

No. of Printed Pages : 13

Roll No. 19.3.S.05100

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

①

2K5-AS-2

December – 2015

APPLIED MATHEMATICS-I

Time Allowed : 3 Hours

Max. Marks : 100

Note : 1. 'Part-A' may be attempted in first 6 pages of Answer-sheet.

2. 'Part-B' in rest of the sheets of Answer-sheet.

3. The question paper consists of two parts, namely, Part-A & Part-B.

4. A candidate has to attempt both parts.

5. Part-A consists of two questions and Part-B consists of 5 questions.

6. Answer may be given in Hindi or English language.

[Part – A]

1. Answer any 10 parts– $2 \times 10 = 20$

(i) If A is a square matrix such that $|A| = 2$, write the value of

$$|AA^T|$$

④

(ii) Write the value of x for which matrix

$$\begin{bmatrix} 6-x & 4 \\ 3+x & 1 \end{bmatrix}$$

is singular.

2K5-AS-2

(2)

(iii) If

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix},$$

find the value of x .

(iv) Write the value of

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

(v) Find :

$$\frac{d}{dx} (\log_5 x^2)$$

(vi) If \vec{a} and \vec{b} are diagonals of a parallelogram, then write the formula finding its area in terms of \vec{a} and \vec{b} .

(vii) Find the angle between the vectors \vec{a} and \vec{b} , if

$$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 2 \text{ and } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$$

(viii) Write the sum of the intercepts on the coordinate axes made by the line

$$3x - 2y + 6 = 0$$

(ix) Find the eccentricity of the ellipse

$$2x^2 + 3y^2 = 6$$

2K5-AS-2

(3)

(x) Write the coordinates of the centre of the circle passing through $(0, 0)$, $(a, 0)$ and $(0, b)$.

(xi) Write the length of the latus-rectum of the hyperbola

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

(xii) Write the y-intercept of the line passing through $(2, 2)$ and perpendicular to the line $3x + y = 3$.

(xiii) Find the distance between the lines

$$5x + 3y - 7 = 0,$$

and

$$15x + 9y + 14 = 0$$

(xiv) If $y = x|x|$,

$$\text{find } \frac{dy}{dx}$$

$$\text{for } x < 0$$

2. Attempt any five parts :

$$5 \times 4 = 20$$

(i) Simplify :

$$\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

NCCERT

Chapter - 3

Ex 3.2 Q6

56

2K5-AS-2

(4)

- (ii) Find the value of x satisfying the equation

$$[1-x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

- (iii) Without expanding show that

$$\begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix} = 0$$

- (iv) If two vectors \vec{a} and \vec{b} are such that

$$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2 \text{ and } \vec{a} \cdot \vec{b} = 6, \text{ find } |\vec{a} + \vec{b}| \text{ and } |\vec{a} - \vec{b}|.$$

- (v) Find the equation of a straight line which passes through the point $(4, -2)$ and whose interception y-axis is twice that on x-axis.

- (vi) If

$$y = \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)^n,$$

prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

(vii) If

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80,$$

find n .

(viii) The straight line

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

cuts the coordinate axes at A and B.

Find the equation of the circle passing through $O(0, 0)$, A and B.**[Part-B]**

Attempt any three questions.

20×3 = 60

3. (a) Show that

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz(x-y)(y-z)(z-x)$$

(b) Show that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

satisfies the equation $x^2 - 6x + 17 = 0$.Hence, find A^{-1} .

2K5-AS-2

(6)

4. (a) Find the area of the triangle whose vertices are $A(3, -1, 2)$, $B(1, -1, -3)$ and $C(4, -3, 1)$.

- (b) If \vec{a} and \vec{b} are unit vectors inclined at an angle θ , then prove that

(i) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} + \vec{b}|$

(ii) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}|$

5. (a) Find the equation of the line which passes through the point $(3, 4)$ and the sum of its intercepts on the axes is 14.

- (b) Find the equation of the parabola with vertex $(2, -3)$ and focus $(0, 5)$.

6. (a) If $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$,
prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

- (b) Evaluate the following limits :

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

7. (a) If

$$x^y = e^{x-y},$$

prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$$

(b) Find the equation of the circle circumscribing the triangle formed by the lines $x + y = 6$, $2x + y = 4$ and $x + 2y = 5$.

