

Minimum Phase Filter Conversion

D11942011 林政均

1. Minimum Phase Filter Conversion

給定一個 Minimum Phase Filter $H(z)$ ， $H(z)$ 可寫作以下形式

$$H(z) = C \frac{\prod_{n=1}^R (z - z_n)}{\prod_{n=1}^S (z - p_n)} \quad (1)$$

其中 z_n 為零點 (zero)， p_n 為極點 (pole)。

由於 Minimum Phase Filter 的限制為零點與極點皆須在單位圓內，若落在單位圓外，則須將其拉回單位圓內。

假設某一零點 z_k ，其 $|z_k| > 1$ ，則我們可將 $H(z)$ 乘上 $z_k \frac{\overline{z_k}^{-1}}{z - z_k}$ 的方式，在不影響振幅 (amplitude)的情況下，將落在單位圓外的零點拉回圓內。

當吾人隨意得到一 $H(z)$ 時，未必符合式(1)的形式，因此吾人須先將 $H(z)$ 轉為式(1)的形式，可使用求根的演算法求出多項式的根，將多項式化為式(1)的形式，再確認所有的零點與極點是否皆落在單位圓內，即所有 $|z_k|, |p_k| < 1$ ，最終得到 Minimum Phase Filter。

2. 程式執行

➤ 語言：MATLAB

➤ 函式：

(1). `poly_vis = polynomial_visual(polynomial)`，用來將輸入的多項式可視化。

(2). `r_vis = roots_visual(polynomial_root, C)`，將求出的根，以因式分解的方式表現。

(3). `minimum_phase = phase_transform(numerator_root, denominator_root, C)`，確認求出的根皆在單位圓內後，再以式(1)的形式表現。

(4). `pow_vis = power_visual(num)`，將冪次的數字與負號轉為上標，0 與 1 消掉。

➤ 執行：run main.m

3. 程式範例

依照講義 p.131 的示例，將 $H(z)$ 先化為特定形式，這裡分為 2 種形式：

Case 1：將分子 $(z+0.6)[z-(1.6+1.2j)]$ 乘開，得到 $[z^2 + (-1 - 1.2i)z + (-0.96 - 0.72i)]$ ，再以 $[1, -1-1.2i, -0.96-0.72i]$ 的形式代入 numerator。

Case 2：將分子 $(z+0.6)[z-(1.6+1.2j)]$ 直接以 $[1, 0.6; 1, -1.6-1.2i]$ 的形式代入 numerator，再進行卷積得到相乘的結果。

將分子分母皆代入後執行 main.m 即可得到以下結果

Original type:

$$H(z) = (1z^2 + (-1-1.2i)z + (-0.96-0.72i)) / (1z + (-0.9))$$

factorization:

$$H(z) = [z-(1.6+1.2i)][z-(-0.6)] / [z-(0.9)]$$

Move pole from outside to inside:

$$H(z) = (1.6+1.2i)[z-(0.4+0.3i)][z-(-0.6)] / [z-(0.9)]$$

Minimum phase:

$$H(z) = (1.6+1.2i)z[1-(0.4+0.3i)z^{-1}][1-(-0.6)z^{-1}] / [1-(0.9)z^{-1}]$$