限であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x_n) \leq M + \frac{1}{m}$ なる x_n が存在する．数列 $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をもち，$x_{n_k} \to \alpha \in X$ となる．$M \leq f(\alpha) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty}(M + \frac{1}{n_k}) = M$ となり $f(\alpha) = M$．よって f は最小値をもつ．

$\boxed{2}$ (1)$g(0) = 1$ であり g は連続関数であるから 0 を含むある開区間 I で $g(x) > 0$ となる．I 上で $h(x) = \sqrt[m]{g(x)}$ とする．I 上で h は C^1 級であり $h(x)^m = g(x), h(x) > 0$ である．

(2)$f(\varphi(y)) = \varphi(y)^m g(\varphi(y)) = \varphi(y)^m h(\varphi(y))^m = y^m$ をみたす $\varphi(y)$ を求める．$\varphi(y)h(\varphi(y)) = y$ をみたす $\varphi(y)$ を求めればよい．$F(x,y) = xh(x) - y$ とおく．$\partial F/\partial x(0,0) = h(0) + 0\varphi'(0) > 0$ である．陰関数定理から $F(x,y) = 0$ をみたす C^1 級関数 $x = \varphi(y)$ が 0 の近傍で存在する．

$\boxed{3}$ (1)$T_A(cX+Y) ={}^t(cX+Y)A + A(cX+Y) = c^tXA + cAX +{}^tYA + AY = cT_A(X) + T_A(Y)$ である．よって線形．

(2)${}^t({}^tXA + AX) = AX +{}^tXA$ より $\mathrm{Im}T_A \subset S$ である．$Y \in S$ に対して $X = A^{-1}Y/2$ とすると，${}^tXA + AX ={}^t(AX) + AX ={}^t(Y/2) + (Y/2) = Y$ となる．よって $S \subset \mathrm{Im}T_A$ である．

(3)${}^t(AX) + AX = O$ より AX が交代行列となる X を考える．よって $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．AX_1, AX_2, AX_3 は交代行列である．よって X_1, X_2, X_3 は $\ker T_A$ の基底となる．

$\boxed{4}$ (1)$AB = BA$ のとき．$v \in V_j$ に対して $ABv = BAv = B\alpha_j v = \alpha_j Bv$ より，$Bv \in V_j$ である．

$BV_j \subset V_j \quad (j = 1, \ldots, k)$ のとき．A がエルミート行列であるから，$\mathbb{C}^n$ を固有空間の直和に分解できる．したがって $\{v_1, \ldots, v_n\}$ をそれぞれが A の固有ベクトルであるような基底とできる．$v_i \in V_{s_i}$ とする．$u \in \mathbb{C}^n$ に対して $u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ とできる．$ABu = A(a_1Bv_1 + \ldots a_nBv_n) = a_1\alpha_{s_1}Bv_1 + \cdots + a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．また $BAu = B(a_1\alpha_{s_1}v_1 + \ldots a_n\alpha_{s_n}v_n) = a_1\alpha_{s_1}Bv_1 + \cdots + a_n\alpha_{s_n}Bv_n$ である．よって $ABu = BAu$ である．すなわち $AB = BA$

(2)$v \in V_j$ に対して $A^m v_j = \alpha_j^m v_j$ である．A^m の固有値 α_j^m の固有空間を W_j とすると，$W_j \supset V_j$ である．A はエルミート行列であるから固有値は実数である．したがって異なる固有値 α_i, α_j にたいして $\alpha_i^m = \alpha_j^m$ となるには m が偶数であることが必要．今 m は奇数であるから $\alpha_i^m \neq \alpha_j^m$ である．したがって $i \neq j$ なら $W_i \neq W_j$ である．よって $W_j = V_j$ である．A^m はエルミート行列であり $A^mC = CA^m$ であるから (1) より $CW_j \subset W_j$ である．よって $CV_j \subset V_j$ であるから $AC = CA$ である．

0.2 H16 数学 A

$\boxed{1}$ λ, μ の固有空間をそれぞれ V_λ, V_μ とする．対角化可能であるから $V = V_\lambda \oplus V_\mu$ である．$W_\lambda = W \cap V_\lambda, W_\mu = W \cap V_\mu$ とする．$W_\lambda \cap W_\mu = W \cap V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$ である．また $w \in W$ に対して $w = w_\lambda + w_\mu$ となる $w_\lambda \in V_\lambda, w_\mu \in V_\mu$ が一意的に存在する．$W \ni f(w) - \mu w = (\lambda - \mu)w_\lambda$ より $w_\lambda \in W_\lambda$ である．同様に $w_\mu \in W_\mu$ である．よって $W = W_\lambda \oplus W_\mu$ である．W を f の固有空間の直和に分解できたから $f|_W$ は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)X のコンパクト集合 C をとる．$x \in X \setminus C$ を一つ固定する．各 $y \in C$ に対して $x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となる開集合 U_y, V_y が存在する．$\{V_y \mid y \in C\}$ は C の開被覆であるから有限部分集合 $C' \subset C$ が存在して $C \subset \bigcup_{y \in C'} V_y$ となる．$U = \bigcap_{y \in C'} U_y$ とする．U は x の開近傍であり $U \subset X \setminus C$ であるから x は C の外点．任意の x でなりたつから C は閉集合である．

(2)$A \cap B$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．$S \cup \{X \setminus A\}$ は B の開被覆である．したがって有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \cup (X \setminus A)$ となる．$A \cap B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ である．したがって $A \cap B$ はコンパクト集合である．

$\boxed{3}$ (1)$G(x) = \int_0^x f(x, y)dy$ とする．

$$\begin{aligned}\frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \int_0^{x+h} \frac{f(x+h, y)}{h}dy - \int_0^x \frac{f(x, y)}{h}dy = \int_x^{x+h} \frac{f(x, y)}{h}dy + \int_0^{x+h} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}dy \\ &= \int_0^h \frac{f(x, y+x)}{h}dy + \int_0^x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}dy + \int_x^{x+h} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}dy\end{aligned}$$

である．第一項は $\lim_{h \to 0} \int_0^h \frac{f(x, y+x)}{h}dy = \frac{\partial}{\partial h} \int_0^h f(x, y+x)dy = f(x, x)$ である．

第二項は $\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y)$ となる $\theta \in (0, 1)$ が存在して $\int_0^x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}dy \leq \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y)dy \leq \infty$ であるから優収束定理より $\lim_{h \to 0} \int_0^x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}dy = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$ である．

第三項はある 0 の近傍で $\left|\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\right| \leq M$ であるから $\lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}dy \leq \lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} Mdy = 0$ である．よって $G'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$ である．

したがって $F'(x) = f(x, x) - f(x, -x) + \int_{-x}^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$ である．さらに $F''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) + \int_{-x}^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)dy = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) - 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) +$

$\int_{-x}^{x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dy$ である．

$\boxed{4}$ 広義積分が収束することを示す．被積分関数の実部は $u(x) = \frac{x\cos x - \varepsilon \sin x}{x^2+\varepsilon^2}$ で虚部は $v(x) = \frac{x\sin x + \varepsilon\cos x}{x^2+\varepsilon^2}$ である．共に原点近傍で有界である．

$$\left|\int_{-1}^{-M} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx\right| = \left|\int_{1}^{M} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx\right| = \left|\left[\frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\right]_1^M - \int_1^M \sin x\left(\frac{1}{x^2+\varepsilon^2} - \frac{2x^2}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\right)dx\right|$$
$$\leq \left|\frac{M\sin M}{M^2+\varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1+\varepsilon^2}\right| + \int_1^M \left|\frac{(-x^2+\varepsilon^2)\sin x}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\right|dx \leq \left|\frac{M\sin M}{M^2+\varepsilon^2} - \frac{\sin 1}{1+\varepsilon^2}\right| + \int_1^M \left|\frac{(x^2+\varepsilon^2)\sin x}{x^4}\right|dx$$

よって $\int_1^\infty \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx, \int_{-\infty}^{-1} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx$ は収束する．から $u(x)$ の広義積分は収束する．同様に $v(x)$ の広義積分も収束する．したがって $u(x)+iv(x)$ の広義積分は収束する．

$f(z) = e^{iz}/(z-i\varepsilon)$ とすれば，f は $z \neq i\varepsilon$ で正則である．積分経路 C を原点中心の半径 $R > 2\varepsilon$ の上半平面の半円板の周とする．C_1 を実軸上の $-R$ から R までの部分，C_2 を半円とする．f の C での積分は留数定理から $\int_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i\varepsilon) = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ である．C_2 での積分は $z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると，

$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}}{Re^{i\theta}-i\varepsilon}\right|d\theta \leq \int_0^\pi \frac{Re^{-R\sin\theta}}{R-\varepsilon}d\theta \leq \frac{\pi R}{R-\varepsilon}e^{-R} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．したがって $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i e^{-\varepsilon}$ より $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = e^{-\varepsilon}$ である．

0.3 H17 数学 A

$\boxed{1}$ (1)AB が正則であるから $f\circ g$ は同型である．よって f は全射，g は単射である．$\dim \mathrm{C}^n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{C}^m$ より $\dim\mathrm{Ker}\, f = n-m$ である．g は単射であるから $\dim \mathrm{Ker}\, g = 0$

(2)$ABv = \lambda v, v\neq 0$ とする．このとき $BABv = B\lambda v = \lambda Bv, Bv \neq 0$ であるから AB の固有値 λ は BA の固有値でもある．

$BAv = \lambda v, v \neq 0$ とする．$ABAv = \lambda Av$ であるから，$Av \neq 0$ なら λ は AB の固有値である．$Av = 0$ なら $BAv = 0 = \lambda v$ より $\lambda = 0$．すなわち BA の零でない固有値は AB の固有値でもあるから BA の固有値は $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ である．

(3)C^m における AB の固有値 λ_i の固有空間を $W(\lambda_i)$ とする．対角化可能であるから $\sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = m$ である．C^n における BA の固有値 λ_i の固有空間を $V(\lambda_i)$ とする．$g(W(\lambda_i)) \subset V(\lambda_i)$ であり g は単射であるから $\dim W(\lambda_i) \leq \dim V(\lambda_i)$ である．また $V(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(g\circ f)$ より $\dim V(\lambda_0) \geq n-m$ である．よって $\sum_{i=0}^k \dim V(\lambda_i) \geq n - m + \sum_{i=1}^k \dim W(\lambda_i) = n$ である．よって BA は対角化可能である．

$\boxed{2}$ (1)f を商写像とする．$f^{-1}(B)$ を閉集合とする．$X\setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X\setminus B)$ は開集合であるから $X\setminus B$ は開集合である．よって B は閉集合．

$f^{-1}(B)$ を開集合とする．$X\setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(X\setminus B)$ は閉集合であるから $X\setminus B$ は閉集合である．よって B は開集合．

(2)$B \subset Y$ について $f^{-1}(B)$ が閉集合だとする．コンパクト空間の閉集合はコンパクトであるから $f^{-1}(B)$ はコンパクトである．f は全射連続写像であるから $f(f^{-1}(B)) = B$ はコンパクトである．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから B は閉集合である．よって f は商写像．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x > 0$ について $x/N < 1$ なる N が存在する．$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (|x| < 1)$ であるから $n \geq N$ のとき $\log(1+x/n) = (x/n) - \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3)$ である．したがって $\sum_{n=N}^{\infty} x/n - \log(1+x/n) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{2n^2} + O(x^3/n^3) < \infty$ である．よって収束する．

(2)$I = (1/2, 2)$ とする．$x \in I$ に対して $(x/n - \log(1+x/n))' = 1/n - \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n(2n+1)}$ である．よって

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \log(1+1/n)$ は一様収束する．したがって $(\sum_{n=1}^{\infty} x/n - \log(1+x/n))'|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \frac{1}{n+1} = 1$ である．

$\boxed{4}$ (1) $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ であるから $\frac{2z}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1}$ である．

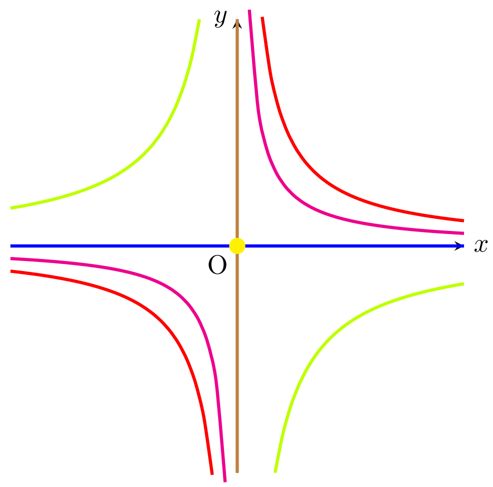
(2) 整級数であるから項別積分ができて $|z| < 1$ で $f(z) = \log(1+z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+2}/(2n+2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k}/k$ である．よって $f(z)/z^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{2k-n}/k$ でありこのローラン級数の z^{-1} の係数は n が偶数か 1 のとき 0, それ以外のとき $(-1)^{\ell-1}/\ell \quad (n = 2\ell+1)$ である．留数定理から $\int_C \frac{f(z)}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i(-1)^{\ell-1}/\ell & (n = 2\ell+1) \\ 0 & (n \neq 2\ell+1) \end{cases}$ である．

0.4 H18 数学 A

$\boxed{1}$ (1) $\dim V = k \leq n-1$ として V の直交補空間 $V^\perp$ をとると，$V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$ より $\dim V^\perp = n-k \geq 1$ である．$0 \neq (a_1, \ldots, a_n)^\top \in V^\perp$ をとると，$F(x_1, \ldots, x_n)$ は $(a_1, \ldots, a_n)^\top$ と $(x_1, \ldots, x_n)$ の内積だから V 上で F は 0.

