Computerversuch

Noah Hüsser <yatekii@yatekii.ch>

October 23, 2016

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Typen von Messfehlern

- *Systematische Fehler* werden verursacht durch die Versuchsanordnung, die Versuchsumgebung oder den Messvorgang. Sie bewirken eine systematische Abweichung des des Messergebnisses vom eigentlichen Wert. Diese Abweichung wird auch Unsicherheit genannt. Diese Art von Fehler kann – werden sie erkannt – meistens korrigiert werden.
- *Zufällige Fehler* sind immer vorhanden und lassen sich durch mehrmalige Wiederholung eines Experimentes beliebig verkleinern.

1.2 Genauigkeit bei der Angabe von Messresultate

Es ist nicht hilfreich bei Resultaten mehr signifikante Ziffern anzugeben als jene, die innerhalb des Fehlerbereiches liegen. In einem Beispiel wird angenommen dass der absolute Fehler 3.6 Sekunden betrage. Der Mittelwert aus den Messungen betrage 118.8 Sekunden. Mit einem resultierenden relativen Fehler von 3% ist es durchaus angebracht die Resultate auf ganze Zahlen zu runden, da alle weiteren signifikanten Ziffern sowieso in den Toleranzen verloren gingen.

1.3 Fehlerbestimmung bei Einzelgrössen

1.3.1 Einfacher Mittelwert

Seien $x_1, x_2, ..., x_N$ N Messergebnisse aus einer Reihe von identischen Experimenten, so wird der Mittelwert anhand von Gleichung 1 bestimmt werden. Sein zugehöriger Fehler kann mit Gleichung 2 bestimmt werden. Beide Werte werden genauer mit grösserem N.

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \overline{x})^2}{N \cdot (N-1)}} \tag{2}$$

Das resultierende Ergebnis wird wie in Gleichung 3 ersichtlich formuliert.

$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}} \tag{3}$$

1.3.2 Mittelwert mit Gewichten

$x_1 = \overline{x_1} \pm s_{\overline{x_1}}$
$x_2 = \overline{x_2} \pm s_{\overline{x_2}}$
...
$x_n = \overline{x_n} \pm s_{\overline{x_n}}$

Der wahrscheinlichste Wert $\overline{x}$ wird durch einen gewichteten Mittelwert mit der Gleichung 4 erreicht. Die Gewichte dazu werden nach 5 berechnet. Den zugehörigen Fehler wird durch 6 bestummen.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}}} \tag{4}$$

$$g_{\overline{x_i}} = \frac{1}{s_{\overline{x_i}}^2} \tag{5}$$

$$\text{Fehler des gewichteten Mittelwertes: } s_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}}}} \tag{6}$$

Messergebnisse mit betragsmässig kleineren Fehlern werden also stärker gewichtet.

1.4 Fehlertheorie

Eine Werteverteilung der Form einer Gausskurve kann mit der Gleichung in 7 beschrieben werden. Damit kann etwas über die Werteverteilung und auch den Wahren Wert ausgesagt werden

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ wobei} \tag{7}$$

mit
Erwartungswert (wahrer Wert): x_0
Standardabweichung: σ

Die experimentelle Standardabweichung kann mit Gleichung 8 bestimmt werden. Mit steigendem N nähert sich der gemessene Mittelwert $\overline{x}$ dem wahren Wert x_0 an.

$$\text{Experimentelle Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \overline{x})^2}{N-1}} \tag{8}$$

Die experimentelle Standardabweichung s konvergiert für $N \to \infty$ gegen σ. Der Fehler der Einzelmessung s_{T_i} und der Fehler $s_{\overline{T}}$ des Mittelwertes stehen in der in 9 beschriebenen Beziehung.

$$s_{\overline{T}} = \frac{s_{T_i}}{\sqrt{N}} \tag{9}$$

1.5 Regression

Im allgemeinen wird bei der Regression iteriert bis mit 10 ein Minimum für χ^2 gefunden ist.

$$\chi^2(a_0, a_1, ...) = \sum_1^N \frac{[y_i - f(x_i, a_0, a_1, ...)]^2}{\sigma_i^2} \tag{10}$$

mit
Gegebene Gesetzmässigkeit $f(x, a_0, a_1)$
Messwertpaare x_i, y_i

- *Nichtlineare Funktionen* f: Nichtlineare Regression.
- *Polynomiale Funktion* f: Lineare Regression. Unabhängig vom Startwert existiert lediglich ein Minimum. Startwerte für a_i daher nicht relevant.

