

Computerversuch

Noah Hüsler <yatekii@yatekii.ch>

October 24, 2016

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Typen von Messfehlern

- *Systematische Fehler* werden verursacht durch die Versuchsanordnung, die Versuchsumgebung oder den Messvorgang. Sie bewirken eine systematische Abweichung des Messergebnisses vom eigentlichen Wert. Diese Abweichung wird auch Unsicherheit genannt. Diese Art von Fehler kann – werden sie erkannt – meistens korrigiert werden.
- *Zufällige Fehler* sind immer vorhanden und lassen sich durch mehrmalige Wiederholung eines Experimentes beliebig verkleinern.

1.2 Genauigkeit bei der Angabe von Messresultate

Es ist nicht hilfreich bei Resultaten mehr signifikante Ziffern anzugeben als jene, die innerhalb des Fehlerbereiches liegen. In einem Beispiel wird angenommen dass der absolute Fehler 3.6 Sekunden betrage. Der Mittelwert aus den Messungen betrage 118.8 Sekunden. Mit einem resultierenden relativen Fehler von 3% ist es durchaus angebracht die Resultate auf ganze Zahlen zu runden, da alle weiteren signifikanten Ziffern sowieso in den Toleranzen verloren gingen.

1.3 Fehlerbestimmung bei Einzelgrössen

1.3.1 Einfacher Mittelwert

Seien x_1, x_2, \dots, x_N N Messergebnisse aus einer Reihe von identischen Experimenten, so wird der Mittelwert anhand von Gleichung 1 bestimmt werden. Sein zugehöriger Fehler kann mit Gleichung 2 bestimmt werden. Beide Werte werden genauer mit grösserem N .

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}} \quad (2)$$

Das resultierende Ergebnis wird wie in Gleichung 3 ersichtlich formuliert.

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \quad (3)$$

1.3.2 Mittelwert mit Gewichten

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$$

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$$

...

$$x_n = \bar{x}_n \pm s_{\bar{x}_n}$$

Der wahrscheinlichste Wert \bar{x} wird durch einen gewichteten Mittelwert mit der Gleichung 4 erreicht. Die Gewichte dazu werden nach 5 berechnet. Den zugehörigen Fehler wird durch 6 bestimmen.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}} \quad (4)$$

$$g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2} \quad (5)$$

$$\text{Fehler des gewichteten Mittelwertes: } s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}}} \quad (6)$$

Messergebnisse mit betragsmässig kleineren Fehlern werden also stärker gewichtet.

1.4 Fehlertheorie

Eine Werteverteilung der Form einer Gausskurve kann mit der Gleichung in 7 beschrieben werden. Damit kann etwas über die Werteverteilung und auch den Wahren Wert ausgesagt werden

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ wobei} \quad (7)$$

mit

Erwartungswert (wahrer Wert) : x_0

Standardabweichung : σ

Die experimentelle Standardabweichung kann mit Gleichung 8 bestimmt werden. Mit steigendem N nähert sich der gemessene Mittelwert \bar{x} dem wahren Wert x_0 an.

$$\text{Experimentelle Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (8)$$

Die experimentelle Standardabweichung s konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen σ . Der Fehler der Einzelmessung s_{T_i} und der Fehler $s_{\bar{T}}$ des Mittelwertes stehen in der in 9 beschriebenen Beziehung.

$$s_{\bar{T}} = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

1.5 Regression

Im allgemeinen wird bei der Regression iteriert bis mit 10 ein Minimum für χ^2 gefunden ist.

$$\chi^2(a_0, a_1, \dots) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots)]^2}{\sigma_i^2} \quad (10)$$

mit

Gegebene Gesetzmässigkeit $f(x, a_0, a_1)$

Messwertpaare x_i, y_i

- *Nichtlineare Funktionen* f : Nichtlineare Regression.
- *Polynomiale Funktion* f : Lineare Regression. Unabhängig vom Startwert existiert lediglich ein Minimum. Startwerte für a_i daher nicht relevant.