(2) V と b で生成されるベクトル空間を V' とおけば $\dim V' \leq n-1$ であり，$V_b \subset V'$ である．(1) より V' 上で 0 となる F が存在し，F は V_b 上 0 である．

$\boxed{2}$



(1) 点 (x, y) の属す同値類を $[(x, y)]$ と表す．$x = y = 0$ なら (x, y) の同値類は $\{(0,0)\}$ である．$x = 0, y \neq 0$ のとき $(0, y) \sim (0, ty) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$y = 0, x \neq 0$ のとき $(x, 0) \sim (tx, 0) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ である．$x \neq 0 \neq y$ のとき $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow xy = x'y'$ である．したがって同値類は右のようになる．(異なる色は異なる同値類)

$x \neq 0 \neq y$ なる (x, y) が含まれる同値類は $g(x, y) = xy$ の逆像 $g^{-1}(xy)$ であるから閉集合．また $\{(0,0)\}$ も閉集合である．$[(0, y \neq 0)]$ は $(0,0)$ が集積点であるが同値類に含まれないから閉集合ではない．同様に $[(0 \neq x, 0)]$ も閉集合ではない．

(2) $(0,0)$ を含む R^2 の開集合 $\pi^{-1}(U)$ に対してある $\varepsilon_U > 0$ が存在して $B((0,0), \varepsilon_U) \subset \pi^{-1}(U)$ となる．したがって $(x, 0) \in \pi^{-1}(U) \quad (x \neq 0)$ である．すなわち $[(0 \neq x, 0)] \in U$ である．したがって $[(0 \neq x, 0)]$ と $[(0,0)]$ を分離する開集合は存在しないからハウスドルフでない．

(3) $i \leq j$ のとき同値類 $[(1,1)]$ 上で $x^i y^j = y^{j-i}$ となるから定数となるには $i = j$ が必要．逆に $f(x, y) = \sum a_i (xy)^i$ とするとこれは全ての同値類の上で定数である．

(4) $D = [(x, y)] \quad (x \neq 0 \neq y)$ のとき，$D \neq D' = [(x', y')]$ に対して $xy \neq x'y'$ である．したがって $h(x, y) = xy \in E$ に対して $h(D) \neq h(D')$ となる．したがって $(*)$ を満たす D, D' は共に $[(0,0)], [(0,1)], [(1,0)]$ の何れか．$f(x, y) = \sum a_i (xy)^i$ について $f([(0,0)]) = a_0, f([(0,1)]) = a_0, f([(1,0)]) = a_0$ であるから求める対は $([(0,0)], [(0,1)]), ([(0,0)], [(1,0)]), ([(0,1)], [(1,0)])$ 及びこれらの順序を入れ替えたものである．

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから $Ax + b = \begin{pmatrix} -x + y + b \\ x - y + c \end{pmatrix}$ である．よって $\langle Ax + b, x \rangle = -(x-y)^2 + bx + cy$ である．

$x + y = s, x - y = t$ と変数変換すると $\langle Ax + b, x \rangle = -t^2 + b\frac{s+t}{2} + c\frac{s-t}{2}$ で，ヤコビアンは $-1/2$ である．

よって

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\exp\left(-t^2+b\frac{s+t}{2}+c\frac{s-t}{2}\right)\frac{1}{2}dsdt\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-(t-\frac{b-c}{4})^2+(\frac{b-c}{4})^2\right)dt\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{b+c}{2}s\right)ds\end{aligned}$$

である．$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\big(-(t-\frac{b-c}{4})^2+(\frac{b-c}{4})^2\big)dt$ は有限である．また $b+c<0$ なら $\int_0^{\infty}\exp\big(\frac{b+c}{2}s\big)ds$ も有限であり，$b+c\geq 0$ なら発散する．

$\boxed{4}$ $f(z)$ の 0 におけるローラン級数は 0 が極であることから正の整数 k を用いて $\sum_{n=-k}^{\infty}a_nz^n$ とかける．$z^kf(z)$ は $|z|<2$ で正則であり $\lim_{z\to 0}z^kf(z)=a_{-k}\neq 0$ である．したがってある $\delta>0$ が存在して $|z|<\delta$ で $|z^kf(z)|>|a_{-k}|/2$ である．したがって

$$\iint_{\varepsilon<|z|<\delta}\frac{|a_{-k}|}{2|z|^k}dxdy\leq\iint_{\varepsilon<|z|<\delta}|f(z)|dxdy<\infty$$

である．$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と極座標変換すると $\int_{\varepsilon}^{\delta}\int_0^{2\pi}\frac{|a_{-k}|}{2r^k}rdrd\theta=|a_{-k}|\pi\int_{\varepsilon}^{\delta}|r^{1-k}|dr<\infty$ である．$1-k\leq -1$ なら発散するから $k<2$ である．よって $k=1$ より一位の極．

0.5 H19 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(y)-f(x)|=|\int_x^y f'(t)dt|\leq\int_x^y|f'(t)|dt$

(2)(i)$c>1$ より $|f(y)-f(x)|\leq\int_x^y At^{-c}dt=\frac{A}{-c+1}(y^{-c+1}-x^{-c+1})<\frac{A}{c-1}x^{1-c}\to 0\quad(x\to\infty)$ である．$x_n=f(n)$ とすれば $|x_n-x_m|\leq\frac{A}{1-c}m^{1-c}\to 0\quad(m\to\infty)$ である．したがって数列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ はコーシー列であるから，収束列でその収束先を α とする．任意の $\varepsilon>0$ に対してある $M>0$ が存在して $x>M$ なら $|f(x)-f([x]+1)|<\varepsilon$ である．ここで $[x]$ は x 以下の最大の整数．またある整数 N が存在して $n>N$ なら $|x_n-\alpha|<\varepsilon$ である．したがって $x>N+M$ なら $|f(x)-\alpha|\leq|f(x)-f([x]+1)|+|f([x]+1)-\alpha|<2\varepsilon$ となるから収束する．

(ii)$|f(x)-\alpha|=\lim_{y\to\infty}|f(y)-f(x)|\leq\lim_{y\to\infty}\frac{A}{c-1}x^{1-c}=\frac{A}{c-1}x^{1-c}$

$\boxed{2}$ $v\in\ker AC_1$ に対して $Cv\in\ker A$ であり C_1 が正則であるから $C_1\colon\ker AC_1\to\ker A$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1=\dim\ker A$ である．$v\in\ker AC_1$ に対して $B_1v\in\ker B_1AC$ である．B_1 が正則であるから $B_1\colon\ker AC_1\to\ker B_1AC$ は同型写像．よって $\dim\ker AC_1=\dim\ker B_1AC_1$ である．以上より $\dim\ker A=\dim\ker B_1AC_1=m-r$ である．同様に $\dim\ker A=\dim\ker B_2AC_2=m-s$ であるから $r=s$.

$\boxed{3}$ $f(x,y_0)\neq 0$ より $f(x,y_0)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ であるから，$(x,y_0)\in f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は開集合であるから，$f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ は開集合である．したがってある $X\times Y$ の開集合 $V_x\times U_x$ が存在して $(x,y_0)\in V_x\times U_x\subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．$\bigcup_{x\in X}V_x$ は X の開被覆であるから，有限部分被覆 $\{V_{x_1},\cdots,V_{x_n}\}$ が存在する．$U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{x_i}$ とすれば $X\times U\subset f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ である．

$\boxed{4}$ $f(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{z^4}$ とすれば $f(z)$ は $z\neq 0$ で正則であり，$z=0$ で極である．$z=0$ での f のローラン級数は

$$\begin{aligned}f(z)&=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-z)^n)/z^4\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!}-(-1)^n\frac{1}{n!})z^{n-4}\end{aligned}$$

である．z^{-1} の係数は $1/3$ である．

$r<1$ なら内部に特異点を持たないから $\int_{\Gamma_r}f(z)dz=0$ である．$r>1$ なら $z=0$ が特異点となるから留数定理より $\int_{\Gamma_r}f(z)dz=2\pi i/3$ である．

0.6 H20 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f_x(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})(-\sin\frac{\pi}{3}) + f_y(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\end{aligned}$$

(2)F は $[0,4\pi]$ 上で連続である．よって $\theta \in [0,4\pi]$ に対して $|F(\theta)| < M$ となる $M > 0$ が存在する．$\tau \in \mathbb{R}$ に対して $t = 2n\pi + \theta$ をみたす，$n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0,2\pi)$ が存在する．$F(\tau) = F(\theta)$ であるから $|F(\tau)| < M$ である．したがって有界．また F は $[0,4\pi]$ 上で連続であるから一様連続である．すなわち $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して任意の $\theta, \tau \in [0,4\pi]$ に対して $|\theta - \tau| < \delta$ なら $|F(\theta) - F(\tau)| < \varepsilon$ である．

よって $s \geq t \in \mathbb{R}$ に対して，$s = 2n\pi + p$ をみたす $p \in [0,2\pi)$ が存在する．$|s-t| < \delta$ なら $|F(s) - F(t)| = |F(p) - F(p+s-t)| < \varepsilon$ であるから一様連続である．

$\boxed{2}$ (1)$\varphi_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m; x \mapsto Ax$ で定める．A の階数が m であるから $\dim \varphi_A = m = \dim \mathbb{C}^m$．したがって φ_A は全射である．よって任意の $c \in \mathbb{C}^m$ に対して $\varphi_A(x) = Ax = c$ となる $x \in \mathbb{C}^n$ が存在する．

(2)φ_B が単射なら $\operatorname{rank}\varphi_B = m$ である．よって $\operatorname{rank} B^T = m$ であるから φ_{B^T} は全射である．

(3)$B^T Q^T = P^t$ なる Q^T の存在を示す．P^T の列ベクトル p_i ごとに $q_i \in \mathbb{C}^n$ が存在して $B^T q_i = p_i$ である．よって $Q^T = (q_1, \cdots, q_m)$ とすれば $B^T Q^T = P^T$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x,0),(x,1) \in Y$ について $(x,1)$ が属す Y の開集合 U をとる．U は開基の和集合でかけるから，ある $W \subset U, W \in \mathcal{B}$ が存在して $(x,1) \in W$．すなわちある $V \in \mathcal{O}$ が存在して $W = V \times \{0,1\}$ である．よって $(x,0) \in W \subset U$ であるから，ハウスドルフでない．

