

M1

Noah Huesser <yatekii@yatekii.ch>

November 24, 2016

Contents

1	Arbeitsgrundlagen	2
1.1	Flugzeitmethode	2
1.2	Ballistische Methode	2
1.3	Drehstossmethode	4
1.4	Einfluss des Luftwiderstandes auf die Geschossgeschwindigkeit	5
2	Versuchsaufbau	5
3	Versuchsdurchführung	5
3.1	Ballistische Methode	6
3.1.1	Mittlere Geschwindigkeiten	6
3.1.2	Vergleich der Messmethoden	8
3.1.3	Streuung der Mündungsgeschwindigkeit	8
3.2	Drehstossmethode	8
3.2.1	Mittlere Geschwindigkeiten	11
3.2.2	Vergleich der Messmethoden	11
4	Fehlerrechnung	11
4.1	Ballistische Methode	11
4.2	Drehstossmethode	16
5	Resultate & Diskussion	18
5.1	Ballistische Methode	18
5.2	Drehstossmethode	19

1 Arbeitsgrundlagen

Im Versuch M1 geht es darum die Geschwindigkeit einer Pistolenkugel auf verschiedene Arten zu bestimmen. Dabei gibt es noch verschiedene Arten von Geschwindigkeiten.

1.1 Flugzeitmethode

Die **mittlere Geschwindigkeit** eines Objektes kann durch 1 berechnet werden.

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Wenn also die Abschusszeit und die Aufprallzeit, sowie die Flugstrecke bekannt sind, so kann die Zeitdifferenz und somit die mittlere Fluggeschwindigkeit des Geschosses ermittelt werden.

1.2 Ballistische Methode

Bei dieser Methode wird ein Schuss auf ein hängendes Pendel abgegeben. Die Gleichungen im folgenden Abschnitt wurden durch den Dozenten zur Verfügung gestellt.

Der Impuls p ist gegeben durch die Gleichung in 2. Dieser Impuls kann beim Aufprall der Pistolenkugel auf ein ballistisches Pendel gemessen werden. Durch den erheblichen Massenunterschied der Kugel und des Pendels bleibt die Kugel stecken. Ein inelastischer Stoss resultiert. Aus diesem Grund wird die komplette kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Der Energieerhaltungssatz ist hier also schwierig anwendbar.

$$p = mv = (m + M) \cdot u \quad (2)$$

Die verbleibende kinetische Energie wird beim Ausschlagen des Pendels in potentielle Hubenergie umgewandelt. Mithilfe des Energiesatzes wird die Geschwindigkeit u durch die Hubhöhe h mit Gleichung 3 ersetzt.

$$u = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

Aus Grafik ?? können die Gleichungen 4 und 5 bestimmt werden.

$$h = l \cdot (1 - \cos\varphi) \quad (4)$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (5)$$

Da der Schwerpunkt und somit die Länge l des Pendels nur ungenau ermittelt werden können, wird ein Umweg über die Schwingungsdauer T ersichtlich in 6 gewählt.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

Daraus resultiert die Gleichung 7.

$$u = \frac{g}{2\pi} \cdot T \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right)} \quad (7)$$

Mit je einer Taylorentwicklung kann die Gleichung 7 auf Gleichung 8 angenähert werden.

$$u = \frac{g}{2\pi} \cdot \frac{M+m}{m} \cdot T \cdot \frac{x}{a} \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \quad (8)$$

Da die Taylorreihe nur bis zum Grad 2 entwickelt wurde, wäre der nächste Term der Größenordnung 10^{-4} . Es ergibt sich also ein sehr genauer Wert.

Somit sind während des Experimentes die Größen m , M , a , x und T zu bestimmen.

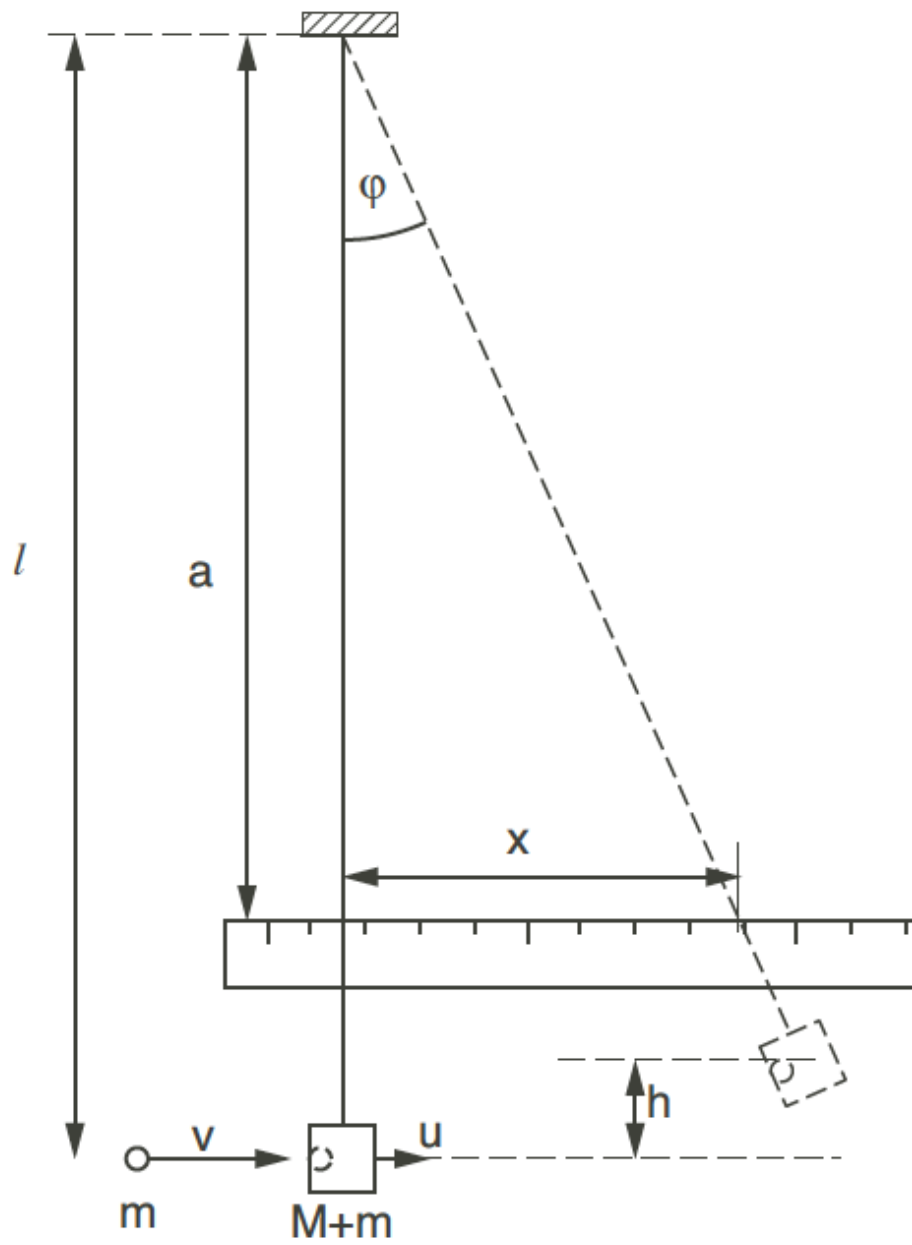


Figure 1: Ballistische Methode

1.3 Drehstossmethode

Bei dieser Methode wird ein Geschoss wie in Abbildung ?? gezeigt ein Geschoss auf eine um eine starre Achse frei drehbar gelagerte Hantel abgeschossen. Die Gleichungen im folgenden Abschnitt wurden durch den Dozenten zur Verfügung gestellt.

