Lenguajes y Autómatas

Unidad 1 - Teor´ıa de Gráficos

Dr. Said Polanco Martag´on1

Universidad Politécnica de Victoria

28 de julio de 2021

1Dirección de correo electrónico: spolancom@upv.edu.mx

Describir

Los gráficos, los gráficos dirigidos, los árboles y los árboles binarios aparecen en muchas áreas de las matemáticas y la informática.

Para comprender cómo se pueden almacenar estos objetos en la memoria y comprender los algoritmos que utilizan, necesitamos saber un poco sobre ciertas estructuras de datos. Suponemos que el estudiante entiende los arreglos lineales y bidimensionales; por lo tanto, a continuación solo analizaremos listas enlazadas y punteros, pilas y colas.

Describir

1 Introducción, estructuras de datos

- Listas enlazadas y punteros
- Pilas, colas y colas prioritarias

Supongamos que una firma de corretaje mantiene un archivo en el que cada registro contiene el nombre y el vendedor de un cliente; digamos que el archivo contiene los siguientes datos:

Customer	Adams	Brown	Clark	Drew	Evans	Farmer	Geller	Hiller	Infeld
Salesman	Smith	Ray	Ray	Jones	Smith	Jones	Ray	Smith	Ray

Hay dos operaciones básicas que uno desearía realizar con los datos:

- Operación A: Dado el nombre de un cliente, busque su vendedor.
- Operación B: Dado el nombre de un vendedor, encuentre la lista de sus clientes.

Discutimos una forma de almacenar los datos en la memoria que utiliza listas enlazadas y punteros.

lista enlazada

Por lista enlazada nos referimos a una colección lineal de elementos de datos, llamados nodos, donde el orden lineal se da mediante un campo de punteros.

Cada nodo se divide en dos partes: la parte de datos contiene la información del elemento y la segunda parte, llamada campo de enlace o campo de puntero siguiente, contiene la dirección del siguiente nodo en la lista.

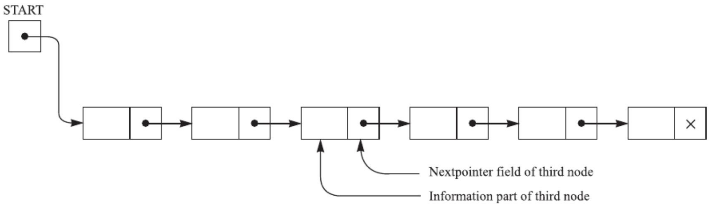


Figura: Lista vinculada con 6 nodos

Una forma principal de almacenar los datos originales que se muestran en la Fig. 5 utiliza listas vinculadas.

	Customer	SLSM	NEXT
1	Adams	3	5
2	Brown	2	3
3	Clark	2	7
4	Drew	1	6
5	Evans	3	8
6	Farmer	1	0
7	Geller	2	9
8	Hill	3	0
9	Infeld	2	0

Salesman	START	
Jones	4	1
Ray	2	2
Smith	1	3

La operación A se puede realizar de forma muy fácil y rápida. Además, la lista de clientes de cada vendedor es una lista vinculada como se explicó anteriormente.

La operación B ahora se puede realizar fácil y rápidamente; es decir, no es necesario buscar en la lista de todos los clientes para obtener la lista de clientes de un vendedor determinado.

Describir

1 Introducción, estructuras de datos

- Listas enlazadas y punteros
- Pilas, colas y colas prioritarias

Hay estructuras de datos distintas de matrices y listas vinculadas que aparecerán en nuestros algoritmos de gráficos. Estas estructuras, pilas, colas y colas de prioridad se describen brevemente a continuación.

1. pila: una pila, también llamada sistema de último en entrar, primero en salir (LIFO), es una lista lineal en la que las inserciones y eliminaciones pueden tener lugar solo en un extremo, llamado "parte superior" de la lista.
2. Cola: una cola, también llamada sistema primero en entrar, primero en salir (FIFO), es una lista lineal en la que las eliminaciones solo pueden tener lugar en un extremo de la lista, el “frente” de la lista, y las inserciones solo pueden realizarse en un extremo de la lista. tendrá lugar en el otro extremo de la lista, la “retaguardia” de la lista.
3. Cola de prioridad: Sea S un conjunto de elementos donde se encuentran nuevos elementos se puede insertar periódicamente, pero siempre se elimina el elemento más grande actual (elemento con la “prioridad más alta”). Entonces S se llama cola prioritaria.

(*a*) Stack of dishes.   (*b*) Queue waiting for a bus.

Describir

Un gráfico G consta de dos cosas:

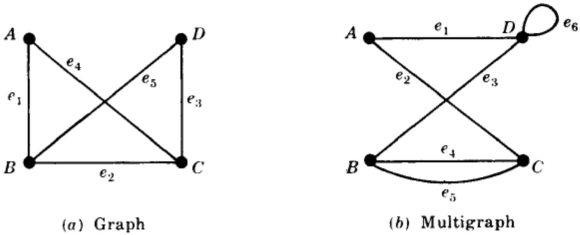
1. Un conjunto V = V(G) cuyos elementos se llaman vértices, puntos o nodos de G.
2. Un conjunto E = E(G) de pares desordenados de vértices distintos llamados aristas de g.

Denotamos dicha gráfica por G(V, E) cuando queremos enfatizar las dos partes de G.

Se dice que los vértices u y v son adyacentes o vecinos si hay una arista e = {u, v}. En tal caso, u y v se llaman puntos extremos de e, y se dice que e conecta u y v. Además, se dice que la arista e incide en cada uno de sus puntos finales u y v.

Por ejemplo, representa la gráfica G(V, E) donde:

- V consta de los vértices A, B, C, D
- E consta de aristas e1 = {A, B}, e2 = {B, C}, e3 = {C, D}, e4 = {A, C}, e5 = {B, D}.



multigrafos

Considere el diagrama en 13(b). Las aristas e4 y e5 se denominan aristas múltiples ya que conectan los mismos puntos finales, y la arista e6 se llama bucle ya que sus puntos finales son el mismo vértice. Este diagrama se llama multigrafo; La definición formal de un gráfico no permite múltiples aristas ni bucles. Por tanto, un gráfico puede definirse como un multigrafo sin múltiples aristas o bucles.

