0.1　H24 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h24.pdf

$\boxed{1}$ (1)$\begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ -a & 1 & -a \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 1-a & 1-a & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1+a & -a & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1+a & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2(1+a+a) = (a-1)^2(2a+1)$

(2)$a=1$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の階数は 1 であるから $\mathrm{rank}A=1$

$a=-1/2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ より階数は 2 であるから $\mathrm{rank}A=2$

$a \neq 1, -1/2$ のとき，A は正則だから $\mathrm{rank}A=3$

(3)$a=1$ のとき $\ker A$ の次元は 2 であり，基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．

$a=-1/2$ のとき $\ker A$ の次元は 1 であり，基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$a \neq 1, -1/2$ のとき $\ker A$ の次元は 0 である．

(4) 固有方程式 $g_A(t) = (a-(1-t))^2(2a+1-t) = -(t+a-1)^2(t-2a-1)$ より固有値は $-a+1, 2a+1$ である．

(5)A が正定値となる必要十分条件は固有値が全て正であることである．よって $-a+1>0, 2a+1>0$ より $-1/2<a<1$ のとき，A は正定値．

$\boxed{2}$ (1)$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ 極座標変換する．ヤコビアンは $r^2\sin\theta$ であり積分領域は $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi$ である．よって $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^4\sin^3\theta drd\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} -\sin\theta(\cos^2\theta-1)\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = 2\pi[\cos^3\theta/3-\cos\theta]_0^{\pi}\frac{1}{5} = \frac{8\pi}{15}$

(2)$\frac{\partial f}{\partial x} = y(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1)+\frac{xy}{a} = \frac{y^2}{b}+\frac{2xy}{a}-y, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{a}+\frac{2xy}{b}-x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{y}{b}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{x}{a}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{b}+\frac{2x}{a}-1$ である．

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる (x,y) を求める．$\frac{y^2}{b}+\frac{2xy}{a}-y = 0 = \frac{x^2}{a}+\frac{2xy}{b}-x = 0$ である．$x=0$ のとき $y=0, y=b$ であり，$y=0$ のとき $x=0, x=a$ である．$x \neq 0 \neq y$ なら $\frac{y}{b}+\frac{2x}{a}-1=0, \frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1=0$ より $y=\frac{b}{3}, x=\frac{a}{3}$ である．したがって極値点の候補は $(0,0),(0,b),(a,0),(\frac{a}{3},\frac{b}{3})$ である．

ヘッセ行列は $\begin{pmatrix} \frac{2y}{b} & \frac{2y}{b}+\frac{2x}{a}-1 \\ \frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}-1 & \frac{2x}{a} \end{pmatrix}$ である．行列式は $\frac{4xy}{ab}-(\frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}-1)^2 = -\frac{4x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{b^2}+\frac{4x}{a}+\frac{4y}{b}-\frac{4xy}{ab}-1$ である．$(0,0),(0,b),(a,0),(\frac{a}{3},\frac{b}{3})$ での行列式は $-1,-1,-1,\frac{1}{3}$ となる．

よって $(0,0),(0,b),(a,0)$ は鞍点である．$\frac{2y}{b}|_{(\frac{a}{3},\frac{b}{3})} = \frac{2}{3} > 0$ より $(\frac{a}{3},\frac{b}{3})$ は極小値である．

(3)$\tan x$ の 0 でのテイラー展開を考える．tan は奇関数であるから偶数次の係数は 0 である．よって $\tan x = a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^6)$ とできる．$\cos x\tan x = \sin x$ より $(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7))(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^8)) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)$ である．よって $a_1=1, a_3=1/3, a_5=2/15$ である．よって $f(x) = x+x^3/3+2x^5/15$ とすれば $\tan x - f(x) = o(x^6)$ となる．

$\boxed{3}$ (1)$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(2)$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ である．すなわち第二成分の符号が反転するか成分が入れ替わるかの繰り返しが $P \in G$ である．よって $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は G の元によって $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のいずれかに移る．またそれぞれ A, BA, ABA によって移る．すなわちこれが P の行き先全て．

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の移動先の候補は x がどちらの成分にどちらの符号であるかの 4 通りと，y がどちらの符号かの 2 通りの積の 8 通りある．それぞれに対応する G の元を考えれば $G = \{E, A, B, AB, BA, ABA, BAB, ABAB\}$ が分かる．よって $|G| = 8$ である．

(4)$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．$P \in G$ は $\{a_1, \ldots, a_4\}$ の置換を引き起こす．これを $\varphi\colon G \to S_4$ と定める．準同型であることは明らか．$\varphi(P) = \mathrm{id}$ とすると，$Pa_1 = a_1, Pa_2 = a_2$ より $P = E$ であるから単射である．

(5)$G = \langle A, B | A^2 = B^2 = (AB)^4 = E \rangle$ とかけるから G は二面体群 D_4 である．正方形に対する回転と反転による頂点の置換と二面体群は対応する．二面体群の元によって同一視したときの，頂点の並び方は頂点 1 の対角にある頂点の決め方であるから 3 通りある．したがって $G = D_4$ と同型な S_4 の部分群は 3 つある．

$\boxed{4}$ (1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 C がコンパクトであるとは，C の任意の開被覆が有限部分被覆を持つことである．

(2) $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ とき．$C_1 \cap C_2$ の開被覆 $A = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから $X \setminus C_1$ は開集合である．$A \cup X \setminus C_1$ は C_2 の開被覆であり，$X \setminus C_1$ は C_2 を部分集合に持たないから，有限部分集合 $A' \subset A$ が存在して $A' \cup X \setminus C_1$ が C_2 の有限部分被覆となる．よって A' が $C_1 \cap C_2$ の有限部分被覆となる．

$C_1 \cap C_2 = \emptyset$ なら明らかにコンパクト集合．

(3)$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ の開被覆 $A = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．C は閉集合の共通部分だから閉集合である．よって $(X \backslash C) \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$ は C_1 の開被覆であるから有限部分集合 $A' \subset A$ が存在して $C \subset C_1 \subset (X \backslash C) \cup \bigcup_{\lambda \in A'} U_\lambda$ となる．よって $C \subset \bigcup_{\lambda \in A'} U_\lambda$ となるから C はコンパクト集合．