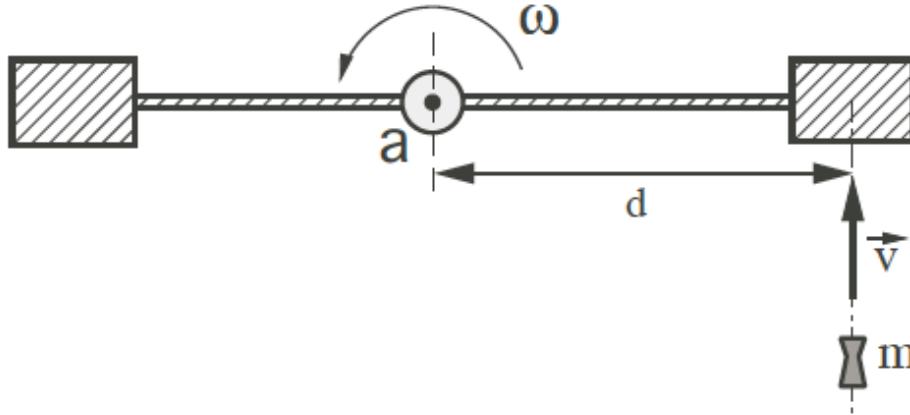


Figure 2: Drehstossmethode

Für eine mit v geradlinig bewegte Punktmasse m kann der Drehimpuls bezüglich der Drehachse a mit Gleichung 9 bestimmt werden.

$$\vec{L}_a = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (9)$$

Ferner ist bekannt, dass wie in Gleichung 10 beschrieben, der Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten bleibt.

$$L_a = L_{a,Kugel} + L_{a,Hantel} = const. \quad (10)$$

Daraus folgt, dass für die anfänglich ruhende Hantel Gleichung 11 gilt welche dann gleichzusetzen ist mit der Gleichung 12 der bewegten Hantel nach dem Aufprall.

$$L_a = m \cdot d \cdot v + 0 \quad (11)$$

$$L_a = \omega \cdot (I_{a,H} + m \cdot d^2) \quad (12)$$

Daraus abgeleitet ergibt sich für die Geschwindigkeit der Pistolenkugel beim Aufprall die Gleichung 13, wobei $I_{a,H}$ dem Inneren Moment der Hantel bezüglich a und ω der Winkelgeschwindigkeit der Hantel um die Achse a entspricht.

$$v = \omega \cdot \left(\frac{I_{a,H}}{m \cdot d} + d \right) \quad (13)$$

Somit sind für dieses Experiment die Größen $I_{a,H}$, m , d und ω zu bestimmen.

$I_{a,H}$ kann bestimmt werden mit Gleichung 15. Hierbei ist I_{a,H_0} das Moment der Hantel ohne Gewichte. Es wird durch den Dozenten geliefert. m ist die Masse eines Gewichtes und d der Abstand zum Mittelpunkt der Hantel. Die Gleichung kann hergeleitet werden durch das Innere Moment einer Punktmasse erhalten mit Gleichung 14. Da zwei Gewichte vorhanden sind wird dieses doppelt addiert und dem Moment der Hantel ohne Gewichte hinzugefügt.

$$I_{a,P} = m \cdot r^2 \quad (14)$$

$$I_{a,H} = 2 * m * d^2 + I_a, H_0 \quad (15)$$

1.4 Einfluss des Luftwiderstandes auf die Geschwindigkeit

Bisher wurde gezeigt wie die mittlere, sowie die Aufprallgeschwindigkeit ermittelt werden können. Interessant ist aber auch die Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses. Zur Berechnung dieser wurden die Gleichungen im Folgenden durch den Dozenten zur Verfügung gestellt.

Diese kann man sehr gut über den wirkenden Luftwiderstand bestimmen. Der Luftwiderstand ist gegeben durch die Beziehung in 16, wobei v die Momentangeschwindigkeit des Geschosses, A die Querschnittsfläche jenes Geschosses, ρ_L die Luftdichte und c_w der Widerstandsbeiwert des Projektils sind.

$$F_L = \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho_L \cdot v^2 \quad (16)$$

Das Projektil verliert ebensoviel kinetische Energie wie der Luftwiderstand Bremsarbeit verrichtet. Dies ist mit Gleichungen 17 und 18 ersichtlich.

$$dE_{kin} = -F_L ds \quad (17)$$

$$m \cdot v \cdot dv = -\frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot ds \quad (18)$$

Daraus kann die Differenzengleichung 19 gebildet werden. Mit den Anfangsbedingungen $s = 0$ und $v = v_0$ wird Gleichung 20 erhalten. Diese kann für sehr kleine $k \cdot s$ mit 21 angenähert werden. k ist in allen diesen Gleichungen mit dem Term $k = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho_L}{2m}$ zu beziffern.

$$\frac{dv}{v} = -k \cdot ds \quad (19)$$

$$v = v_0 \cdot e^{-k \cdot s} \quad (20)$$

$$v = v_0 \cdot (1 - k \cdot s) \quad (21)$$

2 Versuchsaufbau

3 Versuchsdurchführung

Für alle drei im Versuch angewandten Methoden zur Bestimmung der Projektilgeschwindigkeit (Flugzeitmethode, ballistische Methode, Drehstossmethode) wurde der Versuchsaufbau vermessen. So konnten folgende Parameter bestimmt werden:

Strecke zwischen den Lichtschranken: $s = 0.5$
 Strecke zwischen Mündung und Pendel: $s_{B1} = 1.8$
 Strecke zwischen Mündung und Hantel: $s_{B2} = 1.64$
 Masse des Projektils im Mittel: $m = 0.00$
 Mittlere Schwingungsdauer des Pendels: $T = 2.88$
 Die Querschnittsfläche eines Projektils: $A = 4e - 06$
 TODO : v_{1cw}, v_{1pl}