Nota

Algunos textos usan el término gráfico para incluir multigrafos y usan el término gráfico simple para referirse a un gráfico sin múltiples aristas ni bucles.

Grado de un vértice

El grado de un vértice v en un gráfico G, escrito grados(v), es igual al número de aristas en G que contienen v, es decir, que inciden en v.
Dado que cada arista se cuenta dos veces al contar los grados de los vértices de G, tenemos el siguiente resultado simple pero importante.

teorema

La suma de los grados de los vértices de un gráfico G es igual al doble del número de aristas en G

Considere, por ejemplo, la gráfica del 13. Tenemos

$$\text{grados}(A) = 2, \text{grados}(B) = 3, \text{grados}(C) = 3, \text{grados}(D) = 2$$

La suma de los grados es igual a 10 que, como era de esperar, es el doble del número de aristas. Se dice que un vértice es par o impar según que su grado sea un número par o impar. Por tanto, A y D son vértices pares mientras que B y C son vértices impares. Un vértice de grado cero se llama vértice aislado.

Describir

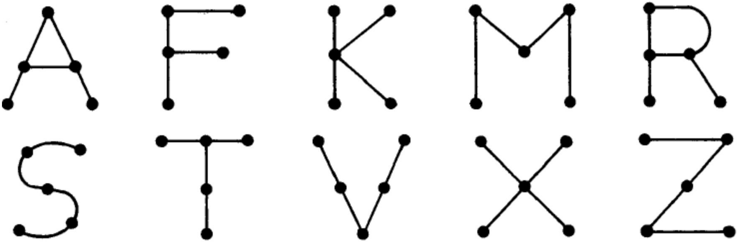
Subgrafos

Considere una gráfica G = G(V, E). Un gráfico H = H(V, E) se llama subgrafo de G si los vértices y aristas de H están contenidos en los vértices y aristas de G, es decir, si V V y E E. En particular: Un subgrafo

- H(V, E) de G(V, E) se llama subgrafo inducido por sus vértices V si su conjunto de aristas E contiene todas las aristas en G cuyos puntos finales pertenecen a vértices en H.
- Si v es un vértice en G, entonces G − v es el subgrafo de G obtenido eliminando v de G y eliminando todas las aristas en G que contienen v.
- Si e es una arista en G, entonces G − e es el subgrafo de G obtenido simplemente eliminando la arista e de G.

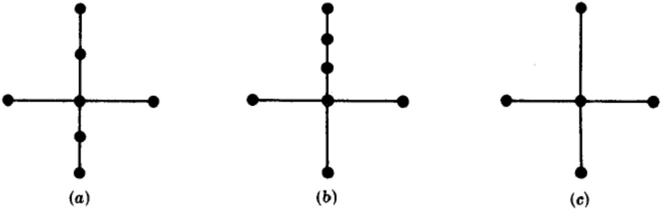
Gráficos isomórficos

Gráficas G(V, E) y G(V , E) se dice que son isomórficos si existe una correspondencia uno a uno f : V → V tal que {u, v} es una arista de G si y sólo si {f (u), f (v)} es una arista de G .



Gráficos homeomórficos

Dado cualquier gráfico G, podemos obtener un nuevo gráfico dividiendo una arista de G con vértices adicionales. Se dice que dos gráficos G y G son homeomórficos si se pueden obtener a partir del mismo gráfico o de gráficos isomórficos mediante este método.



Describir

Un patho en un multigrafo G consiste en una secuencia alterna de vértices y aristas de la forma:

$$v0, e1, v1, e2, v2, \ldots, en-1, vn-1, en, vn$$

donde cada arista ei contiene los vértices vi−1 y vi (que aparecen en los lados de ei en la secuencia). El número n de aristas se llama longitud del camino.

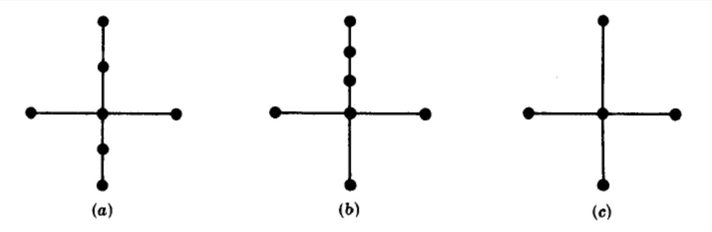
Cuando no hay ambigüedad, denotamos un camino por su secuencia de vértices (v0, v1, ..., vn). Se dice que el camino está cerrado si v0 = vn. De lo contrario, decimos que la ruta es de v0 a vn o entre v0 y vn, o conecta v0 a vn.

Un camino simple es un camino en el que todos los vértices son distintos. (Un camino en el que todas las aristas son distintas se llamará sendero). Un ciclo es un camino cerrado de longitud 3 o más en el que todos los vértices son distintos excepto v0 = vn. Un ciclo de longitud k se llama k-ciclo.

Ejemplo 1

Considere el gráfico G en el 23(a). Considere las siguientes secuencias:

$$\begin{aligned} \alpha &= (P4, P1, P2, P5, P1, P2, P3, P6), \quad \beta = (P4, P1, P5, P2, P6) \\ \gamma &= (P4, P1, P5, P2, P3, P5, P6), \qquad \delta = (P4, P1, P5, P3, P6), \end{aligned} \tag{1}$$



Cont. Ejemplo 1

La secuencia α es un camino de P4 a P6; pero no es un sendero ya que la arista {P1, P2} se usa dos veces. La secuencia β no es un camino ya que no hay arista {P2, P6}. La secuencia γ es un camino ya que no se utiliza ninguna arista dos veces; pero no es un camino sencillo ya que el vértice P5 se utiliza dos veces. La secuencia δ es un camino simple de P4 a P6; pero no es el camino más corto (con respecto a la longitud) de P4 a P6. El camino más corto de P4 a P6 es el camino simple (P4, P5, P6) que tiene una longitud de 2.