(हिन्दी रूपान्तरण)

- नोट— 1. 'भाग-अ' के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका के पहले 6 पृष्ठों पर ही दें।
2. 'भाग-ब' के उत्तर, उत्तर पुस्तिका के बाकी पृष्ठों पर दें।
3. परीक्षार्थी को दोनों ही भाग करने हैं।
4. इस प्रश्न-पत्र के 2 भाग हैं, भाग (अ) एवं भाग (ब)।
5. भाग (अ) में 2 प्रश्न एवं भाग (ब) में 5 प्रश्न हैं।

MINI TROIKA (भाग-अ)

1. दस प्रश्नों को हल कीजिये।
- (i) यदि मैट्रिक्स A के लिये $|A| = 2$ है तो $|AA^T|$ का मान ज्ञात कीजिये।
- (ii) यदि मैट्रिक्स
- $$\begin{bmatrix} 6-x & 4 \\ 3+x & 1 \end{bmatrix}$$
- विशिष्ट है, तो x का मान ज्ञात कीजिये।
- (iii) $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ में x को ज्ञात कीजिये।
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(v) $\frac{d}{dx} (\log_5 x^2)$

को हल कीजिये।

- (vi) एक समान्तर चतुर्भुज के कर्ण \vec{a} व \vec{b} हैं। चतुर्भुज का क्षेत्रफल \vec{a} तथा \vec{b} के पदों में ज्ञात करते हेतु संबंध सूत्र लिखिये।

(vii) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ तथा

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$$

हैं तो सदिश \vec{a} तथा \vec{b} के बीच कोण को ज्ञात कीजिये।

- (viii) रेखा

$$3x - 2y + 6 = 0$$

द्वारा निर्देशांक अक्षों पर कटे अन्तःक्षेपों का योग ज्ञात कीजिये।

- (ix) दीर्घवृत्त

$$2x^2 + 3y^2 = 6$$

की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिये।

- (x) $(0, 0)$, $(a, 0)$ तथा $(0, b)$ से जाने वाले वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिये।

- (xi) अतिपरवलय

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

के नाभिलंब की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

2K5-AS-2

(10)

(xii) रेखा $3x + y = 3$ के लम्बवत तथा $(2, 2)$ से जाने वाली रेखा का y -अक्ष पर अन्तःक्षेप ज्ञात कीजिये।

(xiii) रेखाओं

$$5x + 3y - 7 = 0 \text{ तथा}$$

$$15x + 9y + 14 = 0$$

के बीच दूरी ज्ञात कीजिये।

(xiv) $y = x|x|$ के लिये, $x < 0$ के लिये $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये।

2. पाँच प्रश्नों को हल कीजिये।

(i) सरलीकरण कीजिये :

$$\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

(ii) समीकरण,

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

सत्य हो, तो x का मान ज्ञात कीजिये।

(iii) मान ज्ञात कीजिये :

$$\begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix} = 0$$

के विस्तार किये बिना ही सिद्ध कीजिये।

(iv) सदिश \vec{a} तथा \vec{b} के लिये $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ हैं, तो $|\vec{a} + \vec{b}|$ एवं $|\vec{a} - \vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिये।

(v) $(4, -2)$ बिन्दु से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका y -अक्ष पर अन्तःक्षेप, उसके x -अक्ष पर अन्तःक्षेप का दोगुना हो।

(vi) $y = \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)^n$

के लिये, सिद्ध कीजिये

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

(vii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80,$

है, तो n को ज्ञात कीजिये।

(viii) सरल रेखा

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

निर्देशांक अक्षों को A व B बिन्दुओं पर काटती है।

$O(0, 0)$, A तथा B बिन्दुओं से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये।

तीन प्रश्नों को हल कीजिये।

3. (a) सिद्ध कीजिये

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz(x-y)(y-z)(z-x)$$

- (b) स्थापित कीजिये कीजिये कि मैट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

समीकरण $x^2 - 6x + 17 = 0$ को संतुष्ट करता है, तदनुसार A^{-1} का मान ज्ञात कीजिये।

4. (a) $A(3, -1, 2)$, $B(1, -1, -3)$ तथा $C(4, -3, 1)$ शीर्षों के त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

- (b) यदि सदिश \vec{a} व \vec{b} इकाई सदिश हैं जो परस्पर θ कोण पर हैं। सिद्ध कीजिये कि

$$(i) \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$(ii) \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}|$$

5. (क) बिन्दु $(3, 4)$ से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये, जिसके निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अन्तःक्षेपों का योग 14 है।

2K5-AS-2

(13)

(ख) $(2, -3)$ शीर्ष तथा $(0, 5)$ नाभि के परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिये।

6. (क) $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$
के लिये, सिद्ध कीजिये

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

(ख) (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

के मान ज्ञात कीजिये।

7. (क) $x^y = e^{x-y}$,
के लिये, सिद्ध कीजिये

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$$

(ख) रेखाओं $x + y = 6$, $2x + y = 4$ तथा $x + 2y = 5$ से बने त्रिभुज को घेरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये।