

M 1 Geschwindigkeit einer Pistolenkugel

1. Physikalische Grundlagen

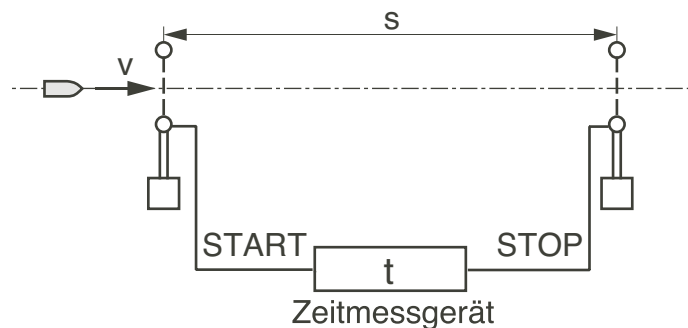
Die Geschwindigkeit eines frei fliegenden Geschosses kann mit verschiedenen Methoden bestimmt werden. Vier Möglichkeiten sollen im Folgenden kurz beschrieben werden. Die dritte Methode ist dabei eher als Demonstration eines Drehstosses zu verstehen denn als "Messmethode", welche sehr gute Resultate liefert.

1.1 Flugzeitmethode

Man misst die Flugzeit t , die der Körper braucht, um eine genau abgesteckte Basisstrecke s zu durchlaufen. Man erhält auf diese Weise die mittlere Geschwindigkeit nach der Definitionsgleichung:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Die verhältnismässig grossen Geschwindigkeiten von Geschossen lassen sich auf kürzeren Basisstrecken nur mit elektronischen Hilfsmitteln genügend genau messen. Als Start/Stop-Schranken S kommen z.B. Lichtschranken oder induktive Geber (vgl. 35 mm-Flabkanone Oerlikon) in Frage, deren Signale ein Zeitintervallmessgerät steuern.



Figur 1

Es sei noch darauf hingewiesen, dass in der Kern- und Partikelphysik ohne weiteres Flugzeiten im Nanosekundenbereich mit einer Genauigkeit von wenigen Picosekunden gemessen werden können. Man bestimmt so die Geschwindigkeiten von Elementarteilchen, welche von der Grössenordnung der Lichtgeschwindigkeit sind. (Das Licht legt in einer Nanosekunde eine Strecke von rund 30 cm zurück!)

1.2 Ballistische Methode

Hier wird **der Impuls** $p = mv$ des Körpers im Moment des Aufpralls auf ein ballistisches Pendel **gemessen**. Dieses hat eine wesentlich grössere Masse und ist so beschaffen, dass das Geschoss darin stecken bleibt. Demzufolge handelt es sich bei dem Vorgang um einen vollkommen inelastischen Stoss. Man überzeugt sich leicht, dass dabei fast die ganze kinetische Energie des Projektils in Wärme umgewandelt wird. Der Energiesatz kann also nicht auf die mechanischen Energien der beteiligten Körper angewendet werden!

Nach dem Impulssatz gilt (Figur 2):

$$p = mv = (m + M) \cdot u \quad (2)$$

Darin bedeuten M die Masse und u die Geschwindigkeit des Pendels unmittelbar nach dem Stoss. Die verbleibende kinetische Energie wird beim Ausschlagen des Pendels in potentielle Hubenergie umgewandelt.

Mit Hilfe des Energiesatzes ersetzen wir u durch die Hubhöhe h :

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (3)$$

Die sehr kleine Hubhöhe h wird schliesslich indirekt über den an einem Massstab abzulesenden Horizontalausschlag x des Pendels bestimmt. Aus Fig. 2 lesen wir ab

$$h = l \cdot (1 - \cos \varphi). \quad (4)$$

Es ist:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (x/a)^2}}$$

Damit könnten wir uns im Prinzip zufrieden geben. Wir beachten aber:

a) Der Schwerpunkt des Pendels und damit seine Länge l , können nicht mit genügender Genauigkeit ermittelt werden. Wir ersetzen deshalb l durch die leicht und präzise messbare Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$$

und erhalten

$$u = \frac{g}{2\pi} \cdot T \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (x/a)^2}}\right)}$$

b) Da $(x/a)^2 \ll 1$, liegt eine Taylorentwicklung dieser Formel nahe. Um sodann den Algebraaufwand möglichst klein zu halten, entwickeln wir in zwei Stufen:

Die Entwicklung von $1/\sqrt{1+z}$ mit $z = (x/a)^2$ um $z=0$ ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots$$

Dies setzen wir oben ein

$$u \approx \frac{g}{2\pi} \cdot T \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{a}\right)^4} = \frac{g}{2\pi} \cdot T \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

und entwickeln die übrig gebliebene Wurzel nochmals ($\sqrt{1-z} = 1 - 1/2 z + \dots$) und erhalten

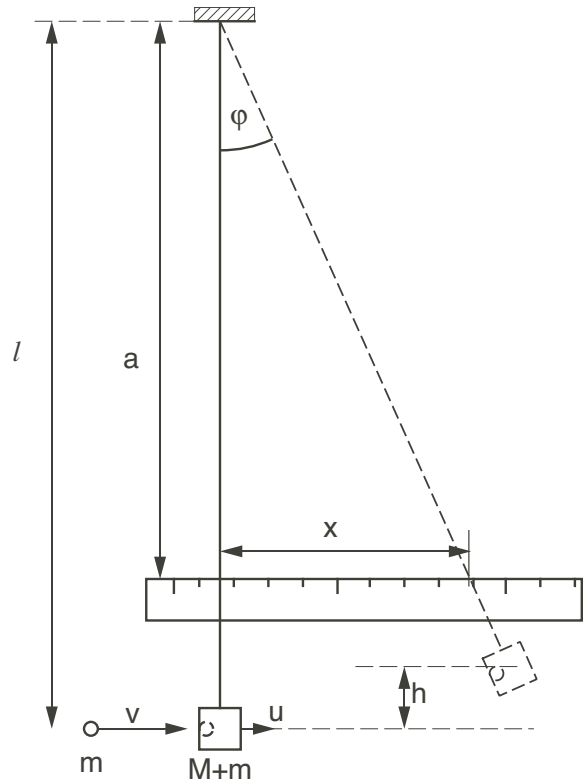
$$u = \frac{g}{2\pi} \cdot T \cdot \frac{x}{a} \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

