0.1　H11 数学必修

$\boxed{1}$ (1) $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ を (i,j) 成分が 1 で他が 0 の行列とする．$\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n,\}$ は $M_n(\mathbb{C})$ の基底である．

$X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}E_{ij}$ と表せる．

(2)$X = (x_{ij}), Y = (Y_{ij}) \in \ker f, c, d \in \mathbb{C}$ に対して $f(cX + dY) = \sum_{i=1}^n cx_{ii} + dy_{ii} = c\sum_{i=1}^n x_{ii} + d\sum_{i=1}^n y_{ii} = cf(X) + df(Y)$．より $\ker f$ は部分ベクトル空間.

$F_i = (f_ij) \in M_n(\mathbb{C})$ $(1 \leq i < n)$ を (i,i) 成分が 1 で (n,n) 成分が -1 で他が 0 の行列とする．$B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\} \cup \{F_i \mid 1 \leq i < n\}$ は基底である．一次独立性はあきらか，$X \in \ker f$ に対して $f(X) = 0$ より $X = \sum_{i=1}^n x_{ij} = 0$ であるから $x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i$ である．

よって $X = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} x_{ij}E_{ij} + \sum\limits_{1 \leq i < n} x_iF_i$ と表せる．次元は $n^2 - 1$

(3)$g(E_{ij}) = a_{ij}$ とする．$A = (a_{ji})$ とすると $g(X) = \sum\limits_{i,j} a_{ji}x_{ij} = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n a_{ji}x_{ij} = \mathrm{Tr}(AX)$.

$\boxed{2}$ (1) 平均値の定理から $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c)$ となる $c \in (x_1, x_2)$ が存在する．よって $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2||f'(c)| \leq M|x_1 - x_2|$ である．

(2)$x_1 = x_2$ のとき $g\colon [y_1, y_2] \to \mathbb{R}$ を $g(t) = f(x_1, t)$ とする．g は C^1 級で $\frac{dg}{dt}|_t = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_1,t)}$ である．よって $|\frac{dg}{dt}| = |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq M^2$ である．(1) より $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M^2|y_1 - y_2| = M^2\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ である．

$x_1 \neq x_2$ のとき，$\tan\theta = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1), -\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする．$z\colon [0, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (t\cos\theta + x_1, t\sin\theta + y_1)$ とする．z は明らかに C^1 級である．$\frac{\partial f \circ z}{\partial t}|_t = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}|_{z(t)} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}|_{z(t)}$ である．

$|\frac{\partial f \circ z}{\partial t}| = |\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}| \leq |\frac{\partial f}{\partial x}| + |\frac{\partial f}{\partial y}|$ である．

$|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq 1 + |\frac{\partial f}{\partial x}|^2$ であるから，$|\frac{\partial f \circ z}{\partial t}| \leq 2 + |\frac{\partial f}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial f}{\partial y}|^2 \leq 2 + M^2$ である．

(1) より $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |f \circ z(0) - f \circ z(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})| \leq (2 + M^2)\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ である．

$\boxed{3}$ (1)G/H の完全代表系 $X = \{g_1, \dots g_n\}$ を一つ固定する．$g_1 \in H$ として一般性を失わない．

$g \in G, g_i \in X$ に対して $g \cdot g_i \in [g_j]$ となる j がただ一つ存在する．これを $j = \sigma_g(i)$ と書くことにする．このとき σ_g は $\{1, \dots, n\}$ の置換である．

$f\colon G \to S_n$ を $f(g) = \sigma_g$ とする．$gg'g_i = g[g_{\sigma_{g'}(i)}] = [g_{\sigma_g(\sigma_{g'}(i))}]$ であるから $\sigma_{gg'} = \sigma_g\sigma_{g'}$ である．よって f は群準同型である．

$g \in \ker f$ について $g \cdot g_1 \in [g_1]$ より $h \in H$ をもちいて，$gg_1 = g_1h$ とできる．よって $g = g_1hg_1^{-1} \in H$ より $\ker f \subset H$ である．

(2)(1) で完全代表系を固定したが，f の定め方は完全代表系によらない．これを示す．$X' = \{g'_1, \dots, g'_n\}$ を別の完全代表系とする．ただし $[g_i] = [g'_i] \in G/H$ として一般性を失わない．このとき $g_i = g'_ih_i$ となる $h_i \in H$ がただ一つ存在する．

$g \in G$ に対して $gg'_i = gg_ih_i = g_{\sigma_g(i)}h_i = g'_{\sigma_g(i)}h_{\sigma_g(i)}h_i \in [g'_{\sigma_g(i)}]$ より σ_g が完全代表系の取り方に依らないことを示せた．

G の指数 n の部分群 H, H' について $H \neq H'$ とする．ある $g \in G$ に対して G/H を考えることで定まる σ_g と G/H' を考えることで定まる σ'_g が異なることを示す．$h \in H \setminus H'$ とする $\sigma_h(1) = 1, \sigma'_h(1) \neq 1$ である．よって $\sigma_h \neq \sigma'_h$ である．

すなわち $H \neq H'$ ならば $f \neq f'$ である．(f' は (1) より H' に対して存在する写像．)

$\hom(G, S_n)$ は G が有限生成であることから有限集合なので，指数 n の部分群も有限.

$\boxed{4}$ (1) $f\colon (0,1) \to [0,1]; x \mapsto \begin{cases} 1 & (x = 1/2) \\ 0 & (x = 1/3) \\ 1/(n-2) & (x = 1/n, n \geq 4) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases}$ とすると f は全単射である．

(2)$(0,1)$ の開被覆として $\{(0, 1-1/n) \mid n = 2, 3, \ldots\}$ を考えるとこれは有限部分被覆をもたないから $(0,1)$ はコンパクトでない．

$[0,1]$ は有界閉集合だからコンパクトである．

同相ならコンパクト性は保たれるから同相でない．