Al eliminar las aristas innecesarias, no es difícil ver que cualquier camino desde un vértice u a un vértice v puede reemplazarse por un camino simple de u a v. Enunciamos este resultado formalmente.

Teorema 2

Hay un camino desde un vértice u a un vértice v si y sólo si existe un camino simple de u a v.

Conectividad, componentes conectados

Un grafo G es conexo si hay un camino entre dos de sus vértices.

La gráfica en 23(a) es conexa, pero la gráfica en 23(b) no es conexa ya que, por ejemplo, no hay un camino entre los vértices D y E.

Supongamos que G es una gráfica. Un subgrafo conexo H de G se llama componente conexo de G si H no está contenido en ningún subgrafo conexo más grande de G. Es intuitivamente claro que cualquier gráfico G se puede dividir en sus componentes conexos. Por ejemplo, el gráfico G en 23 tiene tres componentes conectados, los subgrafos inducidos por los conjuntos de vértices {A, C, D}, {E, F} y {B}.

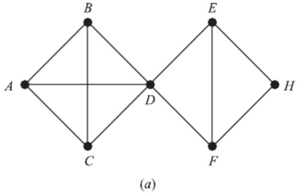
El vértice B en 23(b) se llama vértice aislado ya que B no pertenece a ninguna arista o, en otras palabras, grados(B) = 0. Por lo tanto, como se señaló, B mismo forma un componente conexo del gráfico.

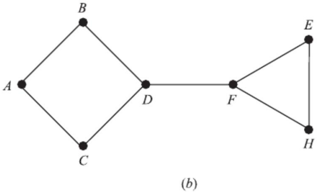
Observación

Hablando formalmente, asumiendo que cualquier vértice u está conectado consigo mismo, la relación "u está conectado con v" es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices de un gráfico G y las clases de equivalencia de la relación forman los componentes conectados de G.

Distancia y diámetro

Considere un gráfico conexo G. La distancia entre los vértices u y v en G, escrito d(u, v), es la longitud del camino más corto entre u y v. El diámetro de G, escrito diam(G), es la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera en G. Por ejemplo, en 28(a), d(A, F) = 2 y diam(G) = 3, mientras que en 28(b), d(A, F) = 3 y diam(G) = 4.





Puntos de corte y puentes

Sea G un gráfico conexo. Un vértice v en G se llama punto de corte si G − v es desconectado. (Recuerde que G − v es la gráfica obtenida de G eliminando v y todas las aristas que contienen v.) Una arista e de G se llama puente si G − e está desconectada. (Recuerde que G − e es la gráfica obtenida de G simplemente eliminando la arista e). En 28(a), el vértice D es un punto de corte y no hay puentes. En 28(b), la arista = {D, F} es un puente. (Sus puntos finales D y F son necesariamente puntos de corte).

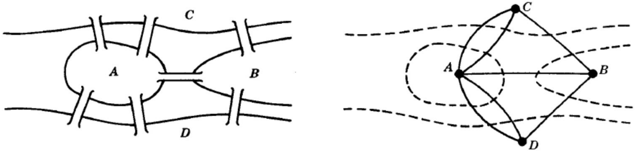
Describir

La ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental, del siglo XVIII, incluía dos islas y siete puentes, como se muestra en la figura 31(a).

Pregunta

Comenzando en cualquier lugar y terminando en cualquier lugar, ¿puede una persona caminar por la ciudad cruzando los siete puentes pero sin cruzar ningún puente dos veces?

El matemático L. Euler demostró en 1736 que tal caminata es imposible. Reemplazó las islas y los dos lados del río por puntos y los puentes por curvas, obteniendo la Fig. 31(b).



(a) Königsberg in 1736

(b) Euler's graphical representation

Observe que la figura 31(b) es un multigrafo. Se dice que un multigrafo es transitable si "puede dibujarse sin interrupciones en la curva y sin repetir ninguna arista", es decir, si hay un camino que incluye todos los vértices y utiliza cada arista exactamente una vez. Dicho camino debe ser un sendero (ya que ningún borde se utiliza dos veces) y se denominará sendero transitable. Claramente, un multigrafo transitable debe ser finito y conexo.

.

Un multigrafo con más de dos vértices impares no puede ser transitable.
Observe que el multigrafo correspondiente al problema del puente de Königsberg tiene cuatro vértices impares. Por lo tanto, no se puede caminar por Königsberg de manera que cada puente se cruce exactamente una vez.

Gráficos eulerianos

Un grafo G se llama grafo euleriano si existe un camino transitable cerrado, llamado camino euleriano.

Teorema 3 (Euler)

Un grafo conexo finito es euleriano si y sólo si cada vértice tiene grado par.

Corolario

Cualquier gráfico finito conectado con dos vértices impares es transitable. Un sendero transitable puede comenzar en cualquier vértice impar y terminar en el otro vértice impar.

Gráficos hamiltonianos

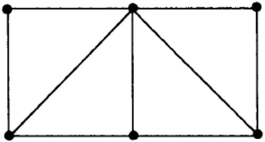
Un circuito hamiltoniano en un gráfico G, que lleva el nombre del matemático irlandés del siglo XIX William Hamilton (1803-1865), es un camino cerrado que visita cada vértice de G exactamente una vez. (Un camino tan cerrado debe ser un ciclo.) Si G admite un circuito hamiltoniano, entonces G se llama gráfico hamiltoniano.

Nota

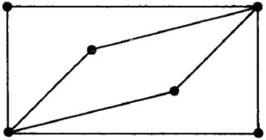
Tenga en cuenta que un circuito euleriano atraviesa cada arista exactamente una vez, pero puede repetir vértices, mientras que un circuito hamiltoniano visita cada vértice exactamente una vez pero puede repetir aristas.

