0.1　H22 数学 A

(1)f は一様連続であるから任意の ε に対して $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ なら $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ である．また $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束するから $\delta(\varepsilon)$ に対して，$N\in\mathbb{N}$ が存在して $n>N$ なら $|g_n(x)-g(x)|<\delta(\varepsilon)$ である．

以上より，$n>N$ なら $|f(g_n(x))-f(g(x))|<\varepsilon$ である．したがって $f\circ g_n$ は $f\circ g$ に一様収束する．

(2)$h_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ とする．$|h_n(x)-h(x)|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}\right|\le\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\to 0\quad(n\to\infty)$ である．したがって一様収束．

また $\sin x$ は一様連続である．これは平均値の定理から $\sin x-\sin y=(x-y)\cos\xi\le|(x-y)|\quad(\xi\in(x,y))$ より明らか．(1) より $\alpha_n(x)=\sin(h_n(x))$ は $\sin(h(x))$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (1)$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in V$ を任意にとる．$X=X^T$ であるから $b=c$ である．したがって $X=aE_1+bE_2+cE_3$ と表せる．また $c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3=O$ とすれば $c_1=c_2=c_3=0$ は一次独立．したがって V は $\{E_1,E_2,E_3\}$ を基底とする．

(2)$(A^TXA)^T=A^TX(A^T)^T=A^TXA$ であるから $f_A(X)\in V$ である．$f_A(cX+Y)=A^T(cX+Y)A=cA^TXA+A^TYA=cf_A(X)+f_A(Y)$ であるから線形写像である．

(3)$f_A(E_1)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}=E_1+aE_2+a^2E_3, f_A(E_2)=\begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ a^2+1 & 2a \end{pmatrix}=2aE_1+(a^2+1)E_2+2aE_3, f_A(E_3)=\begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}=a^2E_1+aE_2+E_3$ である．よって f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ a & a^2+1 & a \\ a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ である．

(4)f_A の表現行列を $G(a)$ とする．$\det G(a)=\begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & -a^2+1 & a-a^3 \\ 0 & -a^3+a & 1-a^2 \end{vmatrix}=-(1-a^2)^2-(a-a^3)^2=-(a^2+1)(1-a^2)^2$ である．

したがって $a\neq\pm1$ のとき $\det G(a)\neq 0$ であるから $\operatorname{Im} f_A$ の基底は $\{f_A(E_1),f_A(E_2),f_A(E_3)\}$ である．

$a=1$ のとき $G(1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\operatorname{Im} f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$a=-1$ のとき $G(-1)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって $\operatorname{Im} f_A$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$S=\{(-\infty,n)\cup\{p_1\}\mid n\in\mathbb{N}\}$ とする．S は X_1 の開被覆である．有限部分被覆を持たないからコンパクトでない．

(2) ユークリッド位相の入った位相空間 $\mathbb{R}$ を E で表す．E の開集合は X_2 の開集合であることを示す．E の開基として $\{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\mid x_0\in\mathbb{R},\varepsilon>0\}$ がとれる．$\frac{1}{n_1}\le\varepsilon<\frac{1}{n_1+1}$ として n_1 を定める．n_i を $\frac{1}{n_i}\le\varepsilon-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}<\frac{1}{n_i}$ として定める．ただし $\varepsilon-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}=0$ のとき n_i は定めない．n_i が定義される i を集めてできる $A\subset\mathbb{N}$ を定める． このとき数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\max A}$ を得る．$\bigcup\limits_{i=1}^{\max A}(x_0-\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{1}{n_j},x_0-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_i})\cup(x_0+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n_j}-\frac{1}{n_i},x_0-\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_i})=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ である．よって E の開集合は X_2 の開集合である．

$\varphi\colon X_2\to[0,1]$ を $\varphi(p_1)=0,\varphi(p_2)=1,\varphi(x)=(\arctan x+\pi/2)/\pi\quad(x\in\mathbb{R})$ とする．$\varphi|_{\mathbb{R}}\colon E\to(0,1)$ は同