Berechnung des Fehlers σ_i der Einzelmessung aus dem Fit:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_1^N (y_i - f(x_i, a_0, a_1, ...))^2}{N-m}}$$

Wobei N die Anzahl Messergebnisse, m die Anzahl Parameter $a_0, ...a_m$ bezeichnet.

1.6 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben seien

Resultatgrösse: R = R(x,y,z,...)

Argumente (gemessen und/oder aus Literatur):

x = $\overline{x} \pm s_{\overline{x}}$

y = $\overline{y} \pm s_{\overline{y}}$

z = $\overline{z} \pm s_{\overline{z}}$

und gesucht sind Mittelwert $\overline{R}$ und mittlerer Fehler $s_{\overline{R}}$. Dann kann der mittlere absolute Fehler (statistischer Fehler) mit dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz* in 11 bestummen werden:

$$s_{\overline{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\bigg|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\bigg|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\bigg|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{z}}\right)^2 + ...} \tag{11}$$

1.7 Spezialfälle des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

Addition und Subtraktion: $s_R = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ Es werden die absoluten Fehler quadratisch addiert.

Multiplikation und Division: $r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{(\frac{s_x}{x})^2 + (\frac{s_y}{y})^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ Es werden die relativen Fehler quadratisch addiert.

Potenzen: $r_R = \frac{s_R}{R} = n * r_x$. Der relative Fehler der Messgrösse wird mit dem Exponenten multipliziert.

In Endresultaten sind immer absolute Fehler anzugeben.

2 Durchführung

Die Messwerte zu den einzelnen Versuchen wurden durch den Dozenten zur Verfügung gestellt. Sie sind alle im Anhang vorzufinden. Die zur Versuchsdurchführung verwendeten Tools beinhalten den Taschenrechner, Excel und Python mit diversen Libraries (Jupyter, Scipy, Pandas, Matplotlib, Seaborn).

3 Auswertung

Dieses Kapitel befasst sich mit den Möglichkeiten und Tricks der Fehlerrechnung. Normalerweise würde dieses Kapitel separat geführt, jedoch ist das Ziel dieses Versuches, die Fehlerrechnung näher kennenzulernen.

3.1 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit soll durch die Mittlere Laufzeit über eine bekannte Strecke bestimmt werden.

3.1.1 Messwerte

$$\text{Länge der Messstrecke} : s = 2.561 \pm 0.003m$$
$$\text{Raumtemparatur} : \theta = 23°C$$

Messprotokoll: TODO:

3.1.2 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit laut Wikipedia

Wikipedia führt eine Formel 12 zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit bei einer bestimmten Temperatur. Diese kann auch in *Horst Kuchlings Teschenbuch der Physik* gefunden werden.

$$c_{luft} = (331.3 + 0.606 \cdot \theta)\frac{m}{s} = (331.3 + 0.606 \cdot 23)\frac{m}{s} = 345.24\frac{m}{s} \tag{12}$$

3.1.3 Mittlere Laufzeit und ihre Unsicherheit

$$\text{Mittlere Laufzeit}: \bar{t} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} t_i = 7.32ms$$
$$\text{Fehler der mittleren Laufzeit}: s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_1^{20}(t_i - \bar{t})^2}{20 \cdot 19}} = 0.000074ms$$
$$\text{Standardabweichung}: s = \sqrt{\frac{\sum_1^{20}(t_i - \bar{t})^2}{19}} = 0.00033ms$$

Mithilfe des zuvor ermittelten Mittelwertes kann die Mittlere Schallgeschwindigkeit als:

$$c = 349.74\frac{m}{s}$$

festgestellt werden. Die Unicherheit des Mittelwertes der Schallgeschwindigkeit kann mithilfe des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetztes ersichtlich in (1) errechnet werden.

$$R(x,y) = c(s,t) = \frac{s}{t}$$
$$S_{\overline{R}} = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial x}|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{x}})^2 + (\frac{\partial R}{\partial y}|_{\overline{R}} \cdot s_{\overline{y}})^2}$$
$$S_{\overline{R}} = \sqrt{(\frac{1}{\bar{t}} s_{\bar{s}})^2 + (-\frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} s_{\bar{t}})^2}$$
$$s_{\bar{s}} = 3.54\frac{m}{s}$$
$$\text{Relativer Fehler der Zeit}: 1.00\%$$
$$\text{Relativer Fehler der Geschwidigkeit}: 1.01\%$$

