0.1 H28 数学 A

$\boxed{1}$ (1)$|x| \le \frac{1}{2}$ なら $5-1/(1+x)^2>0$ である．よって $0<\int_0^x 5-1/(1+t)^2dt = 5x+1/(1+x)-1$ である．よって $0<\int_0^x 5t+1/(1+t)-1dt = 5x^2/2+\log(1+x)-x$ である．よって $-5x^2/2<\log(1+x)-x$ である．

また $5+1/(1+x)^2 > 0$ である．よって $0 < \int_0^x 5+1/(1+t)^2dt = 5x-1/(1+x)+1$ である．よって $0<\int_0^x 5t-1/(1+t)+1dt = 5x^2/2-\log(1+x)+x$ である．よって $5x^2/2>\log(1+x)-x$ である．

すなわち $|\log(1+x)-x|<5x^2/2$ である．

(2)$\sum a_k$ が収束するから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \ge N$ ならば，$a_n < 1/2$ である．無限積の収束性は $k=N$ からの無限積の収束性と同じ．また (1) より $|\log(1+x)| \le Cx^2+x$ である．log の連続性から

$$\log \lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n}(1+a_k) = \lim_{n\to\infty} \log \prod_{k=N}^{n}(1+a_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} \log(1+a_k)$$

である．

絶対級数 $\sum|\log(1+a_k)|$ の収束性を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}|\log(1+a_k)| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n} Ca_k^2+a_k = C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}a_k^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}a_k$$

右辺は収束するから，$\sum\log(1+a_k)$ は絶対収束する．よって収束するので，$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^{n}(1+a_k)$ は収束する．

(3)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ と $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2$ の収束を示せばよい．$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ とする．$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k-1)+1}-\frac{1}{3(2k)+1}>0$ より S_{2n} は単調増加する．同様に $S_{2n+1}=1/4-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1}\right)$ であり，$\frac{1}{3(2k)+1}-\frac{1}{3(2k+1)+1}>0$ より S_{2n+1} は単調減少する．$S_{2n+1}-S_{2n}=1/(3(2n+1)+1)$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}-S_{2n}=0$ である．また $S_{2n+1}=1/(3(2n+1)+1)+S_n>0$ より S_{2n+1} は有界な単調数列であるから収束する．したがって S_{2n} も収束して $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$ である．よって $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$ は収束する．

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}\right)^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^2}<\frac{1}{9}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$ である．ともに収束するから無限積も収束する．

$\boxed{2}$ (1)$y \in f_A(W^\perp)$ を任意にとる．ある $x \in W^\perp$ が存在して $y=f_A(x)$ である．任意の $u \in W$ について $(u,y)={}^tuAx={}^t({}^tAu)x=({}^tAu,x)=(f_A(u),x)=0$ である．よって $y\in W^\perp$ である．

A の固有値 $\lambda\in\mathbb{C}$ と固有ベクトル $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ をとる．$x,y\in\mathbb{C}^n$ について標準エルミート内積 $(x,y)={}^tx\overline{y}$ を定める．$\lambda(v,v)=(Av,v)=(v,\overline{{}^tA}v)=(v,\overline{\lambda}v)=\overline{\lambda}(v,v)$ である．$(v,v)>0$ より $\lambda=\overline{\lambda}$ である．よって $\lambda\in\mathbb{R}$ である．

(2)A の固有空間全ての直和を W とする．$\mathbb{R}^n=W\oplus W^\perp$ である．$f_A(W)\subset W$ となるから，$f_A|_{W^\perp}\colon W^\perp\to W^\perp$ を得る．$\mathbb{C}$ による定数倍を加えることで $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}$ 上線形空間 $\mathbb{C}^n$ に拡張する．$W,W^\perp$ も同様に $\overline{W},\overline{W^\perp}$ に拡張する．$f_A|_{W^\perp}$ は $\overline{W^\perp}$ 上の線形変換に拡張できる．$W^\perp\neq\{0\}$ なら $f_A|_{\overline{W^\perp}}$ の固有値 λ と固有ベクトル $v\neq0$ をとれる．$u=0+v\in\overline{W}\oplus\overline{W^\perp}$ とする．$Au=\lambda u$ である．λ は f_A の固有値であるから $\lambda\in\mathbb{R}$ である．よって $u\in\mathbb{R}^n$ としてよい．$u\in W^\perp$ となるがこれは W の定義に矛盾．よって $W^\perp=\{0\}$.

f_A の固有値 λ と固有ベクトル x について $\mathrm{Span}\{x\}=\mathrm{Span}\{x\}^{\perp\perp}$ であり，任意の $y\in\mathrm{Span}\{x\}^\perp$ について $(y,{}^tAx)=(Ay,x)=0$ より ${}^tAx\in\mathrm{Span}\{x\}$ である．よって ${}^tAx=\mu x$ とできる．$\lambda(x,x)=(Ax,x)=(x,{}^tAx)=(x,\mu x)=\mu(x,x)$ である．$(x,x)>0$ より $\lambda=\mu$ である．

