D11942011 林政均

1.

(a) 可使逆小波轉換從 0 至∞變為 0 至b_0

(b) generating function 只要被決定，mother wavelet 和 scaling function 皆可決定

2.

(a) 設$\psi(t) = \frac{d^7}{dt^7} e^{-\pi t^2}$

Let q ≦ p

$m_q = \int_{-\infty}^{\infty} t^q \psi(t)dt = \psi_q(0)$

$\psi_q(f) = FT(t^q \psi(t)) = \frac{1}{(-j2\pi)^q} \frac{d^q}{dt^q} (j2\pi f)^p e^{-\pi f^2}$

$m_q = \frac{1}{(-j2\pi)^q} \frac{d^q}{dt^q} (j2\pi f)^p e^{-\pi f^2} |_{f=0}$

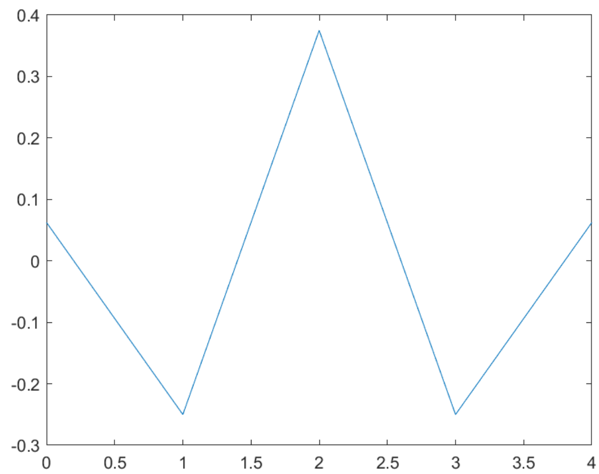
$= \{\frac{(j2\pi f)^p}{(-j2\pi)^q} [\frac{p!}{(p-q)!} f^{p-q} e^{-\pi f^2} + \text{remained terms}]\}|_{f=0}$

If $q < p$, $m_q = 0$, vanish moment = p

p = 7, vanish moment = 7

(b) Coiflet 每 6 個點，vanishing moment 會多 1，18-Coiflet 的 vanishing moment = 3

(c) h[n]圖形如下圖所示



3. 1-D discrete wavelet transform 即分別做 Low Pass 與 High Pass 的 Convolution，假設輸入訊號 $x[n]$長度為 N，filter $g[n]$、$h[n]$長度皆為 L，則複雜度為$\frac{3}{2}(N + L - 1)\, log_2(N + L - 1)$

若 $N >> L$ 時，可使用 Sectioned Convolution，將 $x[n]$分成若干段，每段長度皆為N_1，則總共可分為 $S = {}^{N}/_{N_1}$段，因此複雜度可寫作

$$\frac{3}{2}S(N_1 + L - 1)\,log_2(N_1 + L - 1) \approx \frac{3}{2}N\,log_2(N_1)$$

由於$log_2(N_1)$為常數，因此複雜度僅與 N 有關，即 $\theta(N)$

4.

(a) 小波轉換可分離高頻與低頻成分，由於邊緣屬於高頻成分，因此可針對高頻成分進行方向的分析，低頻成分則不考慮，以此達到降低運算量的效果。

(b) 小波轉換可將影像特徵由低尺度到高尺度分離，即 Multi-scale 的方法，由最低尺度特徵判斷是否有特定物件的輪廓 (大特徵)，再依序往高尺度特徵尋找更細微的條件 (小特徵)，以此大幅降低運算量。

(c) 一訊號若直接使用 Low Pass Filter，其高頻資訊可能會被濾除，小波轉換可將高頻與低頻成分分離，由於訊號高頻成分的頻率響應較大，雜訊的頻率響應較小，由此可篩選出 Edge Region，以此濾除雜訊，且保留原訊號的高頻成分。

5.