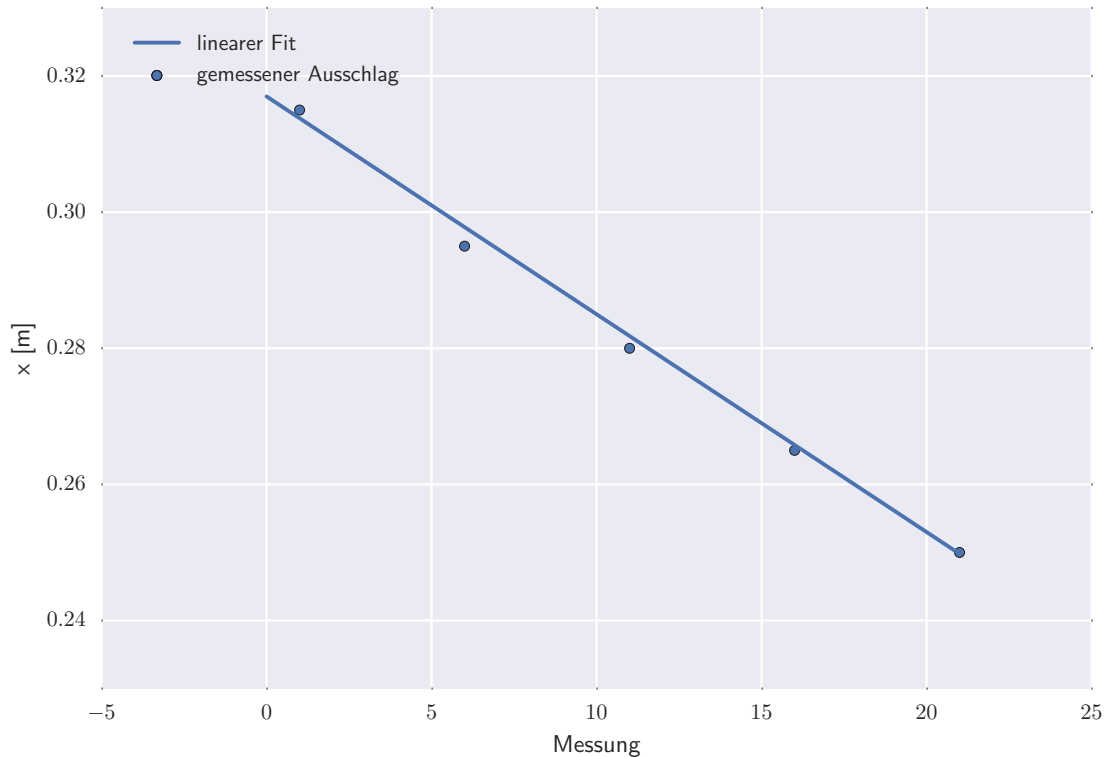


Figure 3: Lineare Regression zur bestimmung des maximalen Ausschlages des Pendels, falls keinerlei Unidealitäten dieses beeinflussen.

3.1 Ballistische Methode

Erst wurden 10 Messungen mit der ballistischen Methode durchgeführt. Hierbei wird ein Schuss auf ein Pendel abgefeuert. Es wurde zum einen die Zeit die vergeht bis das Projektil beide Lichtschranken passiert hat gemessen und zum anderen wurde der Ausschlag des Pendels gemessen.

Da in der Pendelgleichung der Luftwiderstand sowie der Reibungswiderstand der Aufhängung nicht berücksichtigt sind, wurden pro Schuss 5 Messungen des Ausschlages gemacht. Mit linearer Regression kann somit der korrekte erste Ausschlag gefunden werden. So ist nämlich der Y-Achsenabschnitt der Fit-Gerade gerade der um den Luftwiderstand korrigierte erste Ausschlag. Wichtig dabei ist, dass für die Messungen der Amplituden $n-0.75$ anstelle von n verwendet wird. Denn bei Messung der ersten Amplitude sind ja schon 0.25 Schwingungen vergangen, etc.

Damit besser gezählt werden konnte, wurde nur jeder fünfte Ausschlag am oberen Ende des Lineals gemessen. Somit wurden die Amplituden zu den Schwingungszeiten [0.25, 5.25, 10.25, 15.25, 20.25] gemessen. Diese führen nun mit einem Linearen Fit zum gesuchten um die Nichtidealitäten korrigierten Ergebnis.

Dieses Verfahren ist in Grafik 3 gut zu sehen. Dieses wurde für alle zehn abgegebenen Schuss durchgeführt, hier aber nur für den ersten Schuss grafisch dargestellt.

Es resultiert in Grafik 3 also ein maximaler Ausschlag von 0.32m. In diesem sind bereits jegliche Verluste berücksichtigt.

3.1.1 Mittlere Geschwindigkeiten

Dieses Verfahren wurde für alle zehn Messungen durchgeführt. Nun kann aus Gleichung 8 die Aufprallgeschwindigkeit errechnet werden.

Die errechneten mittleren Geschwindigkeiten sind in Grafik 4 in Relation gesetzt.

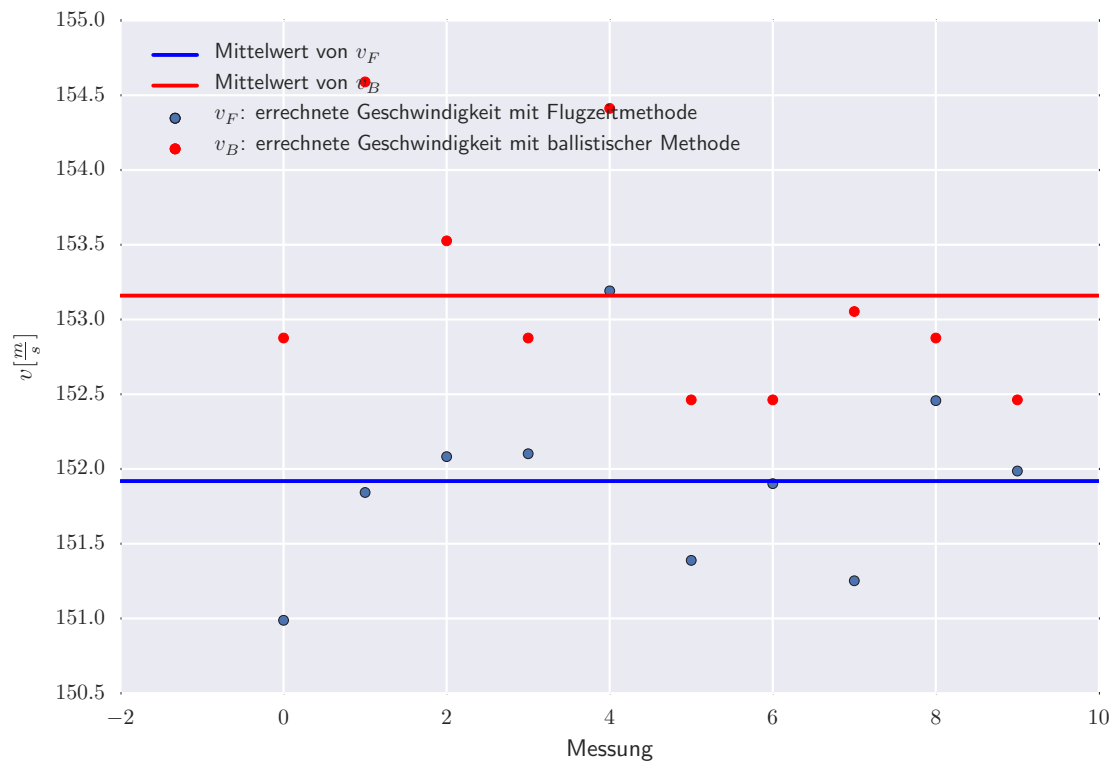


Figure 4: Aufprallgeschwindigkeiten der Kugel durch Ballistische Methode errechnet, im Vergleich zu den jeweiligen Geschwindigkeiten, welche durch die Flugzeitmethode berechnet wurden.

