0.1 H21 数学必修

https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/gif/h21.pdf

$\boxed{1}$ (1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -a & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -a & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -3 \end{pmatrix}$ A の階数は一次独立な列ベクトルの数であるから，$a \neq -3$ で $\mathrm{rank}A = 3$, $a = -3$ で $\mathrm{rank}A = 2$ である．

(2)$a \neq -3$ なら A は正則，すなわち ϕ_a は全単射であるから，$\ker \phi_a = \{0\}$ である．$a = -3$ なら $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ より $\ker \phi_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である．

(3)$a \neq -3$ なら ϕ_a は全単射であるから，$\phi_a(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ である．よって $\phi_a(\mathbb{R}^3) \cap L_\lambda = L_\lambda$ である．

$a = -3$ のとき，$\phi_{-3}(\mathbb{R}^3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ である．$v \in \phi_{-3}(\mathbb{R}^3) \cap L_\lambda$ とすると，$v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．よって $c_1 = d_1\lambda + d_2, c_2 = d_2\lambda, -3c_2 = 3d_1$ である．

$\lambda = 0$ のとき，$c_2 = 0 = d_1, c_1 = d_2$ より $v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．すなわち $\phi_{-3}(\mathbb{R}^3) \cap L_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ である．

$\lambda \neq 0$ のとき，$d_2\lambda = c_2 = -d_1$ より $d_2 = -d_1/\lambda, c_1 = d_1\lambda - d_1/\lambda$ となる．よって $v = d_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - d_1/\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} \lambda - 1/\lambda \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ である．すなわち $\phi_{-3}(\mathbb{R}^3) \cap L_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda - 1/\lambda \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ である．

$\boxed{2}$ (1)$x \in \mathbb{Z}$ に対して，$p\mathbb{Z}$ による同値類を $[x]$ と表すことにする．$[x] \in F_p \setminus \{0\}$ にたいして x, p は互いに素であるから，$kx + \ell p = 1$ となる $k, \ell \in \mathbb{Z}$ が存在する．よって $[x][k] = [1 - \ell p] = [1]$ より $[x]$ は可逆元である．よって F_p は体.

(2)F_p が体であるから $F_p[x]$ は PID となり次が成り立つ．$F_p[x]/(x^2+1)F_p[x]$ が体 $\Leftrightarrow (x^2+1)F_p[x]$ が極大イデアル $\Leftrightarrow (x^2+1)F_p[x]$ が素イデアル $\Leftrightarrow (x^2+1)$ が素元 $\Leftrightarrow x^2+1$ が既約.

$p = 3$ のとき，x^2+1 に $0, 1, 2$ を代入しても 0 にならないから，因数定理より x^2+1 は既約．よって体.

$p = 5$ のとき，$[3^2+1] = [10] = [0]$ より x^2+1 は可約．よって体ではない.

(3) 列ベクトルが一次独立となるような a, b, c, d の選び方は．一列目が 0 でなく 2 列目が 1 列目の定数倍にならないように選べばよい．したがって位数は $(p^2-1)(p^2-p)$ 通り.

(4)$A, B \in H$ に対して，$ABe_1 = Ae_1 = e_1$ であり，$Ae_1 = e_1$ に A^{-1} をかけて $e_1 = A^{-1}e_1$ を得るから H は部分群.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ より $a = 1, c = 0$ である．よって b, d の選び方は $p^2 - p$ 通りだから $|H| = p^2 - p$ である.

$\boxed{3}$ (1)$A = \{\emptyset, X\}, B = \{\emptyset, X, \{1\}\}, C = \{\emptyset, X, \{2\}\}, D = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$ の 4 つが位相である.

(2)$f^{-1}(\{a\}) = \{b\}, f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$ である．よって f が連続となるのは A, D のみ.

(3)g は全単射であるから集合 X の大きさを $|X|$ と表すことにすれば, $|g^{-1}(A_k)| = |A_k|$ である．大きさ k の開集合は A_k のみであるから $g^{-1}(A_k) = A_k$ である．よって $g^{-1}(A_1) = g^{-1}(\{a_1\}) = \{a_1\}$ より $g(a_1) = a_1$ である．$g(a_k) = a_k$ が $k \le m-1$ で成り立つとき，$g^{-1}(A_m) = g^{-1}(\{a_1, \dots, a_m\}) = \{a_1, \dots, a_m\}$ より $g(a_m) = a_m$ である．帰納的に $g(a_m) = a_m$ が $m = 1, \dots, n$ について成り立つ．よって g は恒等写像.

$\boxed{4}$ (1)$x \ge y$ とする．$|F(x) - F(y)| = |\int_a^x f(x)dx - \int_a^y f(x)dx| = |\int_y^x f(x)dx| \le \int_y^x |f(x)|dx$ である．f は有界閉集合上の連続関数であるから最大値 M をもつ．よって $\int_y^x |f(x)|dx \le M(x-y)$ である．すなわち $F(X)$ は M リプシッツ連続．よって一様連続.

(2)$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| = |\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \int_a^b \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|dx \le (b-a)\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ である．一様収束するから $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ である．よって $\lim_{n\to\infty} |\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| = \lim_{n\to\infty} (b-a)\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ である.

(3)$G(x) = \int_a^x g(x)dx + f(a)$ とする．G は微分可能で $G' = g$ である．すなわち G は C^1 級である．$\int_a^x g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(x)dx = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$ である．よって $G(x) = f(x)$ であるから f は C^1 級で $g = f'$ である.

$\boxed{5}$ (1)$s^{3/2} = x, t^{3/2} = y$ と変数変換する．ヤコビアンは $\begin{vmatrix} \frac{3}{2}s^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}t^{1/2} \end{vmatrix} = \frac{9}{4}\sqrt{st}$ である.

積分領域は $\{(s,t) \mid s \ge 0, t \ge 0, s+t \le 1\}$ であるから，$\int\int_D x^{1/3}dxdy = \frac{9}{4}\int_0^1 \int_0^{1-s} s\sqrt{t}dtds = \frac{9}{4}\int_0^1 s\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{1-s} ds = \frac{3}{2}\int_0^1 s(1-s)^{3/2}ds = \frac{3}{2}B(2, 5/2) = \frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(9/2)} = \frac{3}{2}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{6}{35}$ である.

(2)$f_x = -1+y+z+2x, f_y = -2+x+z+2y, f_z = -1+x+y+2z, f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2, f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 1$ である．よって $f_x(x,y,z) = f_y(x,y,z) = f_z(x,y,z) = 0$ とすると，$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が唯一の解である．$(0,1,0)$ でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ で $\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$ であるから極小値 $f(0,1,0) = -1$ をとる.