0.1 H20 数学必修

$\boxed{1}$ (1)$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a^2 \\ 0 & a^2-a & 0 \end{vmatrix} = -(a^2-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a^2 \end{vmatrix} = -a^2(a-1)^2$

(2)$a \neq 0, 1$ なら $\det A \neq 0$ より A は正則で，$\mathrm{rank} A = 3$

$a=1$ のとき，$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ より $\mathrm{rank} A = 1$

$a=0$ のとき，$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ より $\mathrm{rank} A = 2$

(3)$\mathrm{rank} A = 2$ より $a=0$ である．$g_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)((1-t)^2-1) = t(t-2)(1-t)$ より固有値は $0, 1, 2$ である．

固有値 0 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ (1) $[a]_n, [b]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ とする．それぞれ乗法に関する逆元 $[a]_n^{-1}, [b]_n^{-1}$ が存在して $[a]_n^{-1}, [b]_n^{-1} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ である．よって $([a]_n[b]_n)([b]_n^{-1}[a]_n^{-1}) = [1]_n$ より $[a]_n[b]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ である．

よって $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は乗法について閉じている．

$[1]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ より単位元を持ち，結合律は $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が環であることから成り立つ．逆元の存在もあきらか．

(2)n と互いに素な a について $ak + n\ell = 1$ となる k, ℓ が存在する．$[a]_n[k]_n = [1-n\ell]_n = [1]_n$ より $[a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ である．逆に $[a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ なら $[a]_n[b]_n = [1]_n$ なる b が存在する．すなわち $ab = 1+nk$ なる k が存在する．これは a, n が互いに素であることを意味するから $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \mid a$ と n は互いに素$\}$ である．

(3)$\pi(c+d) = ([c+d]_m, [c+d]_n) = ([c]_m + [d]_m, [c]_n + [d]_n) = ([c]_m, [c]_n) + ([d]_m, [d]_n) = \pi(c) + \pi(d), \pi(cd) = ([cd]_m, [cd]_n) = ([c]_m[d]_m, [c]_n[d]_n) = ([c]_m, [c]_n)([d]_m, [d]_n) = \pi(c)\pi(d), \pi(1) = ([1]_m, [1]_n)$ より π は環準同型である．

$[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times, [b]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を任意にとる．n, m が互いに素であるから，$nk + m\ell = 1$ なる k, ℓ が存在する．$c = ank + bm\ell$ とおくと，$[c]_m = [ank]_m = [1]_m, [c]_n = [bm\ell]_n = [1]_n$ より $\pi(c) = ([a]_m, [b]_n)$ であるから，π は全射準同型である．

$\pi(c) = 0$ とすると，$c \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ であり，m, n が互いに素であるから $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$ である．よって $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である．

(4)$[c]_{mn} \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ が可逆であることと，$\pi(c)$ が可逆であることは同値である．したがって $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ によって誘導される同型写像 $\bar{\pi}\colon \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ から写像 $\bar{\pi}\colon (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ が誘導される．これが群同型写像であることは明らか．

$([a]_m,[b]_n)\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は $[a]_m\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times,[b]_n\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ と同値であるから，$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\cong(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

(5)$144=9\cdot16$ で $9,16$ は互いに素であるから，$(\mathbb{Z}/144\mathbb{Z})^\times\cong(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ である．

$|(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times|$ は 9 と互いに素な 9 以下の自然数の個数であるから，$|(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times|=6$ である．$|(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times|$ は 16 と互いに素な 16 以下の自然数の個数であるから，$|(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times|=8$ である．

よって $|(\mathbb{Z}/144\mathbb{Z})^\times|=|(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times||(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times|=48$

$\boxed{3}$ (1)$\mathcal{U}$ が次の 3 条件を満たすとき，$(X,\mathcal{U})$ を位相空間という．

1. $\emptyset,X\in\mathcal{U}$
2. $\mathcal{U}$ の任意個の元の和集合が $\mathcal{U}$ に属する
3. $\mathcal{U}$ の有限個の元の共通部分が $\mathcal{U}$ に属する

(2)$\emptyset=Y\cap\emptyset\in\mathcal{U}_Y,Y=Y\cap X\in\mathcal{U}_Y$ である．$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(Y\cap U_\lambda)=Y\cap\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{U}_Y$ である．$\bigcap_{i=1}^n(Y\cap U_i)=Y\cap\bigcap_{i=1}^nU_i\in\mathcal{U}_Y$ である．よって位相を与える．

(3)(i) 真．$y,y'\in Y\subset X$ に対して，$y\in U,y'\in V,U,V\in\mathcal{U},U\cap V=\emptyset$ なる U,V が存在する．このとき $y\in Y\cap U,y'\in Y\cap V,(Y\cap U)\cap(Y\cap V)=\emptyset$ であるから Y はハウスドルフ．

(ii) 偽．位相空間 X を $\mathbb{R}$ に標準の位相を入れたものとし，$Y=[0,1]\cup[2,3]$ とする．X は連結であるが，Y は連結でない．

(iii) 偽 $X=[0,1]$ に $\mathbb{R}$ の部分位相をいれたものとすると，X は有界閉集合であるからコンパクトである．$Y=(0,1)$ とすればこれは $U_n=(0,1-1/n)$ として有限部分被覆を持たない開被覆 $\{U_n\mid n=2,3,\dots\}$ を持つからコンパクトでない．

$\boxed{4}$ (1)$x=0$ のとき，$f(0)=\lim_{n\to\infty}e^{-n0}=1$ である．$x\neq0$ のとき，$f(x)=\lim_{n\to\infty}e^{-nx}=0$ である．$\sup_{x\in[0,1]}|e^{-nx}-f(x)|=\sup_{x\in(0,1]}e^{-nx}$ であり，$x=1/n$ のとき $e^{-nx}=e^{-1}$ であるから，$\sup_{x\in(0,1]}e^{-nx}\geq e^{-1}$ である．よって $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|e^{-nx}-f(x)|\geq e^{-1}$ より一様収束しない．

(2)$x_0\in[0,1]$ を一つ固定すると，実数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ を得る．任意の ε に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $n,m>N$ に対して $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leq\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ が成り立つ．すなわち $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列である．よって $\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)$ は収束する．

(3) 任意の ε に対してある N_x が存在して $n\geq N_x$ ならば $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ である．よって $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\leq\sup_{x\in[0,1]}(|f_n(x)-f_{N_x+N}(x)|+|f_{N_x+N}(x)-f(x)|)\leq\sup_{x\in[0,1]}|f_{N_x+N}(x)-f(x)|+\varepsilon<2\varepsilon\quad(n>N)$ である．よって f_n は f に一様収束する．

$|f(x+h)-f(x)|\leq|f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|$ である．任意の ε に対して $n\geq N_{x+h}$ で $|f(x+h)-f_n(x+h)|<\varepsilon$ であり，$n\geq N_x$ で $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ である．任意の n について f_n の連続性からある δ_n が存在して $|h|<\delta_n$ ならば $|f_n(x+h)-f_n(x)|<\varepsilon$ である．よって $M=N_{x+h}+N_x$ とすれば $|h|<\delta_M$ に対して $|f(x+h)-f(x)|<3\varepsilon$ とできる．すなわち f は連続である．