

M1

Noah Huesser <yatekii@yatekii.ch>

November 19, 2016

Contents

1	Arbeitsgrundlagen	2
1.1	Flugzeitmethode	2
1.2	Ballistische Methode	2
1.3	Drehstossmethode	4
1.4	Einfluss des Luftwiderstandes auf die Geschossgeschwindigkeit	4
2	Versuchsaufbau	5
3	Versuchsdurchführung	5
3.1	Ballistische Methode	5
3.1.1	Mittlere Geschwindigkeiten	6
3.1.2	Vergleich der Messmethoden	7
3.1.3	Streuung der Mündungsgeschwindigkeit	7
3.2	Drehstossmethode	7

1 Arbeitsgrundlagen

Im Versuch M1 geht es darum die Geschwindigkeit einer Pistolenkugel auf verschiedene Arten zu bestimmen. Dabei gibt es noch verschiedene Arten von Geschwindigkeiten.

1.1 Flugzeitmethode

Die **mittlere Geschwindigkeit** eines Objektes kann durch 1 berechnet werden.

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Wenn also die Abschusszeit und die Aufprallzeit, sowie die Flugstrecke bekannt sind, so kann die Zeitdifferenz und somit die mittlere Fluggeschwindigkeit des Geschosses ermittelt werden.

1.2 Ballistische Methode

Der Impuls p ist gegeben durch die Gleichung in 2. Dieser Impuls kann beim Aufprall der Pistolenkugel auf ein ballistisches Pendel gemessen werden. Durch den erheblichen Massenunterschied der Kugel und des Pendels bleibt die Kugel stecken. Ein inelastischer Stoss resultiert. Aus diesem Grund wird die komplette kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Der Energieerhaltungssatz ist hier also schwierig anwendbar.

$$p = mv = (m + M) \cdot u \quad (2)$$

Die verbleibende kinetische Energie wird beim Ausschlagen des Pendels in potentielle Hubenergie umgewandelt. Mithilfe des Energiesatzes wird die Geschwindigkeit u durch die Hubhöhe h mit Gleichung 3 ersetzt.

$$u = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

Aus Grafik ?? können die Gleichungen 4 und 5 bestimmt werden.

$$h = l \cdot (1 - \cos\varphi) \quad (4)$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (5)$$

Da der Schwerpunkt und somit die Länge l des Pendels nur ungenau ermittelt werden können, wird ein Umweg über die Schwingungsdauer T ersichtlich in 6 gewählt.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

Daraus resultiert die Gleichung 7.

$$u = \frac{g}{2\pi} \cdot T \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right)} \quad (7)$$

Mit je einer Taylorentwicklung kann die Gleichung 7 auf Gleichung 8 angenähert werden.

$$u = \frac{g}{2\pi} \cdot \frac{M + m}{m} \cdot T \cdot \frac{x}{a} \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \quad (8)$$

Da die Taylorreihe nur bis zum Grad 2 entwickelt wurde, wäre der nächste Term der Grössenordnung 10^{-4} . Es ergibt sich also ein sehr genauer Wert.

Somit sind während des Experimentes die Grössen m , M , a , x und T zu bestimmen.