(2)$X \times \{0\}$ の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．任意の $x \in X$ についてある λ_x が存在して $x \in U_{\lambda_x}$ である．各 U_{λ_x} についてある開集合 $V_{\lambda_x} \in \mathcal{O}$ が存在して $x \in V_{\lambda_x} \times \{0\} \subset U_{\lambda_x}$ である．したがって $X \subset \bigcup_{x \in X} V_{\lambda_x}$ である．X はコンパクトであるから有限部分被覆 $\{V_{\lambda_{x_1}}, \cdots, V_{\lambda_{x_n}}\}$ が存在する．$X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_{x_i}}$ であるから $X \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_{x_i}}$ である．したがって $X \times \{0\}$ はコンパクトである．(1) で示したように $(x,1) \in Y \setminus (X \times \{0\})$ を含む開集合 U は $U \cap (X \times \{0\}) \neq \emptyset$ である．したがって $X \times \{1\}$ は開集合でない．

$\boxed{4}$ (1)$\frac{1}{1-z^3} = 1 + z^3 + z^6 + \cdots \quad (|z| < 1)$ であるから，$\varphi(z) = \frac{z^p}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+p}$ である．収束半径は 1 である．

(2)φ の特異点は $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ で，それ以外の点で正則である．したがって $R < 1$ なら $\int_C \varphi(z)dz = 0$ である．

特異点での留数を計算する．$\lim_{z\to 1}(z-1)\varphi(z) = \frac{1}{3}$, $\lim_{z \to e^{2\pi i/3}}(z - e^{2\pi i/3})\varphi(z) = \frac{e^{2(p+1)\pi i/3}}{3}$, $\lim_{z \to e^{4\pi i/3}}(z - e^{4\pi i/3})\varphi(z) = \frac{e^{4(p+1)\pi i/3}}{3}$ である．よって留数定理から $\int_C \varphi(z)dz = \frac{2\pi i}{3}(1 + e^{2(p+1)\pi i/3} + e^{4(p+1)\pi i/3})$ である．

0.7 H21 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = f'(0)$$

であるから $-f'(0)/2 > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $nf(\frac{1}{n}) < f'(0) + (-f'(0)/2) = f'(0)/2$ である．

(2)$\pi > x > 0$ で $\frac{1}{1+x} < 1$ より $\log(1+x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt < \int_0^1 1dt = t$ である．したがって $\log(1+x) < x$ であ

る．またテイラーの定理から $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R(x)$ である．$R(x) = \frac{(\cos^{(5)} s)}{5!}x^5 \quad (0 < s < x < \pi)$ である．$(\cos^{(5)} s) = -\sin s < 0$ であるから $R(x) < 0$ である．したがって $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ である．

以上より

$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \log\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2}\right) \leq -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} < -\frac{1}{n}$$

であるから発散する．

$\boxed{2}$ (1) 略

(2)$\sigma(u) = u - 2\frac{(u,u)}{(u,u)}u = -u$ より -1 は固有値である．$\sigma(x) = -x$ とすると，$x - 2\frac{(x,u)}{(u,u)}u = -x$ であるから $x = \frac{(x,u)}{(u,u)}u$ である．すなわち $x \in \mathrm{spam(u)}$ である．よって $W(-1) = \mathrm{spam(u)}$ である．

(3)$\sigma \circ f(u) = f \circ \sigma(u) = f(-u) = -f(u)$ であるから $f(u) \in W(-1) = \mathrm{spam(u)}$ である．したがって u は f の固有ベクトルである．

(4)$\sigma(e_1) = e_1 - 2\frac{(e_1,u)}{(u,u)}u = e_1 - \frac{2}{3}u = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_3 - \frac{2}{3}e_4, \sigma(e_2) = e_2, \sigma(e_3) = e_3 + \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_4, \sigma(e_4) = e_4 - \frac{2}{3}u = -\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{1}{3}e_4$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1) ハウスドルフ空間 $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト部分集合 C をとる．$y \in X \setminus C$ と $x \in C$ について $x \in U_x, y \in V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$ となる開集合 $U_x, V_x \in \mathcal{O}$ が存在する．$\bigcup_{x \in C} U_x \supset C$ より有限部分集合 $X' \subset X$ が存在して $\bigcup_{x \in X'} U_x \supset C$ である．$V = \bigcap_{x \in X'} V_x$ とすれば V は y の開近傍で $V \cap C = \emptyset$ である．したがって $X \setminus C$ は開集合である．

(2)$f\colon X \times Y \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto x - y$ とすると f は連続である．よって $f^{-1}(0) = F$ は閉集合である．$g\colon F \to \mathbb{R}; (x,x) \mapsto x$ とすると g は連続である．$\sup g(x) = 1$ より g は最大値をもたない．したがって F はコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$zx + iy$ とする．$e^z = -e^{-z}$ より $e^x = |e^z| = |-e^{-z}| = e^{-x}$ であるから $x = -x$ である．したがって $x = 0$ である．$e^{iy} = -e^{-iy}$ より $\cos y = -\cos y$ である．よって $y = \frac{i\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ である．

(2)$|e^{-iz}| = |e^{s - i\pm R}| = e^s \leq e^\pi$ である．$z = R + is$ のとき $|e^z + e^{-z}| \geq |e^z| - |e^{-z}| = e^R - e^{-R}$ であり，$z = -R + is$ のとき $|e^z + e^{-z}| \geq |e^{-z}| - |e^z| = e^R - e^{-R}$ である．よって $\sup_{z \in \Gamma_R} |e^{-iz}/(e^z + e^{-z})| \leq \frac{e^\pi}{e^R - e^{-R}}$ である．

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\right| dx \leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{-x}} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x} dx < \infty$$

よって被積分関数は $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分であり，連続であるから広義積分は収束する．$f(z) = e^{-iz}/(e^z + e^{-z})$ とする．(1) で求めた点以外で f は正則である．したがって積分経路 C を 4 点 $-R, R, R + i\pi, -R + i\pi$ を結んでできる長方形を反時計回りに進むとすると，留数定理から $\int_C f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f, i\pi/2))$ である．$\lim_{z \to i\pi/2} \frac{z - 1\pi/2}{e^z + e^{-z}} = \lim_{z \to i\pi/2} \frac{1}{e^z - e^{-z}} = \frac{1}{2i}$ であるから $\int_C f(z)dz = \pi e^{\pi/2}$ である．

また

$$\int_{R+i\pi}^{-R+i\pi} f(z)dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{-i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi}+e^{-x-i\pi}}dx = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\pi}e^{-ix}}{e^{x}+e^{-x}}dx$$

$$\left|\int_{R}^{R+i\pi} f(z)dz\right| \le \int_{R}^{R+i\pi} \left|\frac{e^{-iz}}{e^{z}+e^{-z}}\right| dz \le \pi e^{\pi}/(e^{R}-e^{-R}) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

$$\left|\int_{-R+i\pi}^{-R} f(z)dz\right| \le \int_{-R+i\pi}^{-R} \left|\frac{e^{-iz}}{e^{z}+e^{-z}}\right| dz \le \pi e^{\pi}/(e^{R}-e^{-R}) \to 0 \quad (R\to\infty)$$

である．よって $\pi e^{\pi/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x/(e^x+e^{-x})dx + e^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}/(e^x+e^{-x})dx$ である．よって $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x/(e^x+e^{-x})dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}$ である．

0.8　H22 数学 A

(1)f は一様連続であるから任意の ε に対して $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ なら $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ である．また $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束するから $\delta(\varepsilon)$ に対して，$N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $|g_n(x)-g(x)|<\delta(\varepsilon)$ である．

以上より，$n>N$ なら $|f(g_n(x))-f(g(x))|<\varepsilon$ である．したがって $f\circ g_n$ は $f\circ g$ に一様収束する．

(2)$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ とする．$|h_n(x)-h(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \quad (n\to\infty)$ である．したがって一様収束．

また $\sin x$ は一様連続である．これは平均値の定理から $\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi \le |(x-y)| \quad (\xi\in(x,y))$ より明らか．(1) より $\alpha_n(x) = \sin(h_n(x))$ は $\sin(h(x))$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (1)$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ を任意にとる．$X = X^T$ であるから $b=c$ である．したがって $X = aE_1+bE_2+cE_3$ と表せる．また $c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3 = O$ とすれば $c_1=c_2=c_3=0$ は一次独立．したがって V は $\{E_1,E_2,E_3\}$ を基底とする．

(2)$(A^TXA)^T = A^TX(A^T)^T = A^TXA$ であるから $f_A(X)\in V$ である．$f_A(cX+Y) = A^T(cX+Y)A = cA^TXA + A^TYA = cf_A(X)+f_A(Y)$ であるから線形写像である．

(3)$f_A(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} = E_1+aE_2+a^2E_3, f_A(E_2) = \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ a^2+1 & 2a \end{pmatrix} = 2aE_1+(a^2+1)E_2+2aE_3, f_A(E_3) = \begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = a^2E_1+aE_2+E_3$ である．よって f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ a & a^2+1 & a \\ a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ である．

(4)f_A の表現行列を $G(a)$ とする．$\det G(a) = \begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & -a^2+1 & a-a^3 \\ 0 & -a^3+a & 1-a^2 \end{vmatrix} = -(1-a^2)^2-(a-a^3)^2 = -(a^2+1)(1-a^2)^2$ である．

したがって $a\neq\pm1$ のとき $\det G(a)\neq 0$ であるから $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は $\{f_A(E_1), f_A(E_2), f_A(E_3)\}$ である．

$a=1$ のとき $G(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$a=-1$ のとき $G(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$S = \{(-\infty,n)\cup\{p_1\} \mid n\in\mathbb{N}\}$ とする．S は X_1 の開被覆である．有限部分被覆を持たないからコン

パクトでない．

(2) ユークリッド位相の入った位相空間 $\mathbb{R}$ を E で表す．E の開集合は X_2 の開集合であることを示す．E の開基として $\{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \mid x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ がとれる．$\frac{1}{n_1} \leq \varepsilon < \frac{1}{n_1+1}$ として n_1 を定める．n_i を $\frac{1}{n_i} \leq \varepsilon - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} < \frac{1}{n_i}$ として定める．ただし $\varepsilon - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} = 0$ のとき n_i は定めない．n_i が定義される i を集めてできる $A \subset \mathbb{N}$ を定める． このとき数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\max A}$ を得る．$\bigcup_{i=1}^{\max A} (x_0 - \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n_j}, x_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}) \cup (x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_i}, x_0 - \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ である．よって E の開集合は X_2 の開集合である．

$\varphi \colon X_2 \to [0,1]$ を $\varphi(p_1) = 0, \varphi(p_2) = 1, \varphi(x) = (\arctan x + \pi/2)/\pi \quad (x \in \mathbb{R})$ とする．$\varphi|_{\mathbb{R}} \colon E \to (0,1)$ は同相写像であるから φ は全単射．$(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ は E の開集合であるから $\varphi((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}))$ は $[0,1]$ の開集合である．$\varphi((-\infty, n) \cup \{p_1\}) = (0, \varphi(n)) \cup \{0\} = (-1, \varphi(n)) \cap [0,1]$ は開集合である．よって φ^{-1} は連続．$[0,1]$ の開集合 U について $U \subset (0,1)$ なら $\varphi^{-1}(U)$ は E の開集合．すなわち X_2 の開集合．$0 \in U, 1 \notin U$ ならある $\varepsilon > 0$ が存在して $U = [0,\varepsilon) \cup U \setminus \{0\}$ である．$\varphi^{-1}(U \setminus \{0\})$ は X_2 の開集合である．$\varphi^{-1}([0,\varepsilon)) = (-\infty, \varphi^{-1}(\varepsilon)) \cup \{p_1\}$ は X_2 の開集合である．よって $\varphi^{-1}(U)$ は X_2 の開集合．$0 \notin U, 1 \in U$ のとき,$0, 1 \in U$ のときも同様．よって φ は連続．すなわち φ は同相．

(3)p_1 が属す開基は $\{(-\infty, n) \cup \{p_1\}\} \quad (n \in \mathbb{Z})$ である．任意の $m \in \mathbb{Z}$ について $\{(-\infty, m)\} \cup \{p_3\}$ も開基であるからそれぞれを含む任意の開基は共通部分をもつ．したがってハウスドルフ空間でない．

$\boxed{4}$ (1)

$$\left|\frac{\log z}{z^4+1}\right| = \frac{|\log r + i\theta|}{|r^4 e^{4i\theta} + 1|} \leq \frac{|\log r| + \pi}{||r^4 e^{4i\theta}| - 1|} = \frac{|\log r| + \pi}{|r^4 - 1|}$$

