0.1 R5 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$f_n(0)=\frac{(-1)^n}{2n}$ である．$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$ とする．$S_{2n}(0)=\sum\limits_{k=1}^{2n}f_k(0)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_{2k-1}(0)+f_{2k}(0)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-1}{2(2k-1)}+\frac{1}{2(2k)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-2}{4k(4k-2)}$ である．よって $S_{2n}(0)$ は単調減少である．$S_{2n+1}(0)=\frac{-1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}f_{2k}(0)+f_{2k+1}(0)=\frac{-1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2(2k)}-\frac{1}{2(2k+1)}=\frac{-1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{4k(4k+2)}$ である．よって $S_{2n+1}(0)$ は単調増加である．$S_{2n+1}(0)=S_{2n}(0)+\frac{-1}{2(2n+1)}$ より $S_{2n+1}(0)<S_{2n}(0)$ である．よって共に有界数列であるから，収束する．また $\lim S_{2n+1}(0)=\lim(S_{2n}(0)+\frac{-1}{2(2n+1)})=\lim S_{2n}(0)$ より極限値は一致する．よって $S_n(0)$ は収束する．

(2)$|f_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n}{2n+\sin x}\right|=\frac{1}{2n+\sin x}\geq\frac{1}{2n+1}$ である．よって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\geq\int_1^{\infty}\frac{1}{2x+1}dx$ より発散する．

(3) まずは各点収束することを示す．(1) と同様に $S_{2n}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-1}{2(2k-1)+\sin x}+\frac{1}{2(2k)+\sin x}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-2}{(4k+\sin x)(4k-2+\sin x)}$ である．よって $S_{2n}(x)$ は単調減少である．$S_{2n+1}(x)=\frac{-1}{2+\sin x}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2(2k)+\sin x}-\frac{1}{2(2k+1)+\sin x}=\frac{-1}{2+\sin x}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{(4k+\sin x)(4k+2+\sin x)}$ である．よって $S_{2n+1}(x)$ は単調増加である．$S_{2n+1}(x)=S_{2n}(x)+\frac{-1}{2(2n+1)+\sin x}$ より $S_{2n+1}(x)<S_{2n}(x)$ である．よって共に有界数列であるから，収束する．また $\lim S_{2n+1}(x)=\lim(S_{2n}(x)+\frac{-1}{2(2n+1)+\sin x})=\lim S_{2n}(x)$ より極限値は一致する．よって $S_n(x)$ は収束する．$S_n(x)$ が $S(x)$ に各点収束するとする．

$$|S(x)-S_{2n}(x)|=\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty}f_{2k-1}(x)+f_{2k}(x)\right|=\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{-2}{(4k+\sin x)(4k-2+\sin x)}\right|\leq\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{2}{(4k-3)(4k-1)}\to 0\quad (n$$
$$|S(x)-S_{2n+1}(x)|=\left|\sum_{k=2n+2}^{\infty}f_{2k}(x)+f_{2k+1}(x)\right|=\left|\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{2}{(4k+\sin x)(4k+2+\sin x)}\right|\leq\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{2}{(4k-1)(4k+1)}\to 0\quad (n$$

共に x について一様収束する．よって $S_n(x)$ は $S(x)$ に一様収束する．

$\boxed{2}$ (1)$\{w,f(w),f^2(w),\dots,f^m(w)\}$ が一次独立であり $\{w,f(w),f^2(w),\dots,f^{m+1}(w)\}$ が一次従属となるような最小の m をとる．$m=n-1$ なら V の次元が n であることより条件をみたすから，このような m は存在する．

一次従属であるから，$f^{m+1}(w)=a_0w+a_1f(w)+\cdots+a_mf^m(w)$ となる $a_0,a_1,\dots,a_m\in\mathbb{C}$ が存在する．このとき $f^{m+2}(w)=a_0f(w)+a_1f^2(w)+\cdots+a_mf^{m+1}(w)=a_0w+(a_1+a_0)f(w)+\cdots+(a_m+a_{m-1})f^m(w)$ と表せる．$f^{m+3},f^{m+4},\dots$ も同様に表せる．

よって $f^n(w)$ は $w,f(w),f^2(w),\dots,f^{m-1}(w)$ の線形結合で表せるから $f^n(w)\in W$．

(2)(1) で定めた m について，W は $\{w,f(w),\dots,f^m(w)\}$ で生成されるから，m 次元ベクトル空間．よって $k=m$ である．

(3)$\dim W=n$ より $W=V$ である．よって $\{w,f(w),\dots,f^{n-1}(w)\}$ は V の基底である．この基底に関す

る，f の表現行列は $f^n(w)=\alpha w$ より $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．よって固有方程式は

$$\det\begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -t \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\alpha + (-t)^n$$