Damit ergibt sich schliesslich mit (2) für die Geschwindigkeit des Geschosses:

$$\boxed{v = \frac{g}{2\pi} \cdot \frac{M+m}{m} \cdot T \cdot \frac{x}{a} \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} \quad (5)$$

Das 2. Glied in der eckigen Klammer ist von der Grössenordnung 10^{-2} . Der nächste Term der Taylorreihe - der systematische Fehler unserer Näherung - ist folglich von der Grössenordnung 10^{-4} oder 0.1‰.

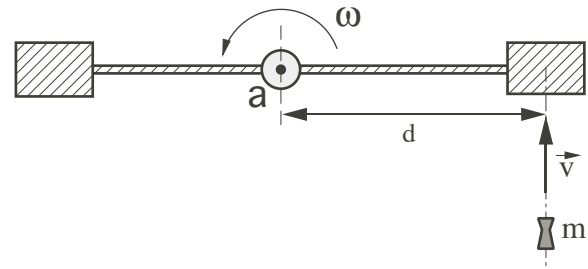
Die ballistische Methode erfordert zunächst die Kenntnis der drei apparativen Grössen M , T und a , wo M und a einmalig mit genügender Genauigkeit zu bestimmen sind und deren Konstanz zu überwachen ist. Der eigentliche Messvorgang betrifft die Geschossmasse m und den ballistischen Ausschlag x .



Figur 2

1.3 Drehstoss

Bei dieser Methode dringt das Geschoss in eine Hantel ein welche um eine starre Achse, frei drehend, gelagert ist. Nach dem Eindringen drehen Hantel und Kugel mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse a. Wiederum wird ein Teil der kinetischen Energie des Geschosses in Wärme umgewandelt und damit ist die mechanische Energie nicht erhalten.



Figur 3

Auch Impulserhaltung gilt nicht, da beim Eindringen der Kugel Lagerkräfte wirken (wenn Sie das Lager beim Einschuss in der Hand halten würden, würden Sie einen Schlag verspüren). Bei einer ideal gelagerten Hantel übt das Lager zwar eine Kraft aber kein äusseres Drehmoment auf das System "Hantel + Kugel" aus und folglich ist der Drehimpuls (bezüglich der Hantel-Drehachse a) erhalten. Für eine geradlinig mit v bewegte Punktmasse m bezüglich eines Referenzpunktes auf der Drehachse a beträgt der Drehimpuls:

$$\vec{L}_a = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

wobei \vec{r} den Vektor vom Referenzpunkt zum Geschoss bezeichnet. Beim Eindringen der Kugel in die Hantel bleibt der Gesamtdrehimpuls des Systems bezüglich a erhalten:

$$L_a = L_{a,Kugel} + L_{a,Hantel} = \text{konst.}$$

Bei anfänglich ruhender Hantel gilt also

Drehimpuls vorher	Drehimpuls nachher
$L_a = m \cdot d \cdot v + 0$	$= (I_{a,H} + m \cdot d^2) \cdot \omega$

wobei d der Stossparameter, $I_{a,H}$ das Massenträgheitsmoment der Hantel bezüglich a und ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems nach dem Einschuss der Pistolenkugel bedeuten. Die Geschwindigkeit der Pistolenkugel berechnet sich somit zu

$$v = \frac{I_{a,H} + m \cdot d^2}{m \cdot d} \cdot \omega = \left(\frac{I_{a,H}}{m \cdot d} + d \right) \cdot \omega \quad (6)$$

1.4 Der Einfluss des Luftwiderstandes auf die Geschwindigkeit

Will man die Mündungsgeschwindigkeit v_0 bestimmen oder Messungen vergleichen, welche an verschiedenen Stellen der Flugbahn vorgenommen wurden, so muss man die Geschwindigkeitsabnahme zufolge des Luftwiderstandes kennen. Für den Luftwiderstand gilt die Gleichung:

$$F_L = \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho_L \cdot v^2 \quad (7)$$

- Darin bedeuten
- v : Momentangeschwindigkeit des Geschosses
 - A : Querschnittsfläche des Geschosses
 - ρ_L : Luftdichte, abhängig von Luftdruck und Temperatur. Sie kann Tabellen entnommen oder mit der Gasgleichung aus der Normdichte $\rho_n = 1.293 \text{ kg/m}^3$ berechnet werden.
 - c_w : Widerstandsbeiwert des Projektils, von der Form abhängig. Als ungefähre Richtwert kann für unsern Fall $c_w = 0.75 \pm 0.08$ eingesetzt werden.

Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom zurückgelegten Weg s können wir nun auf Grund der folgenden Überlegung berechnen:

Die Abnahme der kinetischen Energie des Geschosses ist gleich der von der Luftwiderstandskraft verrichteten Bremsarbeit

$$\begin{aligned} dE_{kin} &= -F_L ds \\ m \cdot v \cdot dv &= -\frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot ds \end{aligned}$$

Wir erhalten die Differentialgleichung $\frac{dv}{v} = -k \cdot ds$

und mit den Anfangsbedingungen $s = 0, v = v_0$ die Lösung

$$v = v_0 \cdot e^{-k \cdot s} \quad \text{worin} \quad k = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho_L}{2m}$$

Die Geschwindigkeit nimmt längs des Flugweges exponentiell ab. Im vorliegenden Versuch ist $k \cdot s$ auf sehr kleine Werte beschränkt, weshalb die lineare Näherung genügt:

$$v = v_0 \cdot (1 - k \cdot s)$$

Die Korrektur beträgt also:

$$\boxed{\delta v = v_0 - v \approx k \cdot s \cdot v} \quad (8)$$

Darin bedeutet s die Flugstrecke für die jeweilige Messmethode: s_F, s_B oder s_D .

1.5 Direkte Messung des Kraftstosses

Grundsätzlich unterscheiden wir zwei Arten von Kraftintegralen

I) das Zeitintegral

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt$$

II) das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s}$$

wobei γ den Weg von P_0 nach P_1 bezeichnet.

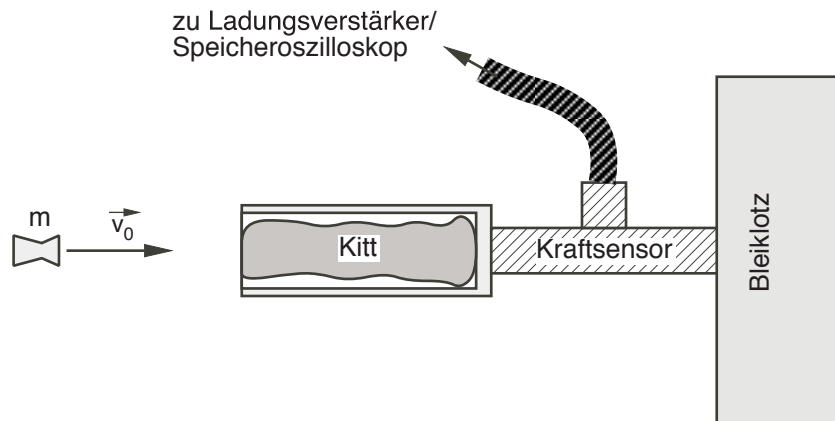
Man beachte, dass sich die zwei Integrale wesentlich unterscheiden:

Im Falle I) haben wir genau genommen drei Integrale auszurechnen, das Ergebnis ist ein Vektor - der zweite Ausdruck liefert ein Skalar.

Um die nachfolgenden Betrachtungen aber nicht zu überladen, beschränken wir uns auf den 1-d-Fall. Mit dem Aktionsprinzip erhalten wir im Falle I)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} m \cdot a(t) dt && \textbf{Kraftstoss} \\ &= m \cdot (v_1 - v_0) = p_1 - p_0 && = \text{Impulsänderung} \end{aligned}$$

Das Experiment besteht nun darin, den auf eine Kugel wirkenden Kraftstoss beim Eindringen in eine Kittmasse zu bestimmen: Mittels eines genügend schnellen Kraftsensors und einem Speicheroszilloskop wird die Bremskraft $F(t)$ registriert und numerisch aufintegriert.



Da die Kugel am Ende in Ruhe ist ($v_1 = 0$), erhalten wir die Kugelgeschwindigkeit v_0 zu

$$v_0 = -\frac{1}{m} \cdot \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt \quad (9)$$

was mit der Flugzeitmessung verglichen werden soll (experimentell hängt Vorzeichen in Glg. (9) von der Polung des Kraftsensors ab - ist experimentell "unbedeutend").

Experimentelle Finesse:

Mit Hilfe des Kitts im Hohlzylinder sowie dem Bleiklotz soll erreicht werden, dass der Abbremsvorgang der Kugel möglichst über die ganze Zylinderlänge und ohne Nachschwingen der gesamten experimentellen Anordnung erfolgt. Aus diesem Grunde soll der Durchmesser der "Kittwurst" etwa 2 mm kleiner sein als der Innendurchmesser des Hohlzylinders: So kann der Kitt der Kugel weichen diese "kontrolliert" abbremsen.

Ein Schwingen der Anordnung stellt theoretisch zwar keine Schwierigkeiten dar – das Kraftintegral muss einfach über den gesamten Zeitbereich erstreckt werden, bis alle Einzelteile in Ruhe sind. Experimentell wird das Ergebnis aber wesentlich verschlechtert, da der Nullpunkt des Kraftsensors durch den Stoss leicht verschoben wird (Hysterese). Je länger dieser Offset nun aufintegriert wird, desto mehr wird das Ergebnis systematisch verfälscht.

1.6 Schuss auf die Kanzel (für Begeisterungsfähige)

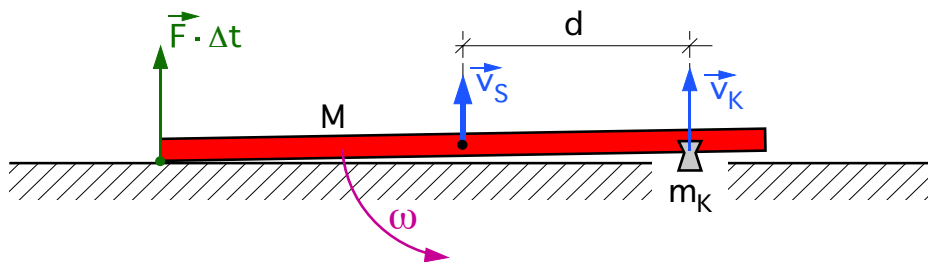
In diesem Teilversuch wird in ein kittgefülltes Stahlprofil geschossen und dessen Steighöhe in Funktion der Einschussposition bestimmt. Da zur theoretischen Erklärung sowohl Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung als auch Actio = Reactio benötigt werden, finden wir diesen Teilversuch besonders schön. Anzuführen ist auch, dass 90 – 95% aller ausgebildeten Physiker und Ingenieure das Versuchsergebnis falsch voraussagen.

Das kittgefüllte Stahlprofil nähern wir an als langen, dünnen Stab der Länge L und Masse M . Sein Massenträgheitsmoment bezüglich dem Schwerpunkt ist

$$I_S = M/12 \cdot L^2,$$

den Beitrag der steckengebliebenen Kugel zum MTM vernachlässigen wir mit gutem Gewissen.