Berechnung des Fehlers σ_i der Einzelmessung aus dem Fit:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_1^N (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots))^2}{N - m}}$$

Wobei N die Anzahl Messergebnisse, m die Anzahl Parameter a_0, \dots, a_m bezeichnet.

1.6 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben seien 2

Resultatgrösse : $R = R(x, y, z, \dots)$

Argumente (gemessen und/oder aus Literatur) :

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

$$y = \bar{y} \pm s_{\bar{y}}$$

$$z = \bar{z} \pm s_{\bar{z}}$$

und gesucht sind Mittelwert \bar{R} und mittlerer Fehler $s_{\bar{R}}$. Dann kann der mittlere absolute Fehler (statistischer Fehler) mit dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz* in 11 bestimmen werden:

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots} \quad (11)$$

1.7 Spezialfälle des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$\text{Addition und Subtraktion : } s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

$$\text{Multiplikation und Division : } r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\text{Potenzen : } r_R = \frac{s_R}{R} = n * r_x.$$

In Endresultaten sind immer absolute Fehler anzugeben.

2 Durchführung

Die Messwerte zu den einzelnen Versuchen wurden durch den Dozenten zur Verfügung gestellt. Sie sind alle im Anhang vorzufinden. Die zur Versuchsdurchführung verwendeten Tools beinhalten den Taschenrechner, Excel und Python mit diversen Libraries (Jupyter, Scipy, Pandas, Matplotlib, Seaborn).

3 Auswertung

Dieses Kapitel befasst sich mit den Möglichkeiten und Tricks der Fehlerrechnung. Normalerweise würde dieses Kapitel separat geführt, jedoch ist das Ziel dieses Versuches, die Fehlerrechnung näher kennenzulernen.

3.1 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit soll durch die Mittlere Laufzeit über eine bekannte Strecke bestimmt werden.

3.1.1 Messwerte

Länge der Messstrecke : $s = 2.561 \pm 0.003m$

Raumtemperatur : $\theta = 23^\circ C$

Messprotokoll: TODO:

3.1.2 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit laut Wikipedia

Wikipedia führt eine Formel 12 zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit bei einer bestimmten Temperatur. Diese kann auch in *Horst Kuchlings Taschenbuch der Physik* gefunden werden.

$$c_{luft} = (331.3 + 0.606 \cdot \theta) \frac{m}{s} = (331.3 + 0.606 \cdot 23) \frac{m}{s} = 345.24 \frac{m}{s} \quad (12)$$

3.1.3 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit

$$\text{Mittlere Laufzeit : } \bar{t} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} t_i = 7.32ms$$

$$\text{Fehler der mittleren Laufzeit : } s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{20 \cdot 19}} = 0.000074ms$$

$$\text{Standardabweichung : } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{19}} = 0.00033ms$$

Mithilfe des zuvor ermittelten Mittelwertes kann die Mittlere Schallgeschwindigkeit als:

$$c = 349.74 \frac{m}{s}$$

festgestellt werden. Die Unsicherheit des Mittelwertes der Schallgeschwindigkeit kann mithilfe des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ersichtlich in (1) errechnet werden.

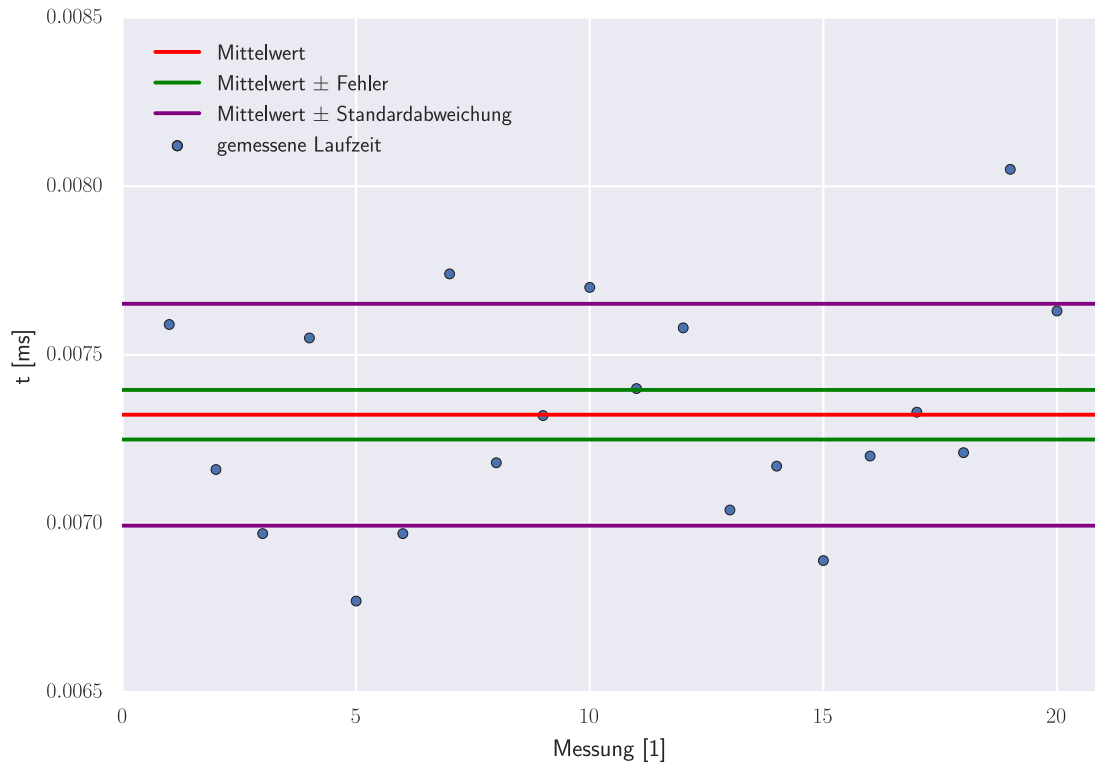


Figure 1: Laufzeiten des Schalls

$$R(x, y) = c(s, t) = \frac{s}{t}$$

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2}$$

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} s_{\bar{t}}\right)^2}$$

$$s_{\bar{s}} = 3.54 \frac{m}{s}$$

Relativer Fehler der Zeit : 1.00%

Relativer Fehler der Geschwindigkeit : 1.01%

3.2 Eisengehalt

3.2.1 Messwerte

TODO:

3.2.2 Einfacher Mittelwert

Der einfache Mittelwert und sein Fehler ergeben sich analog zu Aufgabe 1.

