0.1 H24 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $\varepsilon < a_n < \varepsilon$ である．

よって $n > N$ で $(1-\frac{\varepsilon}{n})^n \leq (1+\frac{a_n}{n})^n \leq (1+\frac{\varepsilon}{n})^n$ である．極限をとれば $e^{-\varepsilon} \leq \lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{n})^n \leq e^{\varepsilon}$ である．ε は任意であるから $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_n}{n})^n = 1$ である．

(2)$n\cos\frac{t}{\sqrt{n}} - n = -\frac{1}{2}t^2 + O(\frac{1}{n})$ であり，$\lim_{n\to\infty} s\cos\frac{t}{\sqrt{n}} = s$ であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = s - \frac{1}{2}t^2 = 0$ より $(s,t) = (\frac{t^2}{2}, t) \quad (t \in \mathbb{R})$ である．

(3)(2) の a_n をもちいると，$\cos\frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n+s}\frac{n+s}{n}\cos\frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n+s}(1+\frac{a_n}{n})$ である．したがって $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{t}{\sqrt{n}})^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$ である．よって $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\begin{vmatrix} -3-t & -2 & 1 \\ 4 & 3-t & -1 \\ -4 & -2 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t-1)^2$ である．よって固有値は $0,1$ である．

$t=0$ のとき，$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから V_0 の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

$t=1$ のとき，$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ であるから固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

(2)$BAy = BABx = B\alpha x = \alpha Bx = \alpha y$

(3)AB の rank は 2 であるから A の rank は 2 以上．$A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ であるから A の rank は 2 である．すなわち A は単射．同様に B は全射である．

よって $\dim \mathrm{Im}\, g_1 = 2$ である．

(4)B は全射であるから任意の $y \in \mathbb{C}$ に対して $Bx = y$ となる $x \in \mathbb{C}^2 = V_1$ が存在する．$BAy = y$ より $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$\boxed{3}$ (1)$f^{-1}([0,1)) = [0,1)$ は X の開集合でないから f は連続でない．

(2) X は $\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ を開基とする位相空間である．

$g^{-1}(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[x-\frac{\varepsilon}{n}, x+\varepsilon)$ より g は連続．

(3)A^+ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ をとる．$0 \in U_{\lambda'}$ なる $\lambda' \in \Lambda$ が存在する．ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_{\lambda'}$ である．$\frac{1}{n} < \varepsilon$ となるような最大の n を N とする．N 以下の n に対して $\frac{1}{n}$ を含むような U_{λ_n} が存在する．したがって $\Lambda' = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N, \lambda'\}$ は A^+ の有限部分被覆である．よって A^+ はコンパクトである．

A^- は A^+ と同様にしてコンパクトである．

(4)A^+ は Y においてコンパクトである．0 を含む開集合は開集合 $[0,x)$ を部分集合にもつ．x 以上の $\frac{1}{n}$ なる n は有限個なので (3) と同様にコンパクト．

A^- はコンパクトでない．$\{[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \mid n = 1,2,\ldots\} \cup \{[0,1)\}$ は開被覆であるが有限部分被覆を持たない．

$\boxed{4}$ (1)$z = e^{i\pi/5}$ は一位の極である．よって留数は $\lim_{z\to e^{i\pi/5}}(z-e^{i\pi/5})/(z^5+1) = e^{6i\pi/5}/5$ である．

(2)$|\int_{\Gamma_R} f(z)dz| \leq \int_{\Gamma_R}|\frac{1}{z^5+1}||dz = \int_0^{2\pi/5}|\frac{1}{R^5-1}Ri|d\theta = \frac{2\pi}{5}\frac{R}{R^5-1} \to 0 \quad (R\to\infty)$ である．

(3) 半径 R の扇形で偏角が 0 から $2\pi/5$ の曲線を反時計回りに進む積分曲線を C とする．$f(z) = \frac{1}{z^5+1}$ は C を含むある領域で C 内に孤立特異点をもち，それ以外で正則であるから，留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\big(f, e^{i\pi/5}\big) = 2\pi i e^{6i\pi/5}/5$ である．

$\Gamma_A = \{xe^{i2\pi/5} \mid 0 \le x \le R\}$ とする．ただし Γ_A の向きは C と同じ方向にとる．

$$\int_{\Gamma_A} \frac{1}{z^5+1} dz = -\int_0^R \frac{1}{x^5+1} e^{2\pi i/5} dx = -\cos\frac{2\pi}{5}\int_0^R \frac{1}{x^5+1} dx - i\sin\frac{2\pi}{5}\int_0^R \frac{1}{x^5+1} dx$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1} dx - \cos\frac{2\pi}{5}\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1} dx = -\frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}$$

よって $\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1} dx = \frac{2\pi}{5}\sin\frac{6\pi}{5}/(1-\cos\frac{2\pi}{5})$ である．

$$\frac{\sin\frac{6\pi}{5}}{(1-\cos\frac{2\pi}{5})} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin^2\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

より $\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1} dx = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}$ である．