Die Kugel (Masse m_K , Geschwindigkeit v_K) trifft im Abstand d von der Mitte auf den Stab und bleibt stecken.



Durch die auftreffende Kugel wird das Profil nach oben gestossen und gleichzeitig in Rotation um den Schwerpunkt versetzt. Wegen der Unterlage kann sich aber das linke Ende des Profils nicht nach unten bewegen. Das Profil erhält einen Kraftstoß $F \cdot \Delta t$ der bewirkt, dass das linke Ende im ersten Moment auf gleicher Höhe bleibt, d.h. die nach oben gerichtete Schwerpunktsgeschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit ω passen zusammen gemäss

$$v_S = \omega \cdot L/2 \quad (10)$$

Nun gilt erstens die Kraftstossgleichung

$$\begin{aligned} \text{Impuls nachher} &= \text{Impuls vorher} + \text{Impuls der Kugel} + \text{Kraftstoß } F \cdot \Delta t \\ M v_S &= 0 + m_K v_K + F \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

und die Gleichung für einen Drehstoß

$$\begin{aligned} \text{Drehimpuls nachher} &= \text{Drehimpuls vorher} + \text{Drehimpuls Kugel} + \text{Drehstoß von Unterlage} \\ I_S \omega &= 0 + m_K \cdot v_K \cdot d - F \Delta t \cdot L/2 \end{aligned} \quad (12)$$

Nun addieren wir $L/2 \cdot \text{Glg.}(11)$ + Glg.(12) und erhalten

$$\begin{aligned} M \cdot v_S \cdot L/2 + M/12 \cdot L^2 \cdot \omega &= m_K \cdot v_K \cdot (L/2 + d) \\ M \cdot v_S \cdot L/2 + M/12 \cdot L^2 \cdot \frac{v_S}{L/2} &= m_K \cdot v_K \cdot (L/2 + d) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{2}{3} M \cdot L \cdot v_S = m_K \cdot v_K \cdot (L/2 + d)$$

und damit

$$v_S = \frac{3}{2} \frac{m_K}{M} \cdot v_K \cdot \frac{L/2 + d}{2} \quad (13)$$

Die Steighöhe erhalten wir aus dem Energieerhaltungssatz für die translationskinetische Energie:

$$M/2 \, v_S^2 = M \, g \, h \quad (14)$$

oder

$$h = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{m_K}{M} \right)^2 \cdot \frac{v_K^2}{g} \cdot \left(\frac{d + L/2}{L} \right)^2 \quad (15)$$

Wenn wir genau das Ende treffen ($d = L/2$), wird

$$v_S = \frac{3}{2} \cdot \frac{m_K}{M} \cdot v_K$$

und die Steighöhe zu

$$h = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{m_K}{M} \right)^2 \cdot \frac{v_K^2}{g} \quad (16)$$

Dies vergleichen wir nun mit dem rein inelastischen Stoss. Wir überzeugen uns leicht resp. wissen, dass der Schwerpunkt des Profils bei Einschuss innerhalb des Perkussionszentrum schneller nach oben geht als das linke Ende nach unten. Damit gibt es keinen Kraftstoss von der Unterlage und für die Schwerpunktbewegung kann der Impulssatz alleine angewendet werden:

$$v_S = \frac{m_K}{M} \cdot v_K$$

Die Schwerpunktschwindigkeit ist 1.5 mal kleiner und damit geht das Profil $1.5^2 = 2.25$ mal weniger hoch oder

$$h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m_K}{M} \right)^2 \cdot \frac{v_K^2}{g} \quad (17)$$

2. Durchführung der Experimente

2.1 Die Pistole

Fabrikat: Hämmerli, Lenzburg, Kaliber 4.5 mm. Treibmittel Pressluft 200 bar maximal (≈ 320 Schuss). Im Versuch wird die Pistole mit angeschraubter Druckflasche benützt. Man lasse sich die Handhabung durch den Dozenten zeigen. Beim Manipulieren ist darauf zu achten, dass nur geringe Kräfte auf Pistole und Lafette ausgeübt werden, damit die Laufrichtung nicht verändert wird. An der Visiervorrichtung soll nichts verstellt werden.

