0.1 H31 数学 A

$\boxed{1}$ (1) ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall n \geq N, {}^\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ である．また f_N は連続であるから，${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0, {}^\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ である．以上より，${}^\forall x_* \in \mathbb{R}, {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_*)| + |f_N(x_*) - f(x_*)| < 3\varepsilon$ であるから，f は連続である．

(2)$a \geq x > 0$ のとき，平均値の定理から $u\left(\frac{x}{n}\right) - u(0) = \frac{x}{n}u'(\alpha_n), u(-\frac{x}{n}) - u(0) = -\frac{x}{n}u'(\beta_n)$ となる $-\frac{x}{n} < \beta_n < 0 < \alpha_n < \frac{x}{n}$ が存在する．よって $u_n(x) = \frac{x}{n}(u'(\alpha_n) - u'(\beta_n))$ である．平均値の定理から $u'(\alpha_n) - u'(\beta_n) = u''(\gamma_n)(\alpha_n - \beta_n)$ となる $-\frac{x}{n} < \beta_n < \gamma_n < \alpha_n < \frac{x}{n}$ が存在する．よって $u_n(x) = \frac{x}{n}(u''(\gamma_n)(\alpha_n - \beta_n))$ である．$\alpha_n - \beta_n \leq \frac{2x}{n}$ であり，また u'' は $[-a, a]$ 上連続であるから，有界である．よって ${}^\forall n, u''(\gamma_n) < M$ とできる $M > 0$ が存在する．以上より $|u_n(x)| \leq \frac{2x^2}{n}|u''(\gamma_n)| \leq \frac{2a^2M}{n^2}$ である．よって $\sum |f_n(x)| \leq 2a^2M\sum\frac{1}{n^2} < \infty$ である．これは $-a \leq x < 0$ でも成立し，また $x = 0$ なら $u_n(x) = 0$ であるから $x = 0$ でも成立する．ワイエルシュトラスの M 判定法より，$u_n(x)$ は絶対一様収束する．また (1) より収束先の関数は連続である．

$\boxed{2}$ (1)$N^2 \neq O$ より $N^2u \neq 0$ なる $u \in \mathbb{C}^3$ が存在する．この u について $c_1u + c_2Nu + c_3N^2u = 0$ とすると，N^2 を左からかけれ，$c_1N^2u = 0$ より $c_1 = 0$ である．よって N をかければ $c_2N^2u = 0$ より $c_2 = 0$ である．よって $c_3 = 0$ である．よって u, Nu, N^2u は一次独立である．

(2)(1) の $P = \begin{pmatrix} N^2u & Nu & u \end{pmatrix}$ とすれば P は正則で $J := P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

$g\colon V \to V$ を $g(X) = JX - XJ$ とする．$f(PXP^{-1}) = NPXP^{-1} - PXP^{-1}N = Pg(X)P^{-1}$ である．$f^2(PXP^{-1}) = f(Pg(X)P^{-1}) = Pg(g(X))P^{-1} = Pg^2(X)P^{-1}$ である．繰り返して $f^k(PXP^{-1}) = Pg^k(X)P^{-1}$ である．P は正則であるから，$f^k = 0 \Leftrightarrow g^k = 0$ である．また $g^k = 0$ ならば $g^{k+1} = 0$ である．

$g^2(X) = J(JX - XJ) - (JX - XJ)J = J^2X - 2JXJ + XJ^2, g^3(X) = J^2(JX - XJ) - 2J(JX - XJ)J + (JX - XJ)J^2 = -3J(JX - XJ)J, g^4(X) = -3J(J^2 - 2JXJ + XJ^2)J = 6J^2XJ^2, g^5(X) = 6J^2(JX - XJ)J^2 = 0$ である．よって $g^5 = 0$ である．

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $J^2XJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ であるから，$g^4 \neq 0$ である．よって $g^k = 0$ となる最小の k は 5 である．

$\boxed{3}$ (1)$d\colon A \times A \to \mathbb{R}$ が距離関数であるとは次の条件を満たすことである．

(i)${}^\forall x, y \in A, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii)${}^\forall x, y \in A, d(x, y) = d(y, x)$

(iii)${}^\forall x, y, z \in A, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(2) 任意の異なる二点 $x, y \in A$ について $d(x, y) > 0$ である．$\varepsilon = d(x, y)/2$ とすれば，$x \in B(x, \varepsilon) := \{a \in A \mid d(x, a) < \varepsilon\}, y \in B(y, \varepsilon), B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ である．よって A はハウスドルフ空間である．

(3)$x \in A$ を一つ固定する．$S = \{B(x, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は A の開被覆である．コンパクトであるから，有限部分集合 $\{B(x, n_i) \mid i = 1, \cdots, m\}$ が存在して，$A \subset \bigcup_{i=1}^m B(x, n_i)$ となる．$n = \max_{i=1,\cdots,m} n_i$ とすれば $A \subset B(x, n)$ である．したがって任意の二点 $y, z \in A$ について $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < 2n$ である．