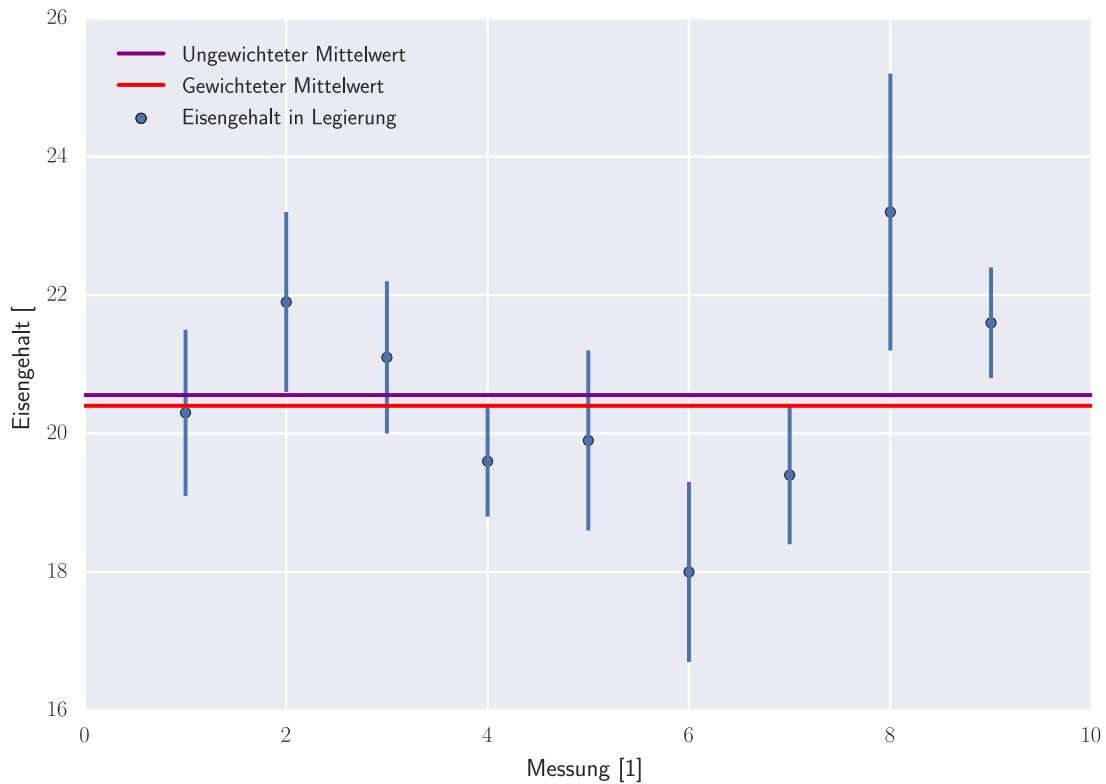


Figure 2: Eisengehalt in einer Legierung

$$\bar{x} = 20.56\%$$

$$s_{\bar{x}} = 0.52\%$$

3.2.3 Gewichteter Mittelwert

Der gewichtete Mittelwert und sein Fehler werden als

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}} = 20.40\%$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}}} = 0.36\%$$

bestimmen.

3.3 Federkonstante

3.3.1 Messwerte

3.3.2 Rechnung mittels Taschenrechner

3.3.3 Linear Regression

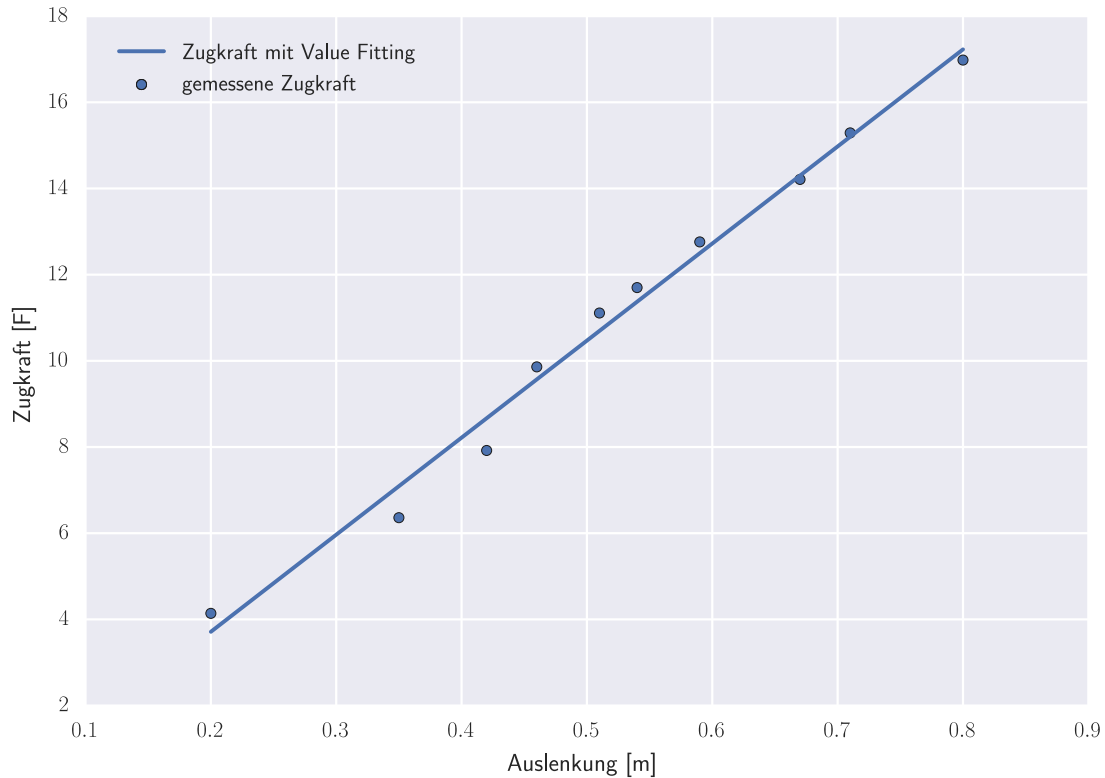


Figure 3: Federkraft im vorgespannten Zustand

Mit dem Rechner Die Steigung der Regressionsgeraden und somit die Federkonstante k wird wie folgt erhalten:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 22.53 \frac{N}{m}$$