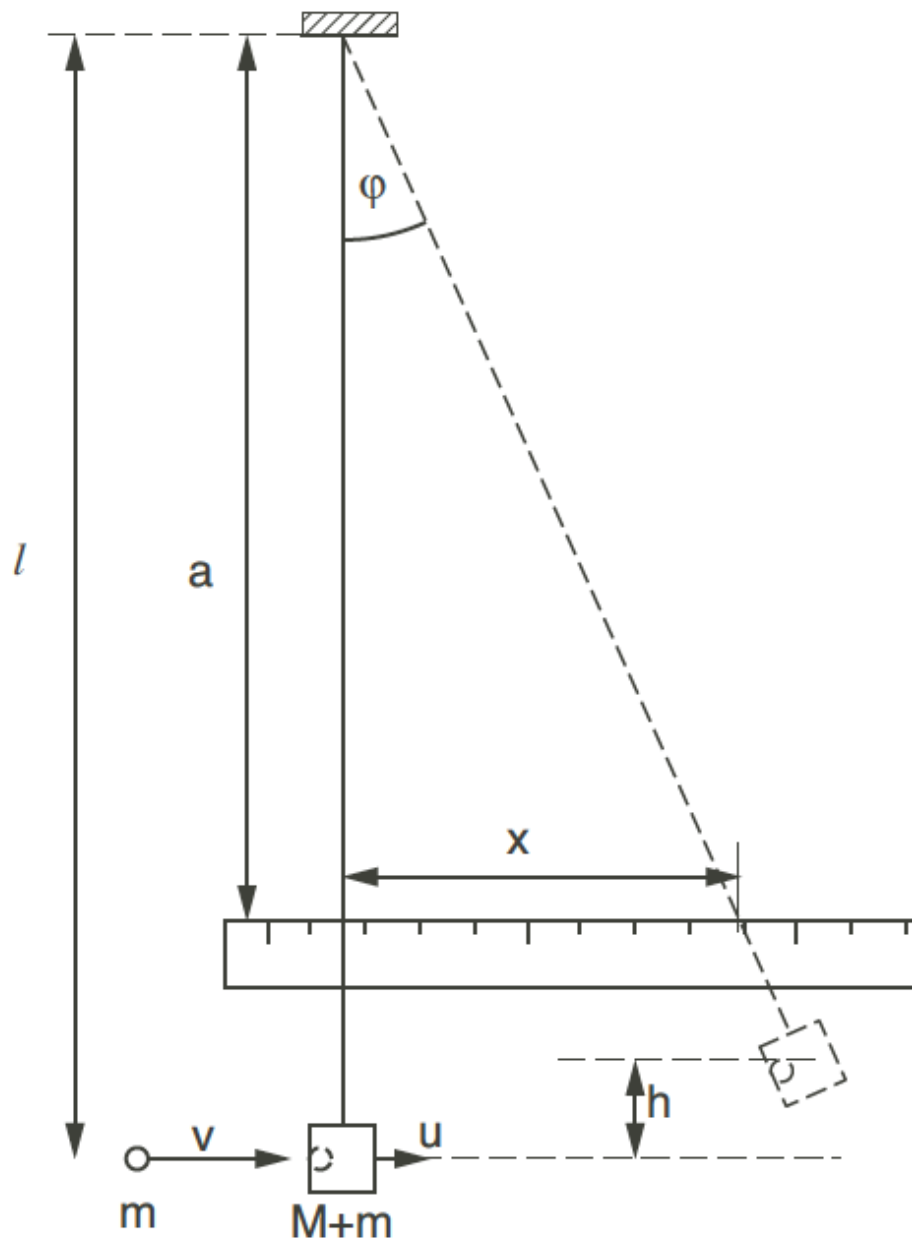


Figure 1: Ballistische Methode

1.3 Drehstossmethode

Bei dieser Methode wird ein Geschoss wie in Abbildung ?? gezeigt ein Geschoss auf eine um eine starre Achse frei drehbar gelagerte Hantel abgeschossen.

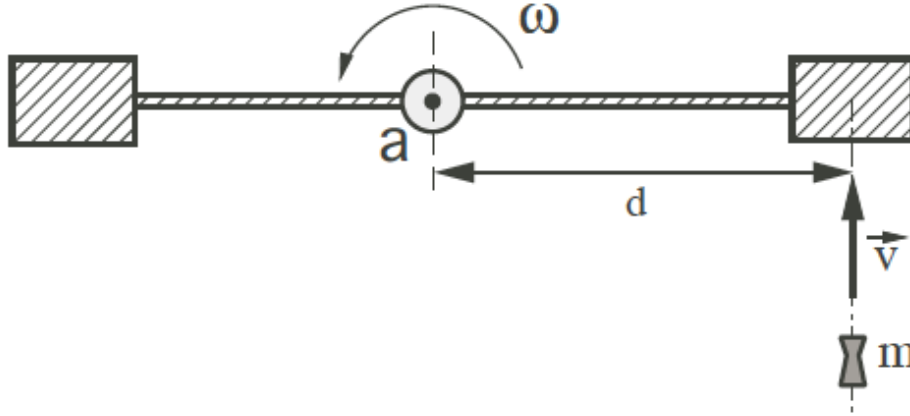


Figure 2: Drehstossmethode

Für eine mit v geradlinig bewegte Punktmasse m kann der Drehimpuls bezüglich der Drehachse a mit Gleichung 9 bestimmt werden.

$$\vec{L}_a = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (9)$$

Ferner ist bekannt, dass wie in Gleichung 10 beschrieben, der Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten bleibt.