(a) QMF 需滿足 $G^2(z) - G^2(-z) = 2z^k$

$g[0] = {}^{1}/_{2}$, $g[1] = b$, $g[2] = c$

$G(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2}$

$G(-z) = a - bz^{-1} + cz^{-2}$

$\det\big(H_m(z)\big) = G^2(z) - G^2(-z) = 4abz^{-1} + 4bcz^{-3} = 2z^k$

因此 k = -1 c = 0，又 $a = {}^{1}/_{2}$,，b = 1

$$\begin{cases} b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

(b) Orthonormal 須滿足$G_1(z)G_1(z^{-1}) + G_1(-z)G_1(-z^{-1}) = 2$

其中$G_1(z) = G(z^{-1})$

$g[0] = {}^{1}/_{2}$, $g[1] = b$, $g[2] = c$

$G_1(z) = a + bz + cz^2$

$G_1(-z) = a - bz^{-1} + cz^{-2}$

$G_1(z)G(z) = a^2 + b^2 + c^2 + abz + acz^2 + abz^{-1} + bcz + acz^{-2} + bcz^{-1}$

$= a^2 + b^2 + c^2 + b(a+c)(z + z^{-1}) + ac(z^2 + z^{-2})$

$\det\big(H_m(z)\big) = G_1(z)G_1(z^{-1}) + G_1(-z)G_1(-z^{-1})$

$= G_1(z)G(z) + G_1(-z)G(-z^{-1}) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2ac(z^2 + z^{-2}) = 2$

因此 c = 0，又 $a = {}^{1}/_{2}$，$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

6.

(a) Symlet 的 g[n]最大值在中間，進行小波轉換時，影像不至於過度偏移。

(b) Coiflet 不僅考慮 Mother wavelet 的 Vanishing Moment，Scaling Function 也考慮進去，使得 t 在 1≦k≦p 之間為 Orthogonal

7.

(a) 建立 Discrete Daubechies Wavelet Transform 的 g[n]、h[n]、$g_1[n]$及 $h_1[n]$，假設 case 為 2p-point case：

(1) 建立 $P(y) = \sum_{k=0}^{p-1} C_k^{p-1+k} y^k$

$C_k^{p-1+k} = \frac{(p-1+k)!}{k!(p-1!)}$

(2) $P_1(z) = P\left(\frac{2-z-z^{-1}}{4}\right) = P(0.5 - 0.25z - 0.25z^{-1})$

$(0.5 - 0.25z - 0.25z^{-1})^k$可使用[-0.25 , 0.5 , -0.25] convolution 得到各冪次計算後進行加總，得到$P_1(z)$

(3) 計算$z^k P_1(z)$的根，可使用 MATLAB 的 roots 函式得到

(4) 得到根後，分別取絕對值，小於 1 者做為$P_2(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots$的$z_1, z_2, \ldots$

(5) 求出$G_0(z) = (1 + z)^p P_2(z)$，$(1 + z)^p$及$P_2(z)$可分別由 convolution 得到後，兩者再使用 convolution 相乘

$g_0[n] = Z^{-1}\{G_0(z)\}$

(6) 標準化 $g_1[n] = \frac{g_0[n]}{\|g_0\|}$，由於有複數問題，因此需取 real()，g1 = real(g0 / norm(g0));

(7) 最後按照 $g[n] = g_1[-n]$、$h[n] = (-1)^n g[2p-1-n]$、h1[n] = h[-n]的規則求出 g[n]、h[n]、$g_1[n]$及 $h_1[n]$

(8) 題目要求 6-point，可得 Daubechies wavelet list

```
g[n] = [0.035226,-0.085441,-0.13501,0.45988,0.80689,0.33267]

h[n] = [0.33267,-0.80689,0.45988,0.13501,-0.085441,-0.035226]

g1[n] = [0.33267,0.80689,0.45988,-0.13501,-0.085441,0.035226]

h1[n] = [-0.035226,-0.085441,0.13501,0.45988,-0.80689,0.33267]
```

