Physikzentrum
Hochschule für Technik
FHNW

Physik - Labor

W 6 Mech. Resonanz mit Fahrbahnpendel

1. Physikalische Grundlagen

In diesem Versuch wird ein Federpendel mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung und harmonischer Anregung untersucht. Die

geschwindigkeitsproportionale Reibkraft $F_{reib} = -\beta \cdot v$

wird dabei mittels Wirbelstrombremseffekt realisiert, die

harmonische Anregung $F_{anr.}(t) = \hat{F}_e \cdot \cos(\Omega t)$

durch kosinusförmiges Hin- und Her-Bewegen des Befestigungspunktes der Feder.
Der Bremskoeffizient β ist dabei bestimmt durch Anzahl und Stärke der verwendeten Magneten, deren Abstand von der Luftkissenbahn und der elektrischen Leitfähigkeit der Fahrbahn, in welcher die Wirbelströme induziert werden. Für eine fixe Anzahl und Anordnung der Magneten ist β damit eine Konstante.
Für die Kraftamplitude $\hat{F}_e$ der harmonischen Anregung mit Erregerkreisfrequenz Ω gilt

$$\hat{F}_e = \hat{y}_e \cdot k_1$$

mit der Erregeramplitude $\hat{y}_e$ (= Amplitude der "Hin- und Herbewegung") und der Federkonstante k_1 der entsprechenden Feder.
Im weiteren werden die wichtigsten Formeln, die Sie zur Auswertung des Versuches benötigen, zusammengestellt. Deren Herleitung finden Sie im Skriptum "Schwingungen und Wellen". Studieren Sie dort die Abschnitte **gedämpfte freie Schwingung** und **erzwungene Schwingung.**

1.1 Gedämpfte Schwingung.

Ein freies, geschwindigkeitsproportional gedämpftes Federpendel bewegt sich gemäss

$$y(t) = \hat{y} \cdot e^{-\Gamma t} \cdot \cos(\omega t - \delta)$$

$$\text{mit} \quad \Gamma = \frac{\beta}{2m} \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{k_{tot}}{m} \tag{1}$$

Dabei bezeichnet Γ die **Abklingkonstante** ($\Gamma = 1/\tau$), β den Bremskoeffizienten, ω die Kreisfrequenz des **gedämpften** Pendels und ω_0 jene des **ungedämpften** Pendels mit Gesamtfederkonstante k_{tot} und Masse m.

1.2 Erzwungene Schwingung

Die Formeln für Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung mit Erregerkreisfrequenz Ω (Erregerfrequenz $f_e = \Omega/2\pi$) und Erregeramplitude $\hat{y}_e$ lauten

$$\hat{y}(\Omega) = \frac{k_1 \cdot \hat{y}_e}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\Gamma^2\right)}} \tag{3}$$

$$\tan\delta = \frac{2\ \Omega\ \Gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{oder} \quad \cos\ \delta = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\ \Gamma^2\ \Omega^2}} \tag{4}$$

In der Literatur werden oft normierte Grössen verwendet:

Frequenzverhältnis $\gamma = \Omega/\omega_0 = f_e / f_0$

Dämpfungsgrad $\alpha = \Gamma/\omega_0 = \Gamma/ 2\pi f_0$

Damit erhalten wir aus obigen Formeln die normierten Auswerteformeln:

$$\hat{y}_N = \hat{y}_0 \cdot e^{-2\pi\alpha N} \tag{2a}$$

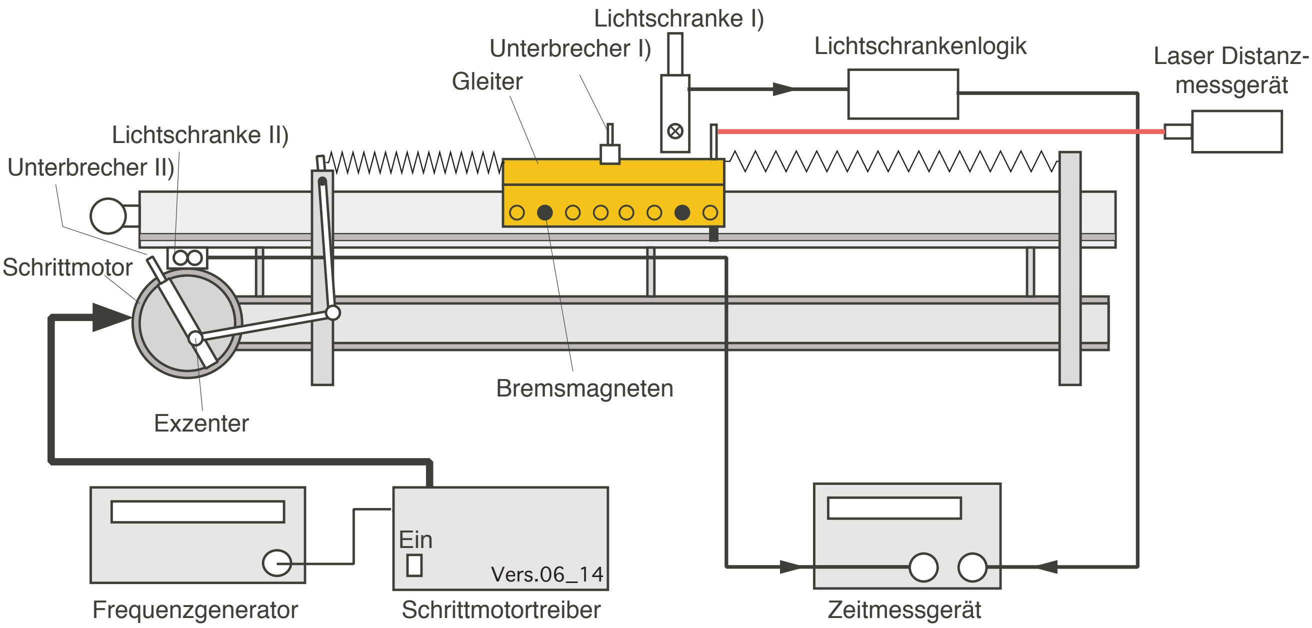
$$\hat{y}(\gamma) = \frac{k_1 \cdot \hat{y}_e}{m \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left((1-\gamma^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2\right)}} \tag{3a}$$

$$\tan\delta = \frac{2\ \gamma\ \alpha}{1-\gamma^2} \tag{4a}$$

2. Durchführung des Experimentes

2.1 Apparatives

Das Fahrbahnpendel ist untenstehend dargestellt. Die Apparatur besteht aus einem horizontal schwingenden Federpendel, welches über ein Übersetzungsgestänge (Übersetzung 1:10) durch eine Exzenterscheibe angeregt werden kann. Die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung wird mit kleinen Scheibenmagneten eingestellt, welche in die Bohrungen symmetrisch beidseits des Gleiters gesteckt und mit Federn fixiert werden. Nicht benötigte Magnete werden auf dem Gleiter platziert, sodass die Pendelmasse unverändert bleibt. Die Schwingungsdauer sowie die Phasendifferenz zwischen Anregung und Pendel wird mittels Lichtschranken gemessen. Die Pendelbewegung wird mittels eines Laserdistanz-Messgerätes mit 50 Hz Abtastrate aufgenommen. Die Anregung im Experiment "Erzwungene Schwingung" erfolgt mittels eines Schrittmotors.



2.2 Vorgehen beim Messen

2.2.1 Bestimmung der Eigenfrequenz (gedämpfte Schwingung)

Die Schwingungsdauer des Pendels wird mittels Lichtschranke I) gemessen, welche vom Unterbrecher I) ausgelöst wird. Die Lichtschranke muss (vor allem für die weiter unten beschriebene Bestimmung der Phasendifferenz) genau in der Ruhelage des Pendels schalten. Platzieren Sie deshalb den Gleiter sauber in Ruhelage (Exzentergestänge in Nulllage) und richten Sie die Schattengrenze des Unterbrechers auf die Mitte des Fotodetektors ein.