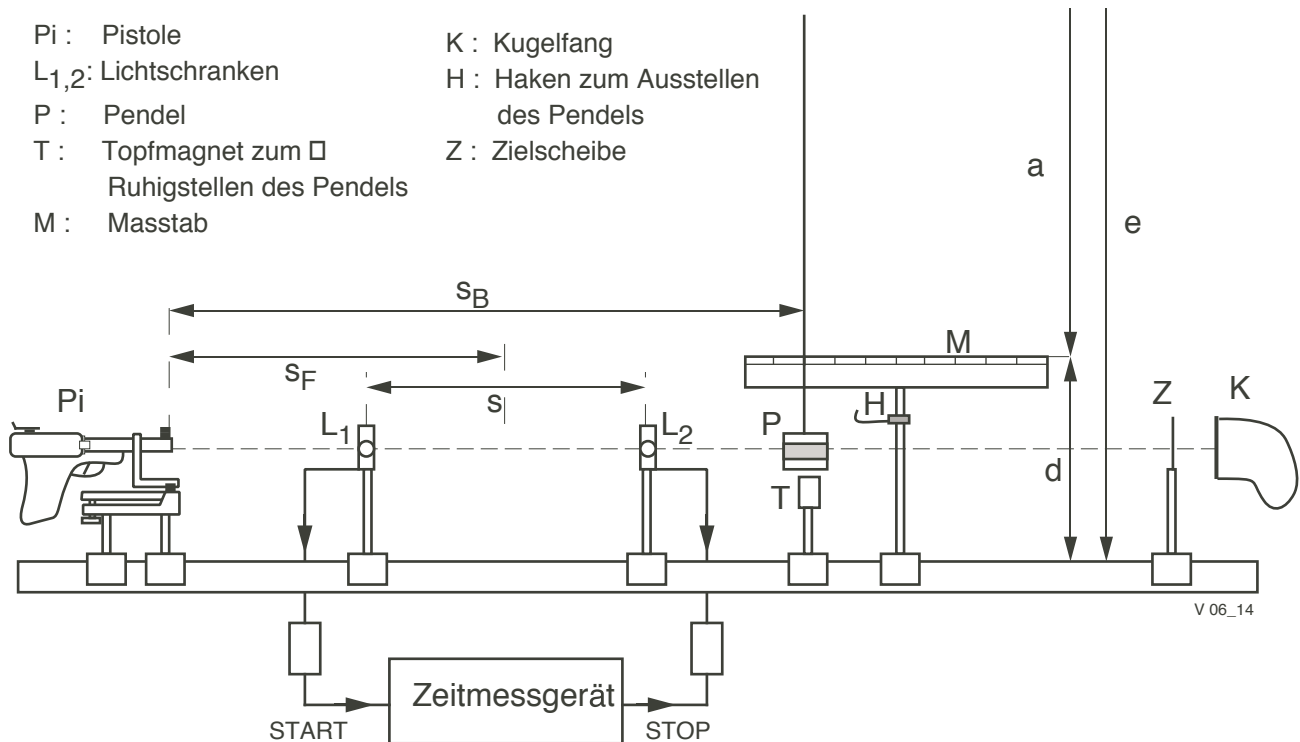
Sicherheitsvorschrift: Die Pistole darf **erst unmittelbar vor der Schussabgabe** geladen werden!

Die Pistole ist in einer "Lafette" gehalten, welche in der Elevation und im Azimut mittels Stellschrauben justiert werden kann; diese sind mit Kontermuttern gesichert. Wegen der grossen Hebelarme müssen allfällige Korrekturen sehr fein gewählt werden.

2.2 Ballistisches Pendel

2.2.1 Messapparatur

In Figur 4 ist die Versuchsanordnung dargestellt. Damit kann die Geschwindigkeit des Geschosses gleichzeitig nach Flugzeit- und ballistischer Methode gemessen werden. Alle Elemente mit Ausnahme des Pendels sind auf einer 3 m langen optischen Bank angeordnet.



Figur 4

Auf der Versuchstafel vermerkte Daten:

- Sollhöhe der Flugbahn über der Oberkante der optischen Bank
- Abstand e vom Aufhängepunkt des Pendels bis Oberkante der optischen Bank

Pendel P: Es stehen 3 Pendelkörper mit verschiedenen Massen zur Verfügung, welche mit einem Haken am Pendelfaden eingehängt werden. Zur Höheneinstellung sind sie auf der zentralen Gewindestange verschiebbar und werden mit einer Kontermutter gesichert. Die Pendelkörper sind mit einer umlaufenden Nut versehen, die mit einer zähen Kittmasse ausgefüllt ist, in der die Projektile stecken bleiben. Die Kugeln lassen sich mit einer Pinzette oder einem spitzen Gegenstand leicht ohne Kittreste entfernen.

Lichtschranken L: Sie bestehen aus den eigentlichen Schranken, welche in Gabeln montiert sind, und den Steuerkästchen, welche auch die Speisung enthalten. Im vorliegenden Versuch werden die Ausgänge H-D (Hell-Dunkel) mit den Start/Stop-Eingängen des Zeitmessgerätes verbunden. Weitere Angaben sind der Lichtschranken-Anleitung zu entnehmen.

Zeitmessgerät: Die Einstellungen richten sich nach dem verwendeten Typ (wenn nötig beim Dozenten erfragen). Zum bequemeren Arbeiten soll die Anzahl dargestellter Ziffern auf einen "sinnvollen" Wert eingestellt werden.

2.2.2 Erstellen der Messbereitschaft

Normalerweise befindet sich die Apparatur bei Versuchsantritt in weitgehend messbarem Zustand. Kontrollieren Sie die folgenden Punkte:

Flugbahn

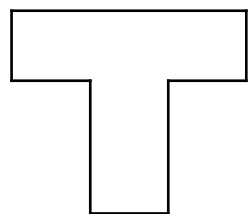
- Pendel ausstellen und Visierlinie kontrollieren. Pistole allenfalls nachrichten.
- Kontrollschuss auf Zielscheibe. Das Schussloch muss auf ± 2 mm genau im Fadenkreuz der Zielscheibe liegen. Pistole falls nötig nachrichten.

Pendel und Massstab

- Pendel einschnellen und kontrollieren, ob die Mitte der Kittnut auf der Flugbahnhöhe liegt. Allenfalls Pendelkörper entsprechend verschieben und wieder fixieren.
- Pendel durch kurzes Anheben des Topfmagneten ruhig stellen (Eisenscheibe auf dem Magneten entfernen, sonst ist er wirkungslos). Kontrollschuss abgeben und Lage des Einschlages sowie den ungefähren ballistischen Ausschlag feststellen.
Das Pendel darf um die Horizontalachse höchstens geringfügig torkeln. Falls nötig die Höhe des Pendelkörpers nachstellen. Eine Rotation des Pendels hat auf den Ausschlag zwar keinen Einfluss (weshalb?), kann aber die Bewegung stören. Bei stärkerer Rotation soll die Pistole in der Seite nachgerichtet werden.
- Massstab parallel zur optischen Bank stellen: In der Seite nach Augenmass, in der Höhe durch Messen des Abstandes d von der Bankoberkante. Dieser Wert wird für die Ermittlung der Referenzlänge $a = e - d$ benötigt. Der Zwischenraum zwischen Pendelfaden und Massstab sollte wenige mm betragen.
- Pendel ruhig stellen, dann den Pendelfaden durch Verschieben des Zeissfusses mit der Nullmarke des Massstabes zur Deckung bringen, Zeissfuss wieder festklemmen.