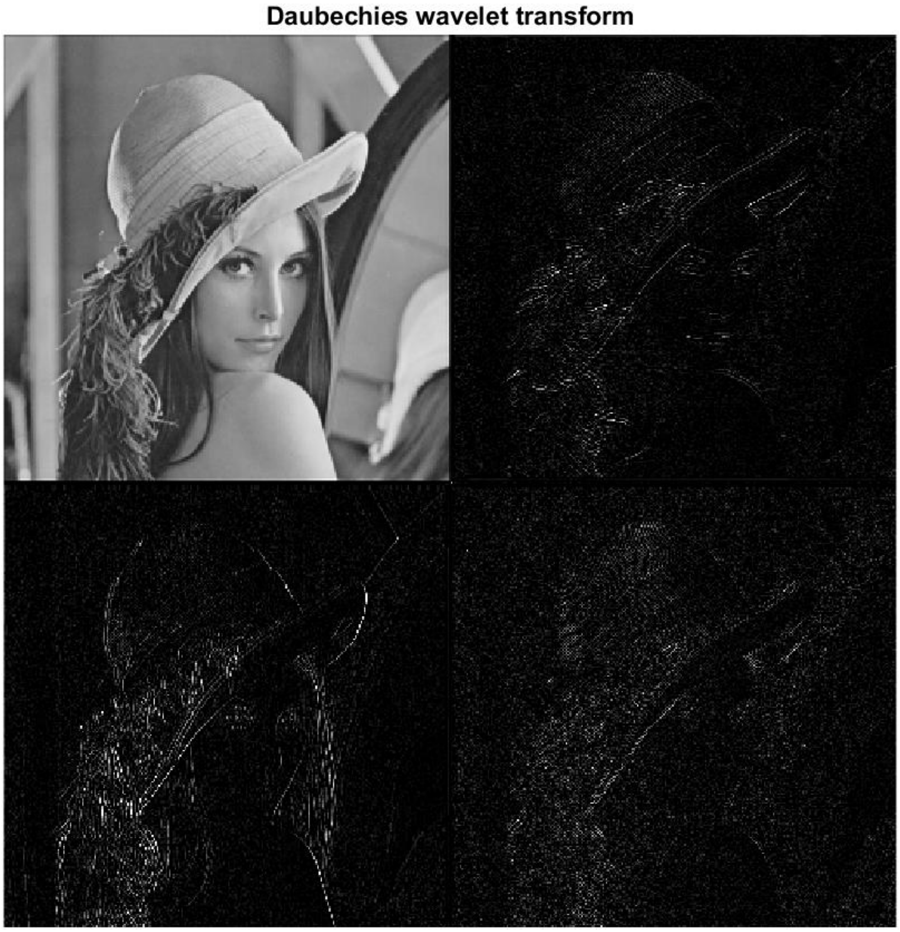
(b) 進行 Daubechies Wavelet Transform

(1) 計算 v1L 和 v1H，分別對其進行與 g[n]及 h[n]的 convolution，再進行 M=2 的 downsampling

(2) 計算 x1L 和 x1H1，將 v1L 分別進行與 g[n]及 h[n]的 convolution，再進行 M=2 的 downsampling

(3) 計算 x1H2 和 x1H3，將 v1H 分別進行與 g[n]及 h[n]的 convolution，再進行 M=2 的 downsampling

(4) 結果圖如下圖所示



(c) 進行 Inverse Daubechies Wavelet Transform

(1) 對 X1L 及 X1H1 進行 M=2 的 upsampling 後，再分別用 $g_1[n]$及 $h_1[n]$進行 convolution 並加總，得到 x0

(2) 對 X1H2 及 X1H3 進行 M=2 的 upsampling 後，再分別用 $g_1[n]$及 $h_1[n]$進行 convolution 並加總，得到 x1

(3) 對 x0 和 x1 進行 M=2 的 upsampling 後，再分別用 $g_1[n]$及 $h_1[n]$進行 convolution 並加總，得到新影像 x_result

(4) 由於還原後的影像，四周會比原本的影像多出 p 個像素點，因此僅需保留[p:width – p , p:height - p]的部分
即 x = x_result(p:end-p,p:end-p);

(5) 結果圖如下圖所示

inverse Daubechies wavelet transform

Bonus:

若g_k為低頻，則$(-j)^k g_k$為低頻，經離散時間傅立葉轉換後，最大能量為在$\frac{1}{4}$