0.1 H23 数学 A

$\boxed{1}$ (1)V の基底として $\{1, x+1, (x+1)^2\}$ をとる．$F(1)=0, F(x)=x+1, F((x+1)^2)=2(x+1)^2$ であるから F の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(2)G の表現行列を $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とし，F の表現行列を A とする．$G\circ F = F\circ G$ は $AB=BA$ と同値である．よって $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 2b_{31} & 2b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 2b_{13} \\ 0 & b_{22} & 2b_{23} \\ 0 & b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix}$ であるから，$b_{12}=b_{13}=b_{21}=b_{31}=b_{23}=b_{32}=0$ である．したがって $B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ である．よって M の次元は 3 である．

$\boxed{2}$ (1)$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $|f_N(x)-f(x)|<1$ である．f_N は有界であるから $f_N(x)\le M$ とするとよって $|f(x)|\le 1+|f_N(x)|<1+M$ である．よって f は有界.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して一様収束性から，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n,m>N$ なら $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, |f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ である．この n,m に対してある $M(n)>0$ が存在して $x>M(n)$ なら $|a_n-f_n(x)|<\varepsilon$ であり，またある $M(m)>0$ が存在して $x>M(m)$ なら $|a_m-f_m(x)|<\varepsilon$ である．$|a_n-a_m|\le|a_n-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-a_m|$ であるから $x>M(n)+M(m)$ をとることで $|a_n-a_m|<4\varepsilon$ である．すなわち $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N_1$ なら $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ である．またある $N_2\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N_2$ なら $|a_n-A|<\varepsilon$ である．$N=N_1+N_2$ とする．ある $M>0$ が存在して $x>M$ なら $|f_N(x)-a_n|<\varepsilon$ である．よって $|f(x)-A|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-a_n|+|a_n-A|<3\varepsilon$ となる．

$\boxed{3}$ (1)$(a,b)\notin G$ を任意にとる．$b\neq f(a)$ と Y がハウスドルフ空間であることから開集合 U,V が存在して $f(a)\in U, b\in V, U\cap V=\emptyset$ である．$(a,b)\in f^{-1}(U)\times V$ である．ある $(x,y)\in f^{-1}(U)\times V$ について $f(x)=y$ と仮定する．$f(x)\in U, y\in V$ であるから $y\in U\cap V$ となり矛盾．よって $f^{-1}(U)\times V\cap G=\emptyset$ である．$f^{-1}(U)\times V$ は開集合であるから G は閉集合.

(2)$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ 1/x & (x>0) \end{cases}$ とする．f は連続でないが G は閉集合である．

$\boxed{4}$ (1)$|e^{iz}|=|\exp(ire^{it})|=|\exp(-r\sin t+ir\cos t)|=|\exp(-r\sin t)|\le 1$ である．よって $|\int_{C_r}f(z)dz|\le\int_{C_r}|\frac{2}{z^2}|dz=2\int_0^{\pi}|\frac{1}{r}|dt=2\pi\frac{1}{r}\to 0 \quad (r\to\infty)$ である．

$(1-e^{iz})/z^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-2}z^{n-2}$ である．よって $\int_{C_r}f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-2}\int_{C_r}z^{n-2}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^{n-1}\int_0^{\pi}r^{n-1}e^{i(n-1)t}dt$ である．$n=1$ の項については $\int_0^{\pi}dt=\pi$ である．$n\ge 2$ なら $|\int_0^{\pi}r^{n-1}e^{i(n-1)t}dt|\le\int_0^{\pi}r^{n-1}dt\to 0 \quad (r\to 0)$ である．よって $\int_{C_r}f(z)dz\to\pi \quad (r\to 0)$ である．

(2) 曲線 $\alpha_{\varepsilon,r}$ を $z=x \quad (-r\le x\le-\varepsilon)$ とする．$\int_{\alpha_{\varepsilon,r}}f(z)dz=\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-e^{-ix}}{x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-\cos x}{x^2}dx+i\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x^2}dx$ である．

曲線 $\beta_{\varepsilon,r}$ を $z=x \quad (\varepsilon\le x\le r)$ とする．$\int_{\beta_{\varepsilon,r}}f(z)dz=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-\cos x}{x^2}dx-i\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x^2}dx$ である．

$C_\varepsilon, \beta_{\varepsilon,r}, C_r, \alpha_{\varepsilon,r}$ をつないでできる積分曲線を C とすると，C の内部で f は正則であるから $\int_C f(z)dz=0$ である．よって $\int_{-C_\varepsilon}f(z)dz+\int_{\beta_{\varepsilon,r}}f(z)dz+\int_{C_r}f(z)dz+\int_{\alpha_{\varepsilon,r}}f(z)dz=0$ である．$\varepsilon\to 0, r\to\infty$ とすると

$2\int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-\cos x}{x^2}dx - \pi \to 0$ であるから $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ である.