である．

$\boxed{3}$ (1)$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ とする．ある正の実数 r が存在して，$rx_1=x_2, r^{-1}y_1=y_2$ である．よって $x_1=r^{-1}x_2, y_1=ry_2$ で r^{-1} は正の実数であるから，$(x_2,y_2)\sim(x_1,y_1)$ である．

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2),(x_2,y_2)\sim(x_3,y_3)$ とする．ある正の実数 r_1,r_2 が存在して，$r_1x_1=x_2, r_1^{-1}y_1=y_2, r_2x_2=x_3, r_2^{-1}y_2=y_3$ である．よって $r_2r_1x_1=x_3,(r_2r_1)^{-1}y_1=y_3$ であるから，$(x_1,y_1)\sim(x_3,y_3)$ である．

よって $\sim$ は同値関係である．

(2)$a\neq 0, b\neq 0$ のとき $A_{a,b}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy=ab, ax>0\right\}$ である．実際，$(x,y)\sim(a,b)$ なら $rx=a, r^{-1}y=b$ より $xy=ab$ であり，$r>0$ より a と x は同符号である．また $xy=ab\neq 0$ より $x\neq 0, y\neq 0$ であるから $ax>0$ である．逆に (x,y) が $xy=ab, ax>0$ を満たすとする．$x/a=r>0$ とすれば，$ar=x, r^{-1}b=y$ であり $(x,y)\sim(a,b)$ である．

$a<0, b\neq 0$ のとき $A_{a,b}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x<0, y=0\right\}$ である．これは明らか．よって $B=\bigcup_{(a,b)\in I} A_{a,b} = \{(x,y)\in\mathbb{R} \mid -1\leq xy\leq 1, x<0\}$ である．したがって $\overline{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid -1\leq xy\leq 1, x\leq 0\}$ より $\overline{B}\setminus B=\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid x=0\}$ である．

(3)$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ から X への標準射影を p とする．$A_{-1,0}$ と $A_{0,1}$ について考える．$A_{-1,0}\in U\subset X$ なる開集合 U について $(-1,0)\in A_{-1,0}\subset p^{-1}(U)$ よりある $\varepsilon>0$ が存在して $(-1,0)$ を中心とする半径 ε の開球 $B((-1,0),\varepsilon)\subset p^{-1}(U)$ である．同様に $A_{0,1}\in V\subset X$ なる開集合 V について $(0,1)\in A_{0,1}\subset p^{-1}(V)$ よりある $\delta>0$ が存在して $B((0,1),\delta)\subset p^{-1}(V)$ である．$\gamma=\min\{\varepsilon,\delta\}$ とする．$(-1,\gamma)\in p^{-1}(U),(-1,-\gamma)\in p^{-1}(V)$ である．$p(-1,\gamma)\sim p(-1,-\gamma)$ であるから $A_{-1,\gamma}\in U, A_{-1,-\gamma}\in V$ である．よって $U\cap V\neq\emptyset$ である．

任意の開集合 U,V について成り立つから，X はハウスドルフでない．

$\boxed{4}$ (1)$1<|z|<2$ なら $\frac{|z|}{2}<1, \frac{1}{|z|}<1$ である．よって共に有界数列であるから $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\dots)-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots)$ である．

(2)$\sin z$ の零点は $z=n\pi$ である．$(\sin z)'|_{n\pi}=(-1)^n$ であるから，$z=n\pi$ は $\sin z$ の一位の零点である．すなわち $\sin z=(z-n\pi)g(z), g(n\pi)\neq 0$ となる正則関数 $g(z)$ が存在する．また $|f(n\pi)|\leq|\sin n\pi|=0$ より $f(n\pi)=0$ である．$h(z)=\frac{f(z)}{\sin z}$ とする．$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)h(z)=\lim_{z\to n\pi}\frac{f(z)}{g(z)}=0$ である．すなわち $z=n\pi$ は $h(z)$ の除去可能な特異点である．$|h(z)|\leq 1$ となるから，リュービルの定理より h は定数関数で $h(z)\equiv\alpha\in\mathbb{C}$ とできる．したがって $f(z)=\alpha\sin z$ である．

(3) 実数値関数 u,v を用いて $g(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ と表せる．g は正則関数であるから，u,v は C^∞ 級関数である．またコーシー・リーマンの方程式 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ を満たす．

実数値関数 s,t を用いて $\overline{g(\overline{x+iy})}=s(x,y)+it(x,y)$ と表せる．$\overline{g(\overline{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$ であるから，$s(x,y)=u(x,-y), t(x,y)=-v(x,-y)$ である．したがって s,t は C^∞ 級関数である．$s_x=u_x=v_y=t_y, s_y=-u_y=v_x=-t_x$ であるから，s,t はコーシー・リーマンの方程式を満たす．よって $\overline{g(\overline{z})}$ は正則関数である．