0.1 H26 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ より $(\arctan y + \arctan(1/y))' = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+(1/y)^2}(-1/y^2) = 0$ より $\arctan y + \arctan(1/y)$ は定数関数である。よって $\arctan x \in F$

(2)$f(x) + f(1/x) = c \in \mathbb{R}$ とする．$0 < a < 1$ に対して

$$\int_a^1 f(x)dx = \int_{1/a}^1 -\frac{f(1/t)}{t^2}dt = \int_1^{1/a} \frac{f(t)-c}{t^2}dt = \int_1^{1/a} \frac{f(t)}{t^2}dt + c\left[\frac{1}{t}\right]_1^{1/a} = \int_1^{1/a} \frac{f(t)}{t^2}dt + c(a-1)$$

したがって $\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx$ の存在と $\lim_{a\to 0}\int_1^{1/a} \frac{f(t)}{t^2}dt$ の存在は同値である。

(3)g が $G \in \mathbf{F}$ に 拡張可能だとする．このとき $\lim_{x\to 1-0} g'(x) = \lim_{x\to 1-0} G'(x)$ は G が C^1 級であるから存在する．

逆に $\lim_{x\to 1-0} g'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ とする．1 に収束する $(0,1)$ 上の任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ をとる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $1-\delta < x < 1$ ならば $\alpha - \varepsilon < g'(x) < \alpha + \varepsilon$ である．$\varepsilon\delta$ に対してある N が存在して $n > N$ ならば $1 - \varepsilon\delta < x_n < 1$ である．$n, m > N$ について平均値の定理から $g(x_n) - g(x_m) = g'(\xi)(x_n - x_m)$ となる $\xi \in (1-\varepsilon\delta, 1)$ が存在する．よって $|g(x_n) - g(x_m)| < (\alpha+\varepsilon)\delta\varepsilon \to 0$ となるから $\{g(x_n)\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列．すなわち収束列．以上より $\lim_{x\to 1-0} g(x)$ は存在する．その収束先を β とする．

$G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in (0,1)) \\ \beta - G(1/x) & (x \in (1,\infty)) \\ \beta & (x = 1) \end{cases}$ と定めると $G|_{(0,1)} = g$ であり，$G(x) + G(1/x) = \beta$ である．

$G(x)$ は $x = 1$ 以外の点で微分可能であり，導関数は連続である．$\lim_{x\to 1-0} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{g'(x)}{1} = \alpha$ である．(ロピタルの定理) $\lim_{x\to 1+0} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{\beta - G(1/x)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{-g'(1/x)(-x^{-2})}{1} = \alpha$ である．よって G は $x = 1$ で微分可能．

$\lim_{x\to 1+0} G'(x) = \lim_{x\to 1+0} -g'(1/x)(-x^{-2}) = \alpha$ である．よって導関数が $x = 1$ で連続であるから G は C^1 級．

$\boxed{2}$ (1) 一次独立であることを示す．$c_1\cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x = 0$ とする．$x = 0$ とすると，$c_1 + c_3 = 0$ である．$x = \pi$ とすると，$-c_1 + c_3 = 0$ である．よって $c_1 = c_3 = 0$ である．$x = \frac{\pi}{2}$ とすると，$c_2 = 0$ である．よって $c_4 = 0$ より S は一次独立．よって V の基底

(2)$\Phi(\cos x) = -\sin x, \Phi(\sin x) = \cos x, \Phi(\cos 2x) = -2\sin 2x, \Phi(\sin 2x) = 2\cos 2x$ より Φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．$\Psi(\cos x) = \sin x, \Psi(\sin x) = \cos x, \Psi(\cos 2x) = -\cos 2x, \Psi(\sin 2x) = -\sin 2x$ より

Ψ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

(3)$g(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 2x + c_4 \sin 2x$ とする．

$\Phi(g(x)) - \Psi(g(x)) = \cos 2x$ より $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

すなわち $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．したがって $c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ が解である．よって $g(x) = c_2 \sin x + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x$ である．