Gráficos hamiltonianos y eulerianos

La Figura 35 da un ejemplo de una gráfica que es hamiltoniana pero no Euleriano y viceversa.



(*a*) Hamiltonian and non-Eulerian



(*b*) Eulerian and non-Hamiltonian

Aunque está claro que sólo las gráficas conexas pueden ser hamiltonianas, no existe un criterio simple para decirnos si una gráfica es hamiltoniana o no como lo hay para las gráficas eulerianas. Tenemos la siguiente condición suficiente que se debe a GA Dirac.

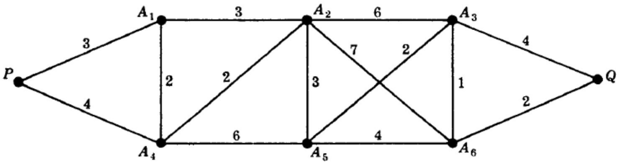
Teorema 5

Sea G un gráfico conexo con n vértices. Entonces G es hamiltoniano si n ≥ 3 y n ≤ grados(v) para cada vértice v G.

Describir

Un gráfico G se llama gráfico etiquetado si a sus aristas y/o vértices se les asignan datos de un tipo u otro. En particular, a G se le llama gráfico ponderado si a cada borde e de G se le asigna un número no negativo w(e) llamado peso o longitud de v.

El peso (o longitud) de un camino en dicho gráfico ponderado G se define como la suma de los pesos de los bordes en el camino. Un problema importante en la teoría de grafos es encontrar el camino más corto, es decir, un camino de peso (longitud) mínimo, entre dos vértices dados.



La longitud del camino más corto entre P y Q en la Fig. 39 es 14; uno tal camino es

$$(P, A1, A2, A5, A3, A6, Q)$$

Describir

Gráficos completos

Se dice que un grafo G es completo si cada vértice de G está conectado a cada dos vértices en G. Por lo tanto, un gráfico completo G debe ser conexo. El gráfico completo con n vértices se denota por Kn. La figura 41 muestra los gráficos K1 a K6.

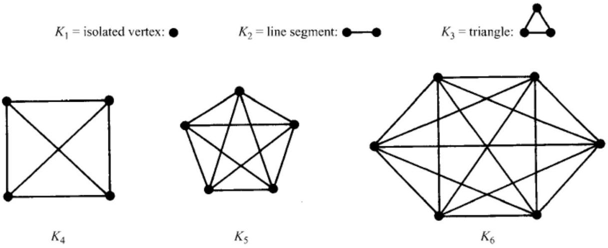


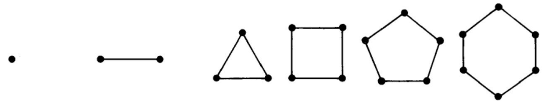
Fig. 8-13

Gráficos regulares

Un gráfico G es regular de grado k o k-regular si cada vértice tiene grado k. En otras palabras, una gráfica es regular si todos los vértices tienen el mismo grado.

Gráficas regulares 0, 1,

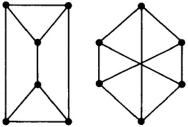
2 Las gráficas regulares conectadas de grados 0, 1 o 2 se describen fácilmente. El gráfico 0-regular conectado es el gráfico trivial con un vértice y sin aristas. El gráfico 1-regular conectado es el gráfico con dos vértices y un borde que los conecta. El gráfico 2-regular conectado con n vértices es el gráfico que consta de un solo n-ciclo. Ver figura 42.



(i) 0-regular (ii) 1-regular (iii) 2-regular

Las gráficas de 3 regulares deben tener un número par de vértices ya que la suma de los grados de los vértices es un número par (Teorema 1).

La Figura 43 muestra dos gráficos de 3 regulares conectados con seis vértices.



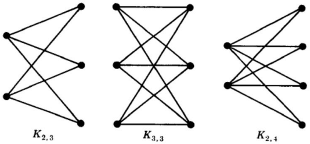
3-regular

3-regular

Los gráficos regulares pueden ser bastante complicados. Por ejemplo, hay diecinueve gráficos de 3 regulares con diez vértices. Observamos que la gráfica completa con n vértices Kn es regular de grado n − 1.

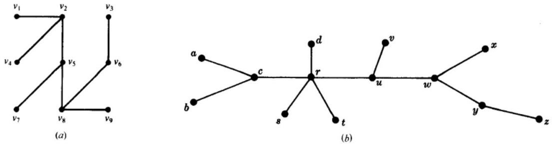
Gráficos bipartitos

Se dice que un grafo G es bipartito si sus vértices V pueden dividirse en dos subconjuntos M y N de manera que cada arista de G conecte un vértice de M con un vértice de N. Por grafo bipartito completo queremos decir que cada vértice de M está conectado a cada vértice de N; este gráfico se denota por Km,n donde m es el número de vértices en M y n es el número de vértices en N y, para estandarización, asumiremos m ≤ n. La Figura 44 muestra las gráficas K2,3,K3,3 y K2,4. Claramente la gráfica Km,n tiene mn aristas.



Describir

Un gráfico T se llama árbol si T es conexo y T no tiene ciclos.
En la Fig. 46 se muestran ejemplos de árboles. Un bosque G es un gráfico sin ciclos; por tanto, los componentes conectados de un bosque G son árboles. Un gráfico sin ciclos se dice que no tiene ciclos. El árbol que consta de un solo
El vértice sin aristas se llama árbol degenerado.



Considere un árbol T. Claramente, sólo hay un camino simple entre dos vértices de T; de lo contrario, los dos caminos formarían un ciclo.

Además: Supongamos que no hay arista {u, v} en T y sumamos la arista e = {u, v} a T. Entonces el camino simple de u a v en T y e formará un ciclo; por tanto, T ya no es un árbol. Por

otro lado, supongamos que hay una arista e = {u, v} en T, y eliminamos e de T. Entonces T ya no es conexo (dado que no puede haber un camino de u a v); por tanto, T ya no es un árbol.