$$L_a = L_{a,Kugel} + L_{a,Hantel} = const. \quad (10)$$

Daraus folgt, dass für die anfänglich ruhende Hantel Gleichung 11 gilt welche dann gleichzusetzen ist mit der Gleichung 12 der bewegten Hantel nach dem Aufprall.

$$L_a = m \cdot d \cdot v + 0 \quad (11)$$

$$L_a = \omega \cdot (I_{a,H} + m \cdot d^2) \quad (12)$$

Daraus abgeleitet ergibt sich für die Geschwindigkeit der Pistolenkugel beim Aufprall die Gleichung 13, wobei $I_{a,H}$ dem Inneren Moment der Hantel bezüglich a und ω der Winkelgeschwindigkeit der Hantel um die Achse a entspricht.

$$v = \omega \cdot \left(\frac{I_{a,H}}{m \cdot d} + d \right) \quad (13)$$

Somit sind für dieses Experiment die Größen $I_{a,H}$, m , d und ω zu bestimmen.

1.4 Einfluss des Luftwiderstandes auf die Geschossgeschwindigkeit

Bisher wurde gezeigt wie die mittlere, sowie die Aufprallgeschwindigkeit ermittelt werden können. Interessant ist aber auch die Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses.

Diese kann man sehr gut über den wirkenden Luftwiderstand bestimmen. Der Luftwiderstand ist gegeben durch die Beziehung in 14, wobei v die Momentangeschwindigkeit des Geschosses, A die Querschnittsfläche jenes Geschosses, ρ_L die Luftdichte und c_w der Widerstandsbeiwert des Projektils sind.

$$F_L = \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho_L \cdot v^2 \quad (14)$$

Das Projektil verliert ebensoviel Kinetische Energie wie der Luftwiderstand Bremsarbeit verrichtet. Dies ist mit Gleichungen 15 und 16 ersichtlich.

$$dE_{kin} = -F_L ds \quad (15)$$

$$m \cdot v \cdot dv = -\frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot ds \quad (16)$$

Daraus kann die Differenzengleichung 17 gebildet werden. Mit den Anfangsbedingungen $s = 0$ und $v = v_0$ wird Gleichung 18 erhalten. Diese kann für sehr kleine $k \cdot s$ mit 19 angenähert werden.

$$\frac{dv}{v} = -k \cdot ds \quad (17)$$

$$v = v_0 \cdot e^{-k \cdot s} \quad (18)$$

$$v = v_0 \cdot (1 - k \cdot s) \quad (19)$$

k ist in allen diesen Gleichungen mit dem Term $k = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho_L}{2m}$ zu beziffern.

2 Versuchsaufbau

3 Versuchsdurchführung

Für alle drei im Versuch angewandten Methoden zur Bestimmung der Projektilgeschwindigkeit (Flugzeitmethode, ballistische Methode, Drehstossmethode) wurde der Versuchsaufbau vermessen. So konnten folgende Parameter bestimmt werden:

$$\begin{aligned} < t > \text{Strecke zwischen den Lichtschranken} : < t > s = 0.5 \\ < t > \text{Strecke zwischen Mündung und Pendel} : < t > s_{B1} = 1.8 \\ < t > \text{Strecke zwischen Mündung und Hantel} : < t > s_{B2} = 1.8 \\ < t > \text{Masse des Projektils im Mittel} : < t > m = 0.000462272727272729 \\ < t > \text{Mittlere Schwingungsdauer des Pendels} : < t > T = 2.8795000000000002 \\ < t > \text{Die Querschnittsfläche eines Projektils} : < t > A = 4e - 05 \\ \text{TODO} : v_{1c}, v_{1p}, l \end{aligned}$$

3.1 Ballistische Methode

Erst wurden 10 Messungen mit der ballistischen Methode durchgeführt. Hierbei wird ein Schuss auf ein Pendel abgefeuert. Es wurde zum einen die Zeit die vergeht bis das Projektil beide Lichtschranken passiert hat gemessen und zum anderen wurde der Ausschlag des Pendels gemessen.