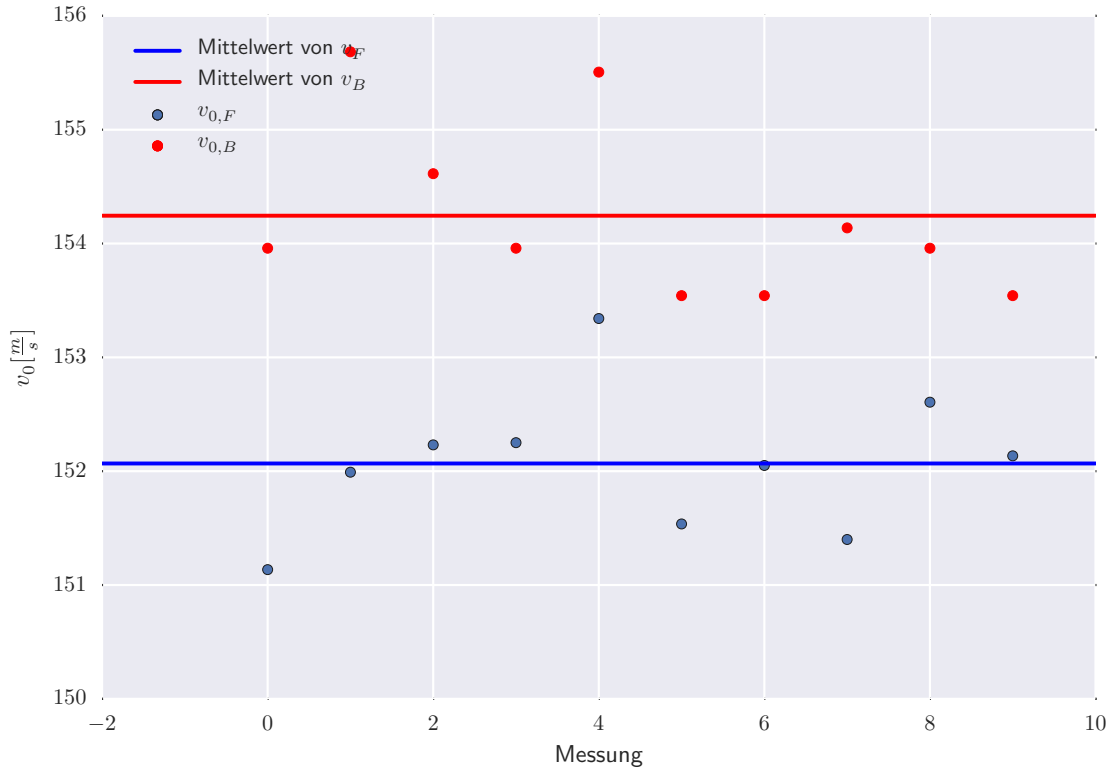


Figure 5: Die Geschwindigkeiten errechnet mit der Flugzeit- und der ballistischen Methode an Mündung im Vergleich.

3.1.2 Vergleich der Messmethoden

Um die Messmethoden vergleichen zu können wurden alle *einzelnen* errechneten Geschwindigkeiten mithilfe der Luftwiderstandskorrekturgleichung 21 auf einen Bezugspunkt, in diesem Falle wurde die Mündung gewählt, umgerechnet. Hier wurde für die Strecke der Flugzeitmethode $s = \frac{s}{2}$ und für die Strecke der ballistischen Methode $s = s_{B1}$ gewählt.

3.1.3 Streuung der Mündungsgeschwindigkeit

In Grafik ?? sind die mithilfe der Flugzeitmethode und der Luftwiderstandskorrektur errechneten Mündungsgeschwindigkeiten gezeigt.

3.2 Drehstossmethode

Hierbei wurde ein Geschoss auf eine horizontal drehbare Hantel abgefeuert. Dabei wurde wieder die Flugzeit innerhalb der Lichtschranken gemessen. Diesmal wurde jedoch zusätzlich noch die Zeit die die Hantel für eine halbe Umdrehung benötigt gemessen. Damit konnte die Winkelgeschwindigkeit ω durch Gleichung 22 bestimmt werden.

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (22)$$

Mithilfe der errechneten Gleichung 13 konnte die Geschwindigkeit des Projektils bestimmt werden. Dabei wurde die Gleichung in ?? zur bestimmung der Trägheitsmomente der Beiden Hanteln mit unterschiedlichen Gewichten verwendet.

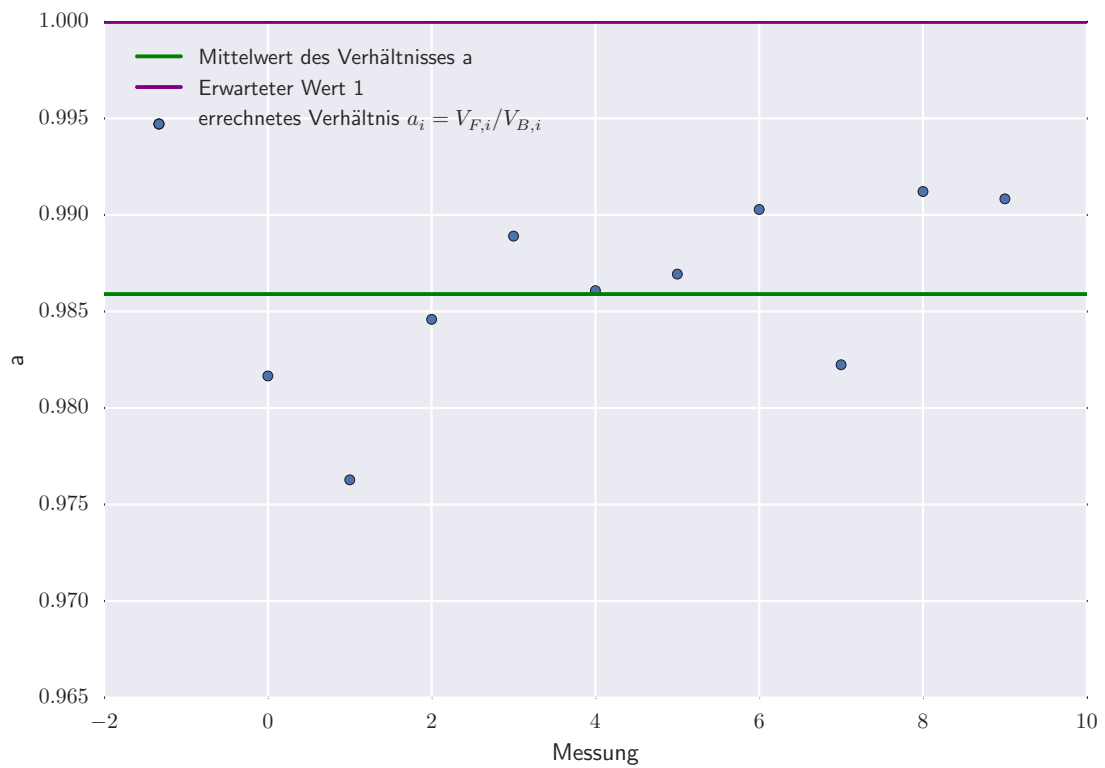


Figure 6: Die mittleren Geschwindigkeiten errechnet mit der Flugzeit- und der ballistischen Methode an Mündung im Verhältnis dargestellt und ihr erwarteter Wert von 1 zum Vergleich.

