

0.1 H30 数学必修

$$\boxed{1} (1) \det A = \begin{vmatrix} -a^2-1 & a & -1 \\ 1 & -2 & a \\ -a & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1+2a \\ 1-2a & 0 & a-4 \\ -a & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1+2a \\ 1-2a & a-4 \end{vmatrix} = (a-4) + (1-2a)(-1+2a) = -4a^2 + 5a - 5$$

$$(2) J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J = {}^t J \text{ である. よって } J^t A J^{-1} = A \Leftrightarrow {}^t (AJ) = {}^t J^t A = AJ \text{ である. よって } AJ \text{ が}$$

$$\text{対称行列となる } a \text{ を求める. } AJ = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2-1 \\ a & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -a \end{pmatrix} \text{ である. } AJ \text{ が対称行列となるから } -a^2-1 = -2$$

である. よって $a = \pm 1$ である.

$$(3) {}^t A = A \text{ より } a = 1 \text{ である. (i) 固有方程式 } g_A(t) = \begin{vmatrix} -t-2 & 1 & -1 \\ 1 & -2-t & 1 \\ -1 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t-1 & -1-t & 0 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 0 & -1-t & -1-t \end{vmatrix} =$$

$$(-1-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+1)^2(-3-t-1) = -(t+1)^2(t+4) \text{ よって固有値は } -1, -4 \text{ である.}$$

$$(ii) \text{ 固有ベクトルを求める. } -1 \text{ に対しては } A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より固有ベクトル}$$

$$\text{空間の基底として } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ が得られる. 直交化すると } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ が得られる.}$$

$$-4 \text{ に対しては } A + 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より固有ベクトル空間の基底と}$$

$$\text{して } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ が得られる.}$$

$$\text{よって } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすれば } P \text{ は直交行列で } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$(iii) P^{-1} \text{ は } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ より } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ である. } A = {}^t A \text{ より } AJ = {}^t (AJ) = {}^t J^t A = JA \text{ である. よって } (AJ)^{2n} = (AJJA)^n = (A^2)^n = A^{2n} \text{ である. } (AJ)^{2n} = A^{2n} =$$

$$P(P^{-1}AP)^{2n}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2n} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4^{2n} \\ 1 & -1 & -4^{2n} \\ -1 & -1 & 4^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2+4^{2n}) & \frac{1}{3}(1-4^{2n}) & -\frac{1}{3}(1-4^{2n}) \\ \frac{1}{3}(1-4^{2n}) & \frac{1}{3}(2+4^{2n}) & \frac{1}{3}(1-4^{2n}) \\ \frac{1}{3}(-1+4^{2n}) & \frac{1}{3}(1-4^{2n}) & \frac{1}{3}(2+4^{2n}) \end{pmatrix} \text{である.}$$

[2] (1) $2 \in \mathbb{Z}'$ の乗法としての逆元は $1/2 \notin \mathbb{Z}'$ であるから群でない.

(2) $n \in \mathbb{Z}$ の F_7 に置ける同値類を $[n]$ で表す. $[3]^2 = [2], [3]^3 = [6], [3]^4 = [4], [3]^5 = [5], [3]^6 = [1]$ である. よって F_7^\times は巡回群で $[3]$ は生成元である.

(3) 任意の $x \in N \cap H$ と $h \in H$ に対して N が G の正規部分群であるから $h x h^{-1} \in N$ であり, $x \in H$ より $h x h^{-1} \in H$ である. よって $h x h^{-1} \in N \cap H$ であるから正規部分群.

(4) $G = \mathbb{Z}/500\mathbb{Z}$ として一般性を失わない. $500 = 2^2 \cdot 5^3$ である. $0 \leq n < 500$ を満たす整数 n に対して n が 4 の倍数なら位数は 2 と互いに素である. これは $n = 4k$ なら $[125n] = [0]$ より n の位数が 125 の約数となる事からわかる. 逆に n が 4 の倍数でないときは位数が 2 で割り切れる. これは $n = 2^i k$ ($i = 0, 1, k$ は奇数) とすると $mn \in 500\mathbb{Z}$ なら m が 2 で割り切れることから分かる. よって求める個数は $0 \leq n < 500$ を満たす 4 の倍数の数である. すなわち $500/4 = 125$ である.

