

Computerversuch

Noah Hüsler <yatekii@yatekii.ch>

October 23, 2016

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Typen von Messfehlern

- *Systematische Fehler* werden verursacht durch die Versuchsanordnung, die Versuchsumgebung oder den Messvorgang. Sie bewirken eine systematische Abweichung des Messergebnisses vom eigentlichen Wert. Diese Abweichung wird auch Unsicherheit genannt. Diese Art von Fehler kann – werden sie erkannt – meistens korrigiert werden.
- *Zufällige Fehler* sind immer vorhanden und lassen sich durch mehrmalige Wiederholung eines Experimentes beliebig verkleinern.

1.2 Genauigkeit bei der Angabe von Messresultate

Es ist nicht hilfreich bei Resultaten mehr signifikante Ziffern anzugeben als jene, die innerhalb des Fehlerbereiches liegen. In einem Beispiel wird angenommen dass der absolute Fehler 3.6 Sekunden betrage. Der Mittelwert aus den Messungen betrage 118.8 Sekunden. Mit einem resultierenden relativen Fehler von 3% ist es durchaus angebracht die Resultate auf ganze Zahlen zu runden, da alle weiteren signifikanten Ziffern sowieso in den Toleranzen verloren gingen.

1.3 Fehlerbestimmung bei Einzelgrössen

1.3.1 Einfacher Mittelwert

Seien x_1, x_2, \dots, x_N N Messergebnisse aus einer Reihe von identischen Experimenten, so wird der Mittelwert anhand von Gleichung 1 bestimmt werden. Sein zugehöriger Fehler kann mit Gleichung 2 bestimmt werden. Beide Werte werden genauer mit grösserem N .

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}} \quad (2)$$

Das resultierende Ergebnis wird wie in Gleichung 3 ersichtlich formuliert.

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \quad (3)$$

1.3.2 Mittelwert mit Gewichten

```
$x_1 = \overline{x_1} \pm s_{\overline{x_1}}$  
$x_2 = \overline{x_2} \pm s_{\overline{x_2}}$  
...  
$x_n = \overline{x_n} \pm s_{\overline{x_n}}$
```

Der wahrscheinlichste Wert \bar{x} wird durch einen gewichteten Mittelwert mit der Gleichung 4 erreicht. Die Gewichte dazu werden nach 5 berechnet. Den zugehörigen Fehler wird durch 6 bestimmen.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}} \quad (4)$$

$$g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2} \quad (5)$$

$$\text{Fehler des gewichteten Mittelwertes: } s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}}} \quad (6)$$

Messergebnisse mit betragsmässig kleineren Fehlern werden also stärker gewichtet.

1.4 Fehlertheorie

Für eine Werteverteilung der Form einer Gausskurve kann mit der folgenden Formel etwas über den Fehler gesagt werden:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

wobei

x_0 Erwartungswert (wahrer Wert)

σ Standardabweichung

Für steigendes N geht der gemessene Mittelwert \bar{x} gegen den wahren Wert x_0 .

$$\text{experimentelle Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Die experimentelle Standardabweichung s konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen σ . Der Fehler der Einzelmessung s_{T_i} und der Fehler $s_{\bar{T}}$ des Mittelwertes stehen in folgender Beziehung:

$$s_{\bar{T}} = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{N}}$$

1.5 Regression

- *Nichtlineare Funktionen f* : Nichtlineare Regression. Gute Startwerte erforderlich für a_i .
- *Polynomiale Funktion f* : Lineare Regression. Unabhängig vom Startwert existiert lediglich ein Minimum. Startwerte für a_i daher nicht relevant.
- *Verwendung einer Software zum Fitten*: x-Werte sollen als Stellgrösse (absolute genau) betrachtet werden, y-Werte als fehlerbehaftet (Messgrösse).

$$\chi^2(a_0, a_1, \dots) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots)]^2}{\sigma_i^2} : \text{minimal}$$

wobei:

$f(x, a_0, a_1)$: gegebene Gesetzmässigkeit/Funktion

x_i, y_i : Messwertpaare

Berechnung des Fehlers σ_i der Einzelmessung aus dem Fit:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_1^N (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots))^2}{N - m}}$$

Wobei N die Anzahl Messergebnisse, m die Anzahl Parameter a_0, \dots, a_m bezeichnet. Die Parameter a_i müssen aus dem Fit herausgelesen werden.