El siguiente teorema se aplica cuando nuestras gráficas son finitas.

Teorema 6

Sea G un gráfico con n > 1 vértices. Entonces los siguientes son equivalentes:

(i) G es un árbol.

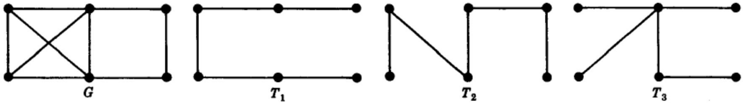
(ii) G no tiene ciclos y tiene n − 1 aristas. (iii)G es

conexo y tiene n − 1 aristas.

Este teorema también nos dice que un árbol finito T con n vértices debe tener n − 1 aristas.

Árboles de expansión

Un subgrafo T de un gráfico conexo G se llama árbol de expansión de G si T es un árbol y T incluye todos los vértices de G. La Figura 49 muestra un gráfico conectado G y árboles generadores T1, T2 y T3 de G.



Supongamos que G es un gráfico ponderado conectado. Es decir, cada arista de G es Se le asigna un número no negativo llamado peso del borde. entonces cualquier Al árbol de expansión T de G se le asigna un peso total obtenido sumando los pesos de los bordes en T. Un árbol de expansión mínimo de G es un árbol de expansión árbol cuyo peso total sea el menor posible.

Algoritmos de árbol de expansión mínima

Algoritmo 1

Requerir: Un gráfico ponderado conectado G con n vértices

1: Organizar los bordes de G en orden de pesos decrecientes

2: Elimina cada arista que no desconecta el gráfico hasta que queden $n - 1$ aristas

Algoritmo 2

Requiere: Un gráfico ponderado conectado G con n vértices

1: Organizar los bordes de G en el orden de pesos crecientes

2: Comenzar solo con los vértices de G. Agregar cada borde que no dé como resultado un

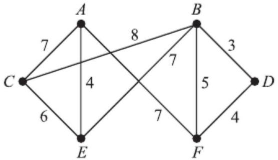
Nota

El peso de un árbol de expansión mínimo es único, pero el árbol de expansión mínimo en sí no lo es. Pueden aparecer diferentes árboles de expansión mínima cuando dos o más aristas tienen el mismo peso. En tal caso, la disposición de los bordes en el Paso 1 de los Algoritmos 2 o 3 no es única y, por lo tanto, puede dar como resultado diferentes árboles de expansión mínima.

Ejemplo de árbol de expansión mínima

Encuentre un árbol de expansión mínimo del gráfico ponderado Q en la figura 52(a).

Tenga en cuenta que Q tiene seis vértices, por lo que un árbol de expansión mínimo tendrá cinco bordes.



Usando el algoritmo 1

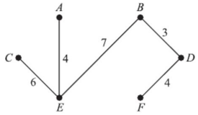
Primero ordenamos las aristas por pesos decrecientes, y luego sucesivamente elimine los bordes sin desconectar Q hasta que queden cinco bordes. Esto produce los siguientes datos:

Bordes BC AF AC BE CE BF AE DF BD
Peso 8 7 6 5 7 7 4 4 3 (2)
Eliminar Sí Sí Sí No No Sí

Por lo tanto, el árbol de expansión mínimo de Q que se obtiene contiene el bordes

$$BE, CE, AE, DF, BD \qquad (3)$$

El árbol de expansión tiene un peso 24 y se muestra en la Fig. 53.



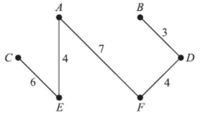
Usando el algoritmo 2

Primero ordenamos las aristas aumentando los pesos, y luego sucesivamente agregue bordes sin formar ningún ciclo hasta que se incluyan cinco bordes. Este arroja los siguientes datos:

Bordes BD AE DF BF CE AC AF BE BC
Peso 3 4 4 5 6 8 7 7 7 (4)
Agregar Sí Sí Sí No Sí No Sí

Por lo tanto, el árbol de expansión mínimo de Q que se obtiene contiene el bordes

$$BD, AE, DF, CE, AF \quad (5)$$



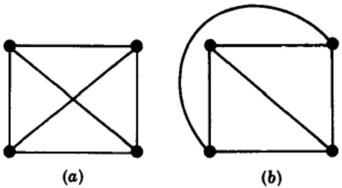
Observación

Los algoritmos anteriores se ejecutan fácilmente cuando el gráfico G es relativamente pequeño como en la Fig. 52. Supongamos que G tiene docenas de vértices y cientos de aristas que, digamos, están dadas por una lista de pares de vértices. Entonces incluso decidir si G es conexo no es obvio; puede requerir algún tipo del algoritmo gráfico de búsqueda en profundidad (DFS) o búsqueda en amplitud (BFS).

Describir

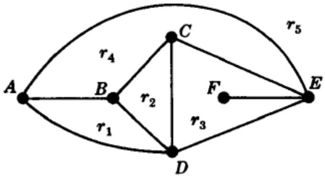
Un gráfico o multigrafo que se puede dibujar en el plano de modo que sus aristas
No se cruza se dice que es plano.

Aunque normalmente se muestra el gráfico completo con cuatro vértices K4
con bordes cruzados como en la Fig. 57(a), también se puede dibujar con
bordes no cruzados como en la Fig. 57(b); por tanto, K4 es plano. Forma de gráficos de árbol
una clase importante de gráficos planos.



Mapas, Regiones

Una representación plana particular de un multigrafo plano finito se llama mapa. Decimos que el mapa es conexo si el multigrafo subyacente es conectado. Un mapa dado divide el avión en varias regiones. Para Por ejemplo, el mapa de la Fig. 58 con seis vértices y nueve aristas divide el plano en cinco regiones.



Observe que el borde de cada región de un mapa consta de aristas.

A veces los bordes formarán un ciclo, pero otras no. Por ejemplo, en la Fig. 58 los límites de todas las regiones son ciclos excepto r3 .