$\mathbb{R}^n$ の任意の元 x は固有ベクトル $v_1,\dots,v_n$ の線形結合で表せる．$x=\sum_{i=1}^n a_iv_i$ とする．$Ax=\sum_{i=1}^n a_iAv_i=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_iv_i={}^tAx$ である．よって $A={}^tA$ である．

$\boxed{3}$ (1) 任意の $x,y\in[0,1]^\infty$ に対して $|x_k-y_k|\le1$ である．よって $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}|x_k-y_k|\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}=1$ である．よって d は $[0,1]^\infty\times[0,1]^\infty$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

$x=y$ なら $d(x,y)=0$ である．また $d(x,y)=0$ なら $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k-y_k|=0$ であるから $x_k=y_k$ である．よって $d(x,y)=0$ なら $x=y$ である．$d(x,y)=d(y,x)$ は明らか．

x,y,z について $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}|x_k-z_k| \le \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}|x_k-y_k| + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}|y_k-z_k|$ である．$n\to\infty$ とすると $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k-z_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k-y_k| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k-z_k|$ である．よって $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ である．

よって d は距離．

(2)$x_n\to a$ とする．$d(x_n,a)=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_{n,k}-a_k| \ge 2^{-i}|x_{n,i}-a_i| \to 0 \quad (n\to\infty)$ である．よって任意の k に対して $x_{n,k}\to a_k$．

任意の k に対して $x_{n,k}\to a_k$ とする．任意の ε に対して $2^{1-n_0}\le\varepsilon$ なる n_0 が存在する．このとき $\sum_{k=n_0}^{\infty} 2^{-k}|x_{n,k}-a_k| \le 2^{1-n_0}\le\varepsilon$ である．1 から n_0-1 までの整数 k について，ある N_k が存在して $n\ge N_k$ なら $|x_{n,k}-a_k|\le\varepsilon$ である．$N=\max\{N_1,\dots,N_{n_0-1}\}$ とする．このとき $\sum_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k}|x_{n,k}-a_k| \le \sum_{k=1}^{n_0-1} 2^{-k}\varepsilon \le 2\varepsilon$ である．よって $n\ge N$ なら $d(x_n,a)\le 3\varepsilon$ であるから $x_n\to a$ である．

(3)$\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ は有界閉区間 $[0,1]$ 内の点列であるから，収束部分列を必ずもつ．したがって収束部分列 $\{x_{n,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^{\infty}$ に対して数列 $\{x_{n+1,k_j^{(n)}}\}_{j=1}^{\infty}$ も収束部分列 $\{x_{n+1,k_j^{(n+1)}}\}_{j=1}^{\infty}$ を持つ．このとき $\{k_j^{(n+1)}\}_{j=1}^{\infty}$ は $\{k_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列である．これが任意の n について成り立つから数列 $\{k_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty},\{k_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty},\dots$ を得て，それぞれ前の数列の部分列となっている．数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $s_n=k_n^{(n)}$ で定める．$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は全ての m について $n>m$ では $\{k_j^{(m)}\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列となっている．したがって $\{x_{s_n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列になっている．よって $\{x_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である．

$\boxed{4}$ (1)$z=re^{i\theta}$ とする．

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{ire^{i\theta}}ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=\int_0^{\pi} ie^{ire^{i\theta}}d\theta=\int_0^{\pi} ie^{ir\cos\theta}e^{-r\sin\theta}d\theta$$
$$\int_{C_r}\left|\frac{e^{iz}}{z}\right|dz=\int_0^{\pi}\left|e^{-r\sin\theta}\right|d\theta\le\int_0^{\pi}d\theta=\pi$$

である．よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^{\pi} id\theta=\pi i,\quad \lim_{r\to\infty}\left|\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\le\lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi}\left|e^{-r\sin\theta}\right|d\theta=\int_0^{\pi}0d\theta=0$$

(2)

$r>\varepsilon>0$ に対して $z=\varepsilon$ から $z=r$ までの積分経路を $\Gamma^+_{\varepsilon,r}$ とする．$z=-r$ から $z=-\varepsilon$ までの積分経路を $\Gamma^-_{\varepsilon,r}$ とする．

$$\int_{\Gamma^+_{\varepsilon,r}}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\cos x+i\sin x}{x}dx$$
$$\int_{\Gamma^-_{\varepsilon,r}}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{r}^{\varepsilon}-\frac{\cos x-i\sin x}{-x}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{-\cos x+i\sin x}{x}dx$$

である．積分経路 $\Gamma^+_{\varepsilon,r},C_r,\Gamma^-_{\varepsilon,r},-C_\varepsilon$ によってできる閉曲線 Γ を考えると，被積分関数は原点を除いて正則であるから，$\int_\Gamma\frac{e^{iz}}{z}dz=0$ である．よって

$$\begin{aligned}0&=\int_{\Gamma^+_{\varepsilon,r}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\Gamma^-_{\varepsilon,r}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz\\&=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\cos x+i\sin x}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{r}\frac{-\cos x+i\sin x}{x}dx+I(r)-I(\varepsilon)\\&=2i\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x}dx+I(r)-I(\varepsilon)\to 2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\pi i\quad(r\to\infty)\end{aligned}$$

したがって $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi/2$ である．