(2)

$$\int_{\alpha_2} \frac{\log z}{z^4+1} dz = \int_R^\varepsilon \frac{\log x e^{\pi i}}{(x e^{\pi i})^4 + 1} e^{i\pi} dx = \int_\varepsilon^R \frac{\log x + \pi i}{x^4+1} dx = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{x^4+1} dx + \pi i \int_\varepsilon^R \frac{1}{x^4+1} dx$$

(3)$\partial D_{\varepsilon,R}$ の小さい円弧を C_1，大きい円弧を C_2 とする．$\left|\int_{C_1} \frac{\log z}{z^4+1} dz\right| = \int_0^\pi \left|\frac{\log \varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^4 e^{4i\theta}+1} i\varepsilon e^{i\theta}\right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{\varepsilon|\log\varepsilon| + \varepsilon\pi}{|\varepsilon^4 - 1|} d\theta \leq \pi \frac{\varepsilon|\log\varepsilon| + \varepsilon\pi}{|\varepsilon^4 - 1|} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$ である．また $\left|\int_{C_2} \frac{\log z}{z^4+1} dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{\log Re^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta}+1} iRe^{i\theta}\right| d\theta \leq \pi \frac{R|\log R| + R\pi}{|R^4 - 1|} \to 0 \quad (R \to \infty)$ である．

また $\int_{\alpha_1} \frac{\log z}{z^4+1} dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{x^4+1} dx$ である．

$\varepsilon < 1 < R$ である．$D_{\varepsilon,R}$ 内で $\frac{\log z}{z^4+1}$ は $e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}$ を特異点にもつ．留数を求めると $\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1}, e^{\pi i/4}\right) = \pi e^{7i\pi/4}/16, \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1}, e^{3\pi i/4}\right) = 3\pi e^{i\pi/4}/16$ である．よって $\int_{\partial D_{\varepsilon,R}} \frac{\log z}{z^4+1} dz = \frac{i\pi^2}{8}(3e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8} + i\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$ である．すなわち $\lim_{R\to\infty, \varepsilon\to 0} \int_{\partial D_{\varepsilon,R}} \frac{\log z}{z^4+1} dz = 2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+1} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx$ である．以上より $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+1} dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}, \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ である．

0.9 H23 数学 A

$\boxed{1}$ (1)V の基底として $\{1, x+1, (x+1)^2\}$ をとる．$F(1) = 0, F(x) = x+1, F((x+1)^2) = 2(x+1)^2$ であるから F の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(2)G の表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とし，F の表現行列を A とする．$G \circ F = F \circ G$ は $AB = BA$

と同値である．よって $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 2b_{31} & 2b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 2b_{13} \\ 0 & b_{22} & 2b_{23} \\ 0 & b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix}$ であるから，$b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = 0$ である．したがって $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ である．よって M の次元は 3 である．

$\boxed{2}$ (1)$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $|f_N(x) - f(x)| < 1$ である．f_N は有界であるから $f_N(x) \leq M$ とするとよって $|f(x)| \leq 1 + |f_N(x)| < 1 + M$ である．よって f は有界．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して一様収束性から，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n, m > N$ なら $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ である．この n, m に対してある $M(n) > 0$ が存在して $x > M(n)$ なら $|a_n - f_n(x)| < \varepsilon$ であり，またある $M(m) > 0$ が存在して $x > M(m)$ なら $|a_m - f_m(x)| < \varepsilon$ である．$|a_n - a_m| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m|$ であるから $x > M(n) + M(m)$ をとることで $|a_n - a_m| < 4\varepsilon$ である．すなわち $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_1$ なら $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ である．またある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N_2$ なら $|a_n - A| < \varepsilon$ である．$N = N_1 + N_2$ とする．ある $M > 0$ が存在して $x > M$ なら $|f_N(x) - a_n| < \varepsilon$ である．よって $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - A| < 3\varepsilon$ となる．

$\boxed{3}$ (1)$(a, b) \notin G$ を任意にとる．$b \neq f(a)$ と Y がハウスドルフ空間であることから開集合 U, V が存在して $f(a) \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ である．$(a, b) \in f^{-1}(U) \times V$ である．ある $(x, y) \in f^{-1}(U) \times V$ について $f(x) = y$ と仮定する．$f(x) \in U, y \in V$ であるから $y \in U \cap V$ となり矛盾．よって $f^{-1}(U) \times V \cap G = \emptyset$ である．$f^{-1}(U) \times V$ は開集合であるから G は閉集合．

(2)$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1/x & (x > 0) \end{cases}$ とする．f は連続でないが G は閉集合である．

$\boxed{4}$ (1)$|e^{iz}| = |\exp(ire^{it})| = |\exp(-r\sin t + ir\cos t)| = |\exp(-r\sin t)| \leq 1$ である．よって $|\int_{C_r} f(z)dz| \leq \int_{C_r} |\frac{2}{z^2}|dz = 2\int_0^{\pi} |\frac{1}{r}|dt = 2\pi\frac{1}{r} \to 0 \quad (r \to \infty)$ である．

$(1-e^{iz})/z^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^{n-2} z^{n-2}$ である．よって $\int_{C_r} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^{n-2} \int_{C_r} z^{n-2}dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} i^{n-1} \int_0^{\pi} r^{n-1} e^{i(n-1)t}dt$ である．$n = 1$ の項については $\int_0^{\pi} dt = \pi$ である．$n \geq 2$ なら $|\int_0^{\pi} r^{n-1} e^{i(n-1)t}dt| \leq \int_0^{\pi} r^{n-1}dt \to 0 \quad (r \to 0)$ である．よって $\int_{C_r} f(z)dz \to \pi \quad (r \to 0)$ である．

(2) 曲線 $\alpha_{\varepsilon,r}$ を $z = x \quad (-r \leq x \leq -\varepsilon)$ とする．$\int_{\alpha_{\varepsilon,r}} f(z)dz = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}dx = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-e^{-ix}}{x^2}dx = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-\cos x}{x^2}dx + i\int_{\varepsilon}^{r} \frac{\sin x}{x^2}dx$ である．

曲線 $\beta_{\varepsilon,r}$ を $z = x \quad (\varepsilon \leq x \leq r)$ とする．$\int_{\beta_{\varepsilon,r}} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-e^{ix}}{x^2}dx = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-\cos x}{x^2}dx - i\int_{\varepsilon}^{r} \frac{\sin x}{x^2}dx$ である．

$C_\varepsilon, \beta_{\varepsilon,r}, C_r, \alpha_{\varepsilon,r}$ をつないでできる積分曲線を C とすると，C の内部で f は正則であるから $\int_C f(z)dz = 0$ である．よって $\int_{-C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\beta_{\varepsilon,r}} f(z)dz + \int_{C_r} f(z)dz + \int_{\alpha_{\varepsilon,r}} f(z)dz = 0$ である．$\varepsilon \to 0, r \to \infty$ とすると $2\int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-\cos x}{x^2}dx - \pi \to 0$ であるから $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ である．

0.10　H24 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $\varepsilon < a_n < \varepsilon$ である．

よって $n > N$ で $(1 - \frac{\varepsilon}{n})^n \leq (1 + \frac{a_n}{n})^n \leq (1 + \frac{\varepsilon}{n})^n$ である．極限をとれば $e^{-\varepsilon} \leq \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a_n}{n})^n \leq e^{\varepsilon}$ である．ε は任意であるから $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a_n}{n})^n = 1$ である．

(2)$n\cos\frac{t}{\sqrt{n}} - n = -\frac{1}{2}t^2 + O(\frac{1}{n})$ であり，$\lim_{n\to\infty} s\cos\frac{t}{\sqrt{n}} = s$ であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = s - \frac{1}{2}t^2 = 0$ より $(s, t) = (\frac{t^2}{2}, t) \quad (t \in \mathbb{R})$ である．

(3)(2) の a_n をもちいると，$\cos\frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n+s}\frac{n+s}{n}\cos\frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n+s}(1 + \frac{a_n}{n})$ である．したがって $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{t}{\sqrt{n}})^n =$

$e^{-\frac{t^2}{2}}$ である．よって $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$ である．

$\boxed{2}$ (1) $\begin{vmatrix} -3-t & -2 & 1 \\ 4 & 3-t & -1 \\ -4 & -2 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t-1)^2$ である．よって固有値は $0,1$ である．

$t=0$ のとき，$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから V_0 の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$t=1$ のとき，$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ であるから固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

(2)$BAy = BABx = B\alpha x = \alpha Bx = \alpha y$

(3)AB の rank は 2 であるから A の rank は 2 以上．$A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ であるから A の rank は 2 である．すなわち A は単射．同様に B は全射である．

よって $\dim \mathrm{Im}\, g_1 = 2$ である．

(4)B は全射であるから任意の $y \in \mathbb{C}$ に対して $Bx = y$ となる $x \in \mathbb{C}^2 = V_1$ が存在する．$BAy = y$ より $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$f^{-1}([0,1)) = [0,1)$ は X の開集合でないから f は連続でない．

(2) X は $\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ を開基とする位相空間である．

$g^{-1}(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x - \frac{\varepsilon}{n}, x+\varepsilon)$ より g は連続．

(3)A^+ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ をとる．$0 \in U_{\lambda'}$ なる $\lambda' \in \Lambda$ が存在する．ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_{\lambda'}$ である．$\frac{1}{n} < \varepsilon$ となるような最大の n を N とする．N 以下の n に対して $\frac{1}{n}$ を含むような U_{λ_n} が存在する．したがって $\Lambda' = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N, \lambda'\}$ は A^+ の有限部分被覆である．よって A^+ はコンパクトである．

A^- は A^+ と同様にしてコンパクトである．

(4)A^+ は Y においてコンパクトである．0 を含む開集合は開集合 $[0,x)$ を部分集合にもつ．x 以上の $\frac{1}{n}$ なる n は有限個なので (3) と同様にコンパクト．

A^- はコンパクトでない．$\{[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \mid n = 1,2,\ldots\} \cup \{[0,1)\}$ は開被覆であるが有限部分被覆を持たない．

$\boxed{4}$ (1)$z = e^{i\pi/5}$ は一位の極である．よって留数は $\lim_{z \to e^{i\pi/5}} (z - e^{i\pi/5})/(z^5+1) = e^{6i\pi/5}/5$ である．

(2)$|\int_{\Gamma_R} f(z)dz| \le \int_{\Gamma_R} |\frac{1}{z^5+1}||dz = \int_0^{2\pi/5} |\frac{1}{R^5-1} Ri| d\theta = \frac{2\pi}{5}\frac{R}{R^5-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$ である．

(3) 半径 R の扇形で偏角が 0 から $2\pi/5$ の曲線を反時計回りに進む積分曲線を C とする．$f(z) = \frac{1}{z^5+1}$ は C を含むある領域で C 内に孤立特異点をもち，それ以外で正則であるから，留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\big(f, e^{i\pi/5}\big) = 2\pi i e^{6i\pi/5}/5$ である．

$\Gamma_A = \{xe^{i2\pi/5} \mid 0 \le x \le R\}$ とする．ただし Γ_A の向きは C と同じ方向にとる．

$$\int_{\Gamma_A} \frac{1}{z^5+1}dz = -\int_0^R \frac{1}{x^5+1} e^{2\pi i/5} dx = -\cos\frac{2\pi}{5}\int_0^R \frac{1}{x^5+1}dx - i\sin\frac{2\pi}{5}\int_0^R \frac{1}{x^5+1}dx$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx - \cos\frac{2\pi}{5}\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx = -\frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}$$

よって $\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx = \frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}/(1-\cos\frac{2\pi}{5})$ である．

$$\frac{\sin\frac{6\pi}{5}}{(1-\cos\frac{2\pi}{5})} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin^2\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

より $\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}dx = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}$ である．

0.11　H25 数学 A

$\boxed{1}$ (1)

$$u(x) = \int_0^x \phi(x)\psi(y)f(y)dy + \int_x^\pi \psi(x)\phi(y)f(y)dy = \phi(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy + \psi(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy$$

である．$\phi(y)f(y), \psi(y)f(y)$ は $(0,\pi)$ 上連続であるから，$u(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned} u'(x) &= \phi'(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy + \phi(x)\psi(x)f(x) + \psi'(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy - \psi(x)\phi(x)f(x) \\ &= \phi'(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy + \psi'(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy \end{aligned}$$

先ほどと同様の理由で $u'(x)$ は $(0,\pi)$ 上で微分可能である．

$$\begin{aligned} u''(x) &= \phi''(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy + \phi'(x)\psi(x)f(x) + \psi''(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy - \psi'(x)\phi(x)f(x) \\ &= -\phi(x)\int_0^x \psi(y)f(y)dy + \phi'(x)\psi(x)f(x) - \psi(x)\int_x^\pi \phi(y)f(y)dy + \psi'(x)\phi(x)f(x) \\ &= -u(x) + \phi'(x)\psi(x)f(x) - \psi'(x)\phi(x)f(x) \end{aligned}$$

よって u は C^2 級である．

(2) $u''(x) + u(x) = (\phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x))f(x)$ である．$h(x) = \phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x)$ とおくと $h'(x) = \phi''(x)\psi(x) + \phi'(x)\psi'(x) - \psi''(x)\phi(x) - \psi'(x)\phi'(x) = -\phi(x)\psi(x) + \psi(x)\phi(x) = 0$．より $h(x) = W$．

(3)ψ が C^2 級の実数値関数であることと $\psi''(x)+\psi(x) = 0$ より $\psi(x) = \mathrm{Re}(Ae^{ix}+Be^{-ix}) = C\cos x + D\sin x$．($A, B$ は,$C = A + B \in \mathbb{R}, D = (A - B)i \in \mathbb{R}$ を満たす任意定数) である．

$\phi(x) = \sin x, W = 1$ より $\cos x\psi(x) - \sin x\psi'(x) = 1$．とくに $x = 0$ で $\psi(0) = 1$ である．よって $C = 1$．また $\psi'(0) = 0$ より $D = 0$．よって $\psi(x) = \cos x$．

$\boxed{2}$ (1)$v \in f^{n+1}(V) = f^n(f(V))$ に対して，ある $u \in f(V)$ が存在して，$v = f^n(u)$ である．すなわち $f^{n+1}(V) \subset f^n(V)$ である．

(2)$f^{n+1}(V) \subset f^n(V)$ より $f^k(V)$ の次元は単調減少である．V は有限次元であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_0$ ならば $f^{n+1}(V) = f^n(V)$ である．

(3)$f|_W : W \to W$ は $f|_W(W) = f|_W(f^{n_0}(V)) = f^{n_0+1}(V) = W$ より全射である．有限次元ベクトル空間の全射自己準同型は同型射であるから，$f|_W$ は同型.

$\boxed{3}$ (1)$\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ は R の開集合であるから，$\emptyset \in \mathcal{O}$ である．$\pi^{-1}(R/\sim) = R$ は R の開集合であるから，$R/\sim \in \mathcal{O}$ である．

$U, V \in \mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(U \cap V)$ は R の開集合である．よって $U \cap V \in \mathcal{O}$ である．

$U_\lambda \in \mathcal{O}$ に対して，$\pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合であるから，$\pi^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda) = \bigcup_\lambda \pi^{-1}(U_\lambda)$ は R の開集合である．よって $\bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}$ である．

以上より $R/\sim$ は $\mathcal{O}$ を位相とする位相空間.

(2) ハウスドルフ空間であれば，一点集合は閉集合である．$\{x_0\} \subset R/\sim$ について $\pi^{-1}(\{x_0\}) = D$ は R の閉集合ではない．よって $\{x_0\}$ は閉集合ではないから，ハウスドルフ空間でない.

(3)$\{x_0\}$ 以外の一点集合はすべて閉集合である．よって f が同相写像なら閉集合の像は閉集合であるから $f(x_0)=x_0$ である．

$\boxed{4}$ (1)$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を z に収束する任意の複素数列とする．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}&=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{z_n-z}\left(\frac{1}{e^{i\theta}-z_n}-\frac{1}{e^{i\theta}-z}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta\end{aligned}$$

ここで $|z|<1$ より任意の $\theta\in[0,2\pi]$ とある整数 N より大きい n に対して，ある $\varepsilon>0$ が存在して $|(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)|\geq|1-|z_n||1-|z||>\varepsilon$ である．したがって $\sup_{n>N}\left|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}\right|<|\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{\varepsilon}|<M\in\mathbb{R}$ である．

よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_n)(e^{i\theta}-z)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{i\theta}((e^{i\theta}-z)^{-1})'d\theta$$

となり微分可能．よって f は $|z|<1$ で正則である．

(2)$|z|<1$のとき$n!c_n=f^{(n)}(0)$である．$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})((e^{i\theta}-z)^{-1})^{(n)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(\theta)e^{i\theta})(n!(e^{i\theta}-z)^{-n-1})d\theta$ である．よって $f^{(n)}(0)=n!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta$ である．

$$\begin{aligned}2\pi c_n&=\int_0^{2\pi}\phi(\theta)e^{-ni\theta}d\theta=\left[\phi(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-ni}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{ni}d\theta=\left[\phi'(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2i^2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{-n^2i^2}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\phi''(\theta)\frac{e^{-ni\theta}}{n^2}d\theta\leq2\pi\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

よって $n^2|c_n|\leq\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|$ である．

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\phi''(\theta)|\frac{1}{n^2}<\infty$$

よって絶対収束するから，$|z|=1$ で $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ は収束する．

(4) ワイエルシュトラスの M 判定法と (3) での不等式から $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ は $|z|\leq1$ で一様収束する．したがって一様収束先の関数は連続であるから，$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ である．

0.12 H26 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$(\arctan)'(y)=\frac{1}{1+y^2}$ より $(\arctan y+\arctan(1/y))'=\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+(1/y)^2}(-1/y^2)=0$ より $\arctan y+\arctan(1/y)$ は定数関数である。よって $\arctan x\in F$

(2)$f(x)+f(1/x)=c\in\mathbb{R}$ とする．$0<a<1$ に対して

$$\int_a^1 f(x)dx=\int_{1/a}^1-\frac{f(1/t)}{t^2}dt=\int_1^{1/a}\frac{f(t)-c}{t^2}dt=\int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt+c\left[\frac{1}{t}\right]_1^{1/a}=\int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt+c(a-1)$$

したがって $\lim_{a\to0}\int_a^1 f(x)dx$ の存在と $\lim_{a\to0}\int_1^{1/a}\frac{f(t)}{t^2}dt$ の存在は同値である。

(3)g が $G \in \mathbf{F}$ に 拡張可能だとする．このとき $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} g'(x) = \lim_{x\to 1-0} G'(x)$ は G が C^1 級であるから存在する．

逆に $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} g'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ とする．1 に収束する $(0,1)$ 上の任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $1-\delta < x < 1$ ならば $\alpha - \varepsilon < g'(x) < \alpha + \varepsilon$ である．$\varepsilon\delta$ に対してある N が存在して $n > N$ ならば $1 - \varepsilon\delta < x_n < 1$ である．$n, m > N$ について平均値の定理から $g(x_n) - g(x_m) = g'(\xi)(x_n - x_m)$ となる $\xi \in (1-\varepsilon\delta, 1)$ が存在する．よって $|g(x_n) - g(x_m)| < (\alpha+\varepsilon)\delta\varepsilon \to 0$ となるから $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列．すなわち収束列．以上より $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} g(x)$ は存在する．その収束先を β とする．

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in (0,1)) \\ \beta - G(1/x) & (x \in (1,\infty)) \\ \beta & (x=1) \end{cases}$$ と定めると $G|_{(0,1)} = g$ であり，$G(x) + G(1/x) = \beta$ である．

$G(x)$ は $x = 1$ 以外の点で微分可能であり，導関数は連続である．$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{g'(x)}{1} = \alpha$ である．(ロピタルの定理) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{\beta - G(1/x)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{-g'(1/x)(-x^{-2})}{1} = \alpha$ である．よって G は $x=1$ で微分可能．

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} G'(x) = \lim_{x\to 1+0} -g'(1/x)(-x^{-2}) = \alpha$ である．よって導関数が $x=1$ で連続であるから G は C^1 級．

$\boxed{2}$ (1) 一次独立であることを示す．$c_1\cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x = 0$ とする．$x=0$ とすると，$c_1 + c_3 = 0$ である．$x = \pi$ とすると，$-c_1 + c_3 = 0$ である．よって $c_1 = c_3 = 0$ である．$x = \frac{\pi}{2}$ とすると，$c_2 = 0$ である．よって $c_4 = 0$ より S は一次独立．よって V の基底

(2)$\Phi(\cos x) = -\sin x, \Phi(\sin x) = \cos x, \Phi(\cos 2x) = -2\sin 2x, \Phi(\sin 2x) = 2\cos 2x$ より Φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．$\Psi(\cos x) = \sin x, \Psi(\sin x) = \cos x, \Psi(\cos 2x) = -\cos 2x, \Psi(\sin 2x) = -\sin 2x$ より

Ψ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

(3)$g(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$ とする．

$\Phi(g(x)) - \Psi(g(x)) = \cos 2x$ より $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

すなわち $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．したがって $c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ が解である．よって $g(x) = c_2 \sin x + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x$ である．

$\boxed{3}$ (1)Q が連結でないとすると，Q の非空開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset, U \cup V = Q$ となるものが存在する．このとき $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset, \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V) = \mathbb{R}^2$ となる．すなわち $\mathbb{R}^2$ が連結でないがこれは矛盾．よって Q は連結である．

(2)$(1,0) \in \mathbb{R}^2$ の同値類は $A = \{(x,0) \mid x \neq 0\}$ である．また $(0,0)$ の同値類は $B = \{(0,0)\}$ である．B を含む Q の開集合 U を任意にとる．$(0,0) \in \pi^{-1}(Q)$ で $\pi^{-1}(Q)$ は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B((0,0),\varepsilon) \subset \pi^{-1}(Q)$ である．$B((0,0),\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である．よって B を含む任意の開集合は A を含むから，

ハウスドルフ空間でない.

(3)$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid -n < xy < n\}$ とする．A_n は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}\pi(A_n) = A_n$ である．$\{\pi(A_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ は Q の有限部分被覆を持たない開被覆である．よってコンパクトでない.

$\boxed{4}$ (1)$z \in D$ について，z に収束する D 上の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとる.

$$
\begin{aligned}
2\pi i \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} &= \lim_{n\to\infty} \int_C \left(\frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z_n} - \frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z} \right) \frac{1}{z_n - z} d\zeta \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta
\end{aligned}
$$

ここで $\zeta \in C, z_n, z \in D$ より $\zeta(\zeta-2) - z_n > M, \zeta(\zeta-2) - z > M$ となる $M > 0$ が存在する．よって $\frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)} < \frac{1}{M^2}$ であるから $\int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)} d\zeta < 2\pi M^2$ である．よってルベーグの収束定理から

$$
2\pi i \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \int_C \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta = \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z)^2} d\zeta
$$

よって $f(z)$ は D 上で正則.

(2)$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^k$ とする．$\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^{k+n+1}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = n! c_{-1}$ である.

$((\zeta-2)^{-n-1})^{(n)} = (-n-1)(-n-2)\dots(-n-n)(\zeta-2)^{-2n-1} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!(\zeta-2)^{2n+1}}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n! 2^{2n+1}}$ よって $c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ である.

$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}$ は C 内で $\zeta = 0$ を特異点にもつ．よって留数定理から $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} d\zeta = \mathrm{Res}\left\{ \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}, 0 \right\} = c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$

(3)$\zeta(\zeta-2) - z = (\zeta - (1 + \sqrt{1+z}))(z - (1 - \sqrt{1+z}))$ である．$|z| < 1$ より $-\pi/2 < \arg(1+z) < \pi/2$ である．よって $-\pi/2 < \arg(\sqrt{1+z}) < \pi/2$ より $\mathrm{Re}(1 + \sqrt{1+z}) > 1$ である．すなわち $|1 + \sqrt{1+z}| > 1$ である.