Da in der Pendelgleichung der Luftwiderstand sowie der Reibungswiderstand der Aufhängung nicht berücksichtigt sind, wurden pro Schuss 5 Messungen des Ausschlages gemacht. Mit linearer Regression kann somit der korrekte erste Ausschlag gefunden werden. So ist nämlich der Y-Achsenabschnitt der Fit-Gerade gerade der um den Luftwiderstand korrigierte erste Ausschlag. Wichtig dabei ist, dass für die Messungen der Amplituden $n-0.75$ anstelle von n verwendet wird. Denn bei Messung der ersten Amplitude sind ja schon 0.25 Schwingungen vergangen, etc.

Damit besser gezählt werden konnte, wurde nur jeder fünfte Ausschlag am oberen Ende des Lineals gemessen. Somit wurden die Amplituden zu den Schwingungszeiten [0.25, 5.25, 10.25, 15.25, 20.25]

gemessen. Diese führen nun mit einem Linearen Fit zum gesuchten um die Nichtidealitäten korrigierten Ergebnis.

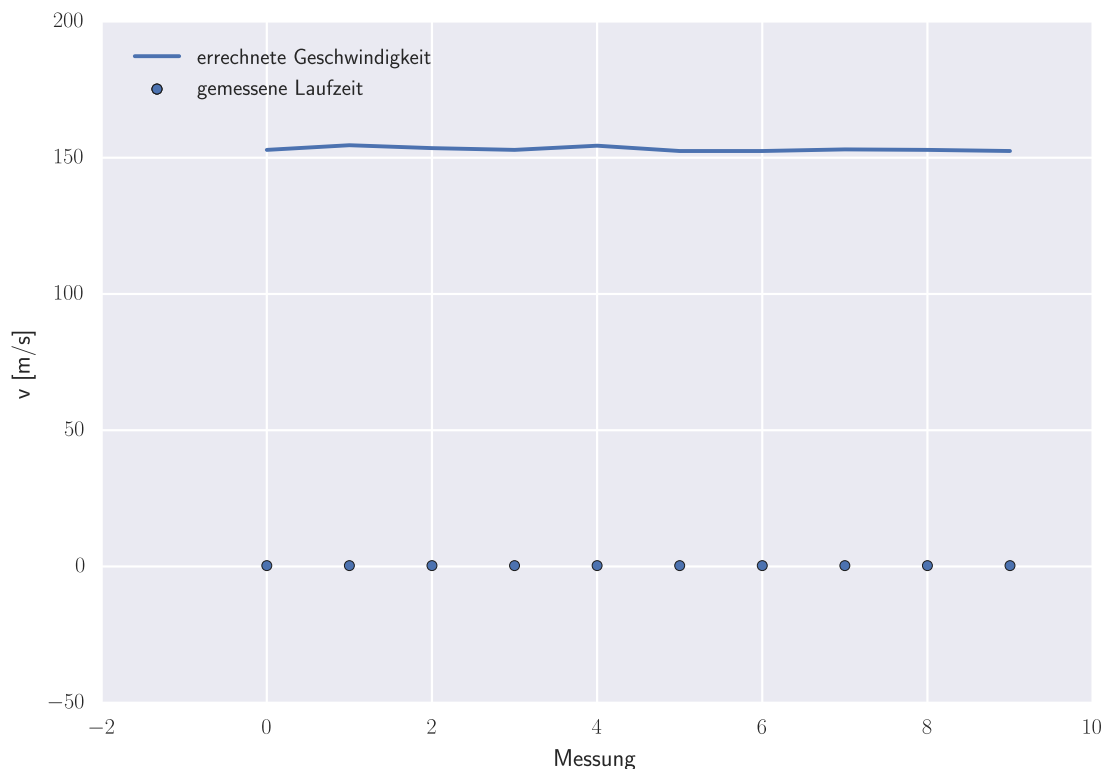
Dieses Verfahren ist in Grafik ?? gut zu sehen. Dieses wurde für alle zehn abgegebenen Schuss durchgeführt, hier aber nur für den ersten Schuss grafisch dargestellt.

```
/Library/Frameworks/Python.framework/Versions/3.5/lib/python3.5/site-packages/mpld3/mplxp  
warnings.warn("Legend element %s not impemented" % child)  
/Library/Frameworks/Python.framework/Versions/3.5/lib/python3.5/site-packages/mpld3/mplxp  
warnings.warn("Legend element %s not impemented" % child)
```

Es resultiert in Grafik ?? also ein maximaler Ausschlag von 0.317m. In diesem sind bereits jegliche Verluste berücksichtigt.