1.6 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Seien:

<t>Resultatgrösse</t>: $R = R(x, y, z, \dots)$
 <t>Argumente (gemessen und/oder aus Literatur)</t>:
 $x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}}$
 $y = \overline{y} \pm s_{\overline{y}}$
 $z = \overline{z} \pm s_{\overline{z}}$

Gesucht: Mittelwert \overline{R} und mittlerer Fehler $s_{\overline{R}}$

Mittlerer, absoluter Fehler (statistischer Fehler): Bestimmen mittels dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$s_{\overline{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{z}}\right)^2 + \dots}$$

Wobei $\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\overline{R}}$ für die partielle Ableitung der Funktion R nach der Variablen x , ausgewertet an der Stelle der Mittelwerte $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dots$ steht.

Der Fehler $\pm s_R$ bezeichnet die Intervallbreite, in welcher der wahre Wert mit 68 % Wahrscheinlichkeit liegt.

1.7 Spezialfälle des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

<t>Addition und Subtraktion</t>: $s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ Es werden die absoluten Fehler
 <t>Multiplikation und Division</t>: $r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2}$
 <t>Potenzen</t>: $r_R = \frac{s_R}{R} = n \cdot r_x$. Der relative Fehler der Messgrösse wird mit r_x bezeichnet.

In Endresultaten sind immer absolute Fehler anzugeben.

2 Durchführung

Die Messwerte zu den einzelnen Versuchen wurden durch den Dozenten zur Verfügung gestellt. Sie sind alle im Anhang vorzufinden. Die zur Versuchsdurchführung verwendeten Tools beinhalten den Taschenrechner, Excel und Python mit diversen Libraries (Jupyter, Scipy, Pandas, Matplotlib, Seaborn).

3 Auswertung

Dieses Kapitel befasst sich mit den Möglichkeiten und Tricks der Fehlerrechnung. Normalerweise würde dieses Kapitel separat geführt, jedoch ist das Ziel dieses Versuches, die Fehlerrechnung näher kennenzulernen.

3.1 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit soll durch die Mittlere Laufzeit über eine bekannte Strecke bestimmt werden.

3.1.1 Messwerte

Länge der Messstrecke : $s = 2.561 \pm 0.003m$

Raumtemperatur : $\theta = 23^\circ C$

Messprotokoll: TODO:

3.1.2 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit

$$\text{Mittlere Laufzeit : } \bar{t} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} t_i = 7.32ms$$

$$\text{Fehler der mittleren Laufzeit : } s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{20 \cdot 19}} = 0.000074ms$$

$$\text{Standardabweichung : } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{19}} = 0.00033ms$$

Mithilfe des zuvor ermittelten Mittelwertes kann die Mittlere Schallgeschwindigkeit als:

$$c = 349.74 \frac{m}{s}$$

festgestellt werden. Die Unsicherheit des Mittelwertes der Schallgeschwindigkeit kann mithilfe des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ersichtlich in (1) errechnet werden.

$$R(x, y) = c(s, t) = \frac{s}{t}$$
$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2}$$
$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} s_{\bar{t}}\right)^2}$$
$$s_{\bar{s}} = 3.54 \frac{m}{s}$$

Relativer Fehler der Zeit : 1.00%

Relativer Fehler der Geschwindigkeit : 1.01%

3.2 Eisengehalt

3.2.1 Messwerte

TODO:

3.2.2 Einfacher Mittelwert

Der einfache Mittelwert und sein Fehler ergeben sich analog zu Aufgabe 1. TODO:

$$\bar{x} = 20.56\%$$

$$s_{\bar{x}} = 0.52\%$$

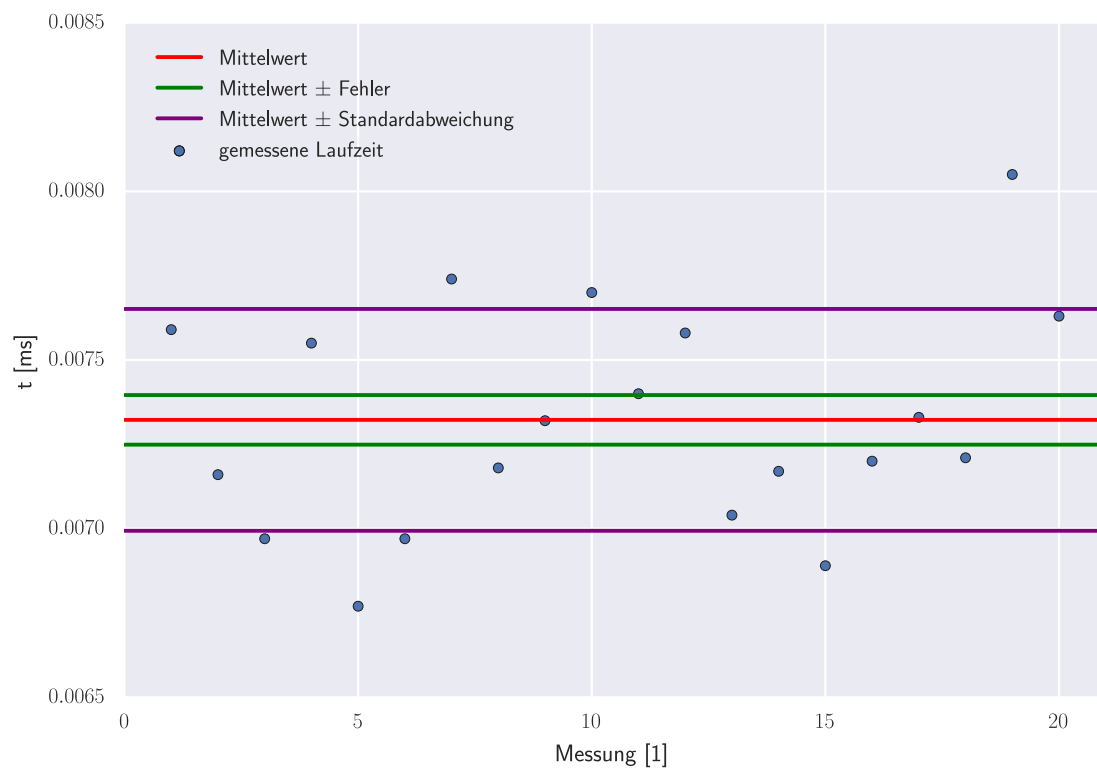


Figure 1: Laufzeiten des Schalls

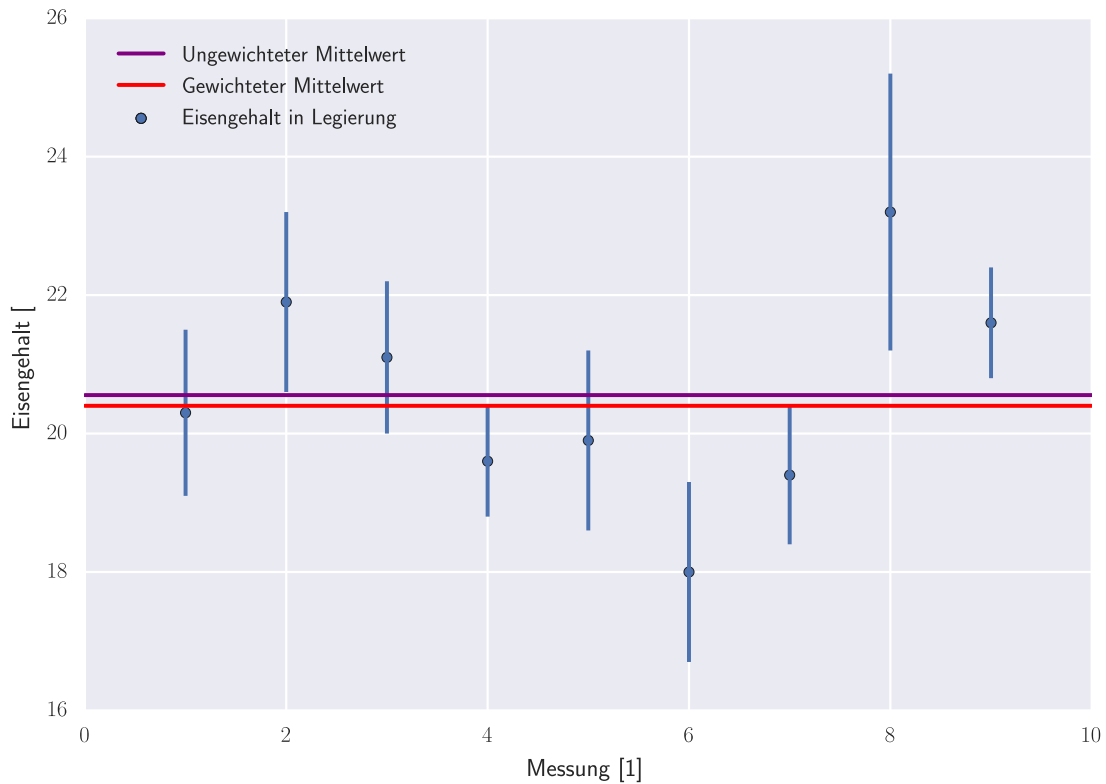


Figure 2: Eisengehalt in einer Legierung

3.2.3 Gewichteter Mittelwert

Der gewichtete Mittelwert und sein Fehler werden als

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}} = 20.40\%$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_{\bar{x}_i}}} = 0.36\%$$

bestimmen.

3.3 Federkonstante

3.3.1 Messwerte

3.3.2 Rechnung mittels Taschenrechner

3.3.3 Linear Regression

Mit dem Rechner Die Steigung der Regressionsgeraden und somit die Federkonstante k wird wie folgt erhalten:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 22.53 \frac{N}{m}$$