$\zeta = 1 - \sqrt{1+z}$ は $\zeta^2 - 2\zeta - z = 0$ より $|\zeta||\zeta-2| = |z| < 1$ である．よって $|\zeta| < 1/|\zeta-2| = 1/|1 - \sqrt{1+z} - 2| = 1/|1 + \sqrt{1+z}| < 1$ である．よって $\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}$ は D 内で特異点 $\zeta = 1 - \sqrt{1+z}$ を持つ．一位の極であるから留数は $\displaystyle\lim_{\zeta \to 1-\sqrt{1+z}} (\zeta - (1 - \sqrt{1+z})) \frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z} = \frac{1}{-2\sqrt{1+z}}$ である．よって $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z} d\zeta = \frac{-1}{2\sqrt{1+z}}$ である.

0.13　H27 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$ である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して一様収束するから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば，${}^{\forall}x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ である．この N に対して f_N は一様連続であるから，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x - y| < \delta$ ならば $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$ である．よって，$|x - y| < \delta$ ならば，$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$ である．すなわち，f は一様連続である.

(2) 一様収束するから任意の $\varepsilon > 0$ について，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば，${}^{\forall}x \in \mathbb{R}, f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ である．両辺の sup をとって $\sup A \leq \sup A_n + \varepsilon$ である．よって A は有界．$|\sup A - \sup A_n| < \varepsilon$ より $\limsup A_n = \sup A$

$\boxed{2}$ (1)$f_a(e_1) = a{}^te_1 - e_1^ta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & -a_3 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -a_2E_1 - a_3E_2, f_a(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ -a_1 & 0 & -a_3 \\ 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix} = a_1E_1 - a_3E_3, f_a(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ -a_1 & -a_2 & 0 \end{pmatrix} = a_1E_2 + a_2E_3$ である.

よって $T_a = \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \end{pmatrix}$ である．

(2)$\det T_a = -a_2(-a_1(-a_3)) + a_3a_1a_2 = 0$ より $\operatorname{rank} f_a \leq 2$ である．

$a \neq 0$ よりある i について $a_i \neq 0$ である．T_a の部分小行列として $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 \end{pmatrix}$ がとれる．これらの行列式は何れかが 0 でないから $\operatorname{rank} f_a \geq 2$ である．よって $\operatorname{rank} f_a = 2$ である．したがって $\dim \operatorname{Im} f_a = 2, \dim \operatorname{Ker} f_a = 1$ である．

(3)T_a の固有多項式を g_a とすると $g_a = \begin{vmatrix} -a_2 - \lambda & a_1 & 0 \\ -a_3 & -\lambda & a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\lambda = -\lambda(\lambda^2 - (a_2^2 - 2a_1a_3))$ である．

よって $a_2^2 - 2a_1a_3 \neq 0$ ならば T_a の固有値は全て異なるから，対角化可能．$a_2^2 - 2a_1a_3 = 0$ ならば，T_a の固有値は 0 のみである．固有値 0 の固有空間は $\ker T_a$ であるから $a \neq 0$ なら固有空間の次元は 1 となり，対角化不可能．$a = 0$ ならば $T_a = 0$ であるから対角化可能.

以上より $a = 0 \vee a_2^2 - 2a_1a_3 \neq 0$ が対角化可能性に関する必要十分条件である．

$\boxed{3}$ (1)$N_r(A)$ は開集合である．これを示す．$x \in N_r(A)$ を任意にとる．ある $a \in A$ が存在して $b := r - d(x,a) > 0$ である．$y \in B(x, b/2) := \{y \in X \mid d(x,y) < b/2\}$ について $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < r - b + b/2 < r$ である．よって $B(x, b/2) \subset N_r(A)$ である．よって $N_r(A)$ は開集合である．

$F_K = \{N_n(K) \mid n = 1, 2, \ldots\}, F_L = \{N_n(L) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ とする．F_K, F_L は X の開被覆である．とくに K, L の開被覆である．よって L の被覆 $\{N_{n_1}(K), N_{n_2}(K), \ldots, N_{n_m}(K)\}$ と，K の被覆 $\{N_{m_1}(L), N_{m_2}(L), \ldots, N_{m_\ell}(L)\}$ がとれる．$r = n_m + m_\ell$ とすれば，$L \subset N_r(K), K \subset N_r(L)$ である．

(2) 任意の $r > 0$ に対して $K \subset N_r(K)$ である．よって $D(K,K) = 0$ である．逆に $D(K,L) = 0$ とする．任意の $r > 0$ について $K \subset N_r(L), L \subset N_r(K)$ である．$x \in K$ に対して，ある $y \in L$ が存在して $d(x,y) < r$ である．この r は任意にとれるから x は L の触点である．距離空間はハウスドルフ空間であり，ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから，L は閉集合である．よって $x \in L$ である．すなわち $K \subset L$ である．同様にして $L \subset K$ である．よって $K = L$ である．

定義から $D(K,L) = D(L,K)$ である．

K, L, M をコンパクト集合とする．$D(K,L) = r_1, D(L,M) = r_2, r := r_1 + r_2$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ を一つ固定する．$x \in K$ に対して，$y \in L$ が存在して $d(x,y) < r_1 + \varepsilon$ である．$y \in L$ に対して，$z \in M$ が存在して $d(y,z) < r_2 + \varepsilon$ である．よって $d(x,z) < r_1 + r_2 + 2\varepsilon$ である．すなわち $K \subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(M)$ である．逆も同様に $M \subset N_{r_1+r_2+2\varepsilon}(K)$ である．よって $D(K,M) \leq r_1 + r_2 + 2\varepsilon$ である．ε は任意にとれるから $D(K,M) \leq r_1 + r_2$ である．よって $D(K,M) \leq D(K,L) + D(L,M)$ である．

$\boxed{4}$ (1)$1 + e^{2\pi z} = 0$ とする．$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ とすると，$e^{2\pi x}e^{2\pi iy} = -1$ である．よって $\sin 2\pi y = 0$ であるから，$y = \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$ である．よって $e^{2\pi z} = e^{2\pi x}(-1)^n = -1$ より $x = 0$ で n は奇数である．S_R 内では $z = i/2$ が唯一の解である．すなわち $f(z)$ は $z = i/2$ を特異点にもつ．

$$\lim_{z \to \frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{e^{2\pi az}}{1 + e^{2\pi z}} = \lim_{z \to \frac{i}{2}} \frac{e^{2\pi az} + (z - \frac{i}{2})2\pi z e^{2\pi az}}{2\pi e^{2\pi z}} = -\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$$

より $\operatorname{Res}\{f(z), i/2\} = -\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}$ である．

したがって留数定理から $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(-\frac{e^{a\pi i}}{2\pi}) = -ie^{a\pi i}$ である．

(2)$|\int_{J_R^+} f(z)dz| = |\int_0^1 \frac{e^{2\pi a(R+iy)}}{1+e^{2\pi(R+iy)}} idy| \leq \int_0^1 |\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}|dy$ である．

$$\left|\frac{e^{2\pi aR}}{1+e^{2\pi(R+iy)}}\right| = \left|\frac{1}{e^{-2\pi aR}+e^{2\pi R(1-a)}e^{2\pi iy}}\right| \leq \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$$

であるから，$|\int_{J_R^+} f(z)dz| \leq \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}dy = \frac{1}{e^{2\pi(1-a)R}}$ である．$0<1-a<1$ より $|\int_{J_R^+} f(z)dz| \to 0 \quad (R\to\infty)$ である．同様に $|\int_{J_R^-} f(z)dz| \to 0 \quad (R\to\infty)$ である．

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-2\pi ax}+e^{2\pi(1-a)x}}dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi(1-a)x}}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{-2\pi ax}}dx < \infty$ である．よって広義積分は収束する．$R+i$ から $-R+i$ への向きのついた線分を C とする．$\int_C \frac{e^{2\pi az}}{1+e^{2\pi z}}dz = \int_R^{-R} \frac{e^{2\pi a(x+i)}}{1+e^{2\pi(x+i)}}dx = -e^{2\pi ai}\int_{-R}^R \frac{e^{2\pi ax}}{1+e^{2\pi x}}dx$ である．よって $\int_{\gamma_R} f(z)dz = (1-e^{2\pi ai})\int_{-R}^R f(z)dz + \int_{J_R^+} f(z)dz - \int_{J_R^-} f(z)dz$ である．すなわち $R\to\infty$ で $-ie^{a\pi i} = (1-e^{2\pi ai})\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$ である．よって $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \frac{-ie^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}} = \frac{-i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}} = \frac{1}{2\sin a\pi}$ である．

0.14 H28 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|x| \leq \frac{1}{2}$ なら $5-1/(1+x)^2>0$ である．よって $0<\int_0^x 5-1/(1+t)^2dt = 5x+1/(1+x)-1$ である．よって $0<\int_0^x 5t+1/(1+t)-1dt = 5x^2/2+\log(1+x)-x$ である．よって $-5x^2/2<\log(1+x)-x$ である．

また $5+1/(1+x)^2>0$ である．よって $0<\int_0^x 5+1/(1+t)^2dt = 5x-1/(1+x)+1$ である．よって $0<\int_0^x 5t-1/(1+t)+1dt = 5x^2/2-\log(1+x)+x$ である．よって $5x^2/2>\log(1+x)-x$ である．

すなわち $|\log(1+x)-x|<5x^2/2$ である．

(2)$\sum a_k$ が収束するから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば，$a_n<1/2$ である．無限積の収束性は $k=N$ からの無限積の収束性と同じ．また (1) より $|\log(1+x)| \leq Cx^2+x$ である．log の連続性から

$$\log\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^n(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=N}^n(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n\log(1+a_k)$$

である．

絶対級数 $\sum|\log(1+a_k)|$ の収束性を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n|\log(1+a_k)| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n Ca_k^2+a_k = C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n a_k^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^n a_k$$

右辺は収束するから，$\sum\log(1+a_k)$ は絶対収束する．よって収束するので，$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^n(1+a_k)$ は収束する．

(3)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ と $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2$ の収束を示せばよい．$S_n=\sum\limits_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{3k+1}$ とする．$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^n\left(\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1}>0$ より S_{2n} は単調増加する．同様に $S_{2n+1}=1/4-\sum\limits_{k=1}^n\left(\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1}>0$ より S_{2n+1} は単調減少する．$S_{2n+1}-S_{2n}=1/(3(2n+1)+1)$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}-S_{2n}=0$ である．また $S_{2n+1}=1/(3(2n+1)+1)+S_n>0$ より S_{2n+1} は有界な単調数列であるから収束する．したがって S_{2n} も収束して $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$ である．よって $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ は収束する．

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^2}<\frac{1}{9}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$ である．ともに収束するから無限積も収束する．

$\boxed{2}$ (1)$y\in f_A(W^\perp)$ を任意にとる．ある $x\in W^\perp$ が存在して $y=f_A(x)$ である．任意の $u\in W$ について $(u,y)={}^t uAx={}^t({}^tAu)x=({}^tAu,x)=(f_A(u),x)=0$ である．よって $y\in W^\perp$ である．

A の固有値 $\lambda\in\mathbb{C}$ と固有ベクトル $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ をとる．$x,y\in\mathbb{C}^n$ について標準エルミート内積 $(x,y)={}^t x\overline{y}$ を定める．$\lambda(v,v)=(Av,v)=(v,\overline{{}^tA}v)=(v,\overline{\lambda}v)=\overline{\lambda}(v,v)$ である．$(v,v)>0$ より $\lambda=\overline{\lambda}$ である．よって $\lambda\in\mathbb{R}$ である．

(2)A の固有空間全ての直和を W とする．$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ である．$f_A(W) \subset W$ となるから，$f_A|_{W^\perp}\colon W^\perp \to W^\perp$ を得る．$\mathbb{C}$ による定数倍を加えることで $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}$ 上線形空間 $\mathbb{C}^n$ に拡張する．$W, W^\perp$ も同様に $\overline{W}, \overline{W^\perp}$ に拡張する．$f_A|_{W^\perp}$ は $\overline{W^\perp}$ 上の線形変換に拡張できる．$W^\perp \neq \{0\}$ なら $f_A|_{\overline{W^\perp}}$ の固有値 λ と固有ベクトル $v \neq 0$ をとれる．$u = 0 + v \in \overline{W} \oplus \overline{W^\perp}$ とする．$Au = \lambda u$ である．λ は f_A の固有値であるから $\lambda \in \mathbb{R}$ である．よって $u \in \mathbb{R}^n$ としてよい．$u \in W^\perp$ となるがこれは W の定義に矛盾．よって $W^\perp = \{0\}$.