Lichtschranken

- Basisstrecke $s = 400$ bis 600 mm wählen und Lichtschranken platzieren.
- Zwei T-förmige Papierstreifen in die Schlitze der Gabeln einhängen und unten festhalten. Pendel ausschlagen und Kontrollschuss abgeben. Die Schusslöcher müssen genau auf der Höhe der Eintrittsblenden der Photodetektoren liegen. Allenfalls die Schranken vertikal nachrichten und rechtwinklig zur Flugbahn stellen.
- Basisstrecke mit Stahlmassstab genau einstellen (zwischen den Schlitzen der Photodetektoren messen!).
- Zeitmessgerät und Lichtschranken-Speisung einschalten. Funktionskontrolle der Flugzeitmessung, zuerst mit dem Finger, dann mit einem Kontrollschuss.



Jetzt bestimmen Sie die übrigen Daten:

- Referenzlänge $a = e - d$
- Flugstrecken s_F und s_B zur Korrektur des Luftwiderstandes
- Pendelkörpermasse M
- Projektillmassen: Damit die benötigten Messprojekte vorgängig gewogen werden können, steht ein Projektilhalter bereit, auf dem die einzelnen Projektillmassen direkt neben dem Projektil notiert werden können.
- Barometerstand und Raumtemperatur.

2.2.3 Gang der Messungen

Für jeden Schuss misst man die Geschwindigkeit gleichzeitig nach beiden Methoden. Hierzu ist eine zweckmässige Arbeitsteilung zwischen den Versuchsteilnehmern A und B nützlich. Es kann folgendermassen vorgegangen werden:

- Zeitmessgerät auf Null und Pendel durch Anheben des Topfmagneten ruhig stellen (eine langsame Rotation stört nicht), Topfmagnet wieder absenken.
- Beobachter A lädt die Pistole, schießt und zählt laut die Pendelausschläge. Während das Pendel schwingt, begibt er sich zum Pendel und misst die Zeit für z.B. 10 Schwingungen mit einer Stoppuhr: Starten und stoppen bei einem Nulldurchgang des Pendels (dazu auf eine Referenzmarke visieren!). Die Zeitmessung wird so am genauesten, da das Pendel im Nulldurchgang am schnellsten ist.
- Beobachter B liest den ersten, und dann jeden 5. Pendelausschlag an der Massstaboberkante auf 1 mm genau ab bis etwa zur 20. Schwingung und notiert die Ablesungen. Das Erfassen des Umkehrpunktes ist nicht einfach und erfordert einige Konzentration. Das folgende Vorgehen hat sich bewährt: Mit dem längs des Tischblattes verschiebbaren Schirm werden Massstab und Pendel bis knapp vor die Umkehrstelle abgedeckt. So kann der Umkehrpunkt mit den Augen fixiert werden, ohne dass der Beobachter durch die Bewegung des Pendels abgelenkt wird.
- Flugzeit ablesen. Geschoss (ohne Kittresten!) vom Pendel ablösen und Loch zukneten. In der Mitte und am Schluss der Messreihe die Pendelmasse M kontrollieren.

2.3 Drehstoss

2.3.1 Messapparatur

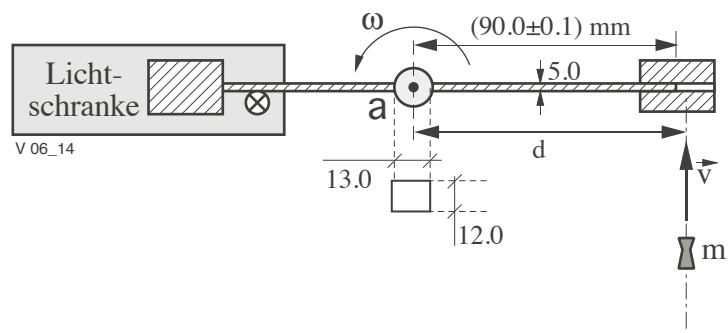
Variante 1:

Die Messeinrichtung gemäss Fig. 5 ist mit einem Schwenkarm auf einem Zeissfuss befestigt, sodass sie bezüglich der Flugbahn verschiebbar ist.

Die Winkelgeschwindigkeit ω der Hantel nach dem Stoss erhält man aus der Messung der halben Rotationsperiode t_R . Dazu dient eine Lichtschranke mit eingebautem Zeitmesser.

Die Hantel besteht aus einem in der Mitte gelagerten Stab, auf dessen Enden zwei Zylinder aufgeschoben werden. Das Massenträgheitsmoment ohne Zylinder beträgt:

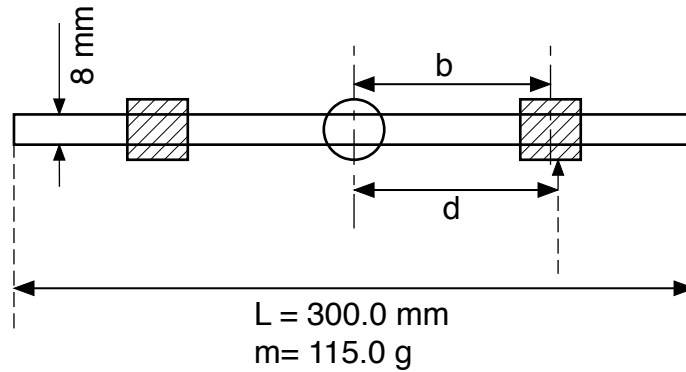
$$I_0 = (7.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2.$$



Figur 5

Die Zylinder (3 verschiedene Paare) verfügen einseitig über eine Kittnut, in der die Geschosse einschlagen. Sie werden so bis zum Anschlag auf den Stab geschoben, dass die Klemmschrauben in die am Stab angebrachten Ausfräsungen greifen können. Werden die Zylinder in dieser Position fixiert, so beträgt der Abstand ihrer Schwerpunkte von der Drehachse $90.0 \pm 0.1 \text{ mm}$ (vgl. Figur 5). Zur Berechnung des MTM der Hantel dürfen sie als homogene Vollzylinder betrachtet werden.

Variante 2



Der Abstand b der Hantelmassen von der Drehachse und damit der Abstand d der eintreffenden Kugel kann eingestellt werden (a und d sind im allgemeinen verschieden).

Um die Berechnungen zu vereinfachen, wurden "kleine" Hantelkörper aus Aluminium gefertigt. Dies erlaubt es, die Hantelkörper als Punktmassen zu behandeln. Ferner kann das MTM der Halterung vernachlässigt werden.

Kontrollieren Sie die oben notierten Abmessungen, da Änderungen der Apparatur ev. noch nicht nachgeführt sind! (Wenn die entsprechenden Längen korrekt sind, werden auch die Massen korrekt sein und es muss nicht alles demontiert werden.)

2.3.2 Erstellung der Messbereitschaft

- Zur Auswertung benötigte Distanzen, Abmessungen und Massen der Hantelzylinder bestimmen und wie oben beschrieben montieren (ohne zu "morksen"!).
- Flugbahn durch einen Kontrollschuss auf die Zielscheibe überprüfen.
- Messeinrichtung so justieren, dass die Kittgrube auf die Flugbahn zu liegen kommt.
- Lichtschranke so drehen, dass sie unmittelbar nach dem Einschlag ausgelöst wird.
- Kontrollschuss auf Hantel.

2.3.3 Gang der Messungen

Wie beim ballistischen Pendel wird gleichzeitig auch eine Flugzeitmessung durchgeführt.

- Hantel genau senkrecht zur Flugbahn stellen, Lichtschranke nullen, Schuss abgeben
- Halbe Rotationsperiode t_R notieren und Stossparameter d (vgl. Fig. 5) messen. Dieser Abstand geht wesentlich in die Berechnung der Geschwindigkeit ein! (Er variiert wegen der Streuung der Pistole.)

3. Aufgaben und Auswertung

Der Umfang der Messungen ist mit dem Dozenten zu besprechen!

3.1 Ballistisches Pendel

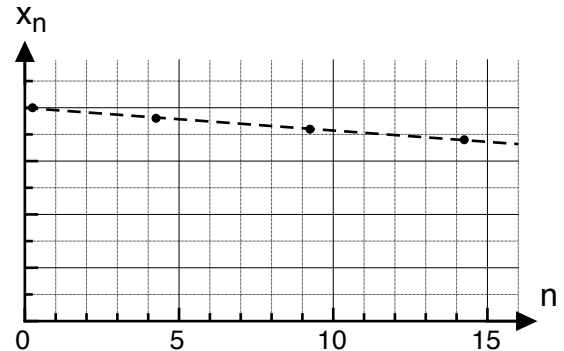
Messen Sie die Geschwindigkeiten v_i von 10 Projektilen mit dem ballistischen Pendel und gleichzeitig mit der Flugzeitmethode.

Der 1. Ausschlag des Pendels fällt wegen der Bremsung durch den Luftwiderstand minim zu klein aus. Um diesen systematischen Fehler zu eliminieren und weil die Ablesung der Umkehrstelle etwas unsicher ist, werden bei jedem Schuss mehrere Ausschläge x_n abgelesen.

Wenn Sie z.B. die Ausschläge x_1, x_5, x_{10}, x_{15} gemessen haben, tragen Sie die Wertepaare $(n-0.75, x_n)$ in eine Tabelle ein und fitten eine Gerade $y=a \cdot x+b$. Der von der Regression mit statistischem Fehler gelieferte

Achsenabschnitt b ist dann gerade der gesuchte, um den Luftwiderstand korrigierte, ballistische Ausschlag (Glg. 5). Diese Extrapolation soll für einen Schuss graphisch dokumentiert werden (weshalb numerieren wir 0.25, 4.25 ... und nicht 0, 4, ...?).

Wie ausgeführt, bestimmen wir die Pendellänge L indirekt über die Schwingungsdauer T des Pendels. Da diese nicht schusspezifisch ist wird derselbe Mittelwert \bar{T} für alle Schüsse verwendet (über die Mehrfachmessung verringern wir die Ungenauigkeit von T um einen Faktor 3).



3.1.1 Mittlere Geschossgeschwindigkeiten $\overline{v_F}$, $\overline{v_B}$, mittlere Mündungsgeschwindigkeiten $\overline{v_{0,F}}$, $\overline{v_{0,B}}$

Die mittleren Mündungsgeschwindigkeiten erhalten wir aus den mittleren Geschossgeschwindigkeiten $\overline{v_F}$, $\overline{v_B}$ durch Berücksichtigung des Luftwiderstandes (Glg. 8). Vergleichen Sie die vier Mittelwerte mit Unsicherheiten in einer Graphik: Unterscheiden sich die Geschwindigkeiten signifikant, stimmen die beiden Mündungsgeschwindigkeiten innerhalb der Unsicherheiten überein?

Hinweis: Zum statistischen Fehler der Mittelwerte wären prinzipiell noch die systematischen Fehler (Unsicherheiten von M , s , a , k ...) zu addieren (quadratische Addition). Zur Verringerung des Arbeitsaufwandes beschränken wir uns hier aber auf die Berechnung der statistischen Fehler der Mittelwerte wissend, dass die wahren Unsicherheiten grösser sind.

3.1.2 Vergleich der Messmethoden

(Aus Notationsgründen werden im Folgenden die Unsicherheiten mit Δ .. anstelle von s .. bezeichnet).