Dies wird nun für alle zehn Messungen durchgeführt. Nun kann aus Gleichung 8 die Aufprallgeschwindigkeit errechnet werden. In Grafik ?? Sind die errechneten Geschwindigkeiten beim Aufprall dargestellt.

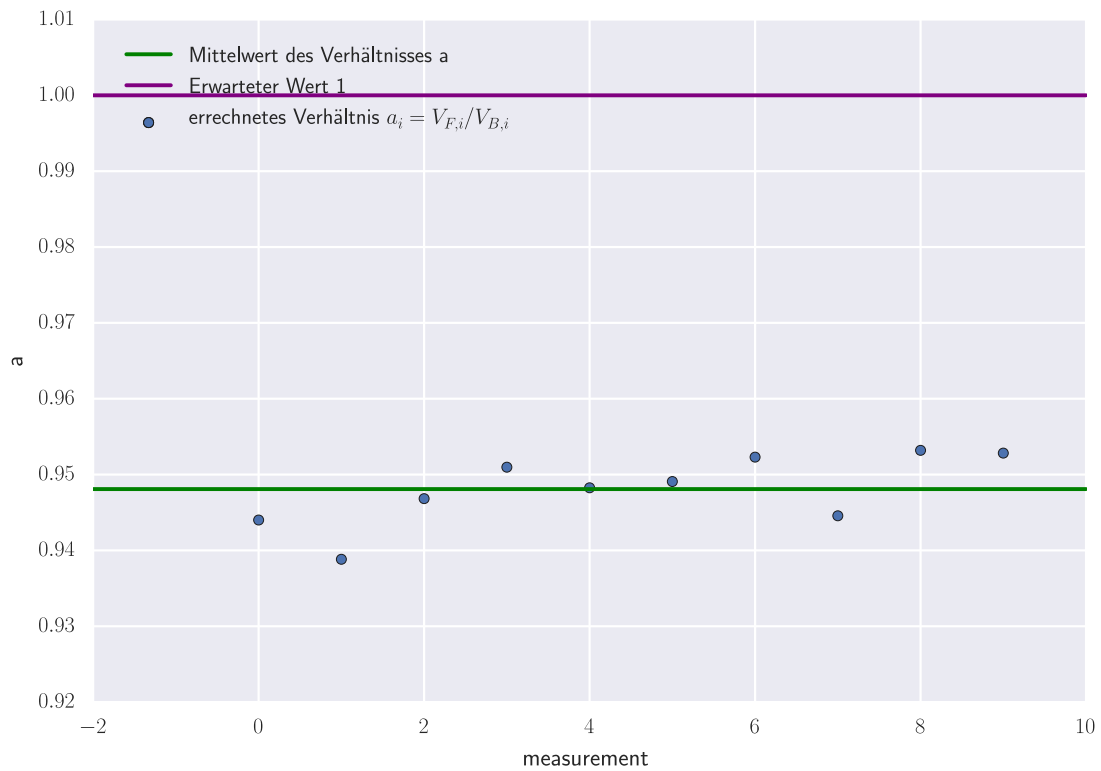
3.1.1 Mittlere Geschwindigkeiten



Zusätzlich zur mittleren Aufprallgeschwindigkeit errechnen wir ebenfalls die mittlere Geschwindigkeit mithilfe der Flugmethode. Dann werden beide Werte mithilfe der Luftwiderstandskorrekturgleichung 19 auf die mittlere Mündungsgeschwindigkeit umgerechnet. In Grafik ?? sind nun die einzelnen mittleren Laufzeiten und ihre Unsicherheiten dargestellt.

3.1.2 Vergleich der Messmethoden

Um die Messmethoden vergleichen zu können werden alle *einzelnen* errechneten Geschwindigkeiten mithilfe der Luftwiderstandskorrekturgleichung auf einen Bezugspunkt, in diesem Falle wurde die Mündung gewählt, umgerechnet.



3.1.3 Streuung der Mündungsgeschwindigkeit

In Grafik ?? sind die mithilfe der Flugzeitmethode und der Luftwiderstandskorrektur errechneten Mündungsgeschwindigkeiten gezeigt. 80% der Ergebnisse liegen innerhalb der Standardabweichung. Dies ist ein Bisschen mehr als die erwarteten 68%.

3.2 Drehstossmethode