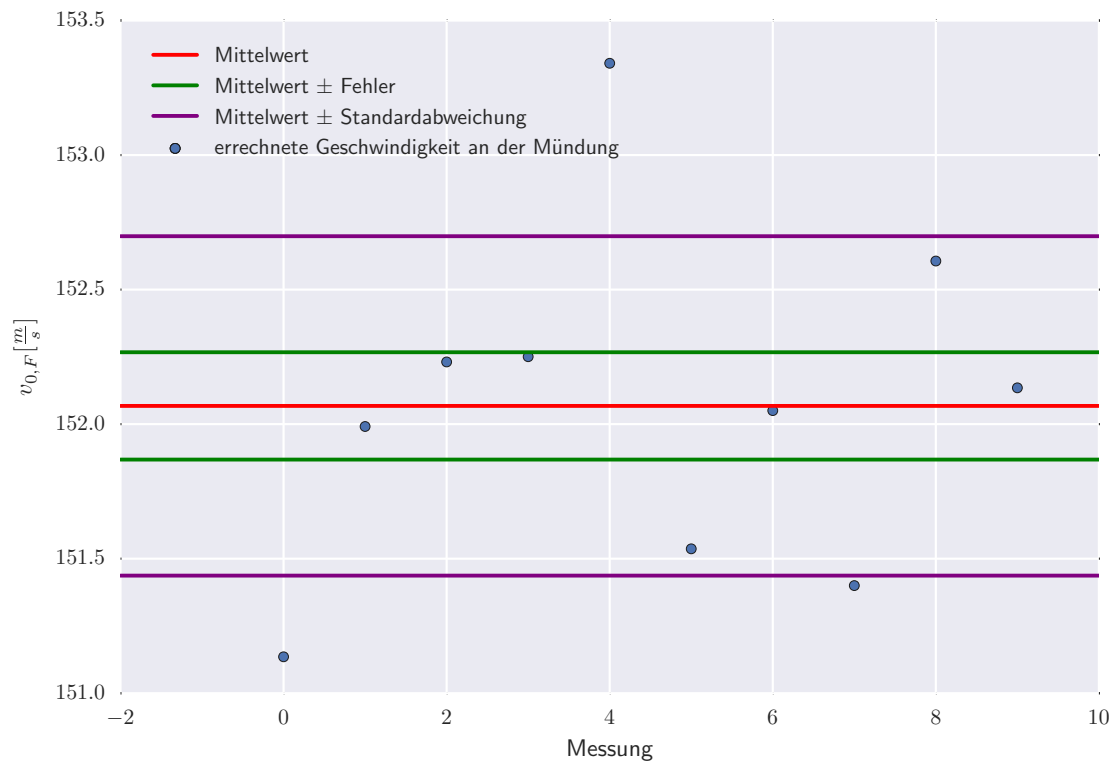


Figure 7: Die Mündungsgeschwindigkeiten errechnet mit der Flugzeitmethode. Dazu ihr Mittelwert und der Bereich der Standardabweichung.

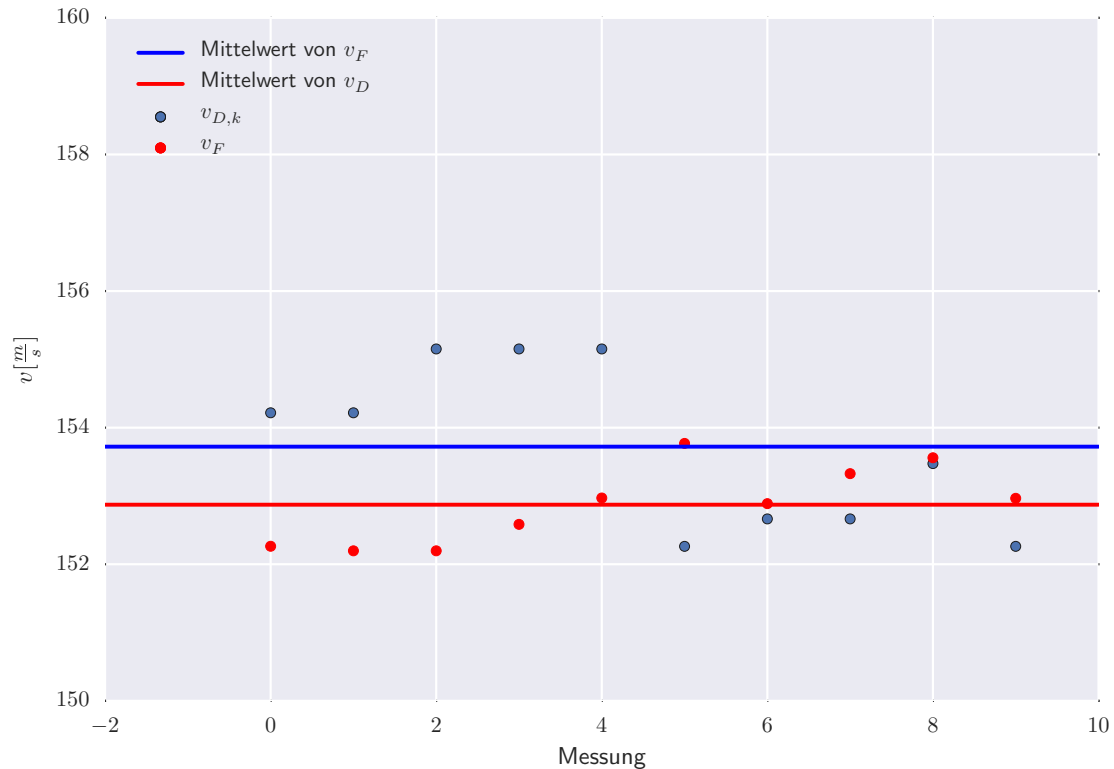


Figure 8: Die Geschwindigkeiten errechnet mit der Flugzeit- und der Drehstossmethode mit je fünf Messungen beider Gewichten im Vergleich.

Die Messresultate aus beiden Versuchen sind im Folgenden Teil dargestellt. Es wird ein Vergleich dieser Methodik zur Flugzeitmethode angestellt.

3.2.1 Mittlere Geschwindigkeiten

Um die verschiedenen Methoden gut vergleichen zu können wurden die Mittelwerte der Flugzeitmethode und der Drehstossmethode errechnet.

Die errechneten mittleren Geschwindigkeiten und ihre Unsicherheiten sind in Grafik 13 in Relation gesetzt.

3.2.2 Vergleich der Messmethoden

Um die Messmethoden vergleichen zu können wurden alle *einzelnen* errechneten Geschwindigkeiten mithilfe der Luftwiderstandskorrekturgleichung 21 auf einen Bezugspunkt, in diesem Falle wurde die Mündung gewählt, umgerechnet.

Hier wurde für die Strecke der Flugzeitmethode $s = \frac{s}{2}$ und für die Strecke der Drehstossmethode $s = s_{B2}$ gewählt.