Die Messwerte $v_{F,i}$ und $v_{B,i}$ werden einzeln mit Hilfe der Luftwiderstandskorrektur auf einen gemeinsamen Bezugspunkt umgerechnet. Wählt man als Bezugspunkt z.B. den Mittelpunkt der Lichtschranken, so müssen nur die Werte $v_{B,i}$ umgerechnet werden $\rightarrow v_{B,i}^*$. Anschliessend bildet man die Verhältnisse $a_i = v_{F,i}/v_{B,i}^*$ und berechnet deren Mittelwert $\bar{a} \pm \Delta \bar{a}_{tot}$. Das Ergebnis vergleicht man mit dem zu erwartenden Wert $a=1$.

Zur Bestimmung der Gesamtunsicherheit $\Delta \bar{a}_{tot}$ müssen aber noch die systematischen Fehler erfasst werden. Im Prinzip müsste das Fehlerfortpflanzungsgesetz auf die Formel

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_i \frac{s/t_{F,i}}{g/(2\pi) \cdot (M + m_i)/m_i \cdot T \dots}$$

angewendet werden, was bei 10 Summanden doch ziemlich mühsam wird. Dies kann aber wesentlich vereinfacht werden: Die Messwerte streuen weniger als einige Prozent und damit sind auch die zugehörigen systematischen Unsicherheiten praktisch identisch.

*weil durch den luftwiderstand eigentlich eher der ausschlag von 0.25 schwingungen später gemessen wird und weil eigentlich schon eine schwingung vergangen ist.

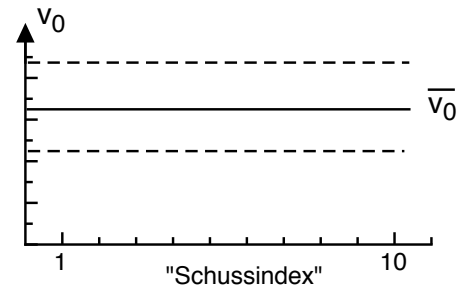
Wenn wir also stur vorgehen, schreiben wir 10 mal dasselbe hin und dividieren nachher durch 10! Der systematische Fehler eines einzelnen Summanden $v_{F,i} / v_{B,i}^*$ ist also identisch mit dem systematischen Fehler des Mittelwertes \bar{a} .

Da sodann Flugzeiten, Kugelmassen etc. bei allen Schüssen praktisch identisch sind, können für diese Grössen "typische" Mittelwerte eingesetzt werden (wir machen eine Abschätzung der Unsicherheit!).

3.1.3 Streuung der Mündungsgeschwindigkeit v_0 der Pistole

Die Mündungsgeschwindigkeiten $v_{0F,i}$, berechnet aus den Messergebnissen der Flugzeitmethode, sollen in einem Diagramm gemäss Fig. 6 dargestellt werden. In dieses wird auch der Mittelwert \bar{v}_0 mit der Standardabweichung s_v des Einzelschusses eingetragen.

Welcher Bruchteil der Einzelwerte liegt innerhalb der Standardabweichung?



Figur 6

3.2 Drehstoss

Messen Sie die Geschwindigkeiten v_i von 5 Projektilen mit der Drehstoss-Methode und gleichzeitig mit der Flugzeitmethode. Führen Sie eine solche Messreihe mit zwei verschiedenen Hantelpaaren durch und vergleichen sie die Resultate der Messreihen unter sich.

Vergleichen Sie sodann die Messergebnisse der Drehstoss-Methode mit der Flugzeitmethode wie oben unter 3.1.2 beschrieben.

Bei der Beurteilung der Messergebnisse ist zu beachten, dass bei der Drehstoss-Methode systematisch etwas zu kleine Messwerte zu erwarten sind. Die Ursachen sind folgende: Die Verzögerung der Hantelbewegung durch Luft- und Lagerreibung ist nicht berücksichtigt. Ferner erfährt das Lager beim Einschlag des Projektils einen Kraftstoss, da die Einschlagstelle nicht mit dem sogenannten Perkussionszentrum der Hantel übereinstimmt. Die Lagerreibung wird dadurch kurzzeitig erhöht.

Aus Gründen des Aufwandes werden wiederum nur die statistischen Fehler ermittelt und dargestellt.

3.3 Kraftstoss

Beim Einrichten des Experiments ist darauf zu achten, dass die Kugel genau in die Mitte des Hohlzylinders trifft – Fehljustierung kann gefährliche Blindgänger zu Folge haben!!

Ladungsverstärker und Oszilloskop werden anschliessend unter der Annahme eingestellt, dass die maximal auftretende Kraft 5 – 10 mal grösser ist als die Kraft, welche bei gleichmässiger Abbremsung der Kugel im kittgefüllten Zylinder resultieren würde. Der Zeitbereich des Oszilloskops soll rund das 5-fache der berechneten Stosszeit betragen. Ladungsverstärker und Triggerung des Oszilloskops können einfach getestet werden, indem von Hand auf den Kraftsensor gedrückt wird.

Ein erster Probeschuss erlaubt sodann die Feineinstellung der Apparatur.

Da es sich hier nicht um ein Präzisionsexperiment sondern um einen "proof of principle" handelt, reichen 3 erfolgreiche Schüsse. Ferner ist das Herausschaben des Kitts und die sorgfältige Präparation der "Kittwurst" essentiell für ein gutes Gelingen und benötigt deshalb etwas Zeit.

3.4 Schuss auf die Kancel

Die Steighöhe des Stahlprofils in Funktion der Einschussorts wird für rund 10 Positionen experimentell ermittelt. Dazu steigt einer der Laborpartner auf eine Leiter, um die Steighöhe mithilfe eines an der Wand befestigten Massstabs zu bestimmen. Der andere Laborpartner präpariert das Profil und löst den Schuss aus. Die genaue Einschussposition soll nach dem Schuss mit Hilfe einer Schiebelehre gemessen werden.

In der Auswertung vergleichen Sie Theorie und Experiment und kommentieren das Ergebnis.