0.1 H19 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a+2)(a-1)^2$ である．

(2)$a=-2$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$\mathrm{rank} A = 2$ である．

$a=1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$\mathrm{rank} A = 1$ である．

$a \neq -2, 1$ のとき，A は正則であるから $\mathrm{rank} A = 3$ である．

(3)$\mathrm{rank} A = 2$ より $a=-2$ である．固有値は $g_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 & 1 \\ -2 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-t & t-3 & 1 \\ -2 & 3-t & 1 \\ 1 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} -1-t & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = (t-3)(-1)\begin{vmatrix} -1-t & 2 \\ 1 & -2-t \end{vmatrix} = -(t-3)((-1-t)(-2-t)-2) = -(t-3)t(t+3)$ より $-3, 0, 3$ である．

(4)$\mathrm{rank} A = 1$ より $a=1$ である．固有値は $g_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & t & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & t & -t \end{vmatrix} = t^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = t^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -t^2\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -t^2(-(2-t)-1) = t^2(t-3)$ より $0, 3$ である．

$A(A-3E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = O$ より，最小多項式は $x(x-3)$ である．

$\boxed{2}$ (1)$\theta = 2\pi/3$ とすると，$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である．よって $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから A の位数は 3 である．

(2)E を単位行列とする．$X = \{(1,0), (\cos 2\pi/3, \sin 2\pi/3), (\cos 4\pi/3, \sin 4\pi/3)\}$ とすれば，A, B は X の置換作用である．したがって $\langle A, B\rangle \leq S_3$ である．$|\langle A, B\rangle| \geq |\{E, A, A^2, B\}| = 4$ であるから，ラグランジュの定理より $\langle A, B\rangle = S_3$ である．すなわち位数は 6.

(3)$\langle A, B\rangle = S_3$ より $\langle A, B\rangle = \{E, A, A^2, B, AB, A^2B\}$ である．また $A^2B = BA$ が成り立つ．

$E^{-1}BE = B, A^{-1}BA = A^2A^2B = AB, A^{-2}BA^2 = A^{-2}A^4B = A^2B$ である．また置換とみなしたときに共役では置換の符号は変わらず，A は偶置換，B は奇置換であるから，B と置換の符号が等しいのは AB, A^2B のみ．よって B の共役は B, AB, A^2B である．

(4) 真部分群は 6 未満の 6 の約数を位数としてもつから $1, 2, 3$ のいずれかで巡回群．S_3 の位数 3 の元は二つあり，それは A, A^2 に対応することに注意すれば部分群は $E, \langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle AB\rangle, \langle A^2B\rangle, \langle A, B\rangle$ である．

$\boxed{3}$ (1)$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とすると，$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = rf(\cos\theta, \sin\theta)$ である．$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ とすると，$f|_{S_1}$ は S_1 上の連続関数である．S_1 はコンパクトであるか

ら，$f|_{S_1}$ は最大値 M，最小値 m をもつ．f は S_1 上で正の値をとるから，$M \geq m > 0$ である．

よって $rm \leq rf(\cos\theta, \sin\theta) \leq rM$ であるから，$m\sqrt{x^2+y^2} \leq f(x,y) \leq M\sqrt{x^2+y^2}$ である．

(2)$f_x = 3x^2 + 1 - 4y, f_y = -4x - 4y, f_{xx} = 6x, f_{yy} = -4, f_{xy} = -4$ である．$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) は $(-1,1), (-1/3, 1/3)$ である．

$(-1,1)$ でのヘッシアンは $\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ であるから，負定値である．よって極大値 $f(-1,1) = 0$ である．

$(-1/3, 1/3)$ でのヘッシアンは $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ であるから，不定値である．よって極値をとらない．

(3) 体積は $B = \int_V dxdydz$ である．$x = s^2, y = t^2, z = u^2, s, t, u \geq 0$ とするとヤコビアンは $2s2t2u = 8stu$ である．積分領域は $\{(s,t,u) \mid 0 \leq s, t, u, s+t+u = 1\}$ である．よって

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-s-u} 8studtdsdu \\
&= 4\int_0^1 u \int_0^{1-u} s(1-s-u)^2 dsdu \\
&= 4\int_0^1 u[s^4/4 - 2s^3(1-u)/4 + (1-u)^2 s^2/2]_0^{1-u} du \\
&= 4\int_0^1 u((1-u)^4/4 - 2(1-u)^4/4 + (1-u)^4/2) du \\
&= \int_0^1 u(1-u)^4 du = B(2,5) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (1)$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = \alpha$ とする．$\lim\limits_{n\to\infty} |n^2 a_n - \alpha| = 0$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在して $n > N$ ならば $|n^2 a_n - \alpha| < \varepsilon$ である．すなわち $|a_n - \alpha/n^2| < \varepsilon/n^2$ より $|a_n| < \varepsilon/n^2 + \alpha/n^2$ である．

よって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\varepsilon/n^2 + \alpha/n^2) < \infty$ より $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．すなわち収束する．

(2)$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \alpha$ とする．$\alpha > 0$ としても一般性を失わない．($\because \alpha < 0$ なら $-a_n$ を考えればよい．)

したがってある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $na_n > \alpha/2$ である．よって $n > N$ ならば $a_n > \alpha/2n$ である．すなわち $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n \geq \sum\limits_{n=N}^{\infty} \alpha/2n = \infty$ であるから，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

$\boxed{5}$ (1)$A_t = f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} \mid y < t\})$ である．$\{y \in \mathbb{R} \mid y < t\}$ は開集合であり，f は連続であるから A_t は開集合．

(2)$x \in X$ は $x \in A_{f(x)+1}$ であるから $X \subset \bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$ である．

(3)X はコンパクトであるから，$f(X)$ はコンパクト，すなわち有界閉集合で最大値 M をもつ．よって $X \subset A_{M+1}$ である．