4 Fehlerrechnung

4.1 Ballistische Methode

Die Mittelwerte der ballistischen Methode unterscheiden sich um

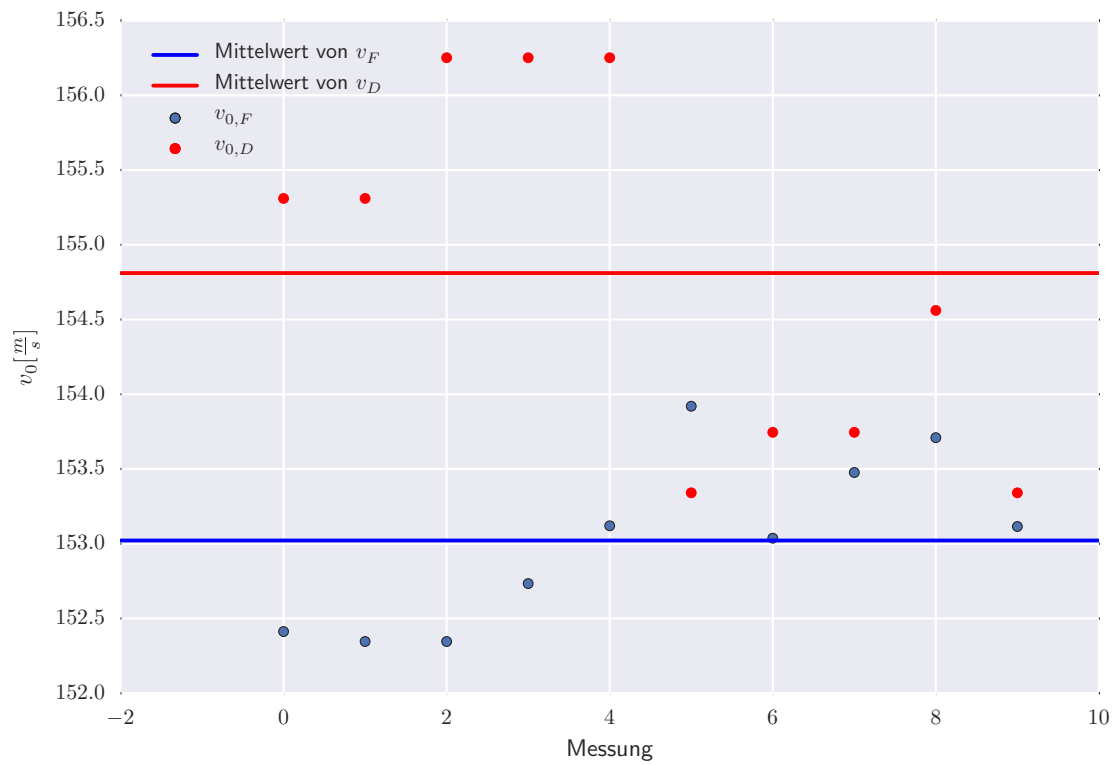


Figure 9: Die Geschwindigkeiten errechnet mit der Flugzeit- und der Drehstossmethode an Mündung im Vergleich.

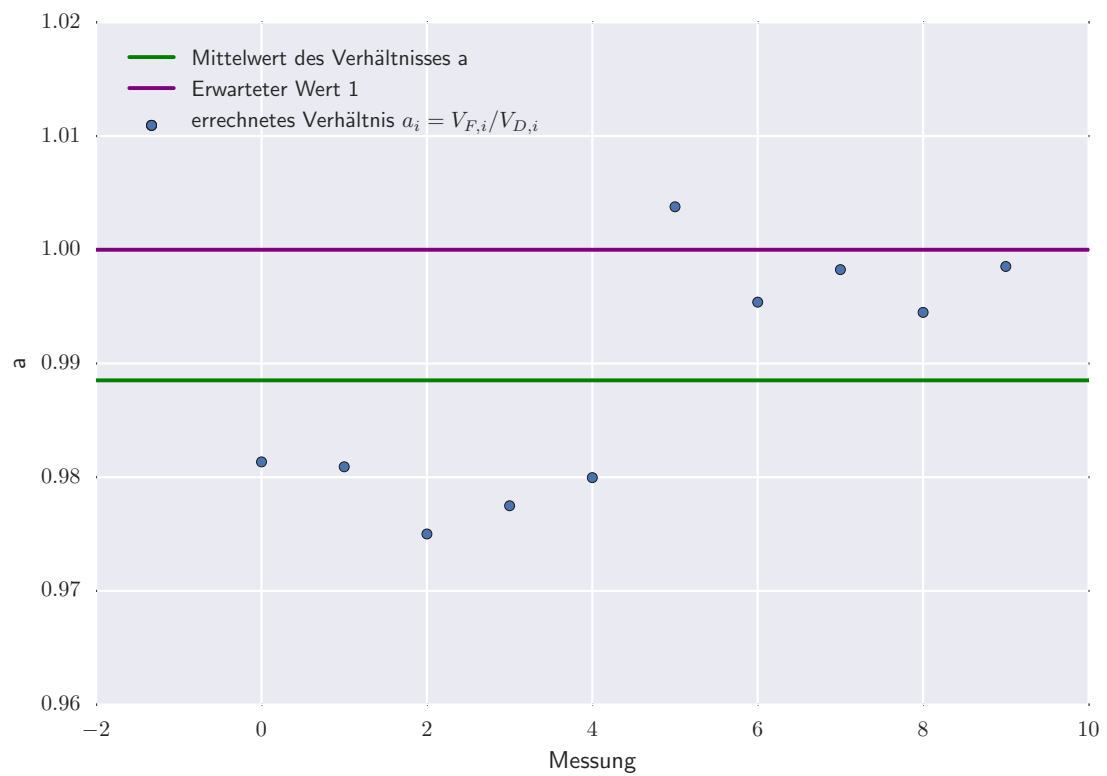


Figure 10: Die mittleren Geschwindigkeiten errechnet mit der Flugzeit- und der Drehstossmethode an Mündung im Verhältnis dargestellt und ihr erwarteter Wert von 1 zum Vergleich.

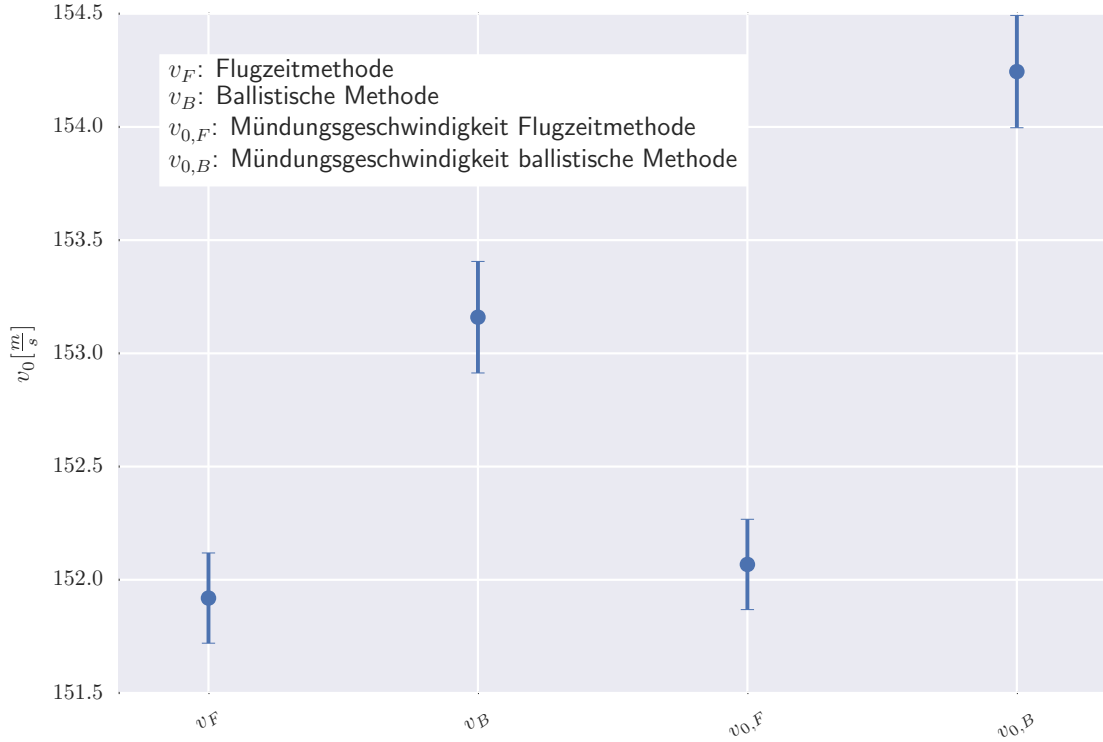


Figure 11: Die mittleren Geschwindigkeiten der ballistischen und Flugzeitmethode im Vergleich mit ihren respektiven mittleren Mündungsgeschwindigkeiten.

IndexError: invalid index to scalar variable.

$\frac{m}{s}$. Dies sind zwar nur

IndexError: invalid index to scalar variable.

%, jedoch muss diesem Unterschied auf den Grund gegangen werden.

Zuerst wurde dafür der statistische Fehler gerechnet. Vielleicht liegt dieser ja im akzeptablen Bereich.