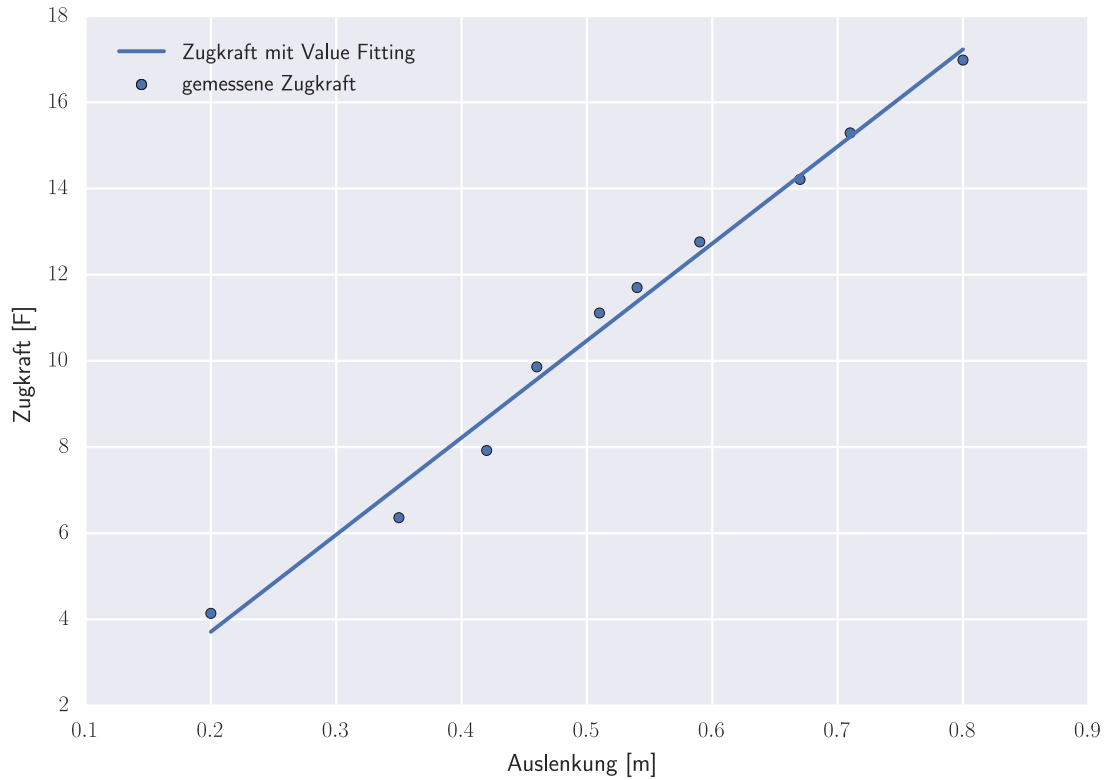


Figure 3: Federkraft im vorgespannten Zustand

Der zugehörige Achsenabschnitt und somit die Ruhekraft F_0 errechnet sich aus:

$$F_0 = \bar{y} - k \cdot \bar{x} = -0.79 \text{ N}$$

Die empirische Korrelation ist:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}}$$

mit zugehörigem Bestimmtheitsmass:

$$R^2 = r_{xy}^2$$

Mit scipy

3.4 Offset, Amplitude, Frequenz und Phase eines Pendels

Von einem Pendel ist die Auslenkung in y-Richtung zu verschiedenen Zeitpunkten t_i bekannt. Mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate können Offset, Amplitude, Frequenz und Phase des Pendels bestimmt werden. Die Funktion des Pendels welche mit dem Fit angenähert wird schreibt sich wie folgt:

$$y(t) = A \cdot \exp(-\Gamma \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0$$