f_A の固有値 λ と固有ベクトル x について $\mathrm{Span}\{x\} = \mathrm{Span}\{x\}^{\perp\perp}$ であり，任意の $y \in \mathrm{Span}\{x\}^\perp$ について $(y, {}^tAx) = (Ay, x) = 0$ より ${}^tAx \in \mathrm{Span}\{x\}$ である．よって ${}^tAx = \mu x$ とできる．$\lambda(x,x) = (Ax,x) = (x, {}^tAx) = (x, \mu x) = \mu(x,x)$ である．$(x,x) > 0$ より $\lambda = \mu$ である．

$\mathbb{R}^n$ の任意の元 x は固有ベクトル $v_1, \ldots, v_n$ の線形結合で表せる．$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ とする．$Ax = \sum_{i=1}^n a_i A v_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i = {}^t Ax$ である．よって $A = {}^t A$ である．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x, y \in [0,1]^\infty$ に対して $|x_k - y_k| \leq 1$ である．よって $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ である．よって d は $[0,1]^\infty \times [0,1]^\infty$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

$x = y$ なら $d(x,y) = 0$ である．また $d(x,y) = 0$ なら $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k| = 0$ であるから $x_k = y_k$ である．よって $d(x,y) = 0$ なら $x = y$ である．$d(x,y) = d(y,x)$ は明らか.

x, y, z について $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}|x_k - z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}|x_k - y_k| + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}|y_k - z_k|$ である．$n \to \infty$ とすると $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - z_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k - z_k|$ である．よって $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ である．

よって d は距離.

(2)$x_n \to a$ とする．$d(x_n, a) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_{n,k} - a_k| \geq 2^{-i}|x_{n,i} - a_i| \to 0 \quad (n \to \infty)$ である．よって任意の k に対して $x_{n,k} \to a_k$.

任意の k に対して $x_{n,k} \to a_k$ とする．任意の ε に対して $2^{1-n_0} \leq \varepsilon$ なる n_0 が存在する．このとき $\sum_{k=n_0}^{\infty} 2^{-k}|x_{n,k} - a_k| \leq 2^{1-n_0} \leq \varepsilon$ である．1 から $n_0 - 1$ までの整数 k について，ある N_k が存在して $n \geq N_k$ なら $|x_{n,k} - a_k| \leq \varepsilon$ である．$N = \max\{N_1, \ldots, N_{n_0-1}\}$ とする．このとき $\sum_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k}|x_{n,k} - a_k| \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k}\varepsilon \leq 2\varepsilon$ である．よって $n \geq N$ なら $d(x_n, a) \leq 3\varepsilon$ であるから $x_n \to a$ である．

(3)$\{x_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ は有界閉区間 $[0,1]$ 内の点列であるから，収束部分列を必ずもつ．したがって収束部分列 $\{x_{n,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^\infty$ に対して数列 $\{x_{n+1,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^\infty$ も収束部分列 $\{x_{n+1,k_j^{(n+1)}}\}_{j=1}^\infty$ を持つ．このとき $\{k_j^{(n+1)}\}_{j=1}^\infty$ は $\{k_j^{(n)}\}_{j=1}^\infty$ の部分列である．これが任意の n について成り立つから数列 $\{k_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty, \{k_j^{(2)}\}_{j=1}^\infty, \ldots$ を得て，それぞれ前の数列の部分列となっている．数列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ を $s_n = k_n^{(n)}$ で定める．$\{s_n\}_{n=1}^\infty$ は全ての m について $n > m$ では $\{k_j^{(m)}\}_{j=1}^\infty$ の部分列となっている．したがって $\{x_{s_n,k}\}_{n=1}^\infty$ は収束列になっている．よって $\{x_{s_n}\}_{n=1}^\infty$ は収束列である．

$\boxed{4}$ (1)$z = re^{i\theta}$ とする．

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{ire^{i\theta}} ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi ie^{ire^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi ie^{ir\cos\theta} e^{-r\sin\theta} d\theta$$
$$\int_{C_r} \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| dz = \int_0^\pi \left|e^{-r\sin\theta}\right| d\theta \leq \int_0^\pi d\theta = \pi$$

である．よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi i d\theta = \pi i, \quad \lim_{r\to\infty} \left|\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz\right| \leq \lim_{r\to\infty} \int_0^\pi \left|e^{-r\sin\theta}\right| d\theta = \int_0^\pi 0 d\theta = 0$$

(2)

$r > \varepsilon > 0$ に対して $z = \varepsilon$ から $z = r$ までの積分経路を $\Gamma_{\varepsilon,r}^+$ とする．$z = -r$ から $z = -\varepsilon$ までの積分経路を

$\Gamma^-_{\varepsilon,r}$ とする．

$$\int_{\Gamma^+_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_\varepsilon^r \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_\varepsilon^r \frac{\cos x + i\sin x}{x}dx$$
$$\int_{\Gamma^-_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_r^\varepsilon -\frac{\cos x - i\sin x}{-x}dx = \int_\varepsilon^r \frac{-\cos x + i\sin x}{x}dx$$

である．積分経路 $\Gamma^+_{\varepsilon,r}, C_r, \Gamma^-_{\varepsilon,r}, -C_\varepsilon$ によってできる閉曲線 Γ を考えると，被積分関数は原点を除いて正則であるから，$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$ である．よって

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Gamma^+_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\Gamma^-_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz \\ &= \int_\varepsilon^r \frac{\cos x + i\sin x}{x}dx + \int_\varepsilon^r \frac{-\cos x + i\sin x}{x}dx + I(r) - I(\varepsilon) \\ &= 2i\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x}dx + I(r) - I(\varepsilon) \to 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx - \pi i \quad (r\to\infty)\end{aligned}$$

したがって $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$ である．

0.15 H29 数学 A

$\boxed{1}$ (1) $\sum_{k=1}^n |a_n|$ は n に関する単調増加数列であり，$\sum_{k=1}^n |a_n| \le \sum_{k=1}^\infty b_n$ より，有界である．よって $\sum |a_n|$ は収束する．したがって $\sum_{k=1}^n |a_n|$ はコーシー列である．

$S_n = \sum_{k=1}^n a_n$ とすると，$n \ge m$ に対して $|S_n - S_m| = |\sum_{k=m+1}^n a_n| \le \sum_{k=m+1}^n |a_n| \to 0 \quad (n, m\to\infty)$ である．よって S_n はコーシー列であるから，収束列．

(2) $x \in (0,1)$ で $|f(x)| < x$ より $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ である．$x = 0$ なら $\sum_{n=1}^\infty f(2^n x) = 0$ である．$0 < x < 1/2$ のとき．$2^{n_0}x \le 1 < 2^{n_0+1}x$ となる正の整数 n_0 が存在する．$\sum_{n=1}^{n_0} |f(2^n x)| \le \sum_{n=1}^{n_0} 2^n x = x(2^{n_0+1} - 2) \le 2$ である．また $\sum_{n=n_0+1}^\infty |f(2^n x)| \le \sum_{n=n_0+1}^\infty 1/(2^n x) = 1/(2^{n_0}x) \le 2$ である．よって $\sum_{n=1}^\infty |f(2^n x)| \le 4$ であるから $\sum_{n=1}^\infty f(2^n x)$ は収束する．

(3) $\sup_{x\in[0,\infty)} |\sum_{n=1}^\infty f(2^n x)| \le 4$ である．

$\boxed{2}$ (1) A は正則であるから $\det A \ne 0$ である．$\det A = \det(-{}^tA) = (-1)^n \det A$ であるから n は偶数である．

(2) $\mathbb{C}^n$ における標準エルミート内積を $(x, y) = x{}^t\overline{y}$ で表す．A の固有値 λ とその固有ベクトル $v \ne 0$ をとる．$\lambda(v,v) = (Av, v) = (v, \overline{{}^tA}v) = (v, -Av) = -\overline{\lambda}(v,v)$ である．$v \ne 0$ より $(v,v) \ne 0$ であるから $\lambda = -\overline{\lambda}$ より λ の実部は 0．よって λ は純虚数である．

(3) $v \in W(B,\alpha)$ に対して $BAv = ABv = \alpha Av$ より $Av \in W(B,\alpha)$ である．よって $W(B,\alpha) \to W(B,\alpha); v \mapsto Av$ は $W(B,\alpha)$ 上の線形写像である．A は正則であるからこの線形写像は単射．有限次元であるから全単射であるから $AW(B,\alpha) = W(B,\alpha)$ である．

(4) $i\colon W(B,\alpha) \to \mathbb{R}^n$ を包含写像とする．$g\colon W(B,\alpha) \to W(B,\alpha); v \mapsto Av$ は $W(B,\alpha)$ 上の同型写像である．$\mathbb{R}^n$ の標準内積に関する $W(B,\alpha)$ の正規直交基底 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ を一つ固定し，この基底に関する g の表現行列を G とする．$v \in W(B,\alpha)$ に対して $i(Gv) = Ai(v)$ である．

$x = \sum a_i v_i, y = \sum b_i v_i$ に対して $\langle x, y\rangle = \sum a_i b_i$ と定めれば $W(B,\alpha)$ の内積となり，$\langle x,y\rangle = (i(x), i(y))$ である．($\because$ 基底が正規直交基底)

よって $\langle Gx, y\rangle = (i(Gx), i(y)) = (Ai(x), i(y)) = -(i(x), Ai(y)) = -\langle x, Gy\rangle$ である．よって G は正則な交代行列．したがって k は偶数．B が対称行列であるから，固有空間の次元は固有値の固有方程式における重複度である．したがって全ての固有値の重複度が偶数であるから，$g_B(t) = f(t)^2$ なら $f(t)$ が存在する．

$\langle x,y\rangle = (i(x),i(y))$ の証明

$v_i = \sum c_{i,j}e_j$ とする．$(i(x),i(y)) = \sum_j(\sum_i a_i c_{i,j})(\sum_k b_k c_{k,j}) = \sum_{i,j,k} a_i b_k c_{i,j} c_{k,j} = \sum_{i,k} a_i b_k (v_i,v_j) = \sum_{i,k} a_i b_k \delta_{i,k} = \sum_i a_i b_i = \langle x,y\rangle$ である．

別解

$W = W(B,\alpha)$ の基底 $\{t_1,\dots,t_k\}$ をとり，$\mathbb{R}^{\ltimes}$ に延長して $\{t_1,\dots,t_n\}$ を得る．シュミットの正規直交化法をつかって $\{\tilde{t_1},\dots,\tilde{t_n}\}$ を得る．k 個目までは W の元である．g の $\{\tilde{t_1},\dots,\tilde{t_k}\}$ に関する表現行列を G とする．f の $\{\tilde{t_1},\dots,\tilde{t_n}\}$ に関する表現行列を F とする．G は F の首座小行列である．$\tilde{T} = \begin{pmatrix}\tilde{t_1} & \dots & \tilde{t_n}\end{pmatrix}$ とすれば，$F = \tilde{T}^{-1}AT$ である．T は直交行列であるから F は交代行列．よって G は交代行列．(1) より k は偶数．

$\boxed{3}$ X の開集合全体を $\mathcal{O}$ とすると，$\mathcal{O} = 2^{\mathbb{Q}} \cup \{\mathbb{R}\}$ である．実際これは位相の定義をみたす．

(1)$A \in 2^{\mathbb{Q}}$ に対して $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \in A \subset \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}$ である．また $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ であるから，f は連続．

(2)$\sqrt{2}$ を含む開集合は $\mathbb{R}$ のみである．$\sqrt{3}$ についても同様．よってハウスドルフでない．

(3)X の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{O}\}$ を任意にとる．$\sqrt{2}$ を含む開集合が S に存在する．$\sqrt{2}$ を含む開集合は $\mathbb{R}$ のみであるから，$\mathbb{R} \in S$ である．よって有限部分被覆 $\{\mathbb{R}\}$ が存在するからコンパクト．