Sin embargo, si nos movemos en sentido antihorario alrededor de r3 comenzando, digamos, en el vértice C, entonces obtenemos el camino cerrado

$$(C, D, E, F, E, C)$$

el borde {E, F} ocurre dos veces. Por grado de una región r, escrito grados(r), nos referimos a la longitud del ciclo o recorrido cerrado que bordea r.

Observamos que cada borde limita con dos regiones o está contenido en una región y ocurrirá dos veces en cualquier recorrido a lo largo del borde de la región.

Por tanto, tenemos un teorema para regiones que es análogo al Teorema 1 para vértices.

Teorema 7

La suma de los grados de las regiones de un mapa es igual al doble del número de aristas.

Los grados de las regiones de la Fig. 58 son:

$$\text{grados}(r1) = 3, \text{grados}(r2) = 3, \text{grados}(r3) = 5, \text{grados}(r4) = 4, \text{grados}(r5) = 3 \quad (6)$$

La suma de los grados es 18, que, como se esperaba, es el doble del número de aristas.

Fórmula de Euler

Euler dio una fórmula que conecta el número V de vértices, el número E de aristas y el número R de regiones de cualquier mapa conectado.

Específicamente:

Teorema 8 (Euler)

$$V - mi + R = 2. \tag{7}$$

Observe que, en la Fig. 58, V = 6, E = 9 y R = 5; y, como era de esperar por La fórmula de Euler.

$$V - mi + R = 6 - 9 + 5 = 2 \tag{8}$$

Sea G un multigrafo plano conexo con tres o más vértices, por lo que G no es ni K1 ni K2. Sea M una representación plana de G. No es difícil ver que (1) una región de M puede tener grado 1 sólo si su borde es un bucle, y (2) una región de M puede tener grado 2 sólo si su El borde consta de dos bordes múltiples. En consecuencia, si G es un grafo, no un multigrafo, entonces cada región de M debe tener grado 3 o más. Este comentario junto con la fórmula de Euler se utiliza para demostrar el siguiente resultado en gráficas planas.

Teorema 9

Sea G un gráfico plano conexo con p vértices y q aristas, donde $p \geq 3$. Entonces $q \geq 3p - 6$.

Tenga en cuenta que el teorema no es cierto para K1 donde $p = 1$ y $q = 0$, y no es cierto para K2 donde $p = 2$ y $q - 1$.

Prueba

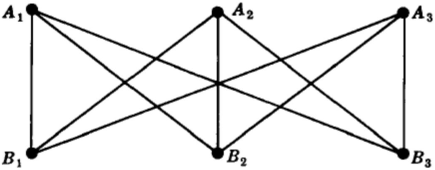
Sea r el número de regiones en una representación plana de G. Según la fórmula de Euler, $p - q + r = 2$ Ahora la suma de los grados de las regiones es igual a 2q según el teorema 7. Pero cada región tiene grado 3 o más; por tanto $2q \geq 3r$. Por lo tanto $r \geq$ Sustituyendo esto en la fórmula de $\frac{2q}{3}$. Euler se obtiene

$$2 = p - q + r \leq p - q + \text{o } 2 \leq p - 3\,\frac{2q}{3} \qquad \frac{q}{} \tag{9}$$

Multiplicar la desigualdad por 3 da $6 \leq 3p - q$, lo que nos da nuestro resultado.

Gráficos no planos, teorema de Kuratowski

Consideremos primero el gráfico de utilidad; es decir, se van a conectar tres casas A1, A2, A3 a las tomas de agua, gas y electricidad, B1, B2, B3, como en la Fig. 64. Observa que este es el gráfico K3,3 y tiene p = 6 vértices y q = 9 aristas. Supongamos que la gráfica es plana. Según la fórmula de Euler, una representación plana tiene r = 5 regiones. Observe que no hay tres vértices conectados entre sí; por lo tanto, el grado de cada región debe ser 4 o más y, por tanto, la suma de los grados de las regiones debe ser 20 o más. Según el teorema 7, la gráfica debe tener 10 o más aristas. Esto contradice el hecho de que la gráfica tiene q = 9 aristas. Por tanto, el gráfico de utilidad K3,3 no es plano.



Consideremos a continuación el gráfico estelar de la Fig. ??. Este es el gráfico completo K5 en p = 5 vértices y tiene q = 10 aristas. Si la gráfica es plana, entonces por Teorema 9.

$$10 = q \leq 3p - 6 = 15 - 6 = 9 \tag{10}$$

lo cual es imposible. Por tanto, K5 no es plano.

Teorema 10 (Kuratowski)

Un grafo es no plano si y sólo si contiene un subgrafo homeomorfo.
a K3,3 o K5.

Describir

Considere un gráfico G. Una coloración de vértices, o simplemente una coloración de G, es una asignación de colores a los vértices de G de modo que los vértices adyacentes tengan colores diferentes. Decimos que G es n-coloreable si existe una coloración de G que usa n colores. El número mínimo de colores necesarios para pintar G se llama número cromático de G y se denota por $\chi(G)$.

El algoritmo de Welch y Powell para colorear un gráfico G. Destacamos que este algoritmo no siempre produce una coloración mínima de G.

Algoritmo 3 Algoritmo de Welch-Powell

Requerir: Un gráfico G

1: Ordena los vértices de G según grados decrecientes.

2: Asigne el primer color C1 al primer vértice y luego, en orden secuencial, asigne C1 a cada vértice que no sea adyacente a un vértice anterior al que se le asignó C1.

3: Repita el Paso 2 con un segundo color C2 y la subsecuencia de vértices sin color.

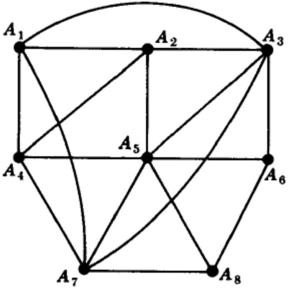
4: Repita el paso 3 con un tercer color C3, luego un cuarto color C4, 5: y así sucesivamente hasta que todos los vértices estén coloreados.