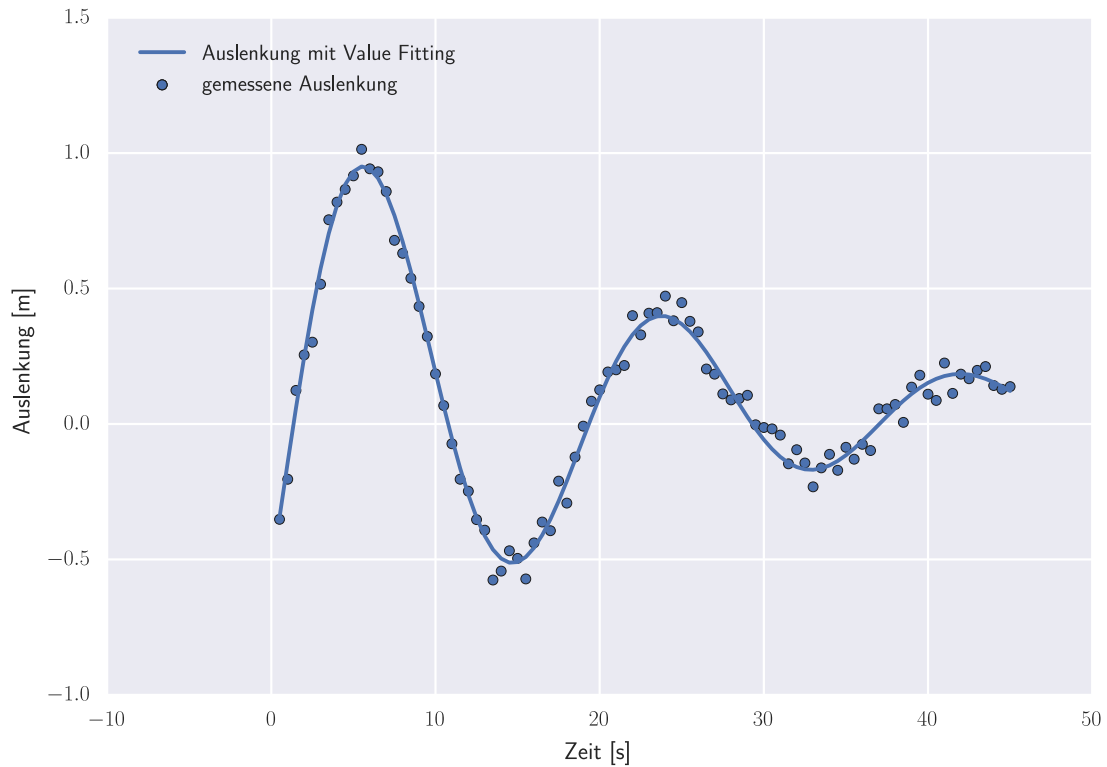


Figure 4: Auslenkung eines Pendels über Zeit

3.4.1 Messwerte

TODO:

3.4.2 Value Fitting

Mit der Methode der Chi-Quadrate (nichtlineare Regression) wurden durch scipy die folgenden besten Werte ermittelt:

$$A = 1.22m$$

$$\Gamma = 0.05 \frac{1}{s}$$

$$f = 0.05 Hz$$

$$\delta = -5.77$$

$$y_0 = 0.05m$$

3.5 Tiefpass

3.5.1 Messwerte

$$U_e = 4V_{pp} \Rightarrow \pm 2.0V$$

$$R = 500\Omega$$

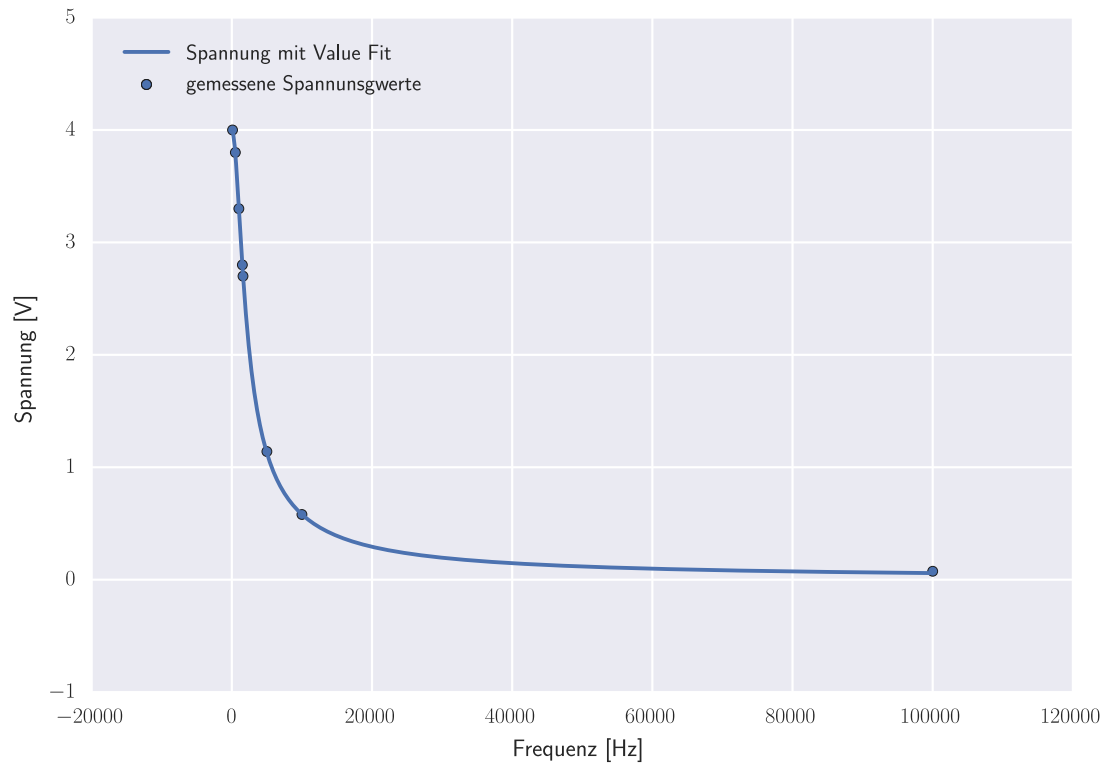


Figure 5: Spannung eines Tiefpasses

3.5.2 Berechnung von C

Die Kapazität C kann durch zwei verschiedene Funktionen bestimmt werden:

$$\mathcal{A}_a = \frac{\mathcal{A}_e}{\sqrt{1 + (2\pi f C R)^2}}$$

$$\phi = \arctan(-\omega R C)$$

Die Kapazität kann mit einem Fit an die Ausgangsspannung U_a auf

$$C = 0.22 \mu F$$

und mit einem Fit an die Phase U_a auf

$$C = 0.20 \mu F$$

bestimmt werden.

4 Resultate und Diskussion

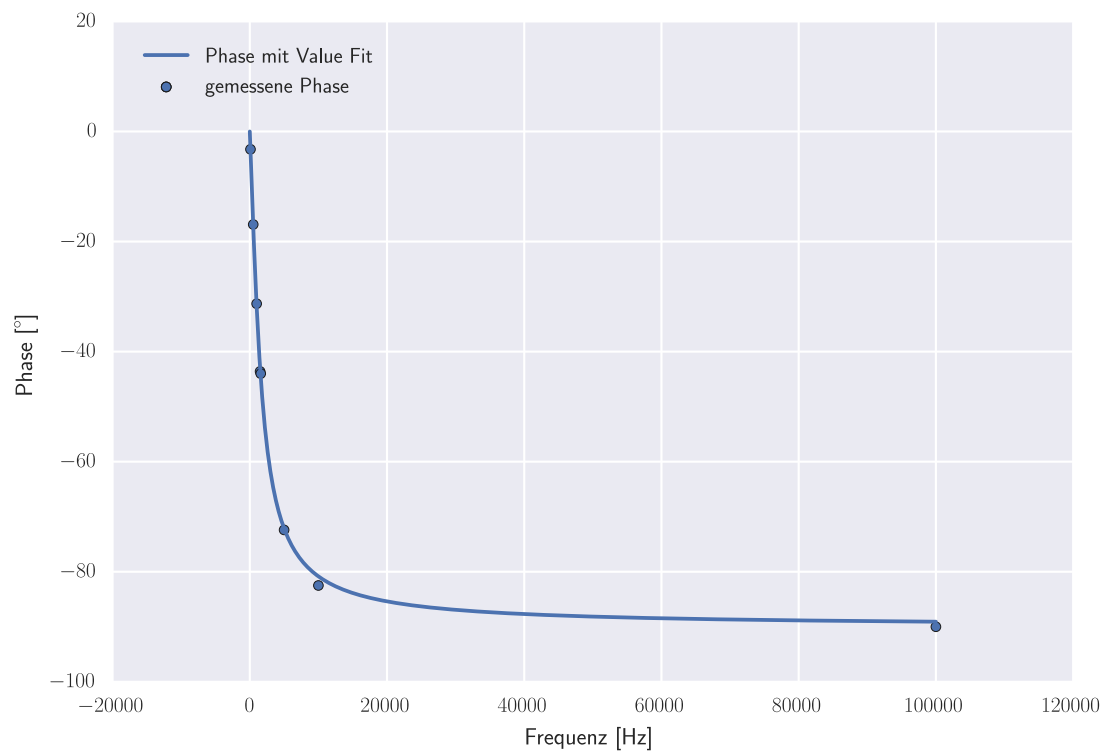


Figure 6: Phase eines Tiefpasses