Wie anhand der Fehlerbalken in Grafik 11 schnell festgestellt werden kann, ist der statistische Fehler relativ gering. Dies bedeutet aber auch, dass die Fehlerbereiche sich nicht überlappen. Dies ist nicht sehr gut. Denn es gibt nur *eine* wahre Geschwindigkeit des Projektils. Natürlich kann diese nie genau bestimmt werden. Da sich aber die Fehlerbereiche nicht überlappen muss eine Messung falsch sein oder der systematische Fehler viel grösser sein.

Deswegen wurde eine Fehlerfortpflanzungsrechnung für die ballistische Methode gemacht. Für die Flugzeitmethode ist diese nicht sehr aussagekräftig da die Messfehler sehr gering sind. Bei der ballistischen Methode wurde jedoch von Auge ungefähr ein Wert in Bewegung abgelesen. Dies führt natürlich zu hoher Ungenauigkeit. Da M und m sowie auch g durch sehr genaue Messinstrumente bestimmt werden konnten werden diese in der Fehlerfortpflanzungsrechnung vernachlässigt.

Somit ist der resultierende systematische Fehler durch Gleichung 23 gegeben.

$$S_{v,sys} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{g}{2\pi} \cdot \frac{M+m}{m} \cdot \frac{x}{a} \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] s_r\right)^2 + \left(\frac{g}{2\pi} \cdot \frac{M+m}{m} \cdot T \cdot \frac{1}{a} \cdot \left[1 - \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] s_x\right)^2} + \quad (23)$$

Natürlich kann sofort erkannt werden wie gross der systematische Fehler bei der ballistischen Methode ist. Deswegen wurden so unterschiedliche Ergebnisse für die Projektilgeschwindigkeit erhalten. Die Fehlerbereiche überlappen sich nun und es ist somit okay anzunehmen dass die beiden Rechnungen stim-

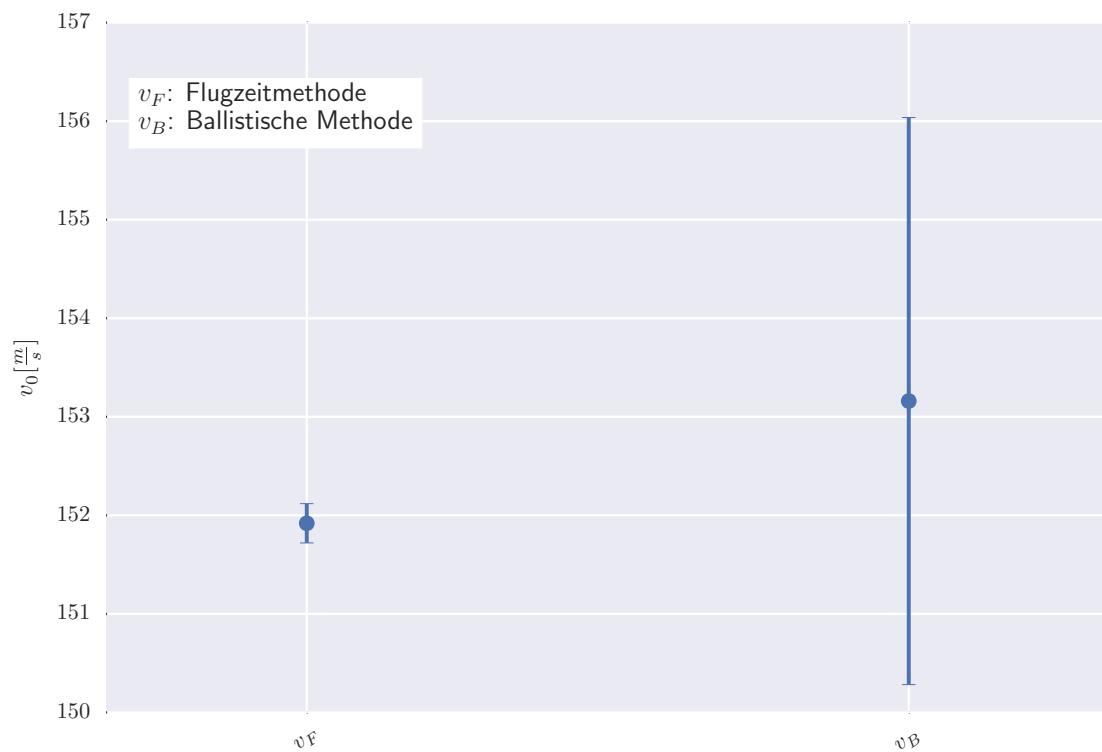


Figure 12: Die systematischen Fehler der mittleren Geschwindigkeiten der ballistischen und Flugzeitmethode im Vergleich.

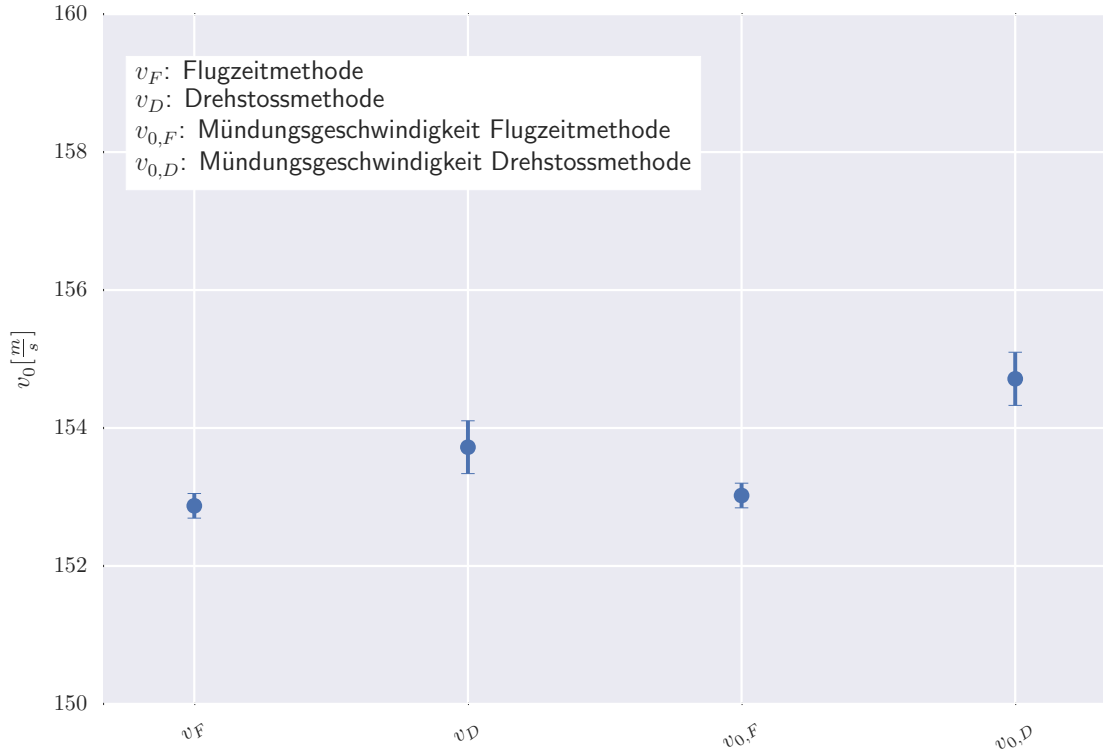


Figure 13: Die mittleren Geschwindigkeiten der Drehstoss- und Flugzeitmethode im Vergleich mit ihren respektiven mittleren Mündungsgeschwindigkeiten.

men wobei die Flugzeitmethode um ein Vielfaches genauer ist.

