0.1 R6 数学 A

$\boxed{1}$ (1) 一様収束であるから，$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, ^\forall n \geq N, \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ となる．$f(x)$ は連続であるから可積分である．

$$\left|\int_a^b f(x) - f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \to 0 \quad (n \to \infty)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(2)$x \in [a,b]$ に対して $0 < g(x) < 1$ であるから，$\sum_{k=0}^{\infty} g(x)^k$ は収束する．$g(x) := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} g(x)^k$ とする．$g(x)$ は有界閉区間上の連続関数であるから，$^\forall x, g(x) < M < 1$ となる M が存在する．

$$\left|\sum_{k=0}^{n} g(x)^k - g(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} g(x)^k - \sum_{k=0}^{\infty} g(x)^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} g(x)^k\right| \leq \frac{g(x)^{n+1}}{1-g(x)} \leq \frac{M^{n+1}}{1-M}$$
$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{k=0}^{n} g(x)^k - g(x)\right| \leq \frac{M^{n+1}}{1-M} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より一様収束．

(3)$1 \leq x \leq 3$ のとき，$0 < \frac{x}{1+x} < 1$ であるから，$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k$ は $\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}} = 1+x$ に一様収束する．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k dx = \int_1^3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k dx = \int_1^3 1+xdx = 6$$

$\boxed{2}$ (1)λ に対応する固有ベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ をとる．$Tv = \lambda v$ である．$T^2v = T(Tv) = \lambda Tv = \lambda^2 v$ であるから，λ^2 は T^2 の固有ベクトルである．

(2)$T^k = 0$ とする．T の固有値 λ に対して (1) と同様にして λ^k が T^k の固有値であることがわかる．零写像の固有値は全て零であるから，$\lambda^k = 0$ である．よって $\lambda = 0$ である．

(3)$F = \mathbb{C}$ より V は T の広義固有空間に分解できる．T の固有値は 0 のみであるから，V が T の広義固有空間である．すなわち $V = \left\{v \in V \mid {}^\exists n, T^n v = 0\right\}$ である．V の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に対して，$T^n v_i = 0$ となる n をそれぞれ n_i とする．$N := \max\{n_1, \cdots, n_n\}$ とすれば，$T^N = 0$ である．

(4)$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば，$f(x) = Ax$ で定まる線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $\det\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ であるから，0 以外の実数を固有値にもたない．$A^2 = -E$ であるから，f はべき零でない．

$\boxed{3}$ (1) 成立．

(2) 成立．$f(K)$ が連結でないと仮定する．$f(K) = (U \cap f(K)) \cup (V \cap f(K)), (U \cap f(K)) \cap (V \cap f(K)) = \emptyset, (U \cap f(K)) \neq \emptyset \neq (V \cap f(K))$ となる Y の開集合 U, V が存在する．$(f^{-1}(U) \cap K) \cup (f^{-1}(V) \cap K) = K, (f^{-1}(U) \cap K) \cap (f^{-1}(V) \cap K) = \emptyset, (f^{-1}(U) \cap K) \neq \emptyset \neq (f^{-1}(V) \cap K)$ である．K が連結であることに矛盾．

(3)$K \cap A$ の任意の開被覆 $S = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を任意にとる．$S' = S \cup \{X \setminus A\}$ とする．S' は K の開被覆であるから有限部分被覆 $\{U_{\lambda_1}, \cdots, U_{\lambda_n}, X \setminus A\}$ が存在する．よって $\{U_1, \cdots, U_n\}$ が $K \cap A$ の有限部分被覆であるからコンパクト．

$\boxed{4}$ (1)f が a で正則であるから，ある a の ε 近傍で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ とできる．一様収束しているから，$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ である．よって $f'(a) = c_1$ である．

$\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ の $z = a$ における留数は $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ のローラン展開が $\sum_{k=-2}^{\infty} c_k(z-a)^{k-2}$ であるから c_1 である．よって留数は $f'(a)$

(2)$(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$ である．よって極は $z = i, -i$． $\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$ は $z = i$ で正則であるから， $\frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$ の $z = i$ における留数は (1) より $\frac{d}{dz} \left. \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right|_{z=i} = \frac{1}{2ei}$ である．同様に $z = -i$ における留数は $\frac{d}{dz} \left. \frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right|_{z=-i} = 0$ である．

(3)

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2} Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{-R\sin\theta}}{(R^2-1)^2} \right| d\theta = \frac{\pi}{(R^2-1)^2} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

(4)$R_1, R_2 > 1$ に対して，

$$\begin{aligned} \left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} \right| &\leq \int_{R_1}^{-1} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + \int_{1}^{R_2} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ &\leq \int_{R_1}^{-1} \frac{1}{x^4} dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + \int_{1}^{R_2} \frac{1}{x^4} dx \to 0 \quad (R_1, R_2 \to \infty) \end{aligned}$$

よって広義積分は収束する．留数定理から $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2ei} = \frac{\pi}{e}$ である．