(4)$x \in U_{x,y}, y \in V_{x,y}, U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ となる開集合対 $(U_{x,y}, V_{x,y})$ を各 $(x, y) \in C_1 \times C_2$ ごとに定める．

$S_y = \{U_{x,y} \mid x \in C_1\}$ は C_1 の開被覆であるから，有限部分集合 $C_{1,y} \subset C_1$ が存在して，$S'_y =$

$\{U_{x,y} \mid x \in C_{1,y}\}$ が C_1 の開被覆となる．また $V_y = \bigcap_{x\in C_{1,y}} V_{x,y}$ とする．有限個の共通部分であるから V_y は開集合である．

$T = \{V_y \mid y \in C_2\}$ は C_2 の開被覆であるから，有限部分集合 $C_2' \subset C_2$ が存在して，$T' = \{V_y \mid y \in C_2'\}$ が C_2 の開被覆となる．$U = \bigcap\limits_{y\in C_2'} (\bigcup\limits_{S_y'} U_{x,y}), V = \bigcup\limits_{y\in C_2'} V_y$ とする．C_2' は有限集合であるから，U, V は開集合である．

S_y' は C_1 の開被覆であるから，$C_1 \subset U$ であり，また $C_2 \subset V$ も明らか．$z \in U \cap V$ とすると，ある $y' \in C_2'$ について $z \in V_{y'} \subset V_{x,y'} \quad ({}^\forall x \in C_{1,y'})$ である．また $z \in U$ より ${}^\forall y \in C_2'$ について $z \in \bigcup\limits_{S_y'} U_{x,y}$ である．とくに $z \in \bigcup\limits_{S_{y'}'} U_{x,y'}$ である．したがってある $x' \in C_{1,y'}$ について $z \in U_{x',y'}$ である．よって $z \in U_{x',y'} \cap V_{x',y'}$ となり矛盾．よって $U \cap V = \emptyset$ である．

$\boxed{4}$ (1)$zf(z)$ は $z=0$ で正則であるから，$z=0$ は f の一位の極である．よって $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = \frac{1}{a^2}$ より主要部は $\frac{1}{a^2 z}$ である．

(2)$f(z) - \frac{1}{a^2 z}$ は原点近傍で有界である．よって $\int_{C_r} f(z) - \frac{1}{a^2 z} dz \to 0 \quad (r \to 0)$ である．よって $\lim\limits_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)dz = \lim\limits_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{1}{a^2 z} dz = \lim\limits_{r\to 0} \int_0^\pi \frac{1}{a^2 re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = \frac{i\pi}{a^2}$ である．

$$\left| \int_{C_r} f(z)dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\exp\bigl(ie^{i\theta}\bigr)}{re^{i\theta}(r^2e^{2i\theta}+a^2)} rie^{i\theta} d\theta \right| \le \int_0^\pi \left| \frac{\exp(-\sin\theta)}{(r^2e^{2i\theta}+a^2)} \right| d\theta \le \int_0^\pi \frac{1}{|r^2-a^2|} d\theta = \frac{\pi}{|r^2-a^2|} \to 0 \quad (r \to \infty)$$

(3)$D_{r,R}$ の内部に f は $z = ia$ を特異点にもち，$z = ia$ を除いて f は $D_{r,R}$ で正則であるから留数定理より $\int_{\partial D_{r,R}} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia)$ である．$\lim\limits_{z\to ia} (z-ia)f(z) = \frac{e^{iia}}{ia(ia+ia)} = -\frac{1}{2a^2e^a}$ より $\int_{\partial D_{r,R}} f(z)dz = -\frac{\pi i e^{-a}}{a^2}$ である．

(4)$\partial D_{r,R}$ と実軸の正の部分との共通部分を α_1，負の部分との共通部分を α_2 とする．向きは $\partial D_{r,R}$ と同じ向きを入れる．$\int_{\alpha_1} f(z)dz = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)} dx = \int_r^R \frac{\cos x + i\sin x}{x(x^2+a^2)} dx$ である．また $\int_{\alpha_2} f(z)dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)} dx = \int_R^r \frac{e^{-ix}}{-x(x^2+a^2)} (-1) dx = \int_r^R \frac{-\cos x + i\sin x}{x(x^2+a^2)} dx$ である．よって

$$\begin{aligned} -\frac{\pi i e^{-a}}{a^2} &= \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_{\partial D_{r,R}} f(z)dz = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \left(\int_{-C_r} f(z)dz + \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz \right) \\ &= -\frac{i\pi}{a^2} + \lim_{r\to 0, R\to\infty} \left(\int_r^R \frac{2i\sin x}{x(x^2+a^2)} dx \right) = -\frac{i\pi}{a^2} + 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-a})$$