4.2 Drehstossmethode

Die Mittelwerte der Drehstossmethode unterscheiden sich um $0.85 \frac{m}{s}$. Dies sind zwar nur 0.55%, jedoch muss diesem Unterschied auf den Grund gegangen werden.

Zuerst wurde dafür der erneut statistische Fehler gerechnet. Vielleicht liegt dieser ja im akzeptablen Bereich.

Wie anhand der Fehlerbalken in Grafik 13 schnell festgestellt werden kann, ist der statistische Fehler relativ gering. Dies bedeutet aber auch, dass der die Fehlerbereiche sich nicht überlappen. Dies ist nicht sehr gut. Denn es gibt nur *eine* wahre Geschwindigkeit des Projektils. Natürlich kann diese nie genau bestimmt werden. Da sich aber die Fehlerbereiche nicht überlappen muss eine Messung falsch sein oder der systematische Fehler erneut viel grösser sein.

Deswegen wurde auch eine Fehlerfortpflanzungsrechnung für die Drehstossmethode gemacht. Hier wurden die Variablen d und $\frac{T}{2}$ berücksichtigt. Bei den anderen Werten handelt es sich um Messungen welche durch genaue Instrumente gemacht wurden.

Somit ist der resultierende systematische Fehler durch Gleichung 24 gegeben.

$$S_{v,sys} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \frac{T}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial d}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{\left(\frac{T}{2}\right)^2} \frac{I_{a,H}}{m \cdot d} + d\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\frac{T}{2}} \cdot \left(1 - \frac{I_{a,H}}{m \cdot d^2}\right)\right)^2} \quad (24)$$

Auch hier kann erneut erkannt werden wie gross der systematische Fehler bei der Drehstossmethode ist. Deswegen wurden auch hier so unterschiedliche Ergebnisse für die Projektilgeschwindigkeit erhalten.

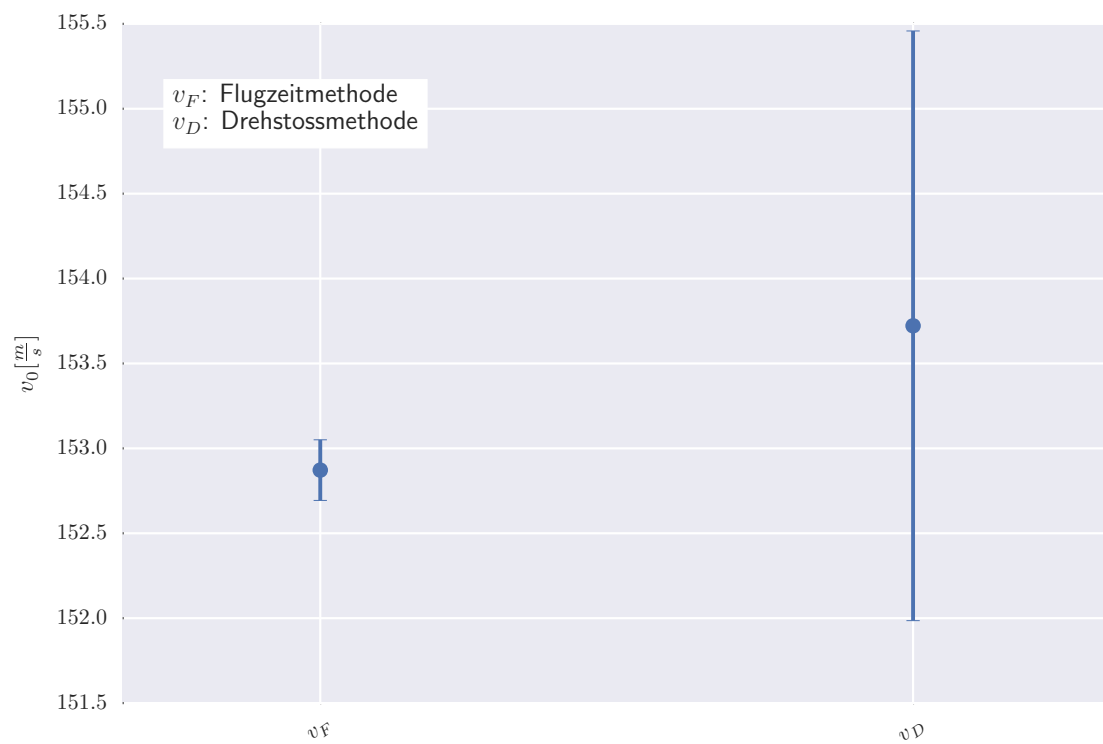


Figure 14: Die systematischen Fehler der mittleren Geschwindigkeiten der Drehstoss- und Flugzeitmethode im Vergleich.

Die Fehlerbereiche überlappen sich nun und es ist somit okay anzunehmen dass die beiden Rechnungen stimmen wobei die Flugzeitmethode auch hier um ein Vielfaches genauer ist.

5 Resultate & Diskussion

5.1 Ballistische Methode

Projektile	Wahlwindigkeit	stat. Fehler	syst. Fehler	Relativer Fehler
mit Flugzeitmethode	$151.92 \frac{m}{s}$	$0.20 \frac{m}{s}$		0.13%
v_F an der Mündung mit Flugzeitmethode	$152.07 \frac{m}{s}$	$0.20 \frac{m}{s}$		0.13%
$v_{0,F}$ mit ballistischer Methode	$153.16 \frac{m}{s}$	$0.25 \frac{m}{s}$	$2.88 \frac{m}{s}$	1.88%
v_B an der Mündung mit ballistischer Methode	$154.24 \frac{m}{s}$	$0.25 \frac{m}{s}$	$2.88 \frac{m}{s}$	1.87%
$v_{0,B}$				

Die Resultate aus den beiden Methoden unterscheiden sich kaum. Um genau 0.81% nämlich. Dies ist schon sehr genau. Jedoch ist die Geschwindigkeit für das Projektil nur auf genau einen Wert definiert. Welcher Wert ist nun also korrekt?

Genau aus diesem Grund wurde eine Fehlerrechnung gemacht. In dieser sieht man wunderbar dass der statistische Fehler sehr klein ist, der systematische Fehler dafür umso grösser. Bei der Flugzeitmethode gibt es praktisch keinen systematischen Fehler, da die Messstrecke und die Flugzeit praktisch ohne Fehler bestimmt werden können. Bei der ballistischen Methode hingegen wurden viele Werte von Auge abgelesen und können somit recht Fehlerbehaftet sein, da das Auge nicht genügend Präzision hat. Der Fehler ist so gross dass sich das Resultat der Flugzeitmethode innerhalb des Fehlerbereiches der ballistischen Methode bewegt. Es kann daher angenommen werden dass die Flugzeitmethode das Resultat mit viel kleinerem Fehlerbereich und ziemlich akkurat bestimmt. Man könnte aus beiden Methoden einen gewichteten Mittelwert bilden. Da der Fehler der ballistischen Methode aber so viel grösser ist, als der Fehler der Flugzeit-

methode, würde dieser ziemlich genau dem Resultat aus der Flugzeitmethode entsprechen.

5.2 Drehstossmethode

70% der Ergebnisse liegen innerhalb der Standardabweichung. Dies ist ein Bisschen mehr als die erwarteten 68%. Natürlich wurden viel zu wenige Messungen gemacht als dass die 68% jemals erreicht werden könnten. Somit ist 70% also schon ein sehr gutes Ergebnis!

<matplotlib.figure.Figure at 0x10472c358>