相写像であるから φ は全単射．$(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n})$ は E の開集合であるから $\varphi((x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}))$ は $[0,1]$ の開集合である．$\varphi((-\infty,n)\cup\{p_1\})=(0,\varphi(n))\cup\{0\}=(-1,\varphi(n))\cap[0,1]$ は開集合である．よって φ^{-1} は連続．$[0,1]$ の開集合 U について $U\subset(0,1)$ なら $\varphi^{-1}(U)$ は E の開集合．すなわち X_2 の開集合．$0\in U, 1\notin U$ ならある $\varepsilon>0$ が存在して $U=[0,\varepsilon)\cup U\setminus\{0\}$ である．$\varphi^{-1}(U\setminus\{0\})$ は X_2 の開集合である．$\varphi^{-1}([0,\varepsilon))=(-\infty,\varphi^{-1}(\varepsilon))\cup\{p_1\}$ は X_2 の開集合である．よって $\varphi^{-1}(U)$ は X_2 の開集合．$0\notin U, 1\in U$ のとき,$0,1\in U$ のときも同様．よって φ は連続．すなわち φ は同相．

(3)p_1 が属す開基は $\{(-\infty,n)\cup\{p_1\}\}\quad(n\in\mathbb{Z})$ である．任意の $m\in\mathbb{Z}$ について $\{(-\infty,m)\}\cup\{p_3\}$ も開基であるからそれぞれを含む任意の開基は共通部分をもつ．したがってハウスドルフ空間でない．

$\boxed{4}$ (1)

$$\left|\frac{\log z}{z^4+1}\right|=\frac{|\log r+i\theta|}{|r^4e^{4i\theta}+1|}\le\frac{|\log r|+\pi}{||r^4e^{4i\theta}|-1|}=\frac{|\log r|+\pi}{|r^4-1|}$$

(2)

$$\int_{\alpha_2}\frac{\log z}{z^4+1}dz=\int_R^\varepsilon\frac{\log xe^{\pi i}}{(xe^{\pi i})^4+1}e^{i\pi}dx=\int_\varepsilon^R\frac{\log x+\pi i}{x^4+1}dx=\int_\varepsilon^R\frac{\log x}{x^4+1}dx+\pi i\int_\varepsilon^R\frac{1}{x^4+1}dx$$

(3)$\partial D_{\varepsilon,R}$ の小さい円弧を C_1，大きい円弧を C_2 とする．$|\int_{C_1}\frac{\log z}{z^4+1}dz|=\int_0^\pi|\frac{\log re^{i\theta}}{r^4e^{4i\theta}+1}ire^{i\theta}|d\theta\le\int_0^\pi\frac{r|\log r|+r\pi}{|r^4-1|}d\theta\le\pi\frac{r|\log r|+r\pi}{|r^4-1|}\to0\quad(r\to0)$ である．また $|\int_{C_2}\frac{\log z}{z^4+1}dz|\le\int_0^\pi|\frac{\log Re^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}+1}iRe^{i\theta}|d\theta\le\pi\frac{R|\log R|+R\pi}{|R^4-1|}\to0\quad(R\to\infty)$ である．

また $\int_{\alpha_1}\frac{\log z}{z^4+1}dz=\int_\varepsilon^R\frac{\log x}{x^4+1}dx$ である．

$\varepsilon<1<R$ とする．$D_{\varepsilon,R}$ 内で $\frac{\log z}{z^4+1}$ は $e^{\pi i/4},e^{3\pi i/4}$ を特異点にもつ．留数を求めると $\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1},e^{\pi i/4}\right)=\pi e^{7i\pi/4}/16, \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^4+1},e^{3\pi i/4}\right)=3\pi e^{i\pi/4}/16$ である．よって $\int_{\partial D_{\varepsilon,R}}\frac{\log z}{z^4+1}dz=\frac{i\pi^2}{8}(3e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4})$ である．よって $\lim_{R\to\infty}\int_{\partial D_{1/R,R}}\frac{\log z}{z^4+1}dz=\frac{i\pi^2}{8}(3e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}), \lim_{R\to\infty}\int_{\partial D_{1/R,R}}\frac{\log z}{z^4+1}dz=2\int_0^\infty\frac{\log x}{x^4+1}dx+\pi i\int_0^\infty\frac{1}{x^4+1}dx$ である．以上より $\int_0^\infty\frac{\log x}{x^4+1}dx=-\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \int_0^\infty\frac{1}{x^4+1}dx=\pi/2\sqrt{2}$ である．