Salir

Ejemplo

Considere el gráfico G en la figura 68. Usamos el algoritmo de Welch-Powell para obtener una coloración de G. Ordenar los vértices según decreciente grados produce la siguiente secuencia:

A5, A3, A7, A1, A2 , A4, A6, A8



Cont. Ejemplo

El primer color se asigna a los vértices A5 y A1. El segundo color se asigna a los vértices A3, A4 y A8. El tercer color se asigna a los vértices A7, A2 y A6. A todos los vértices se les ha asignado un color, por lo que G tiene 3 colores. Observe que G no es bicolor ya que a los vértices A1, A2 y A3, que están conectados entre sí, se les deben asignar colores diferentes. En consecuencia, $\chi(G) = 3$.

Ejemplo 2

Considere el gráfico completo Kn con n vértices. Dado que cada vértice es adyacente a cualquier otro vértice, Kn requiere n colores en cualquier coloración. De este modo $\chi(K_n) = n$.

Teorema 11

Los siguientes son equivalentes para un gráfico

G: (i) G tiene 2

colores. (ii) G es

bipartito. (iii) Cada ciclo de G tiene una longitud par

No hay límite en el número de colores que pueden ser necesarios para colorear un gráfico arbitrario ya que, por ejemplo, el gráfico completo Kn requiere n colores. Sin embargo, si nos limitamos a gráficos planos, independientemente del número de vértices, cinco colores son suficientes.

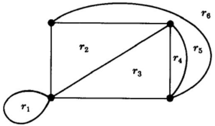
Teorema 12

Cualquier gráfico plano se puede colorear en 5 colores.

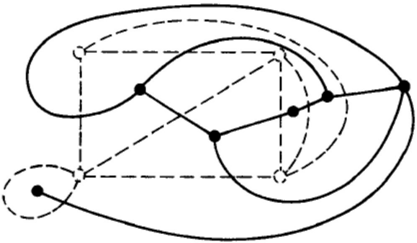
Aplicaciones duales y el teorema de los cuatro colores

Considere un mapa M, digamos el mapa M en la Fig. 73. En otras palabras, M es una representación plana de un multigrafo plano. Se dice que dos regiones de M son adyacentes si tienen una arista en común. Así, las regiones r2 y r5 de la figura 73 son adyacentes, pero las regiones r3 y r5 no lo son. Por coloración de M nos referimos a una asignación de un color a cada región de M de modo que las regiones adyacentes tengan colores diferentes. Un mapa M es n-coloreable si existe una coloración de M que usa n colores. Por lo tanto, el mapa M en la Fig. 73 se puede colorear en 3 ya que a las regiones se les pueden asignar los siguientes colores:

r1 = rojo,r2 = blanco,r3 = rojo,r4 = blanco,r5 = rojo,r6 = azul



Considere un mapa M. En cada región de M elegimos un punto, y si dos regiones tienen un borde en común entonces conectamos los puntos correspondientes con una curva que pasa por el borde común. Estas curvas se pueden dibujar de manera que no se crucen. Así obtenemos un nuevo mapa M llamado dual de , M, tal que cada vértice de M corresponde exactamente a una región de M. La Figura 74 muestra el dual del mapa de la Fig. 73. Se puede probar que cada región de M contendrá exactamente un vértice de M y que cada arista de M cortará exactamente una arista de M y viceversa. Por tanto M será el dual del mapa M .



(b)

Observe que cualquier coloración de las regiones de un mapa M corresponderá a una coloración de los vértices del mapa dual M . Por lo tanto, M es n-coloreable si y solo si el gráfico plano del mapa dual M es un vértice n-coloreable. Por tanto, el teorema anterior se puede reformular de la siguiente manera:

Teorema de los cuatro colores (Appel y Haken)

Si las regiones de cualquier mapa M están coloreadas de modo que las regiones adyacentes tengan colores diferentes, entonces no se requieren más de cuatro colores.

Describir

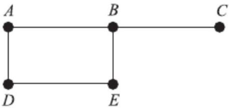
Hay dos formas estándar de mantener un gráfico G en la memoria de un ordenador. Una forma, llamada representación secuencial de G, es mediante medio de su matriz de adyacencia A. La otra forma, llamada matriz vinculada La representación o estructura de adyacencia de G, utiliza listas enlazadas de vecinos.

Matriz de adyacencia

Supongamos que G es un gráfico con m vértices y supongamos que los vértices tienen ordenado, digamos, v1, v2, . . . , vm. Entonces la matriz de adyacencia A = [aij] de la gráfica G es la matriz m × m definida por

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases} \tag{11}$$

La Figura 79 contiene la matriz de adyacencia del gráfico G en la Fig. 79 donde los vértices están ordenados A, B, C, D, E. Observe que cada arista {vi , vj} de G se representa dos veces, por aij = 1 y aji = 1. Así, en particular, la matriz de adyacencia es simétrica.



(a)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

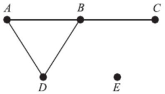
(b)

Hay variaciones de la representación anterior. Si G es un multigrafo, entonces normalmente aij denota el número de aristas {vi , vj}. Además, si G es un gráfico ponderado, entonces podemos dejar que aij denote el peso de la arista {vi , vj}.

Representación vinculada

Considere la gráfica G en la figura 80(a). Observe que G puede definirse de manera equivalente mediante la tabla de la figura 80(b), que muestra cada vértice en G seguido de su lista de adyacencia, es decir, su lista de vértices adyacentes (vecinos). Aquí el símbolo denota una lista vacía. Esta tabla también puede presentarse en forma compacta.

GRAMO = [A: B, D; B: A, C, D; C: B; D: A, B; mi:]



(a)

Vertex	Adjacency list
A	B, D
B	A, C, D
C	B
D	A, B
E	$\varnothing$

(b)

donde dos puntos “:” separan un vértice de su lista de vecinos y un punto y coma “;” separa las diferentes listas.

