0.1 H12 数学必修

$\boxed{1}$ (1) テイラーの定理より，$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$ とできる．

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)+f'(a)(-h)+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)}{h^2} \\ &= f''(a)\end{aligned}$$

(2) $(x,y)=(a+h,b+k)$ とする．$f(x,y)=f(a,b)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+o(h^2+k^2)$ が成り立つ．

(3)$f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)=f(a,b)+r(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}r^2(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+g(r,\theta)\quad g(r,\theta)\in o(r^2)$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b)d\theta &= \int_0^{2\pi} r(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}r^2(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+g(r,\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^2\frac{1}{2!}(\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(a,b)+g(r,\theta)d\theta \\ &= \pi r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\pi r^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta+\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta \\ &= \pi r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)+\pi r^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)+\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta\end{aligned}$$

$\lim_{r\to 0}g(r,\theta)/r^2=0$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，$0<r<\delta$ ならば $|g(r,\theta)|<\varepsilon r^2$ である．よって $|\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta|/r^2\le\int_0^{2\pi}|\varepsilon r^2|d\theta/r^2=2\pi\varepsilon$ である．

よって $\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}g(r,\theta)d\theta=0$ である．

すなわち $\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b)d\theta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)$ である．

$\boxed{2}$ (1) $\det A_x=\begin{vmatrix}x & x & x\\ x & 1-x & 1\\ x & 1 & 1-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x & x\\ 0 & 1-2x & 1-x\\ 0 & 1-x & 1-2x\end{vmatrix}=x((1-2x)^2-(1-x)^2)=-x^2(2-3x)$

(2)$x\neq 0,2/3$ のとき，$\det A_x\neq 0$ より A_x は正則であるから，$\mathrm{rank}A_x=3$ である．

$x=3/2$ のとき，$\mathrm{rank}A_{2/3}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}2/3 & 2/3 & 2/3\\ 0 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix}=2$ である．

$x=0$ のとき，$\mathrm{rank}A_0=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=1$ である．

(3) $B,B'\in V(A_x),c\in\mathbb{C}$ に対して $A_x(B+cB')=A_xB+cA_xB'=BA_x+cB'A_x=(B+cB')A_x$ より $V(A_x)$ は部分空間である．

(4) A_x の階数が最小になるのは $x=0$ のときである．

A_0 の固有値および固有空間をもとめる．$\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-2\lambda^2=0$ より $\lambda=0,2$ である．

$\lambda=0$ のとき，$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ より固有空間 $W(0)=()\langle\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\rangle$ である．

$\lambda = 2$ のとき, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ より固有空間 $W(2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ である.

$B \in A_0$ と A_0 の固有値 λ の固有ベクトル x について, $ABx = BAx = \lambda Bx$ であるから, Bx は固有値 λ の固有ベクトルである. よって B は各固有空間の自己準同型である. すなわち $\dim V(A_0) = \dim \mathrm{Hom}(W(0), W(0)) + \dim \mathrm{Hom}(W(2), W(2)) = 2^2 + 1^2 = 5$ である.

$\boxed{3}$ (1)

$$\begin{aligned} f(e) &= f(ee) = f(e)f(e) \\ f(e)^{-1}f(e) &= f(e)^{-1}f(e)f(e) \\ e' &= f(e) \end{aligned}$$

(2)$f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(e) = e', f(g^{-1})f(g) = f(g^{-1}g) = f(e) = e'$ より $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

(3)$g \in G, x \in \ker f$ について $f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e'$ より $gxg^{-1} \in \ker f$. よって $g \ker f g^{-1} \subset \ker f$ が任意の $g \in G$ について成り立つ.

(4)$aba^{-1}b^{-1} \in [G, G]$ について $f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1} = f(a)f(a)^{-1}f(b)f(b)^{-1} = e'$ である. 二番目の等式は G' がアーベル群であるから成り立つ.

よって $[G, G] \subset \ker f$ である.

$\boxed{4}$ (1) 任意の $x, y \in X$ について $x \neq y$ なら $U, V \in \mathcal{O}_X$ であって $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となるものが存在するとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ はハウスドルフ空間という.

X の部分集合 A がコンパクトであるとは, A の任意の開被覆が有限部分被覆を持つことである.

(2)$y \in A$ に対して $y \in V_y, x \in U_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となる $U_y, V_y \in \mathcal{O}_X$ を定める. $\bigcup_{y \in A} V_y \supset A$ である. A はコンパクトだから, 有限部分集合 $A' \subset A$ が存在して $\bigcup_{y \in A'} V_y \supset A$ となる.

$V = \bigcup_{y \in A'} V_y, U = \bigcap_{y \in A'} U_y$ とすると, $x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ である.

(3) ハウスドルフ空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ において, A がコンパクトであるとき, $x \in A^c$ に対して (2) より $x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ となる $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在する. $U \cap A = \emptyset$ であるから A^c は開集合である. すなわち A は閉集合.