$\boxed{3}$ (1)Q が連結でないとすると，Q の非空開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset, U \cup V = Q$ となるものが存在する．このとき $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset, \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V) = \mathbb{R}^2$ となる．すなわち $\mathbb{R}^2$ が連結でないがこれは矛盾．よって Q は連結である．

(2)$(1,0) \in \mathbb{R}^2$ の同値類は $A = \{(x,0) \mid x \neq 0\}$ である．また $(0,0)$ の同値類は $B = \{(0,0)\}$ である．B を含む Q の開集合 U を任意にとる．$(0,0) \in \pi^{-1}(Q)$ で $\pi^{-1}(Q)$ は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B((0,0),\varepsilon) \subset \pi^{-1}(Q)$ である．$B((0,0),\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である．よって B を含む任意の開集合は A を含むから，ハウスドルフ空間でない．

(3)$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid -n < xy < n\}$ とする．A_n は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi^{-1}\pi(A_n) = A_n$ である．$\{\pi(A_n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ は Q の有限部分被覆を持たない開被覆である．よってコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$z \in D$ について，z に収束する D 上の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとる．

$$\begin{aligned} 2\pi i \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} &= \lim_{n\to\infty} \int_C \left(\frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z_n} - \frac{1}{\zeta(\zeta-2) - z} \right) \frac{1}{z_n - z} d\zeta \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta \end{aligned}$$

ここで $\zeta \in C, z_n, z \in D$ より $\zeta(\zeta-2) - z_n > M, \zeta(\zeta-2) - z > M$ となる $M > 0$ が存在する．よって $\frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)} < \frac{1}{M^2}$ であるから $\int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2)-z_n)(\zeta(\zeta-2)-z)} d\zeta < 2\pi M^2$ である．よってルベーグの収束定理から

$$2\pi i \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \int_C \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z_n)(\zeta(\zeta-2) - z)} d\zeta = \int_C \frac{1}{(\zeta(\zeta-2) - z)^2} d\zeta$$

よって $f(z)$ は D 上で正則．

(2)$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^k$ とする．$\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k \zeta^{k+n+1}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = n! c_{-1}$ である．

$((\zeta-2)^{-n-1})^{(n)} = (-n-1)(-n-2)\ldots(-n-n)(\zeta-2)^{-2n-1} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!(\zeta-2)^{2n+1}}$ より $(\frac{1}{(\zeta-2)^{n+1}})^{(n)}|_{\zeta=0} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n! 2^{2n+1}}$ よって $c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ である．

$\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}$ は C 内で $\zeta = 0$ を特異点にもつ．よって留数定理から $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}} d\zeta = \mathrm{Res}\left\{\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-2)^{n+1}}, 0\right\} = c_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$

(3)$\zeta(\zeta-2) - z = (\zeta - (1 + \sqrt{1+z}))(z - (1 - \sqrt{1+z}))$ である．$|z| < 1$ より $-\pi/2 < \arg(1+z) < \pi/2$ である．よって $-\pi/2 < \arg(\sqrt{1+z}) < \pi/2$ より $\mathrm{Re}(1 + \sqrt{1+z}) > 1$ である．すなわち $|1 + \sqrt{1+z}| > 1$ である．

$\zeta = 1 - \sqrt{1+z}$ は $\zeta^2 - 2\zeta - z = 0$ より $|\zeta||\zeta-2| = |z| < 1$ である．よって $|\zeta| < 1/|\zeta-2| = 1/|1 - \sqrt{1+z} - 2| = 1/|1 + \sqrt{1+z}| < 1$ である．よって $\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z}$ は D 内で特異点 $\zeta = 1 - \sqrt{1+z}$ を持つ．一位の極であるから留数は $\lim_{\zeta\to 1-\sqrt{1+z}} (\zeta - (1 - \sqrt{1+z}))\frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z} = \frac{1}{-2\sqrt{1+z}}$ である．よって $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{\zeta(\zeta-2)-z} d\zeta = \frac{-1}{2\sqrt{1+z}}$ である．