Der zugehörige Achsenabschnitt und somit die Ruhekraft F_0 errechnet sich aus:

$$F_0 = \bar{y} - k \cdot \bar{x} = -0.79 N$$

Die empirische Korrelation ist:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = 0.9939$$

mit zugehörigem Bestimmtheitsmass:

$$R^2 = r_{xy}^2 = 0.9879$$

Mit scipy Der Fit errechnet die folgenden relevanten Werte für das Experiment:

$$k = 22.53 \frac{N}{m}$$

$$F_0 = -0.79 N$$

$$r_{xy} = 0.9939$$

/Library/Frameworks/Python.framework/Versions/3.5/lib/python3.5/site-packages/ipykernel/_

3.4 Offset, Amplitude, Frequenz und Phase eines Pendels

Von einem Pendel ist die Auslenkung in y-Richtung zu verschiedenen Zeitpunkten t_i bekannt. Mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate können Offset, Amplitude, Frequenz und Phase des Pendels bestimmt werden. Die Funktion des Pendels welche mit dem Fit angenähert wird schreibt sich wie folgt:

$$y(t) = A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0$$

3.4.1 Messwerte

TODO:

3.4.2 Value Fitting

Mit der Methode der Chi-Quadrate (nichtlineare Regression) wurden durch scipy die folgenden besten Werte ermittelt:

$$A = (1.22 \pm 0.03)m$$

$$\Gamma = (0.05 \pm 0.0017) \frac{1}{s}$$

$$f = (0.05 \pm 0.0002) Hz$$

$$\delta = (-5.77 \pm 0.02)$$

$$y_0 = (0.05 \pm 0.01)m$$

3.5 Tiefpass

3.5.1 Messwerte

$$U_e = 4V_{pp} \Rightarrow \pm 2.0 \hat{V}$$

$$R = 500 \Omega$$

3.5.2 Berechnung von C

Die Kapazität C kann durch zwei verschiedene Funktionen bestimmt werden:

$$\mathcal{A}_a = \frac{\mathcal{A}_e}{\sqrt{1 + (2\pi f C R)^2}}$$

$$\phi = \arctan(-\omega RC)$$

Die Kapazität kann mit einem Fit an die Ausgangsspannung U_a auf

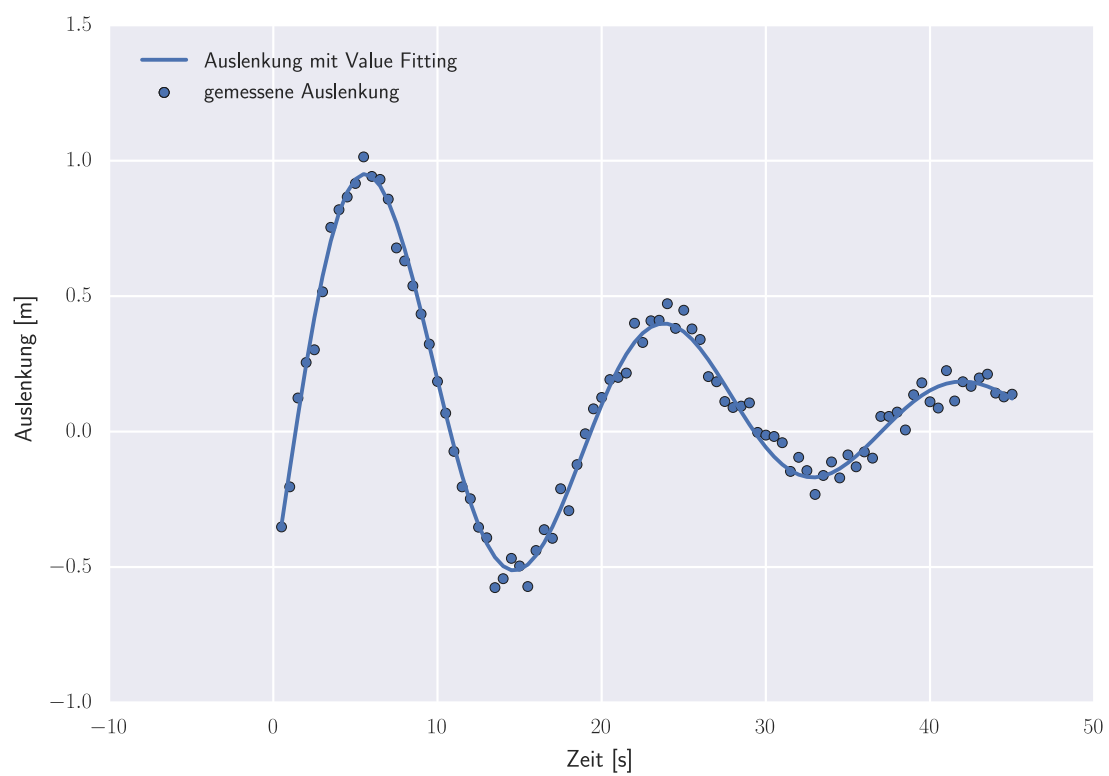


Figure 4: Auslenkung eines Pendels über Zeit

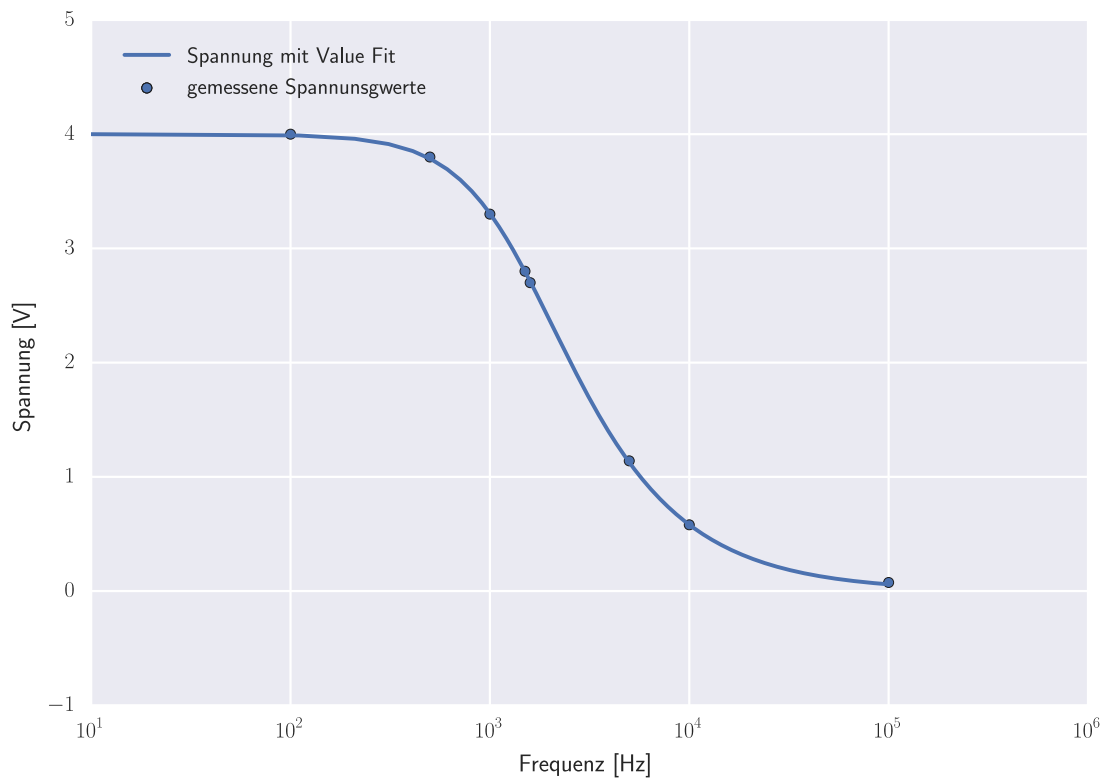


Figure 5: Spannung eines Tiefpasses

$$C = 0.22 \mu F$$

und mit einem Fit an die Phase U_a auf

$$C = 0.20 \mu F$$

bestimmt werden.