3.2 Eisengehalt

3.2.1 Messwerte

TODO:

3.2.2 Einfacher Mittelwert

Der einfache Mittelwert und sein Fehler ergeben sich analog zu Aufgabe 1.

$$\overline{x} = 20.56\%$$
$$s_{\overline{x}} = 0.52\%$$

3.2.3 Gewichteter Mittelwert

Der gewichtete Mittelwert und sein Fehler werden als

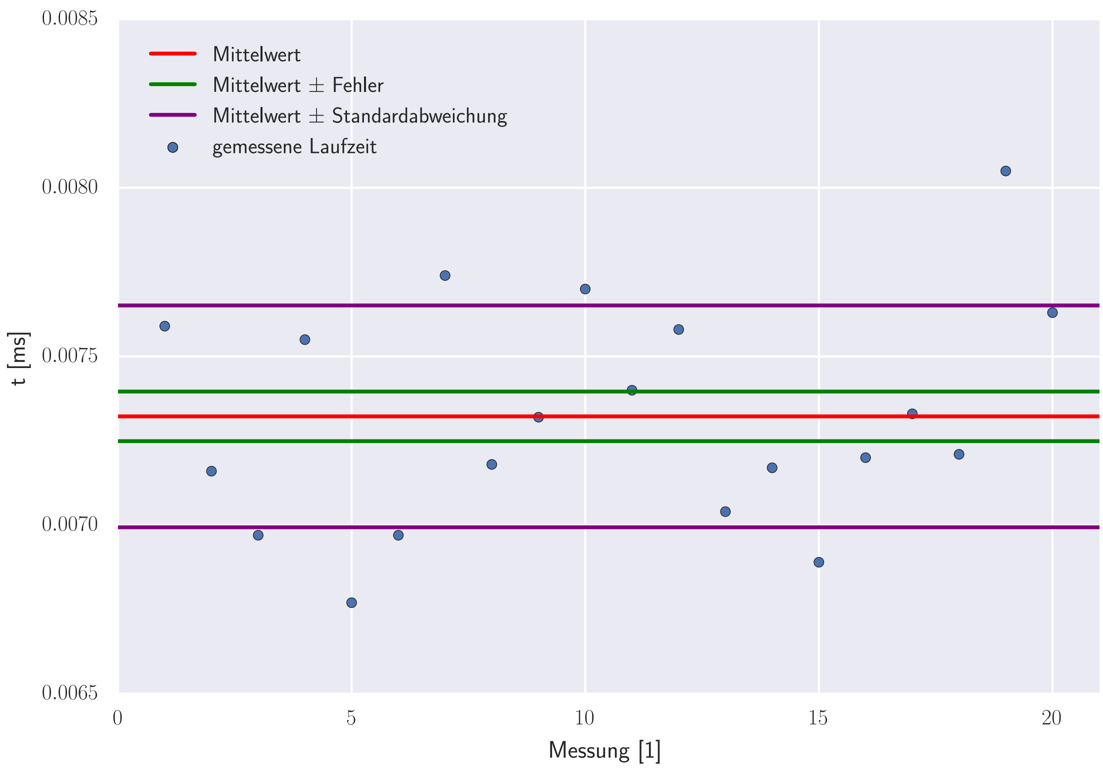

Figure 1: Laufzeiten des Schalls

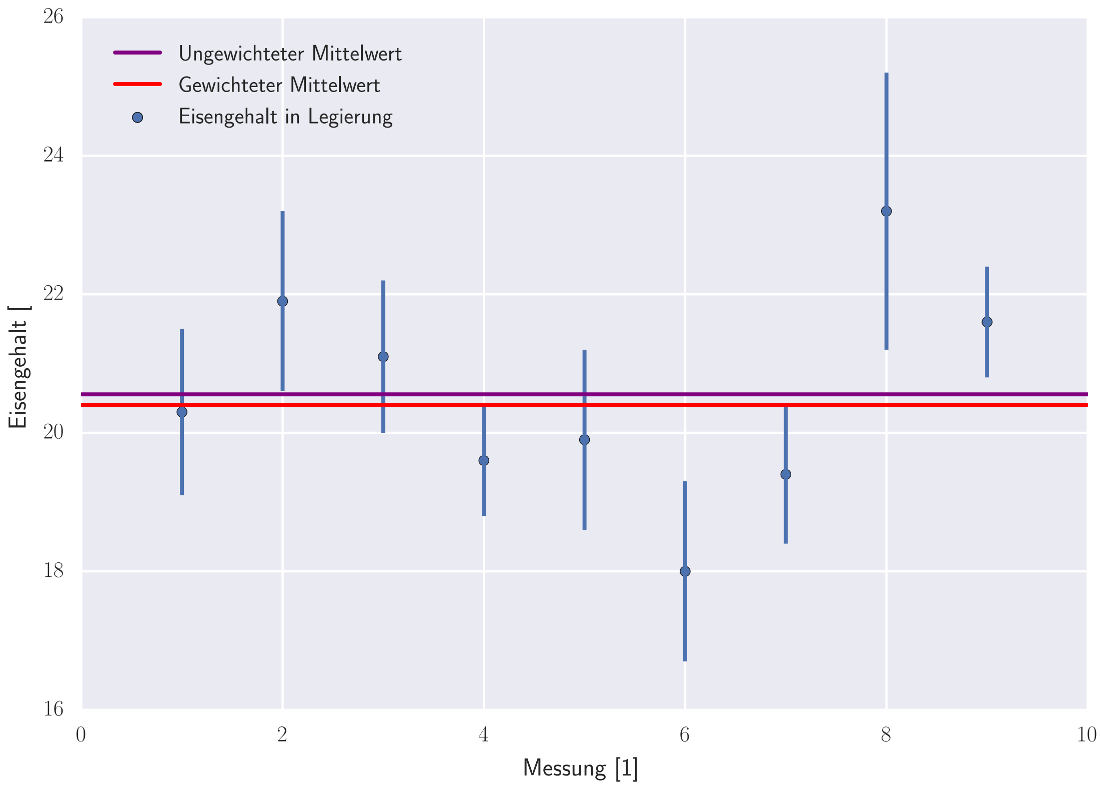

Figure 2: Eisengehalt in einer Legierung

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}}} = 20.40\%$$

$$s_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{x_i}}}} = 0.36\%$$

bestummen.

3.3 Federkonstante

3.3.1 Messwerte

3.3.2 Rechnung mittels Taschenrechner

3.3.3 Linear Regression

Mit dem Rechner Die Steigung der Regressionsgeraden und somit die Federkonstante k wird wie folgt erhalten:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2} = 22.53\frac{N}{m}$$

Der zugehörige Achsenabschnitt und somit die Ruhekraft F_0 errechnet sich aus:

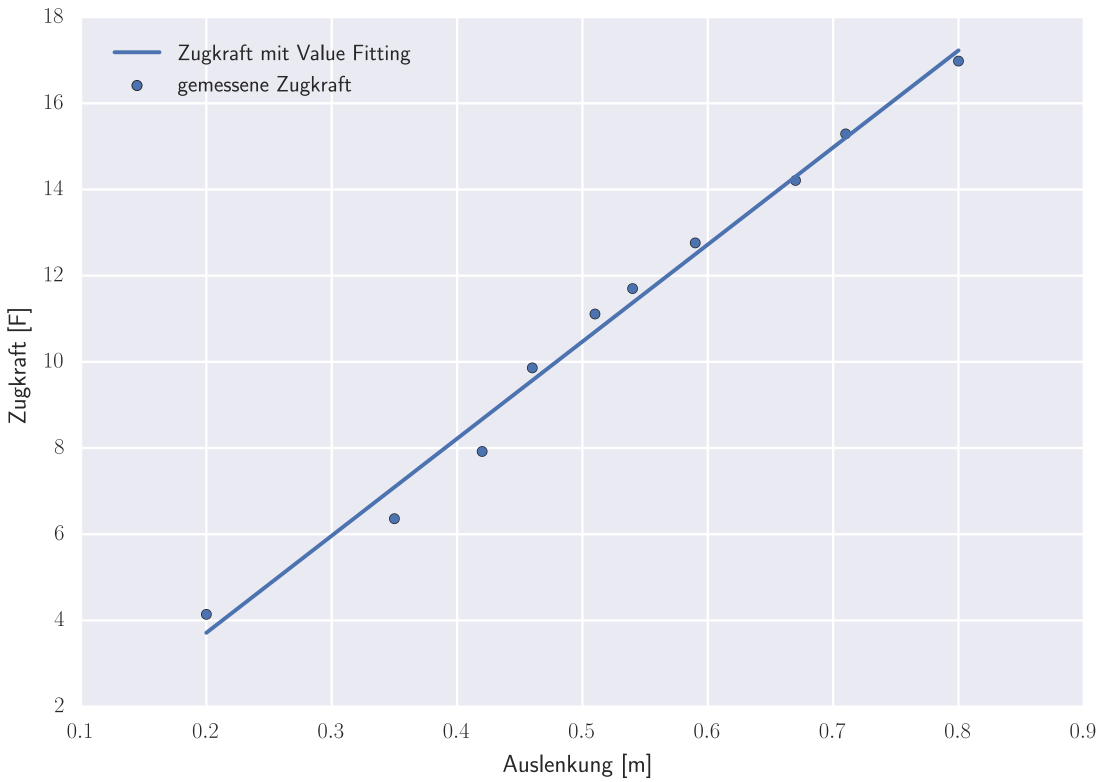

Figure 3: Federkraft im vorgespannten Zustand

$$F_0 = \overline{y} - k \cdot \overline{x} = -0.79N$$

Die empirische Korrelation ist:

$$r_{xy} = \frac{\sum_1^{10}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_1^{10}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_1^{10}(y_i - \overline{y})^2}} = 0.9939$$

mit zugehörigem Bestimmtheitsmass:

$$R^2 = r_{xy}^2 = 0.9879$$

Mit scipy Der Fit errechnet die folgenden relevenanten Werte für das Experiment:

$$k = 22.53\frac{N}{m}$$
$$F_0 = -0.79N$$
$$r_{xy} = 0.9939$$

3.4 Offset, Amplitude, Frequenz und Phase eines Pendels

Von einem Pendel ist die Auslenkung in y-Richtung zu verschiedenen Zeitpunkten t_i bekannt. Mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate können Offset, Amplitude, Frequenz und Phase des Pendels bestimmt werden. Die Funktion des Pendels welche mit dem Fit angenähert wird schreibt sich wie folgt:

$$y(t) = A \cdot exp(-\Gamma \cdot t) \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \delta) + y_0$$

3.4.1 Messwerte

TODO:

3.4.2 Value Fitting

Mit der Methode der Chi-Quadrate (nichtlineare Regression) wurden durch scipy die folgenden besten Werte ermittelt:

$$\begin{aligned} A &= (1.22 \pm 0.03)m \\ \Gamma &= (0.05 \pm 0.0017)\frac{1}{s} \\ f &= (0.05 \pm 0.0002)Hz \\ \delta &= (-5.77 \pm 0.02) \\ y_0 &= (0.05 \pm 0.01)m \end{aligned}$$

3.5 Tiefpass

3.5.1 Messwerte

$$\begin{aligned} U_e &= 4V_{pp} => \pm 2.0\hat{V} \\ R &= 500\Omega \end{aligned}$$

3.5.2 Berechnung von C

Die Kapazität C kann durch zwei verschiedene Funktionen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \measuredangle_a &= \frac{\measuredangle_e}{\sqrt{1 + (2\pi f C R)^2}} \\ \phi &= \arctan(-\omega RC) \end{aligned}$$

Die Kapazität kann mit einem Fit an die Ausgangsspannung U_a auf

$$C = 0.22\mu F$$

und mit einem Fit an die Phase U_a auf

$$C = 0.20\mu F$$

bestimmt werden.

