Arbeitsgrundlagen

Noah Hüsser <yatekii@yatekii.ch>

October 26, 2016

1 Typen von Messfehlern

- *Systematische Fehler* werden verursacht durch die Versuchsanordnung, die Versuchsumgebung oder den Messvorgang. Sie bewirken eine systematische Abweichung des des Messergebnisses vom eigentlichen Wert. Diese Abweichung wird auch Unsicherheit genannt. Diese Art von Fehler kann – werden sie erkannt – meistens korrigiert werden.
- *Zufällige Fehler* sind immer vorhanden und lassen sich durch mehrmalige Wiederholung eines Experimentes beliebig verkleinern.

2 Genauigkeit bei der Angabe von Messresultate

Es ist nicht hilfreich bei Resultaten mehr signifikante Ziffern anzugeben als jene, die innerhalb des Fehlerbereiches liegen. In einem Beispiel wird angenommen dass der absolute Fehler 3.6 Sekunden betrage. Der Mittelwert aus den Messungen betrage 118.8 Sekunden. Mit einem resultierenden relativen Fehler von 3% ist es durchaus angebracht die Resultate auf ganze Zahlen zu runden, da alle weiteren signifikanten Ziffern sowieso in den Toleranzen verloren gingen.

3 Fehlerbestimmung bei Einzelgrössen

3.1 Einfacher Mittelwert

Seien $x_1, x_2, ..., x_N$ N Messergebnisse aus einer Reihe von identischen Experimenten, so wird der Mittelwert anhand von Gleichung 1 bestimmt werden. Sein zugehöriger Fehler kann mit Gleichung 2 bestimmt werden. Beide Werte werden genauer mit grösserem N.

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \overline{x})^2}{N \cdot (N-1)}} \tag{2}$$

Das resultierende Ergebnis wird wie in Gleichung 3 ersichtlich formuliert.

$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}} \tag{3}$$

3.2 Mittelwert mit Gewichten

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{x_1} \pm s_{\overline{x_1}} \\ x_2 &= \overline{x_2} \pm s_{\overline{x_2}} \\ &... \\ x_n &= \overline{x_n} \pm s_{\overline{x_n}} \end{aligned}$$

Der wahrscheinlichste Wert $\overline{x}$ wird durch einen gewichteten Mittelwert mit der Gleichung 4 erreicht. Die Gewichte dazu werden nach 5 berechnet. Den zugehörigen Fehler wird durch 6 bestummen.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}}} \tag{4}$$

$$g_{\overline{x_i}} = \frac{1}{s_{\overline{x_i}}^{\,2}} \tag{5}$$

$$\text{Fehler des gewichteten Mittelwertes: } s_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}}}} \tag{6}$$

Messergebnisse mit betragsmässig kleineren Fehlern werden also stärker gewichtet.

4 Fehlertheorie

Eine Werteverteilung der Form einer Gausskurve kann mit der Gleichung in 7 beschrieben werden. Damit kann etwas über die Werteverteilung und auch den Wahren Wert ausgesagt werden

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ wobei} \tag{7}$$

mit

$$\text{Erwartungswert (wahrer Wert)} : x_0$$
$$\text{Standardabweichung} : \sigma$$

Die experimentelle Standardabweichung kann mit Gleichung 8 bestimmt werden. Mit steigendem N nähert sich der gemessene Mittelwert $\overline{x}$ dem wahren Wert x_0 an.

$$\text{Experimentelle Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \overline{x})^2}{N-1}} \tag{8}$$

Die experimentelle Standardabweichung s konvergiert für $N \to \infty$ gegen σ. Der Fehler der Einzelmessung s_{T_i} und der Fehler $s_{\overline{T}}$ des Mittelwertes stehen in der in 9 beschriebenen Beziehung.

$$s_{\overline{T}} = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{N}} \tag{9}$$

5 Regression

Im allgemeinen wird bei der Regression iteriert bis mit 10 ein Minimum für χ^2 gefunden ist.

$$\chi^2(a_0, a_1, ...) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(x_i, a_0, a_1, ...)]^2}{\sigma_i^2} \tag{10}$$

mit

$$\text{Gegebene Gesetzmässigkeit} f(x, a_0, a_1)$$
$$\text{Messwertpaare} x_i, y_i$$

- *Nichtlineare Funktionen f*: Nichtlineare Regression.
- *Polynomiale Funktion f*: Lineare Regression. Unabhängig vom Startwert existiert lediglich ein Minimum. Startwerte für a_i daher nicht relevant.

Berechnung des Fehlers σ_i der Einzelmessung aus dem Fit:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_1^N (y_i - f(x_i, a_0, a_1, ...))^2}{N-m}}$$

Wobei N die Anzahl Messergebnisse, m die Anzahl Parameter $a_0, ...a_m$ bezeichnet.

6 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben seien 2

$$\text{Resultatgrösse}: R = R(x, y, z, ...)$$
$$\text{Argumente (gemessen und/oder aus Literatur)}:$$
$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}}$$
$$y = \overline{y} \pm s_{\overline{y}}$$
$$z = \overline{z} \pm s_{\overline{z}}$$

und gesucht sind Mittelwert $\overline{R}$ und mittlerer Fehler $s_{\overline{R}}$. Dann kann der mittlere absolute Fehler (statistischer Fehler) mit dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz* in 11 bestummen werden:

$$s_{\overline{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\bigg|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\bigg|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\bigg|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{z}}\right)^2 + ...} \tag{11}$$

7 Spezialfälle des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$\text{Addition und Subtraktion}: s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$
$$\text{Multiplikation und Division}: r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{(\frac{s_x}{x})^2 + (\frac{s_y}{y})^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$
$$\text{Potenzen}: r_R = \frac{s_R}{R} = n * r_x.$$

In Endresultaten sind immer absolute Fehler anzugeben.