4 Resultate und Diskussion

4.1 Schallgeschwindigkeit

4.1.1 Ergebnisse

Grösse	Wert
Schallgeschwindigkeit in Luft	$345.3 \frac{m}{s}$
$c_{luft,wikipedia}$	$343 \frac{m}{s}$
Mittelwert	$349.74 \frac{m}{s}$
\bar{c}	

Grösse	Wert
Unsicherheit des Mit- telw- ertes	$3.54 \frac{m}{s}$
$\overline{s_{c(s,t)}}$	
Schallgeschwindigkeit	$349.74 \frac{m}{s}$
$\frac{c_{luft}}{c_{luft}} = \pm$	
$\frac{c_{luft}}{c_{luft}} \pm$	$3.54 \frac{m}{s}$
$\overline{s_{c_{luft}}}$	

Der experimentell bestimmte Wert hat somit eine Abweichung von 1.27% von Literaturwerten. Dies zeigt dass der Wert ziemlich genau bestimmen werden konnte. Des weiteren sind zu den Literaturwerten keine Toleranzen bekannt. Dies lässt darauf schliessen dass diese schlichtweg unbekannt sind oder einfach weggelassen wurden. Somit kann es gut sein dass der errechnete Wert im Toleranzbereich liegt.

Ausserdem liegen 13 von 20 Messpunkten innerhalb des Standardabweichungsintervalles. Dies sind 65% was ziemlich gut dem erwarteten Wert von 68% entspricht. Mit zusätzlichen Experimenten und Messungen würde sich der Wert gut gegen 68% annähern.

Die Messresultate sind alles in allem plausibel und ergeben gute Werte.

4.2 Eisengehalt

	gewichtet	ungewichtet
Mittelwert	20.56%	20.40%
Unsicherheit	0.52%	0.36%
Eisengehalt	$(20.56 + 0.52)\%$	$(20.40 + 0.36)\%$

die Resultate des gewichteten sowie ungewichteten Mittelwert unterscheiden sich um lediglich 0.7532%. Ein Unterschied im Promillebereich. Jedoch beträgt die Unsicherheit beim gewichteten Mittelwert ganze 30.55% weniger, was ihn um einiges präziser als den ungewichteten Mittelwert macht. Er wäre dem ungewichteten Mittelwert vorzuziehen für weitere Berechnungen.

4.3 Federkonstante

	TI-89	linear Regression
Federkonstante k	$22.53 \frac{N}{m}$	$22.53 \frac{N}{m}$
Vorspannung F_0	-0.79N	-0.79N
Empirische Korrelation r_{xy}	0.9939	0.9939
Bestimmtheitsmass R^2	0.9879%	0.9879%

Beide betrachteten Methoden – mit dem TI-89 sowie auch mit der linearen Regression von scipy wurden identische Ergebnisse erzielt. Es ist somit anzunehmen, dass die beiden Instrumente mit der gleichen Algorithmen (wahrscheinlich die Methode der kleinsten Quadrate) arbeitet.