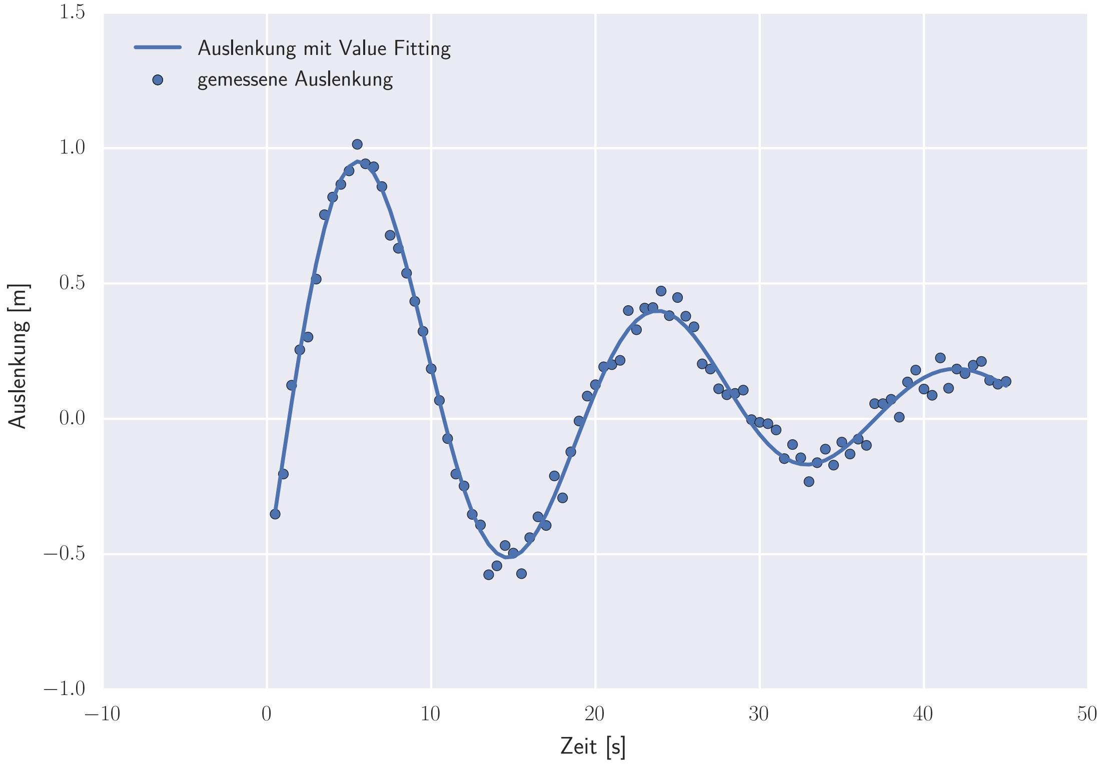

Figure 4: Auslenkung eines Pendels über Zeit

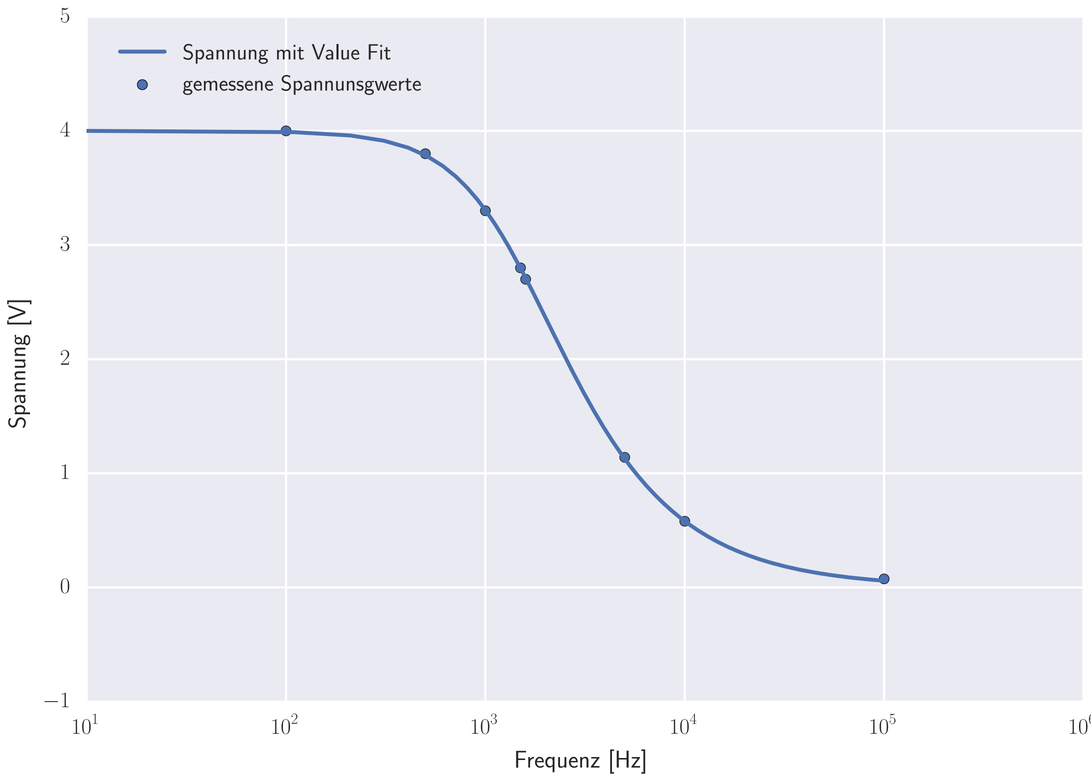

Figure 5: Spannung eines Tiefpasses

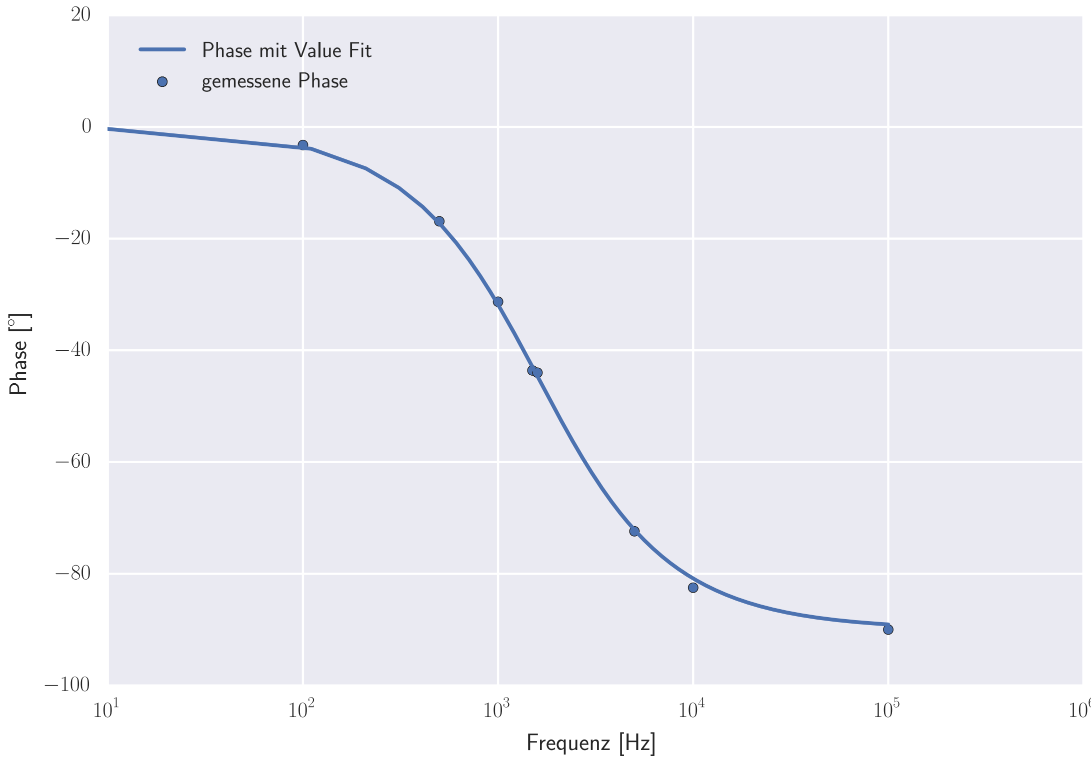

Figure 6: Phase eines Tiefpasses

4 Resultate und Diskussion

4.1 Schallgeschwindigkeit

4.1.1 Ergebnisse

Grösse	Wert
$c_{luft,wikipedia}$	$345.3\frac{m}{s}$
$\overline{c}$	$349.74\frac{m}{s}$
$s_{\overline{c(s,t)}}$	$3.54\frac{m}{s}$
$c_{luft} = \overline{c_{luft}} \pm s_{\overline{c_{luft}}}$	$(349.74 \pm 3.54)\frac{m}{s}$

Der experimentell bestimmte Wert hat somit eine Abweichung von 1.27% von Literaturwerten. Dies zeigt dass der Wert ziemlich genau bestummen werden konnte.

Ausserdem liegen 13 von 20 Messpunkten innerhalb des Standardabweichungsintervalles. Dies sind 65% was ziemlich gut dem erwarteten Wert von 68% entspricht. Mit zusätzlichen Experimenten und Messungen würde sich der Wert gut gegen 68% annähern.

4.2 Eisengehalt