https://warp.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/259094/www.math.sci.kobe-u.ac.jp/home-j/index9-4.html

0.1 H6 数学必修

$\boxed{1}$ (1) 固有方程式 $g_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & -1 \\ 1 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)^2$ より固有値は $-1, 2$ である．$A-(-1)E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．よって固有空間 $W(1)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

$A-2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ を簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．よって固有空間 $W(2)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である．

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底として，$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を選ぶと，F の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．

(3) 異なる固有値の固有空間のベクトルは直交するから，$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を直交化する．

$v_2' = v_2 - \frac{(v_2, v_1)}{|v_1|} \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は v_1 と直交する固有ベクトルである．正規化すると求める基底は $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ である．

$\boxed{2}$ (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \alpha x (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} = \alpha (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + \alpha(\alpha-2) x^2 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-2}$

より $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3\alpha (x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + \alpha(\alpha-2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-2}(x^2+y^2+z^2) = (\alpha^2+\alpha)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}$

(2) 存在しないと仮定する．ある $\varepsilon > 0, R > 0$ が存在して，${}^\forall x > R, xf'(x) > \varepsilon$ である．$f(x) - f(R) = \int_R^x f'(t)dt > \int_R^x \frac{\varepsilon}{t} dt = \varepsilon \log \frac{x}{R} \to \infty \quad (x \to \infty)$ となり矛盾．

$\boxed{3}$ (1) $ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = e \Leftrightarrow abab = e \Leftrightarrow (ab)^2 = e$ 一番右の式は成立するから，G はアーベル群である．

(2) $a \in G, h \in H$ を任意に取る．$H \ni (ah)^2 = ahah = aha^{-1}h^{-1}$ より，$aha^{-1} \in H$ である．よって H は G の正規部分群

$[a] \in G/H$ に対して $[a]^2 = [a^2] = H$ であるから，(1) より G/H はアーベル群である．

$\boxed{4}$ (1) $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x,y) = d(y,x)$ は明らかである．$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対して，$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ より $d(x,z) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) < d(x,y) + d(y,z)$ よって d は三角不等式を満たす．

(2) $d(x,y) \leq \delta$ なる任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，$d(p,x) - d(p,y) \leq d(p,y) + d(y,x) - d(p,y) = d(y,x) \leq \delta$ である．x, y を入れ替えても同様にして $d(p,y) - d(p,x) \leq \delta$ であるから，$|d(p,x) - d(p,y)| \leq \delta$ である．

すなわち任意の ε に対して $\delta=\varepsilon$ と定めれば，$d(x,y)\le\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$ より f は連続.

(3) $a\in A$ に対して $d(a,y)\le d(a,x)+d(x,y)$ である．$a\in A$ についての下限をとれば $g(y)=\inf_{a\in A} d(a,y)\le\inf_{a\in A} d(a,x)+d(x,y)=g(x)+d(x,y)$ を得る．これは x,y を入れ替えても成り立つから，$|g(x)-g(y)|\le d(x,y)$ である.

したがって任意の ε に対して $\delta=\varepsilon$ と定めれば，$d(x,y)\le\delta$ ならば $|g(x)-g(y)|\le\varepsilon$ より g は連続.