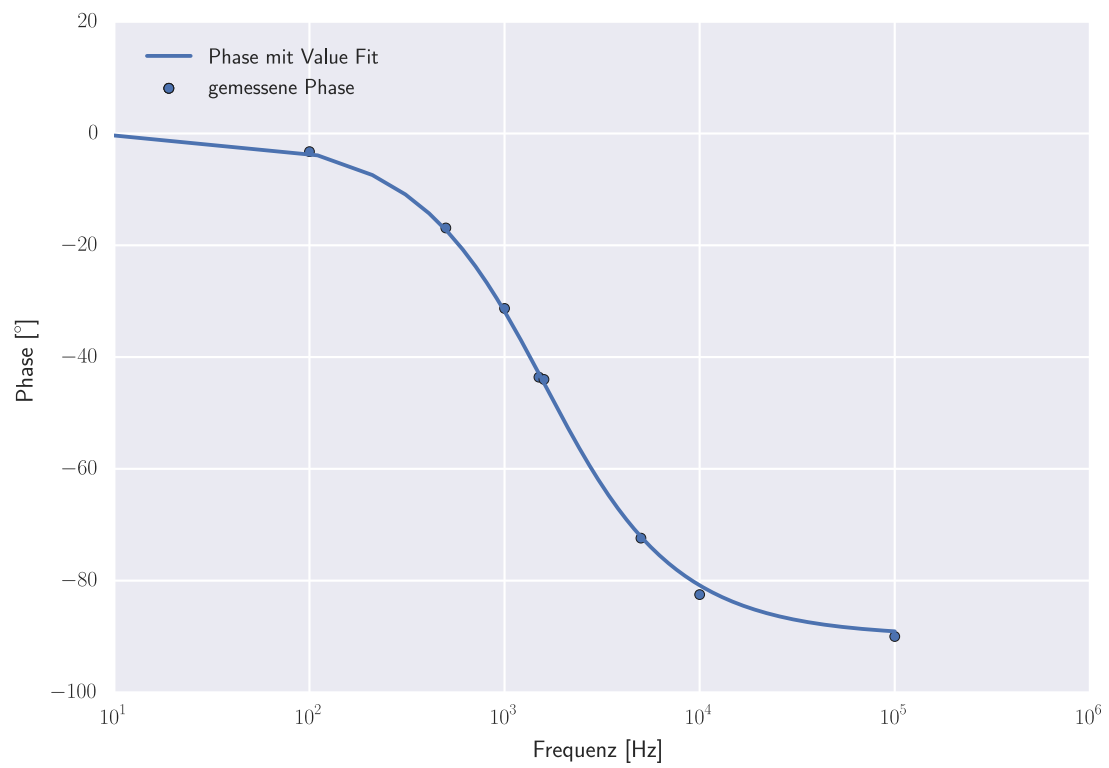


Figure 6: Phase eines Tiefpasses

4.4 Pendel

Mit einem Fit der Gleichung für das gedämpfte Pendel lassen sich die nachstehenden charakteristischen Werte für das schwingende Pendel bestimmen.

Grösse	Wert
Amplitude A	$(1.22 \pm 0.03)\text{m}$
Dämpfung Γ	$(0.05 \pm 0.0017)\frac{1}{\text{s}}$
Frequenz f	$(0.05 \pm 0.0002)\text{Hz}$
Phasenverschiebung δ	(-5.77 ± 0.02)
Anfangsauslenkung y_0	$(0.05 \pm 0.01)\text{m}$

Bei einem Vergleich der gefitteten Kurve mit der Kurve der gemessenen Werten lässt sich feststellen dass diese Werte alle plausibel sind. Gute Anfangswerte waren nicht notwendig, der Fit hat bestens ohne geklappt!

4.5 Tiefpass

Bei diesem Versuch wurde wiederum mit einem nichtlinearen Fit gearbeitet. Wiederum war es keine Notwendigkeit die Startwerte zu berechnen. Bei diesem Versuch standen jedoch zwei verschiedene Messreihen zur Verfügung um die gesuchte Kapazität C zu bestimmen.

	C per Spannungskurve	C per Phase
Kapazität C	$(216.84 \pm 0.93)\text{nF}$	$(197.54 \pm 3.08)\text{nF}$

Bei diesem Versuch liefern beide alternativen Methoden unterschiedliche werte. Wie man bei den Plots der Fitting Curves sehen kann ist die Kurve des Spannungsfits sehr passgenau an den Messpunkten angelegt. Dies ist bei der Kurve des Phasenfits nicht so gut der Fall. Hier ist anzunehmen, dass das Datenset für den Fit der Phase zu klein beziehungsweise ungünstig war und somit kein so guter Fit gemacht werden konnte. Alles in allem wäre dem Spannungsfits mehr zu vertrauen.