0.1　H18 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & -1 \\ 0 & -1 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)((3-t)^2-1) = (1-t)(t-2)(t-4) = 0$ である．

(2)$t=1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

$t=2$ のとき $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$t=4$ のとき $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．

各固有ベクトルは互いに直交しているから，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ すれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ で P は直交行列．

(3)$x^2+3y^2+3z^2-2yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より，最大値は固有値の最大値 4 である．最小値は固有値の最小値 1 である．

$\boxed{2}$ (1)$ab=ba=1, cd=dc=1$ とする．$acdb=dbac=1$ であるから，$ac \in R^\times$ である．結合法則は成り立つ．$a \in R$ なら $b \in R$ であるから，逆元も存在する．単位元は 1 であるから，$R^\times$ は群．

(2)$\mathbb{Z} \ni n \neq 1, -1$ について $nm=1$ となる整数 m は存在しないから，$\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$ である．

(3)$\mathbb{Z}_n$ の元は $0, 1, \cdots, n-1$ であるから，$\mathbb{Z}_n^\times$ の元は $1, \cdots, n-1$ である．n が素数ならば，$1 \leq a \leq n-1$ について $(a,n)=1$ であるから，$\mathbb{Z}_n^\times = \{1, \cdots, n-1\}$ である．

(3)E を単位行列とする．$A \in M_2(R)^\times$ なら $\det A \det A^{-1} = \det E = 1$ であるから，$\det A \in R^\times$ である．逆に $\det A \in R^\times$ なら $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とすれば $AB=BA=E$ であるから $A \in M_2(R)^\times$ である．

(4)$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体であるから，$M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ はベクトル空間．$\det A \neq 0$ は列ベクトルが一次独立であることと同値である．$A = [v_1, v_2]$ とすると，$v_1 \neq 0$ となる v_1 は p^2-1 個ある．各 v_1 に対して一次独立となる v_2 は p^2-p 個ある．よって $\det A \neq 0$ となる A は $(p^2-1)(p^2-p) = p^4-p^3-p^2+p$ 個ある．

$\boxed{3}$ (1)$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が次の 3 つ

$$(i)^\forall x, y \in X, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$(ii)^\forall x, y \in X, d(x,y) = d(y,x)$$
$$(iii)^\forall x, y, z \in X, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

をみたすとき，(X,d) を距離空間とする．

(2)(a)$y \in N(q;\varepsilon_2)$ とすると，$d(p,y) \leq d(p,q) + d(q,y) = d(q,y) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ であるから，$y \in N(p;\varepsilon_1)$ である．すなわち $N(q;\varepsilon_2) \subset N(p;\varepsilon_1)$ である．

(b)$x \in N(p,\varepsilon_1) \cap N(p,\varepsilon_2)$ とする．$d(p,q) < d(p,x) + d(q,x) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

(3)(a) の逆は偽である．$X=\mathbb{R}$ とすると，$p=0, q=1, \varepsilon_1=2, \varepsilon_2=1$ とすれば，$N(0;2)\supset N(1;1)$ である．$d(p,q)+1=2$ より偽．

(b) の逆は偽である．$X=(-1,0)\cup(1,2)$ とし，$d(x,y)=|x-y|$ とすれば (X,d) は距離空間である．$p=-1/2, q=3/2, \varepsilon_1=11/10, \varepsilon=11/10$ とすれば，$11/10+11/10>d(3/2,-1/2)=2$ である．$x\in N(-1/2;11/10)\cap N(3/2;11/10)$ とすれば，$x<0$ である．よって $d(x,3/2)>d(0,3/2)=3/2>1$ であるから，$x\notin N(3/2;11/10)$ である．

$\boxed{4}$ (1)$1/n^2<\int_{n-1}^n x^{-2}dx$ より $\sum\limits_{n=2}^{\infty}1/n^2<\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n x^{-2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}[-1/x]_1^n=1-1/n=1$ より収束する．

(2)$f_n(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}(xy)^k=\frac{1-(xy)^{n+1}}{1-xy}\leq 1/(1-a^2)$ であり $1/(1-a^2)$ は $\int_0^a\int_0^a$ 上可積分．よって優収束定理より $\int_0^a\int_0^a\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(xy)^n dxdy=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^a[\frac{y^{n+1}}{n+1}]_0^a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n^2}$

(3)$\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a^{2k}}{k^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ である．

$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy$ は $\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy$ が $a\in(0,1)$ で一様収束するから，$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\lim\limits_{a\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_0^a\int_0^a(xy)^n dxdy=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ である．