Bei genügend grosser Schwingungsamplitude wird die Lichtschrankenlogik auf "Pendel" eingestellt, damit nur jeder zweite Durchgang registriert wird. Bei kleinen Amplituden hingegen wird sie im Modus "Normal" betrieben.

Bei grösserem elektrischen Störpegel kann es vorkommen, dass die gemessenen Zeiten stark schwanken. Schalten Sie in diesem Falle am Zeitmessgerät das 100 kHz-Tiefpass-Filter zu. Beachten Sie auch, dass die Triggerniveaus des Messgerätes nach jedem Ausschalten wieder neu auf 1 – 4V eingestellt werden müssen!

2.2.2 Messung des Amplitudenverlaufs (gedämpfte Schwingung)

Die gedämpfte Schwingung wird mit dem Laser-Distanz-Messgerät mit einer Sampling-Rate von 50 Hz aufgenommen.

Weil der Clock des Distanz-Messgerätes sehr schlecht kalibriert ist, verwenden wir einen Run der Amplitudenresonanzmessung zur genaueren Zeit-Kalibration: Der eingeschwungene Zustand wird aufgenommen und abgespeichert. Das Verhältnis der eingestellten Anregungs-Frequenz zur Frequenz, ermittelt mittels eines Fits an die Messdaten, ist dann unser Korrekturfaktor, mit dem alle Zeiten multipliziert werden müssen.

Am einfachsten ist es wahrscheinlich, wenn Sie alle Zeitkolonnen der Messdaten mit diesem Faktor multiplizieren. Dieser Korrekturfaktor soll explizit und gut sichtbar irgendwo notiert werden.

2.2.3 Amplituden- und Phasenresonanz (erzwungene Schwingung)

Der verwendete Schrittmotor wird durch einen Signalgenerator gesteuert. Da es sich um einen Schrittmotor handelt, ist das Frequenzverhältnis zwischen Signalgenerator und Motor fix. Ermitteln Sie dieses Verhältnis, indem Sie z.B. am Signalgenerator 1 kHz einstellen und die resultierende Motorfrequenz unter Verwendung der Lichtschranke II) bestimmen. Bei allen anschliessenden Messungen genügt es dann, die Signalgeneratorfrequenz zu notieren.

Um eine "passable" Resonanzkurve zu erhalten, muss die Anregungsamplitude entsprechend der gewählten Dämpfung eingestellt werden. Wählen Sie deshalb als Anregungsfrequenz die zuvor gemessene Eigenfrequenz des Pendels und stellen Sie die Amplitude "passend" ein: Das Pendel soll in Resonanz keine Resonanzkatastrophe erleben aber auch nicht nur eine Mikrobewegung ausführen!

Aus der Zeitdifferenz Δt zwischen Nulldurchgang der Anregung und Nulldurchgang des Pendels erhalten wir die Phasendifferenz

$$\delta = 2 \cdot \pi \cdot \Delta t / T_e .$$

Dabei bezeichnet T_e die Erregungsperiode (identisch zur Periode der erzwungenen Schwingung). Es ist deshalb essentiell, dass beide Lichtschranken sauber justiert sind:

Die Lichtschranke II) ist horizontal verschiebbar. Justieren Sie diese unter Zuhilfenahme der Leuchtdiodenanzeige am Zeitmessgerät auf den Nulldurchgang der Exzenterscheibe.