(5) G/N での g の同値類を $[g]$ とする. 指数が k であるから $|G/N| = k$ である. よって $[g^k] = [g]^k = [e]$ である. すなわち $g^k \in N$

(6) G の単位元を e とする. $a \in G$ について $a \sim a$ より $e = a^{-1}a \in S$ である. $a \in S$ なら $e^{-1}a \in S$ であるから $e \sim a$ である. よって $a \sim e$ であるから $a^{-1} = a^{-1}e \in S$ である. $a, b \in S$ なら $a^{-1} \sim e, e \sim b$ であるから $a^{-1} \sim b$ である. よって $ab \in S$ である. よって S は部分群である.

[3] (1) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ として f が曲面上で最小の値をとる点とその値を求める. 相加相乗平均より $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3(xyz)^{2/3} = 3$ である. よって $f(x, y, z) \geq \sqrt{3}$ である. $f(1, 1, 1) = \sqrt{3}, 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 0$ であるから f の曲面上の最小値は $\sqrt{3}$ である. 等号成立条件は $x^2 = y^2 = z^2$ である. すなわち $|x| = |y| = |z|$ である. $xyz = 1$ より $(x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$ で最小値 $\sqrt{3}$ をとる.

(2) $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \sqrt{x}\}, B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$ とすると, $A \cup B = D, A \cap B = \emptyset$ である. よって $\iint_D \frac{\min\{y, \sqrt{x}\}}{1+y^2} dx dy = \iint_A \frac{\min\{y, \sqrt{x}\}}{1+y^2} dx dy + \iint_B \frac{\min\{y, \sqrt{x}\}}{1+y^2} dx dy$ である. 絶対値付きの各領域上での積分が有限値をとることは明らかだからフビニの定理より積分の順序を入れ替えることができる.

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\min\{y, \sqrt{x}\}}{1+y^2} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+y^2} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \log(1+y^2) \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \log(1+x) dx = \frac{1}{2} [(x+1) \log(1+x) - x]_0^1 \\ &= \log 2 \\ \iint_B &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{\sqrt{x}}{1+y^2} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^{y^2} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{y^3}{1+y^2} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 \left(y - \frac{y}{1+y^2} \right) dy \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \log(1+y^2) \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{\log 2}{3} \end{aligned}$$

よって $\iint_D \frac{\min\{y, \sqrt{x}\}}{1+y^2} dx dy = \log 2 + \frac{1}{3} - \frac{\log 2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log 2$

(3) ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が ρ であるとは $|x| < \rho$ で絶対収束し $|x| > \rho$ で発散することである.

(i) $a_{n+1}/a_n = \frac{\sqrt{4^{n+1}+3^{n+1}}}{\sqrt{4^n+3^n}} = \sqrt{\frac{4+3\frac{3}{4}^n}{1+\frac{3}{4}^n}}$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{4} = 2$ である. よって収束半径は $1/2$ である.

(ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} |a_n|^{1/n} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \left| \sqrt{4^n + 3^n} + (-1)^n \sqrt{4^n - 3^n} \right|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \left| 2^n \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} + (-1)^n \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \right) \right|^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \left| 2^{2n} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}} + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}} \right) \right|^{\frac{1}{2n}} \\
&\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \left| 2^{2n} 2 \sqrt{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\right) \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\right)}} \right|^{\frac{1}{2n}} = 2
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} |a_n|^{1/n} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \left| 2^n \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} + (-1)^n \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \right) \right|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \left| 2^n \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \right) \right|^{\frac{1}{n}} = 2
\end{aligned}$$

である。よって収束半径は $1/2$ である。

□ (1) $Y \in \mathcal{O}$ であり, $\emptyset \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であるから $\emptyset \in \mathcal{O}$ である。

\mathcal{O} の開集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を任意にとる。ある $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda = Y$ なら $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = Y \in \mathcal{O}$ である。

全ての $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda \neq Y$ なら $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である。

\mathcal{O} の開集合族 $\{U_1, \dots, U_n\}$ を任意にとる。 $A = \{i \mid U_i = Y\}$ とする。 $\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i \notin A} U_i$ である。 $i \notin A$ なら

$U_i \in \mathcal{U}$ より $\bigcap_{i \notin A} U_i \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ であるから $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$ である。

(2) p を含む開集合は Y のみである。 任意の X の元 q について $q \in Y$ より p, q を分離する開集合は存在しない。

(3) \mathcal{U} の開集合 U を任意にとると $U \in \mathcal{O}$ であり, $U = U \cap X$ であるから (X, \mathcal{O}) は Y の部分空間である。

(4) Y の開被覆を任意にとる。 開被覆の元のうち p を含む開集合がある。 p を含む開集合は Y のみであるからその開集合は Y である。 よって有限部分被覆 $\{Y\}$ が存在するからコンパクト。