La Figura 81 muestra cómo el gráfico G de la Fig. 80(a) puede aparecer en la memoria. Aquí los vértices de G se mantienen en la memoria mediante una lista vinculada que utiliza la variable INICIO para apuntar al primer vértice. (Alternativamente, se podría usar una matriz lineal para la lista de vértices, y luego no sería necesario NEXT-V). Tenga en cuenta que el campo EDGE no es necesario aquí ya que los bordes no tienen nombre. La Figura 81 también muestra, con las flechas, la lista de adyacencia [D, C, A] del vértice B.

Vertex file

START 3

	1	2	3	4	5	6	7	8
VERTEX	*C*		*A*		*E*	*B*		*D*
NEXT-V	8		6		0	1		5
PTR	4		5		0	7		8

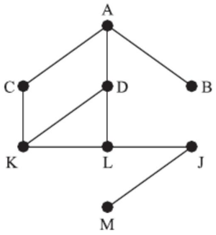
Edge file

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ADJ	2 (*B*)	1 (*A*)	3 (*C*)	2 (*B*)	4 (*D*)	1 (*A*)	4 (*D*)	2 (*B*)		
NEXT	0	0	2	0	1	0	3	6		

Describir

Esta sección analiza dos algoritmos gráficos importantes. Uno se llama búsqueda en profundidad (DFS) y la otra se llama búsqueda en amplitud (BFS).

Por ejemplo, nuestro gráfico de prueba G con su estructura de adyacencia aparece en Fig. 83 donde asumimos que los vértices están ordenados alfabéticamente.



(a)

Vertex	Adjacency list
A	B, C, D
B	A
C	A, K
D	A, K, L
J	L, M
K	C, D, L
L	D, J, K
M	J

(b)

Búsqueda de Depath-First

Algoritmo 4 Búsqueda en profundidad

Requerir: Un gráfico G que comience con un vértice inicial A.

1: inicializa todos los vértices al estado listo (estado = 1)

2: Empuje el vértice inicial A en STACK y cambie el estado de A al estado de espera (Estado = 2)

3: Repita los pasos 4 y 5 hasta que la PILA esté vacía

4: Haga estallar el vértice superior N de STACK. Procese N y establezca Estado (N) = 3, el estado del proceso.

5: examine cada vecino J de N.

6: si Estado (J) = 1 entonces

7: empuje J a STACK y reinicie Estado (J) = 2 (estado de espera).

8: si no, si Estado (J) = 2 , entonces

borre el J anterior del STACK y empuje el J actual al STACK.

9:10: más

11: ignora el vértice J.

12: terminar si

13: Salir

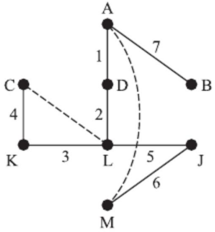
Ejemplo

Si aplicamos el algoritmo DFS al Gráfico G de la Fig. 83. Los vértices serán procesados en el siguiente orden:

A, D, L, K, C, J, M, B

STACK	Vertex
A	A
D, C, B	D
L, K, C, B	L
K, J, ~~K~~, C, B	K
C, J, ~~C~~, B	C
J, B	J
M, B	M
B	B
∅	

(*a*)



(*b*)

Búsqueda de aliento primero

Algoritmo 5 Búsqueda de respiración primero

Requerir: Un gráfico G que comience con un vértice inicial A.

1: inicializa todos los vértices al estado listo (estado = 1)
2: Coloque el vértice inicial A en COLA y cambie el estado de A al estado de espera (Estado = 2)
3: Repita los pasos 4 y 5 hasta que la COLA esté vacía
4: Retire el vértice frontal N de COLA. Procese N y establezca Estado (N) = 3, el estado procesado.
5: examine cada vecino J de N.
6: si Estado (J) = 1 entonces
7: Agregue J al final de la COLA y restablezca el Estado (J) = 2
8: de lo contrario, si Estado (J) = 2 o Estado (J) = 3, entonces
Ignora el vértice J
9:10: terminar si
11: Salir

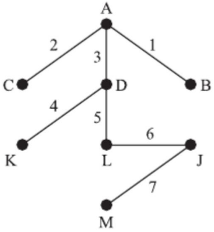
Ejemplo

Si aplicamos el algoritmo BFS al Gráfico G de la Fig. 83. Los vértices serán procesados en el siguiente orden:

A, B, C, D, K, L, J, M

QUEUE	Vertex
A	A
D, C, B	B
D, C	C
D	D
L, K	K
L	L
J	J
M	M
∅	

(*a*)



(*b*)

Describir

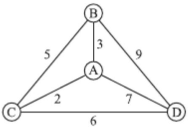
El problema del "vendedor ambulante" se refiere a encontrar un circuito hamiltoniano para G de peso mínimo.

Teorema 13

El grafo completo Kn con $n \geq 3$ vértices tiene $H = (n - 1)!/2$ Circuitos hamiltonianos (donde no distinguimos entre un circuito y su reverso).

Considere el gráfico ponderado completo G en la figura 90(a). Tiene cuatro vértices, A, B, C, D. Según el teorema 13, tiene H = 3!/2 = 3 circuitos hamiltonianos. Suponiendo que los circuitos comienzan en el vértice A, los siguientes son los tres circuitos y sus pesos:

$$
\begin{aligned}
|ABCDA| &= 3 + 5 + 6 + 7 = 21 \\
|ACDBA| &= 2 + 6 + 9 + 3 = 20 \\
|ACBDA| &= 2 + 5 + 9 + 7 = 23
\end{aligned}
\tag{12}
$$



(a)

	P	Q	R	S	T
P		18	22	15	20
Q	18		11	12	22
R	22	11		16	10
S	15	12	16		13
T	20	22	10	13	

(b)

Nota

Para un gráfico con muchos vértices, esto puede resultar poco práctico o incluso imposible. Por ejemplo, un gráfico completo con 15 vértices tiene más de 40 millones de circuitos hamiltonianos