Das Zeitmessgerät ist sodann auf die Messart "A -> B" einzustellen (Lichtschranke II) startet, I) stoppt die Uhr). **Achten Sie darauf, dass der Unterbrecher I) beim Durchgang von der richtigen Seite her die Zeitmessung stoppt**. Ist dies nicht der Fall, so unterbrechen Sie diese wie unter 2.2.1 mit einem Bleistift. Man beachte, dass nach Änderung der Anregungsfrequenz die Lichtschranke wegen dem Einschwingvorgang wieder "aus dem Takt" gefallen sein kann! Ferner muss die Lichtschrankenlogik wie unter 2.1.1 bei kleinen Amplituden von "Pendel" auf "Normal" umgestellt werden. Wenn alles korrekt läuft, sollten Sie bei Anregung unterhalb der Resonanz Werte $0 < \Delta t < T/4$ und oberhalb der Resonanz $T/4 < \Delta t < T/2$ erhalten.

3. Aufgaben

3.1 Gedämpfte Schwingung: Schwingungsdauer/Eigenfrequenz

Die Schwingungsdauer T ist mit einer Auflösung von 10^{-5} s mehrmals im Amplitudenbereich 20 mm bis 100 mm zu messen und der Mittelwert mit Fehlergrenzen zu berechnen. Achten Sie darauf, dass die Federn vor dem Start ruhig sind: Erschütterungen wie auch "zitternde" Federn stören vor allem bei kleinen Amplituden d.h. kleinen Geschwindigkeiten beim Nulldurchgang.

3.2 Gedämpfte Schwingung: Amplitudenverlauf

Die Erfassung der Abklingkurve erfolgt mit Hilfe des Laser-Distanzmessgerätes. Mit der gewählten Dämpfung werden 4 – 5 Runs aufgenommen und abgespeichert. Zum Vergleich und Test der Empfindlichkeit sollen auch noch je ein Run mit grösserer und einer mit kleiner Dämpfung aufgenommen werden. Damit die Pendelmasse im ganzen Experiment fix ist, müssen nicht verwendete Magneten oben auf den Reiter gelegt werden (**auch bei 3.1 beachten**).

3.3 Erzwungene Schwingung: Amplituden- und Phasenresonanz

Stellen Sie die Anregungsamplitude bei Resonanz wie unter 2.2.3 beschrieben ein und bestimmen Sie in passend kleinen Frequenzschritten (insbesondere in den Flanken der Resonanzkurve) Amplitude und Phasendifferenz in Funktion der Anregungsfrequenz Ω. Damit die Messpunkte (15 – 20) schön verteilt sind, tragen Sie die Amplitudenwerte sofort in ein Arbeitsdiagramm ein. Achten Sie darauf, dass Sie in den Flanken der Resonanzkurve genügend Messpunkte haben.
Zur besseren "Verankerung" der Amplitudenresonanzkurve soll auch ein Wert bei sehr kleiner und sehr grosser Erregerfrequenz aufgenommen werden.
Die Amplitude wird am bequemsten mit dem Distanzmessgerät bestimmt (angezeigte Werte notieren, nicht Differenz im Kopf berechnen!).
Dokumentieren Sie auch einen Einschwingvorgang: Wenn die Erregerfrequenz z.B. 0.2 Hz höher oder tiefer ist als die Eigenfrequenz, sollte eine Schwebung mit einer Periode von 5 s beobachtbar sein. Lenken Sie dazu das Pendel von Hand "vernünftig" aus und lassen sie es los. Wie gut der Einschwingvorgang sichtbar ist, ist abhängig von der Phasenlage, d.h. dem Zeitpunkt, unter dem Sie das Pendel los lassen wie auch von der Differenzfrequenz. Spielen Sie etwas, um ein gutes Beispiel zeigen zu können.

4. Auswertung

Allgemeines: Ob Sie in der Auswertung die normierte oder unnormierte Darstellung verwenden und ob Sie mit Kreisfrequenzen oder "normalen" Frequenzen rechnen, ist Ihnen freigestellt. Achten Sie aber darauf, dass Sie nicht mischen, dies führt sicher zu Fehlern!