(4)$f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$ である．$\{0\}$ は R では閉集合であるから，f が連続なら $\mathbb{Q}$ は X で閉集合である．すなわち，$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は X で開集合であるがこれは矛盾．よって f は連続でない．

$\boxed{4}$ (1)$1/(z^2+1)^{n+1}$ の $z = i$ まわりのローラン展開を $\sum_k a_k(z-i)^k$ とする．$1/(z+i)^{n+1} = \sum_k a_k(z-i)^{k+n+1}$ であるから，$k+n+1 < 0$ なら $a_k = 0$ である．両辺の n 回微分に i を代入する．左辺は $(-(n+1))(-(n+2))\dots(-(2n))(2i)^{-2n-1} = (-1)^n(2i)^{-2n-1}(2n)!/n!$ である．右辺は $a_{-1}n!$ であるから，$a_{-1} = (-1)^n(2i)^{-2n-1}(2n)!/(n!)^2$ である．これが留数．

(2)

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}}\right| = \left|\int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}}dz\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{R}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}}\right|dz \le \int_0^\pi \frac{R}{|R^2-1|^{n+1}}dz = \frac{\pi R}{|R^2-1|^{n+1}} \to 0 \quad (R \to \infty$$

(3)$\int_{-1}^1 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ は有限値をとる．$\int_1^\infty 1/(x^2+1)^{n+1}dx, \int_{-\infty}^{-1} 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ はそれぞれ収束する．よって $\int_{-\infty}^\infty 1/(x^2+1)^{n+1}dx$ は収束する．$\int_{-R}^R 1/(z^2+1)^{n+1}dz = \int_{C_R} 1/(z^2+1)^{n+1}dz - \int_{\Gamma_R} 1/(z^2+1)^{n+1}dz$ である．(C_R は $-R$ から R まで進み G_R 上を反時計まわりに進む経路) 留数定理と (2) より

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = 2\pi i\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2(2i)^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\pi = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\pi$$

0.16 H30 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$f(X)$ が連結でないと仮定する．このとき，$f(X) \subset U \cup V$ なる Y の開集合 U,V で $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ かつ $U \cap f(X) \neq \emptyset, V \cap f(X) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する．$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = X$ であり，$f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は X の開集合である．$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = \emptyset$ で，$f^{-1}(U) \neq \emptyset, f^{-1}(V) \neq \emptyset$ であるから，X は連結でない．これは矛盾．よって，$f(X)$ は連結である．

(2)$Y = \{0,1\}$ で Y に密着位相をいれる．$X = \{0,1\}$ で X に離散位相をいれる．このとき $f(x) = x$ は連続であり，X はハウスドルフ空間である．しかし $Y = f(X)$ はハウスドルフ空間でない．

(3)$f(X)$ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$T = \{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆である．X はコンパクトであるから，T の有限部分集合 $\{f^{-1}(U_{\lambda_i})\}_{i=1}^n$ が存在して，$X = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i})$ となる．$f(X) = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ であり，$f(X)$ はコンパクトである．

$\boxed{2}$ (1)$f^d(V) = V^d$ とする．$V^{d+1} = f^{d+1}(V) = f^d(f(V)) \subset f^d(V) = V^d$ である．よって，ベクトル空間の降下列 $V = V^0 \supset V^1 \supset \dots \supset V^n \supset \cdots$ が定まる．f^d が零写像であるから $V^d = 0$ である．降下列であるから

次元は単調減少する．$V^{i-1}=V^i$ なる i が存在したとき，$V^{i+1}=f^{i+1}(V)=f(V^i)=f(V^{i-1})=V^i$ となるから，以降すべて等しい．よって次元は小さくなり続けたのち，ある次元で以降不変になる．

$f^d=0$ より，$V^d=0=V^{d+1}$ である．また $f^{d-1}\neq 0$ より $V^{d-1}\neq 0$ である．すなわち V^d までは次元は小さくなり続ける．$\dim V=n$ より $d\leq n$ である．

(2)$v\in \mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)$ について，ある $w\in V$ が存在して $f(w)=v$ である．$0=f(v)=f(f(w))=f(w)=v$ であるから，$\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)=\{0\}$ である．

(3) 求める最大元は $m:=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ である．ただし，$\lfloor x\rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す．

V の基底を $\{v_1,\cdots,v_n\}$ とする．$g(v_i)=\begin{cases}0 & (i\leq m)\\ v_{i-m} & (i>m)\end{cases}$ とする．g は線形写像である．$\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_{n-m}\}$ であり，$\ker(g)=\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_m\}$ である．m の定義から $m\leq n-m$ であるから，$\dim(\mathrm{Im}(g)\cap\ker(g))=\dim\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_m\}=m$ である．よって $m\in A$ である．

次元定理より $f\colon V\to V$ に対して $n=\dim V=\dim\mathrm{Im}(f)+\dim\ker(f)$ である．よって $\dim(\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f))\leq\min\{\dim\mathrm{Im}(f),\dim\ker(f)\}\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ である．

よって $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ は A の上界である．よって m は求める最大元である．

$\boxed{3}$ (1)$2-\cos x>0$ より $0\leq\int_0^x 2-\cos t dt=2x-\sin x$ である．よって $0\leq\int_0^x 2t-\sin t dt=x^2+\cos x-1$ である．よって $0\leq\int_0^x t^2+\cos t-1dt=\frac{1}{3}x^3+\sin x-x$ である．

よって $f_n(x)=n^{p+1}(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n})\leq n^{p+1}(\frac{1}{3}(\frac{x}{n})^3)=\frac{x^3}{3n^{2-p}}$ である．$p<2$ なら $0<2-p$ より $n\to\infty$ で $f_n(x)\to 0$ である．

(2) 任意の有界閉区間 I について，$^\forall x\in I,|x|\leq M$ とできる $M>0$ が存在する．$S_n(x)=\sum_{k=1}^n f_n(x)$ が一様コーシー列であることを示す．$n>m$ に対して $|S_n(x)-S_m(x)|=|\sum_{k=m+1}^n f_k(x)|\leq\sum_{k=m+1}^n|f_k(x)|\leq\sum_{k=m+1}^n\frac{M^3}{3k^{2-p}}=\frac{M^3}{3}\sum_{k=m+1}^n k^{p-2}$ である．$p<1$ より $p-2<-1$ であるから，$\sum_{k=m+1}^n k^{p-2}\leq\sum_{k=m+1}^n\int_{k-1}^k t^{p-2}dt=\int_m^n t^{p-2}dt=\frac{1}{p-1}(n^{p-1}-m^{p-1})\to 0\quad(n,m\to\infty)$ である．よって一様コーシー列であるから，一様収束する．

(3)$|x|<\pi/6$ のとき，$\cos x-\frac{1}{2}\geq 0$ である．よって $0\leq\int_0^x\cos t-\frac{1}{2}dt=\sin x-\frac{x}{2}$ である．よって $0\leq\int_0^x\sin t-\frac{t}{2}dt=-\cos x-\frac{x^2}{4}+1$ である．よって $0\leq\int_0^x-\cos t-\frac{t^2}{4}+1dt=-\sin x-\frac{x^3}{12}+x$ である．すなわち $\frac{x^3}{12}\leq x-\sin x\quad(|x|<\pi/6)$ である．

よってある x に対して $\frac{x}{n}<\frac{\pi}{6}$ なる n について $f_n(x)=n^{p+1}(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n})\geq\frac{x^3}{12n^{2-p}}$ である．すなわち $p>2$ なら $n\to\infty$ で $f_n(x)\to\infty$ である．

$p<2$ のとき (1) より $f(x)=0$ に各点収束する．$x=n\pi/2$ とすると，$f(n\pi/2)=0,f_n(n\pi/2)=n^{p+1}(\frac{\pi}{2}-1)$ であるから，$\mathbb{R}$ 上で一様収束しない．

$p=2$ のとき，各 x について $f_n(x)=n^3(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n})=n^3(\frac{1}{3!}(\frac{x}{n})^3-\frac{1}{5!}(\frac{x}{n})^5+\cdots)\to\frac{x^3}{6}\quad(n\to\infty)$ である．よって $g(x)=\frac{x^3}{6}$ に各点収束する．$g(n\pi/2)=\frac{(n\pi/2)^3}{6}=n^3\frac{\pi^3}{48},f_n(n\pi/2)=n^3(\frac{\pi}{2}-1)$ より一様収束しない．

$\boxed{4}$ (1)

$$\lim_{z\to 0}\frac{ze^{iz}}{e^z-e^{-z}}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}+ize^{iz}}{e^z+e^{-z}}=\frac{1}{2},\qquad\lim_{z\to i\pi}\frac{(z-i\pi)e^{iz}}{e^z-e^{-z}}=\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{iz}+i(z-i\pi)e^{iz}}{e^z+e^{-z}}=-\frac{1}{2e^\pi}$$

である．よって $\mathrm{Res}(f(z),0)=\frac{1}{2},\mathrm{Res}(f(z),i\pi)=-\frac{1}{2e^\pi}$ である．

(2)

$$\left|\int_{\Gamma_R^+}f(z)dz\right|\leq\left|\int_0^\pi\frac{e^{i(R+it)}}{e^{R+it}-e^{-(R+it)}}idt\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{e^{-t}}{e^{R+it}-e^{-(R+it)}}\right|dt\leq\int_0^\pi\frac{e^{-t}}{||e^R|-|e^{-R}||}dt=\frac{1-e^{-\pi}}{e^R-e^{-R}}\to 0\quad(R\to\infty)$$

$$\left|\int_{\Gamma_R^-}f(z)dz\right|\leq\left|\int_0^\pi\frac{e^{i(-R+it)}}{e^{-R+it}-e^{-(-R+it)}}idt\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{e^{-t}}{e^{-R+it}-e^{R-it}}\right|dt\leq\int_0^\pi\frac{e^{-t}}{||e^{-R}|-|e^R||}dt=\frac{1-e^{-\pi}}{e^R-e^{-R}}\to 0\quad(R\to\infty)$$

(3)

図のように積分経路 $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ とそれらをつなげてできる閉曲線 C を定める．C 内で f は正則であるから $\int_C f(z)dz = 0$ である．

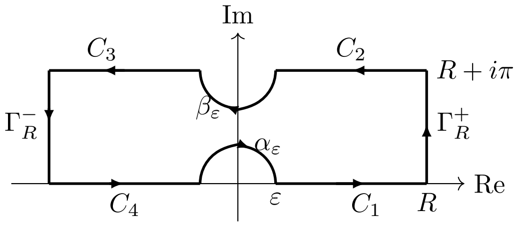


図 1　積分経路の図

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$

$$\int_{C_4} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{e^x - e^{-x}}dx = \int_R^\varepsilon -\frac{e^{i(-x)}}{e^{-x} - e^x}dx = \int_\varepsilon^R \frac{-\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_R^\varepsilon \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}}dx = e^{-\pi}\int_R^\varepsilon \frac{e^{ix}}{-e^x + e^{-x}}dx = e^{-\pi}\int_\varepsilon^R \frac{\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} - e^{-(x+i\pi)}}dx = -e^{-\pi}\int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{e^x - e^{-x}}dx = e^{-\pi}\int_\varepsilon^R \frac{-\cos x + i\sin x}{e^x - e^{-x}}dx$$

である．$z = 0, z = i\pi$ は f の一位の極であるから，

$$\int_{\alpha_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\alpha_\varepsilon} f(z) - \frac{1}{2z}dz + \int_\pi^0 \frac{1}{2\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = -\frac{i\pi}{2}, \int_{\beta_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\beta_\varepsilon} f(z) + \frac{1}{2e^\pi z}dz + \int_0^{-\pi} -\frac{1}{2e^\pi \varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = \frac{i\pi}{2e^\pi}$$

である．よって $0 = \int_C f(z)dz = 2i(1+e^{-\pi})\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}dx + \frac{i\pi}{2}(-1+e^{-\pi}) + \int_{\gamma_R^+} f(z)dz + \int_{\gamma_R^-} f(z)dz$ である．
$R \to \infty, \varepsilon \to 0$ とすると，$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}dx = -\frac{\pi(e^{-\pi}-1)}{4(e^{-\pi}+1)}$ である．