4.1 Gedämpfte Schwingung: Schwingungsdauer/Eigenfrequenz

Der Mittelwert von T ist mit Fehlergrenzen zu berechnen.
Mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 4.2 berechne man die Schwingungsdauer T_0 und die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems. Man beurteile, ob der Unterschied zwischen T und T_0 (resp. ω und ω_0) überhaupt feststellbar ist mit der vorliegenden Messeinrichtung.

4.2 Gedämpfte Schwingung: Amplitudenverlauf

Ein Fit an die Messdaten liefert uns für jeden Run Abklingkonstante Γ und Kreisfrequenz ω. Berechnen Sie daraus die Kreisfrequenz ω_0 und stellen Sie die Werte aller Runs in einem Diagramm mit Fehlerbalken dar. Stimmen die Werte innerhalb ihrer Fehlergrenzen überein oder sind die vom Fit gelieferten Unsicherheiten eher zu klein/zu gross? (Der Fehler von ω_0 berechnet sich aus Fehler von ω und Γ gemäss .....).
Für weitere Vergleiche werden die Werte der 4-5 Runs mit identischer Dämpfung gemittelt.

4.3 Erzwungene Schwingung: Amplituden- und Phasenresonanz

Amplitudenresonanz:

Die Messerwerte $\hat{y}(\Omega)$ werden in einem Diagramm dargestellt und mit der theoretischen Funktion gefittet, was uns die Grössen ω_0, Γ und $\hat{y}_e$ liefert.
Da das Pendel zweiseitig mit zwei identischen Federn eingespannt ist ($k_{tot} = 2k$ und damit $\omega_0^2 = 2k/m$) aber einseitig angeregt wird $k_1 = k$, kann die Anzahl Parameter in der Auswerteformel (3) noch reduziert werden:

$$\frac{k_1}{m} = \frac{1}{2}\omega_0^2$$

Phasenresonanz:

Auftragen der Messwerte gegen die Erregerfrequenz Ω in einem Diagramm und Anpassen der Phasenresonanzfunktion, wobei die Parameter Γ und ω_0 gefittet werden.

Hinweis: Da der Tangens bei 90° einen Pol hat, benimmt sich das Fit-Programm in den meisten Fällen gutmütiger, wenn wir die Formel mit der Kosinusfunktion verwenden, welche identisch ist zur Formel mit dem Tangens ($0 < x < 180: \ \tan(x) = \sin(x)/\cos(x) = +\sqrt{1-\cos^2(x)}/\cos(x)$ oder $\cos(x) = ...$).

Ferner ist zu beachten, dass die Phasenmessung bei tiefen/hohen Frequenzen, wegen der kleinen Schwingungsamplitude, viel empfindlicher ist auf Erschütterungen. Aus diesem Grunde müssen diese Punkte ev. beim Phasenfit als Ausreisser behandelt werden (= darstellen aber nicht fitten).

4.4 Resultatzusammenstellung

In der Resultat-Zusammenstellung sollen die beiden Diagramme der Amplituden- und Phasenresonanz übereinander und mit korrespondierenden Frequenz-Massstäben angeordnet werden. Markieren Sie die Resonanzstelle und die "Breite" der Resonanzkurve, aus der die Güte Q berechnet werden kann.
Vergleichen Sie die beiden Q-Werte "direkt bestimmt" und "aus Linienbreite berechnet". Dabei muss wiederum beachtet werden, dass wir zwei Federn verwenden, aber nur einseitig anregen. Aus diesem Grunde muss die Formel für die Berechnung von Q aus der Linienbreite (Skriptum) um einen Faktor 2 korrigiert werden.
Die mit den verschiedenen Methoden erhaltenen Grössen (ω_0, Γ, $\hat{y}_e$) sollen tabellarisch wie auch graphisch miteinander verglichen und diskutiert werden (für ω_0 haben wir auch einen Theoriewert, $\hat{y}_e$ wurde an der Apparatur eingestellt).